К НОВОЙ ОФИЦИАЛЬНОЙ ДЕМОНСТРАЦИОННОЙ ВЕРСИИ ЕГЭ

СОЗДАНО РАЗРАБОТЧИКАМИ ЕГЭ

Под редакцией И. В. Ященко

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

ЕГЭ 2017

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

Под редакцией И. В. Ященко

МАТЕМАТИКА
ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

10 вариантов заданий

Ответы и решения

Критерии оценок

Бланки ответов

Издательство
«ЭКЗАМЕН»

МОСКВА
2017

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
Е33

Е33 **ЕГЭ** 2017. Математика. Профильный уровень. Типовые тестовые задания / И. В. Ященко, М. А. Волчкевич, И. Р. Высоцкий, Р. К. Гордин, П. В. Семёнов, О. Н. Косухин, Д. А. Фёдоровых, А. И. Суздальцев, А. Р. Рязановский, И. Н. Сергеев, В. А. Смирнов, А. В. Хачатурян, С. А. Шестаков, Д. Э. Шноль; **под ред. И. В. Ященко**. — М. : Издательство «Экзамен», 2017. — 55, [1] с. (Серия «ЕГЭ. ОФЦ. Типовые тестовые задания»)

ISBN 978-5-377-11100-9

Типовые тестовые задания по математике содержат 10 вариантов комплектов заданий, составленных с учётом всех особенностей и требований Единого государственного экзамена по математике профильного уровня в 2017 году. Назначение пособия — предоставить читателям информацию о структуре и содержании контрольных измерительных материалов 2017 г. по математике профильного уровня, степени трудности заданий.

В состав авторского коллектива входят специалисты, имеющие большой опыт работы в школе и вузе и принимающие участие в разработке тестовых заданий для ЕГЭ.

В сборнике даны ответы на все варианты тестов и приводятся решения всех заданий одного из вариантов. Кроме того, приведены образцы бланков, используемых на ЕГЭ для записи ответов и решений.

Пособие может быть использовано учителями для подготовки учащихся к экзамену по математике в форме ЕГЭ, а также старшеклассниками и выпускниками — для самоподготовки и самоконтроля.

Приказом № 699 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Подписано в печать 09.08.2016. Формат 60×90/8.
Гарнитура «Школьная». Бумага газетная. Уч.-изд. л. 2,63.
Усл. печ. л. 7. Тираж 10 000 экз. Заказ 2412/16.

ISBN 978-5-377-11100-9

СОДЕРЖАНИЕ

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом и 7 заданий с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Единый государственный экзамен

Бланк ответов № 1

Заполнять гелевой или капиллярной ручкой **ЧЕРНЫМИ** чернилами **ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ** по следующим образцам:

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z ,

Регион | Код предмета | Название предмета

С правилами экзамена ознакомлен и согласен
Совпадение номеров вариантов в задании и бланке регистрации подтверждаю
Подпись участника ЕГЭ строго внутри окошка

Номер варианта

ВНИМАНИЕ! ***Данный бланк использовать только совместно с двумя другими бланками из данного пакета***

Результаты выполнения заданий с ответом в краткой форме

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40

Единый государственный экзамен

Бланк ответов № 2

Регион	Код предмета	Название предмета	Номер варианта

Перепишите значения указанных выше полей из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ.
Отвечая на задания теста, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.
Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете.
Условия задания переписывать не нужно.

ВНИМАНИЕ! ***Данный бланк использовать только совместно с двумя другими бланками из данного пакета***

При недостатке места для ответа используйте оборотную сторону бланка

ВАРИАНТ 1

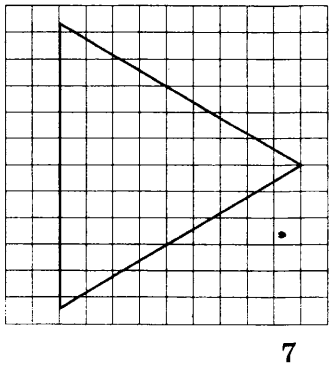
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Пакет молока стоит 21 рубль 30 копеек. Какое наибольшее количество пакетов молока можно купить на 500 рублей?

2. Первый посев семян петрушки рекомендуется проводить в апреле при дневной температуре воздуха не менее +6 °C. На рисунке показан прогноз дневной температуры воздуха на первые три недели апреля. Определите, в течение скольких дней за этот период можно производить посев петрушки.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равносторонний треугольник. Найдите радиус вписанной в него окружности.

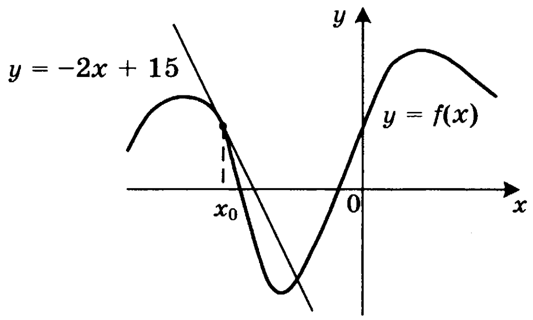


4. Перед началом первого тура чемпионата по шашкам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвуют 56 шашистов, среди которых 12 участников из России, в том числе Валерий Стремянкин. Найдите вероятность того, что в первом туре Валерий Стремянкин будет играть с каким-либо шашистом из России.

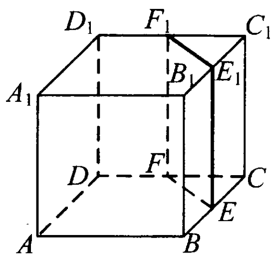
5. Найдите корень уравнения $5^{4-x} = 25$.

6. Отрезок AB является хордой окружности с центром O. Найдите угол между прямой AB и касательной к окружности, проходящей через точку A, если угол AOB равен 56°. Ответ дайте в градусах.

7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Касательная задана уравнением $y = -2x + 15$. Найдите значение производной функции $y = -\frac{1}{4}f(x) + 5$ в точке x_0.



8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E, F, E_1 и F_1 являются серединами рёбер BC, DC, B_1C_1 и D_1C_1 соответственно. Объём призмы, отсекаемой от куба плоскостью EFF_1, равен 14. Найдите объём куба.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $(558^2 - 23^2) : 581$.

10. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 4 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 2 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 22$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1{,}7 \ \frac{\text{с}}{\text{Ом} \cdot \text{Ф}}$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 27,2 секунды. Ответ дайте в кВ (киловольтах).

11. В сосуд, содержащий 7 литров 15-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 8 литров воды. Сколько процентов составит концентрация получившегося раствора?

11

12. Найдите наибольшее значение функции

$$y = (21 - x)e^{x - 20}$$

на отрезке [19; 21].

12

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. Решите уравнение

$$\frac{\left(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}\right)\log_{13}(2\sin^2 x)}{\log_{31}\left(\sqrt{2}\cos x\right)} = 0.$$

13

14. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 4. Точка L — середина ребра SC. Тангенс угла между прямыми BL и SA равен $\frac{2\sqrt{34}}{17}$.

а) Пусть O — центр основания пирамиды. Докажите, что прямые BO и LO перпендикулярны.

б) Найдите площадь поверхности пирамиды.

14

15. Решите неравенство $\frac{2x^2 - 10x + 6}{x - 5} \le x$.

15

16. Окружность с центром O вписана в угол, равный 60°. Окружность большего радиуса с центром O_1 также вписана в этот угол и проходит через точку O.

а) Докажите, что радиус второй окружности вдвое больше радиуса первой.

б) Найдите длину общей хорды этих окружностей, если известно, что радиус первой окружности равен $2\sqrt{3}$.

16

17

17. В двух областях есть по 90 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?

18

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\left|\dfrac{x^2 + x - 2a}{x + a} - 1\right| \le 2$ не имеет решений на интервале (1; 2).

19

19. Решите в целых числах уравнение $3^n + 8 = x^2$.

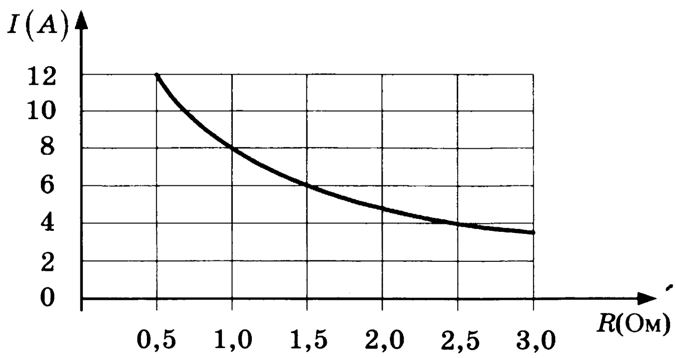
ВАРИАНТ 2

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

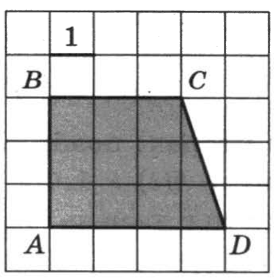
Часть 1

1. Для покраски потолка требуется 140 г краски на 1 м^2. Краска продаётся в банках по 3 кг. Какое наименьшее количество банок краски нужно купить для покраски потолка площадью 42 м^2?

2. Мощность отопителя в автомобиле регулируется дополнительным сопротивлением, которое можно менять, поворачивая рукоятку в салоне машины. При этом меняется сила тока в электрической цепи электродвигателя — чем меньше сопротивление, тем больше сила тока и тем быстрее вращается мотор отопителя. На рисунке показана зависимость силы тока от величины сопротивления. На оси абсцисс откладывается сопротивление (в Омах), на оси ординат — сила тока в Амперах. Ток в цепи электродвигателя уменьшился с 8 до 4 Ампер. На сколько Омов при этом увеличилось сопротивление цепи?



3. Найдите площадь трапеции $ABCD$, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 (см. рис.).

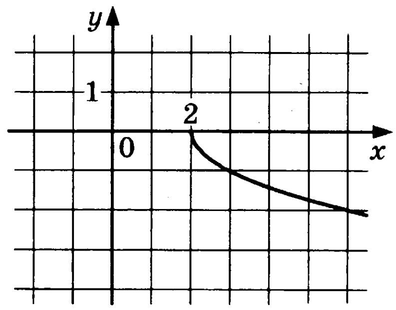


4. Конкурс исполнителей проводится в 3 дня. Всего заявлено 80 выступлений — по одному от каждой страны. В первый день запланировано 20 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление представителя России состоится в третий день конкурса?

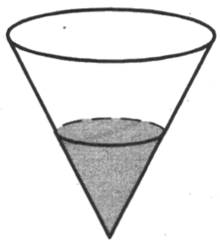
5. Решите уравнение $\log_{25}(2 - 3x) = 0{,}5$.

6. В треугольнике ABC углы A и B равны соответственно 45° и 67°. Найдите угол между биссектрисой и высотой, проведёнными из вершины C. Ответ дайте в градусах.

7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через точку $(-1;\ 1)$, касается этого графика в точке с абсциссой 3. Найдите $f'(3)$.



8. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объём жидкости равен 25 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Часть 2

9. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$.

10. Высоту над землей (в метрах) подброшенного вверх камня можно вычислять по формуле $h(t) = 1{,}4 + 14t - 5t^2$, где t — время в секундах. Сколько секунд камень будет находиться на высоте более 8 метров?

11. Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 46 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

11

12. Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 12x^2 + 15$.

12

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2\sin(\pi + x) \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -4\pi]$.

13

14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ стороны основания равны 5, а боковые рёбра равны 11.

а) Докажите, что прямые CA_1 и C_1D_1 перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины C, A_1 и F_1.

14

15. Решите неравенство $\log_{5-x} \dfrac{x+2}{(x-5)^4} \geq -4$.

15

16. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 3 и 2.

16

17. 31 декабря 2014 года Олег взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Олег переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 328 050 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 587 250 рублей, то за 2 года. Найдите a.

17

18

19

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$8x^6 + 4x^2 = (3x + 5a)^3 + 6x + 10a$$

не имеет корней.

19. В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше, чем 46, а вместе солдат меньше, чем 111. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, больше 8, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.
б) Можно ли построить роту указанным способом по 13 солдат в одном ряду?
в) Сколько в роте может быть солдат?

ВАРИАНТ 3

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

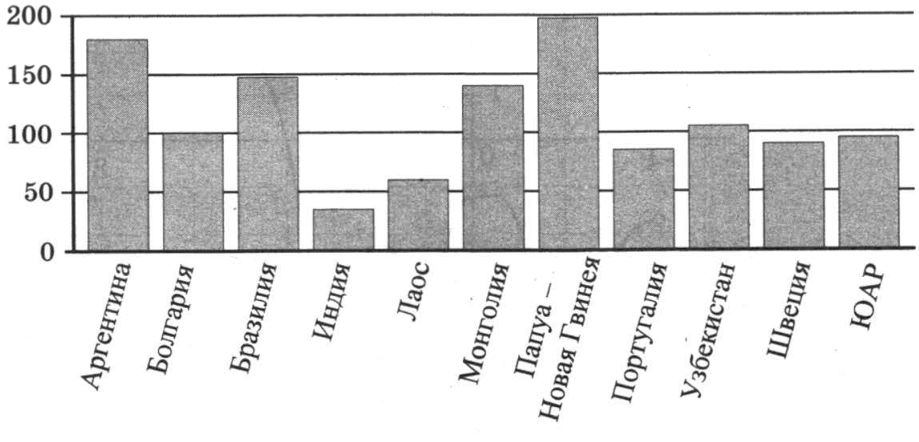
Часть 1

1. В доме, в котором живёт Женя, один подъезд. На каждом этаже по восемь квартир. Женя живёт в квартире 87. На каком этаже живёт Женя?

1

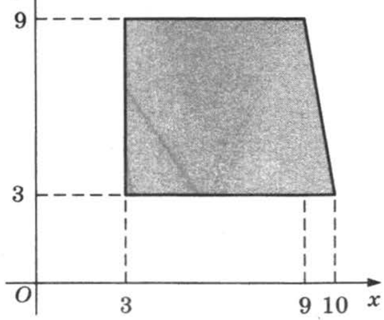
2. На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа — Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимал Узбекистан?

2



3. Найдите площадь прямоугольной трапеции, вершины которой имеют координаты (3; 3), (10; 3), (9; 9), (3; 9).

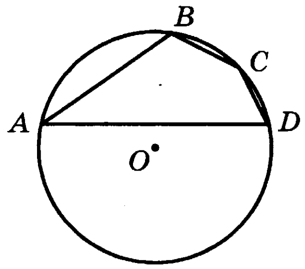
3



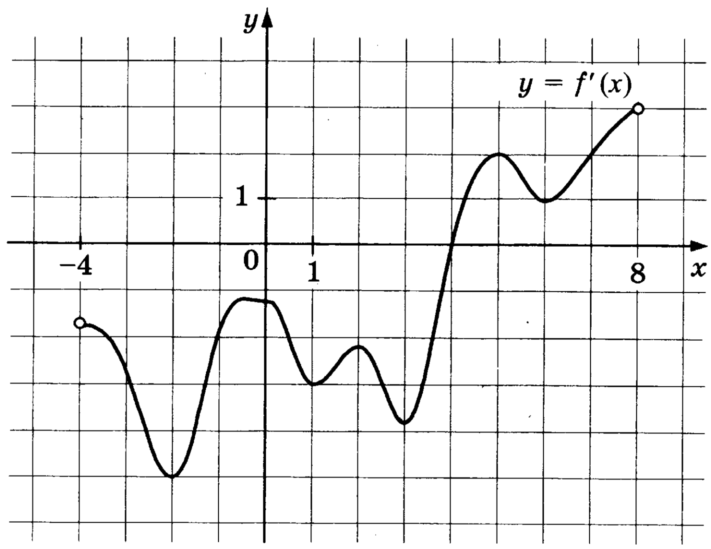
4. В сборнике билетов по истории всего 50 билетов, в 13 из них встречается вопрос о Великой Отечественной войне. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос о Великой Отечественной войне.

5. Найдите корень уравнения $\dfrac{1}{9x+2}=\dfrac{1}{8x-4}$.

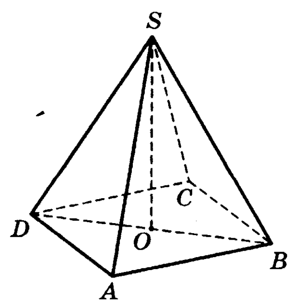
6. Угол A четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен $25°$. Найдите угол C четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график производной $y=f'(x)$ функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4;\ 8)$. В какой точке отрезка $[-3;\ 1]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



8. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SA=10$, $BD=16$. Найдите длину отрезка SO.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $-\dfrac{22}{\cos^2 34^\circ + \cos^2 124^\circ}$.

9

10. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $pV^{1,4} = \text{const}$, где p (атм) — давление в газе, V — объём газа в литрах. Изначально объём газа равен 256 л, а его давление равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде поднялось до 128 атмосфер? Ответ выразите в литрах.

10

11. Плиточник должен уложить 300 м^2 плитки. Если он будет укладывать на 5 м^2 в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 5 дней раньше, чем наметил. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

11

12. Найдите точку максимума функции $y = -\dfrac{x^2 + 49}{x}$.

12

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x + 6 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

13

14. Ребро SA пирамиды $SABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC.

а) Докажите, что высота пирамиды проведённая из точки A, делится плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC и SA, пополам.

б) Найдите расстояние от вершины A до этой плоскости, если $SA = \sqrt{5}$, $AB = AC = 5$, $BC = 2\sqrt{5}$.

14

15. Решите неравенство $\log^2_{|x+1|}(x+1)^4 + \log_2 (x+1)^2 \le 22$.

15

16

16. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC, причём $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O.

а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC.

б) Найдите отношение площади четырёхугольника AB_1OC_1 к площади треугольника ABC, если известно, что $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 4$.

17

17. Тимофей хочет взять в кредит 1,1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Тимофей взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 270 тысяч рублей?

18

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$64x^6 + 4x^2 = (3x + a)^3 + 3x + a$$

не имеет корней.

19

19. Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n - 2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 4$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из трёхзначных чисел?

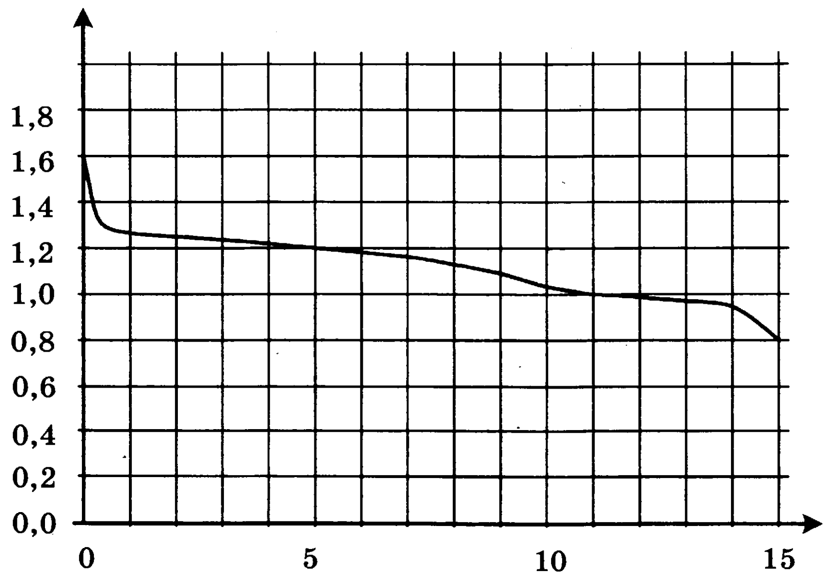
ВАРИАНТ 4

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

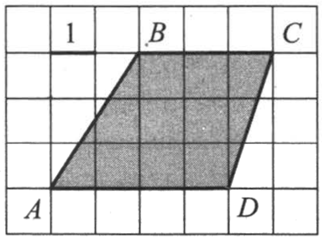
Часть 1

1. По тарифному плану «Просто как день» компания сотовой связи каждый вечер снимает со счёта абонента 18 рублей. Если на счету осталось меньше 18 рублей, то на следующее утро номер блокируют до пополнения счёта. Сегодня утром у Лизы на счету было 500 рублей. Сколько дней (включая сегодняшний) она сможет пользоваться телефоном, не пополняя счёт? 1

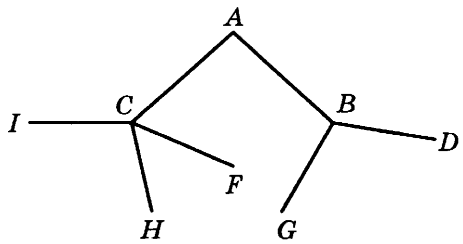
2. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается, и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, какое напряжение будет в цепи через 15 часов работы фонарика. Ответ дайте в вольтах. 2



3. Найдите площадь трапеции $ABCD$, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 (см. рис.).

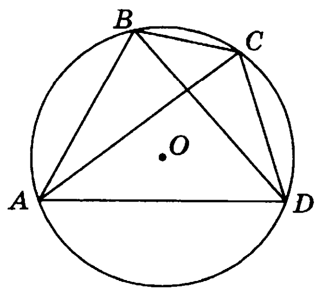


4. Павел Иванович совершает прогулку из точки A по дорожкам парка. На каждой развилке он наудачу выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Схема дорожек показана на рисунке. Найдите вероятность того, что Павел Иванович попадёт в точку G.

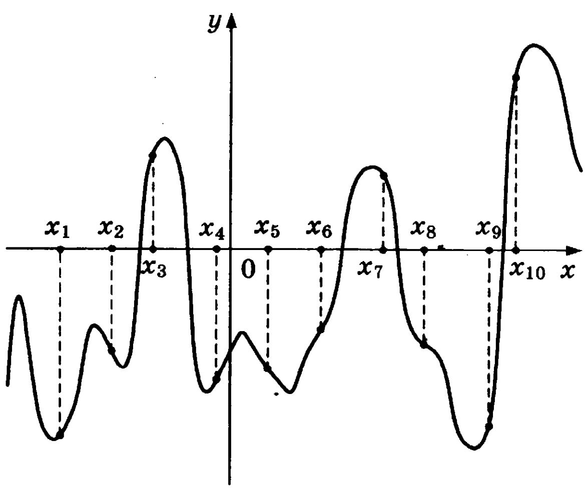


5. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{5}}(5-x) = -2$.

6. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 132°, угол ABD равен 61°. Найдите угол CAD. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$. В скольких из этих точек производная $f'(x)$ функции $f(x)$ положительна?



8. Бетонный шар весит 0,5 т. Сколько тонн будет весить шар вдвое большего радиуса, сделанный из такого же бетона?

8

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{60}{6^{\log_6 5}}$.

9

10. Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\,\%$. При каком значении температуры нагревателя T_1 (в градусах Кельвина) КПД этого двигателя будет 80%, если температура холодильника $T_2 = 200$ К?

10

11. Брюки дороже рубашки на 30% и дешевле пиджака на 22%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

11

12. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 13x - 13\text{tg}\, x - 18$$

на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

12

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $5 \cdot 4^{x^2+4x} + 20 \cdot 10^{x^2+4x-1} - 7 \cdot 25^{x^2+4x} = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3; 1]$.

13

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 7\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 8$.
а) Докажите, что плоскость BCA_1 перпендикулярна плоскости, проходящей через ребро AA_1 и середину ребра B_1C_1.
б) Найдите тангенс угла между плоскостями BCA_1 и BB_1C_1.

14

15. Решите неравенство $x + \frac{20}{x+6} \geq 6$.

15

16

16. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB.

а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2}DK$.

б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC = 14$, $BC = 16$ и $\angle ACB = 150°$.

17

17. В двух областях есть по 50 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 2 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

18

18. Найдите все значения k, при каждом из которых уравнение $\frac{6k-(2-3k)\cos t}{\sin t - \cos t} = 2$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

19

19. Три различных натуральных числа являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

а) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{3}{2}$?

б) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{5}{4}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине число равно 18?

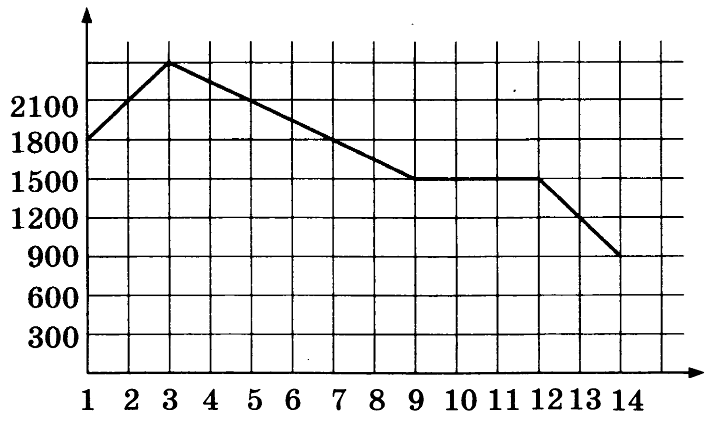
ВАРИАНТ 5

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

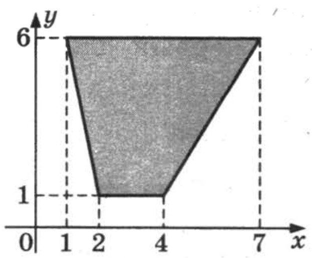
Часть 1

1. Железнодорожный билет для взрослого стоит 220 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 16 школьников и 3 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу? 1

2. На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели ноября. 2 ноября бизнесмен приобрел 10 акций этой компании. Шесть из них он продал 6 ноября, а 13 ноября — остальные 4. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций? 2



3. Найдите площадь трапеции, вершинами которой являются точки с координатами (1; 6), (7; 6), (4; 1), (2; 1). 3

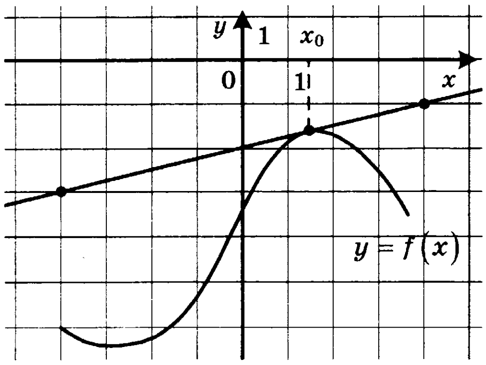


4. В среднем из 150 карманных фонариков — три неисправных. Найдите вероятность купить работающий фонарик.

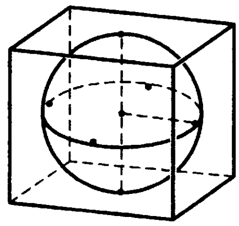
5. Найдите корень уравнения $x^2 - 15 = (x - 15)^2$.

6. Концы отрезка AB лежат по разные стороны от прямой l. Расстояние от точки A до прямой l равно 7, а расстояние от точки B до прямой l равно 13. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой l.

7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. Шар, объём которого равен 14π, вписан в куб. Найдите объём куба.



Часть 2

9. Вычислите значение выражения $3^{\log_3 7} + 49^{\log_7 \sqrt{13}}$.

10. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 — температура нагревателя (в градусах Кельвина), T_2 — температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой температуре нагревателя T_1 КПД двигателя будет 15%, если температура холодильника $T_2 = 340°$ К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

11. Из пункта А круговой трассы, длина которой равна 30 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобилиста. Скорость первого равна 92 км/ч, скорость второго — 77 км/ч. Через сколько минут первый автомобилист будет опережать второго ровно на 1 круг?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = 6\sin x - 3\sqrt{3}x + 0{,}5\sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $6\sin^2 x + 7\cos x - 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\pi]$.

13

14. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер $AA_1 = 7$, $AB = 16$, $AD = 6$. Точка K — середина ребра C_1D_1.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точку B перпендикулярно прямой AK, пересекает отрезок A_1K.

б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью ABC.

14

15. Решите неравенство $x^3 + 6x^2 + \dfrac{28x^2 + 2x - 10}{x - 5} \le 2$.

15

16. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB, H — точка пересечения прямых CM и DK.

а) Докажите, что $CM \perp DK$.

б) Найдите MH, если известно, что катеты треугольника ABC равны 130 и 312.

16

17. 15-го января планируется взять кредит в банке на 18 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

17

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|10 \cdot 0,2^{1-x} - a\right| - \left|5^x + 2a\right| = 0,04^{-x}$ имеет ровно два неотрицательных решения.

18

19. Конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \ge 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \le n-2$ выполнено равенство $3a_{k+2} = 5a_{k+1} - 2a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 4$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \ge 3$ выполняться равенство $a_n = 3a_2 - 2a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n = 667$?

19

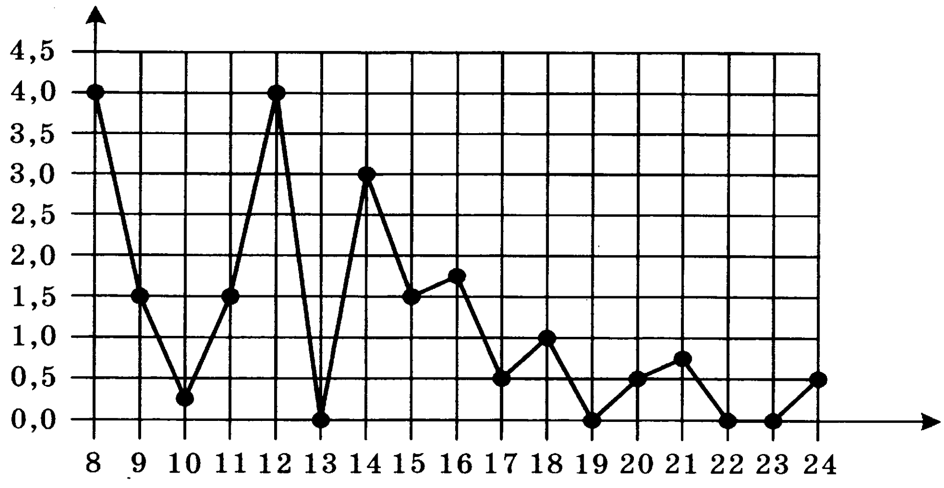
ВАРИАНТ 6

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

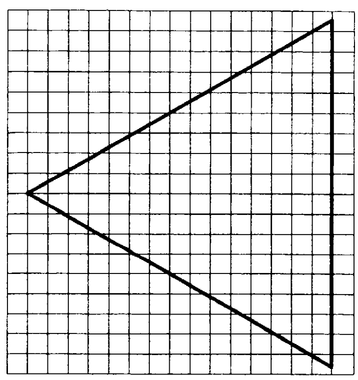
Часть 1

1. Поезд Екатеринбург—Москва отправляется в 7:23, а прибывает в 9:23 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

2. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Томске с 8 по 24 января 2005 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода осадков не было.



3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён равносторонний треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.

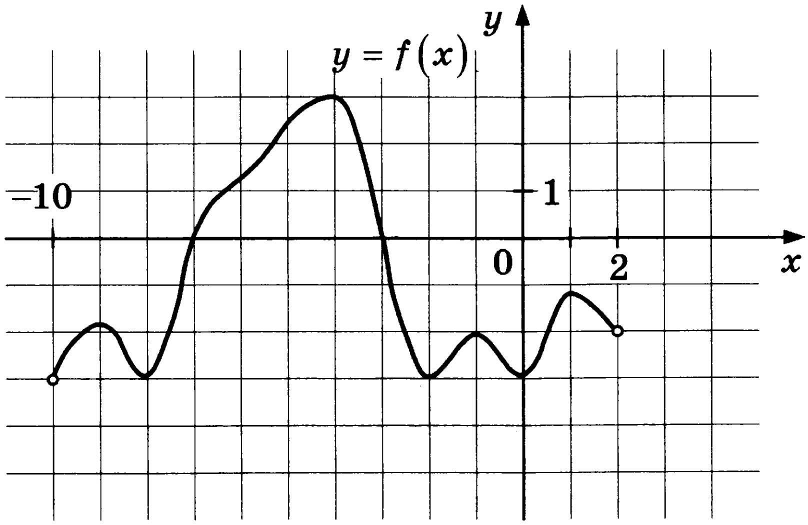


4. В среднем из каждых 50 поступивших в продажу аккумуляторов 48 аккумуляторов заряжены. Найдите вероятность того, что купленный аккумулятор не заряжен.

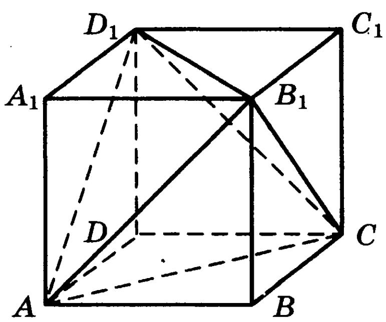
5. Найдите корень уравнения $\log_8 2^{7x-8} = 2$.

6. В треугольнике ABC $AC = BC = 12$, $\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Найдите высоту CH.

7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-10;\ 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -20$.



8. Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 3. Найдите объём треугольной пирамиды AD_1CB_1.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $7 \cdot 5^{\log_5 2}$.

10

10. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 25$ метров, а зазор между соседними рельсами равен 12 мм. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина будет меняться по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha \cdot t)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,(°C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре зазор между рельсами исчезнет? (Ответ выразите в градусах Цельсия.)

11

11. Два человека отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящейся в 4,3 км от места отправления. Один идёт со скоростью 4 км/ч, а другой — со скоростью 4,6 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от точки отправления произойдёт их встреча? Ответ дайте в километрах.

12

12. Найдите наименьшее значение функции $y = (x-27)e^{x-26}$ на отрезке [25; 27].

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

13. а) Решите уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot (0{,}2)^{-\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

14

14. Основание прямой четырёхугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12$, $AD = \sqrt{31}$. Расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 5.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точку D перпендикулярно прямой BD_1, делит отрезок BD_1 в отношении 1 : 7, считая от вершины D_1.

б) Найдите косинус угла между плоскостью, проходящей через точку D перпендикулярно прямой BD_1, и плоскостью основания призмы.

15

15. Решите неравенство $\dfrac{2}{x^2-12x+35} + \dfrac{3}{x^2-17x+70} \le 0$.

16. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Из вершины A опущены перпендикуляры AF, AH, AP и AQ на прямые DE, BE, CD и BC соответственно.

а) Докажите, что $\angle FAH = \angle PAQ$.

б) Найдите AH, если $AF = a$, $AP = b$ и $AQ = c$.

16

17. В двух областях есть по 250 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?

17

18. Найдите все значения a, при каждом из которых множество решений неравенства $\dfrac{a-\left(a^2-2a-3\right)\cos x+4}{\sin^2 x+a^2+1}<1$ содержит отрезок $\left[-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

18

19. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 312 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

19

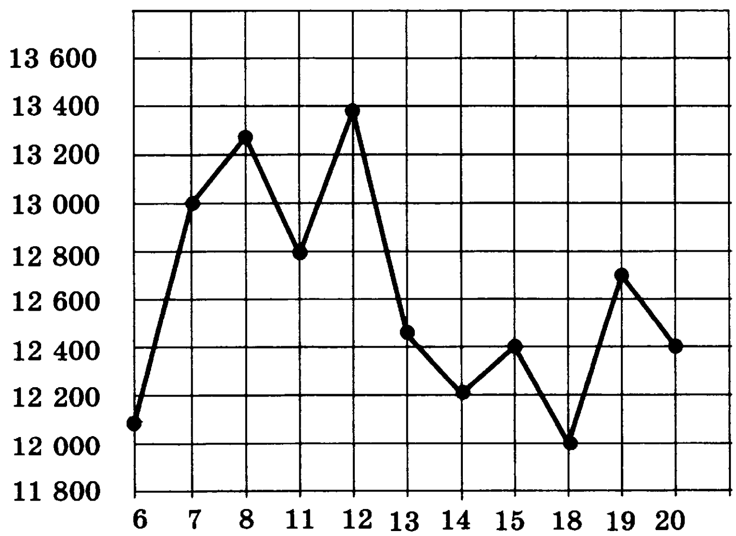
ВАРИАНТ 7

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

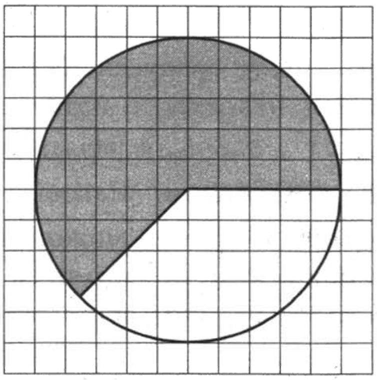
Часть 1

1. Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3500 рублей. До установки счётчиков за воду платили 1700 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 1100 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?

2. На рисунке жирными точками показана цена тонны никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 6 по 20 мая 2009 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой никеля на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



3. На клетчатой бумаге изображён круг площадью 72. Найдите площадь заштрихованного сектора.

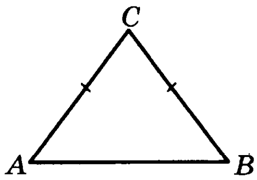


4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,05. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,04. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

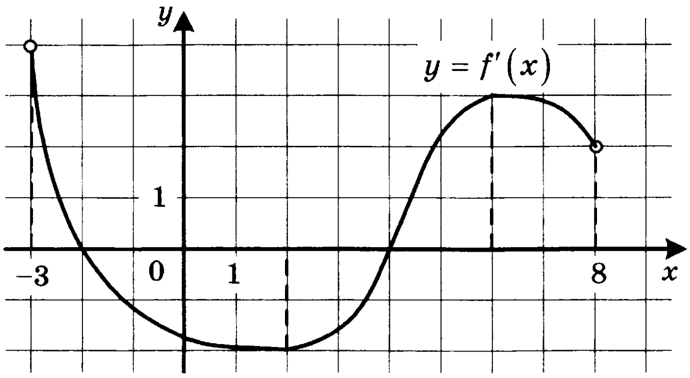
5. Найдите корень уравнения $(x-5)^5 = -32$.

6. В треугольнике ABC $AC = BC = 5$, $\sin A = \frac{4}{5}$.

Найдите AB.



7. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.



8. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, C_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 4, а боковое ребро равно 9.

9

10

11

12

13

14

15

16

Часть 2

9. Вычислите $\log_5 135 - \log_5 5{,}4$.

10. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора получена экспериментально: $T = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1450$ К, $a = -30$ К/мин^2, $b = 180$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1600 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите (в минутах), через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор.

11. В сосуд, содержащий 10 литров 24-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 5 литров воды. Сколько процентов составит концентрация получившегося раствора?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = 76x - 38\operatorname{tg} x - 19\pi + 87$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $4\sin^4 2x + 3\cos 4x - 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

14. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S, все рёбра которой равны 2, точка M — середина ребра AB, точка O — центр основания пирамиды, точка F делит отрезок SO в отношении 3 : 1, считая от вершины пирамиды.

а) Докажите, что прямая MF перпендикулярна прямой SC.

б) Найдите угол между плоскостью MBF и плоскостью ABC.

15. Решите неравенство $9^{x-3} - 9^{x-2} + 9^{x-1} > 511$.

16. Окружность с центром O вписана в угол, равный 60°. Окружность большего радиуса с центром O_1 также вписана в этот угол и проходит через точку O.

а) Докажите, что радиус второй окружности вдвое больше радиуса первой.

б) Найдите длину общей хорды этих окружностей, если известно, что радиус первой окружности равен $2\sqrt{15}$.

17. В начале 2001 года Алексей приобрёл ценную бумагу за 19 000 рублей. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 3000 рублей. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через пятнадцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

17

18. При каких значениях a уравнение $\left|x^2 - 4x - 5\right| - 3a = \left|x - a\right| - 1$ имеет ровно три корня?

18

19. Красный карандаш стоит 17 рублей, синий — 13 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 495 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на пять.

а) Можно ли купить при таких условиях 32 карандаша?

б) Можно ли купить при таких условиях 35 карандашей?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить при таких условиях?

19

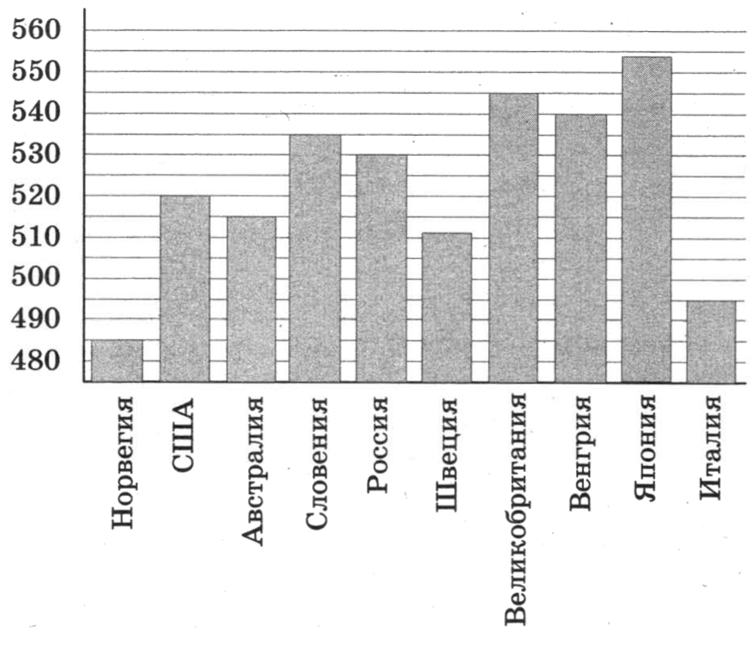
ВАРИАНТ 8

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

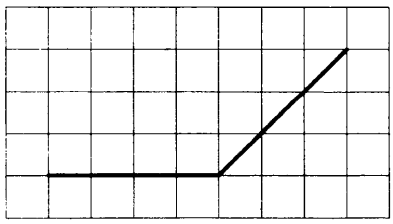
Часть 1

1. Для приготовления яблочного варенья на 1 кг яблок нужно 1,2 кг сахара. Сколько килограммовых упаковок сахара нужно купить, чтобы сварить варенье из 26 кг яблок?

2. На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по естествознанию в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Среди указанных стран второе место принадлежит Великобритании. Определите, какое место занимает Россия.



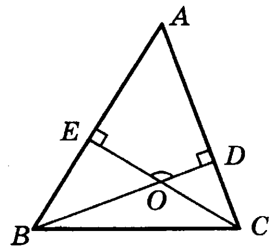
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите его градусную величину.



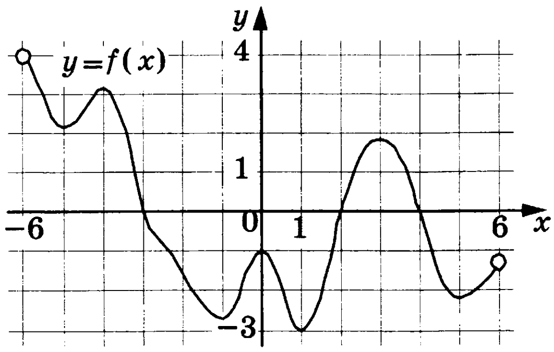
4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{2x+31}=9$.

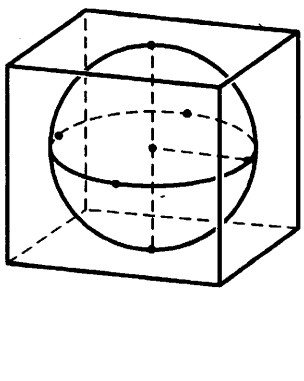
6. В треугольнике ABC угол A равен $56°$, углы B и C — острые, высоты BD и CE пересекаются в точке O. Найдите угол DOE. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-6;6)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x)=0$ на отрезке $[-5{,}5;4]$.



8. Шар, объём которого равен π, вписан в куб. Найдите объём куба.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\sqrt{200}\cos^2\frac{5\pi}{8}-\sqrt{50}$.

10. Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле $R = r_{\text{пок}} - \dfrac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K+1)^m}$, где $m = \dfrac{0{,}02K}{r_{\text{пок}} + 0{,}1}$, $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями, $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина, данная экспертами, K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 26, их средняя оценка равна 0,68, а оценка экспертов равна 0,32.

11. Расстояние между городами А и В равно 440 км. Из города А в город В выехал первый автомобиль, а через два часа после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 90 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 260 км от города А. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+5)^5 - 5x$ на отрезке $[-4{,}5;0]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $19 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^{x+2} + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5;-4]$.

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 1.

а) Докажите, что прямая AB_1 параллельна прямой, проходящей через середины отрезков AC и BC_1.

б) Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

15. Решите неравенство $1 + \log_6(4-x) \le \log_6\left(16 - x^2\right)$.

16. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB.

а) Докажите, что $CM = \dfrac{1}{2}DK$.

б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC = 6$, $BC = 10$ и $\angle ACB = 30°$.

17. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 200 ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором – 300 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свеклу — по цене 13 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

17

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 11|x + 2| + 3\sqrt{x^2 + 4x + 13} = 5a + 2|x - 2a + 2|$$

имеет хотя бы один корень.

18

19. а) Приведите пример такого натурального числа n, что числа n^2 и $(n+16)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 200.

б) Сколько существует трёхзначных чисел n с указанным в пункте *а* свойством?

в) Сколько существует двузначных чисел m, для каждого из которых существует ровно 36 трёхзначных чисел n, таких, что n^2 и $(n+m)^2$ дают одинаковый остаток при делении на 200.

19

ВАРИАНТ 9

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

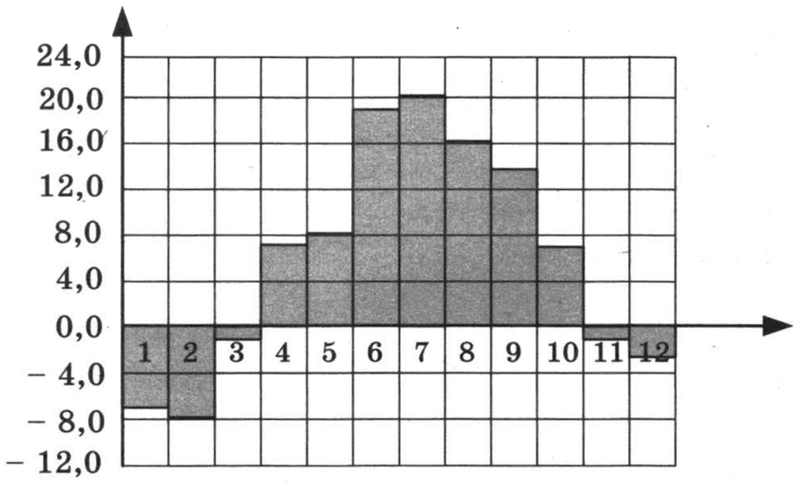
Часть 1

1

1. Для ремонта квартиры купили 42 рулона обоев. Какое наименьшее количество пачек обойного клея нужно купить, если одна пачка клея рассчитана на 8 рулонов?

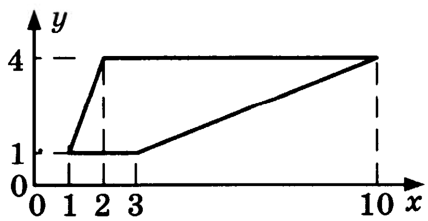
2

2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются номера месяцев, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько месяцев второго полугодия 1999 года средняя температура была ниже 15 °C.



3

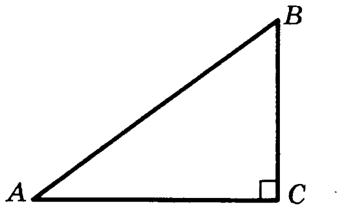
3. Найдите площадь трапеции с вершинами (1; 1), (2; 4), (10; 4), (3; 1).



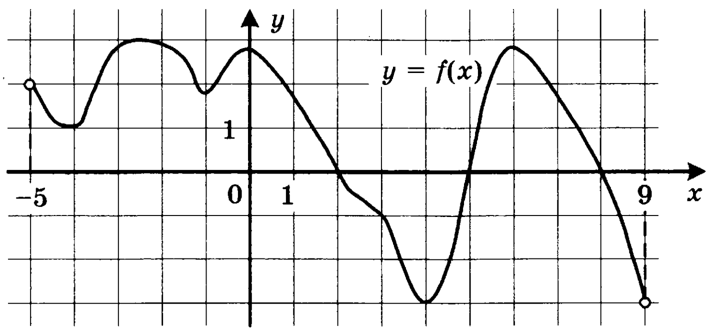
4. В случайном эксперименте бросают две игральные кости (кубика). Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

5. Найдите корень уравнения $32^{x-3} = \frac{1}{2}$.

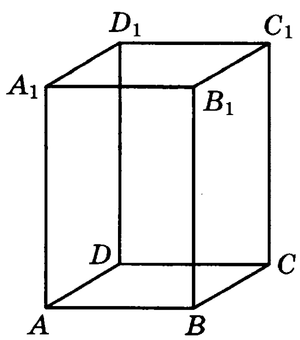
6. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $\cos A = \frac{4}{5}$. Найдите $\sin B$.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 9)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



8. Диагональ правильной четырёхугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом $30°$. Боковое ребро равно 3. Найдите диагональ призмы.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - \sqrt{5}$.

10

10. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 3 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 9$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1{,}1\ \frac{\text{с}}{\text{Ом} \cdot \text{Ф}}$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 33 секунды. Ответ дайте в кВ (киловольтах).

11

11. Первая труба наполняет бак объёмом 600 литров, а вторая труба — бак объёмом 900 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 3 л воды больше, чем другая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?

12

12. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 5e^{x} - 2$ на отрезке $[-2; 1]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

13. а) Решите уравнение $\frac{2\cos x - \sqrt{3}}{\sqrt{7\sin x}} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

14

14. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Расстояние между этими хордами равно $\sqrt{730}$.

а) Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по разные стороны от этой плоскости.

б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

15. Решите неравенство $2^x + 3 \cdot 2^{-x} \le 4$. 15

16. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB, H — точка пересечения прямых CM и DK. 16
а) Докажите, что $CM \perp DK$.
б) Найдите MH, если известно, что катеты треугольника ABC равны 30 и 40.

17. 15-го января планируется взять кредит в банке на сумму 2,4 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы: 17

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Какую сумму нужно выплатить банку за первые 12 месяцев?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение 18

$$a^2 + 7|x+1| + 5\sqrt{x^2 + 2x + 5} = 2a + 3|x - 4a + 1|$$

имеет хотя бы один корень.

19. Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел −1, 2, 4, −6, 7, −8, −10, 12. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел −1, 2, 4, −6, 7, −8, −10, 12. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают. 19
а) Может ли в результате получиться 0?
б) Может ли в результате получиться 1?
в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

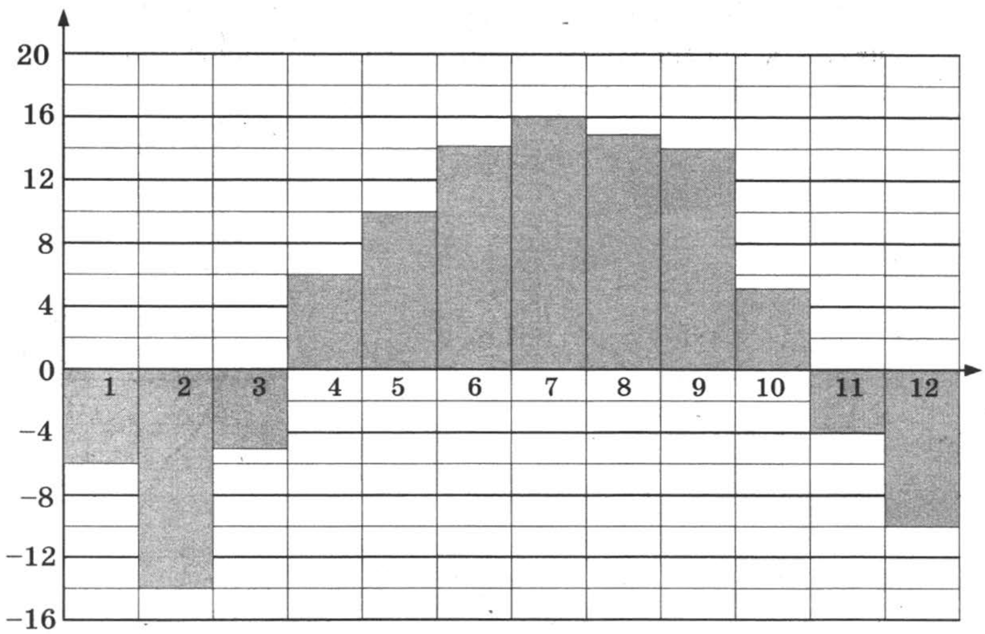
ВАРИАНТ 10

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

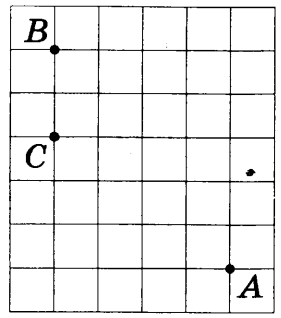
Часть 1

1. В розницу один номер еженедельного журнала «Репортаж» стоит 26 руб., а полугодовая подписка на этот журнал стоит 590 руб. За полгода выходит 25 номеров журнала. Сколько рублей сэкономит Иванов за полгода, если не будет покупать каждый номер журнала отдельно, а оформит подписку?

2. На диаграмме показана средняя температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются номера месяцев, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной средней температурой в 1994 году в Нижнем Новгороде.



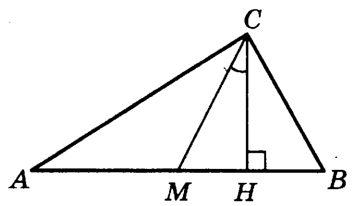
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены точки A, B и C. Найдите расстояние от точки A до прямой BC.



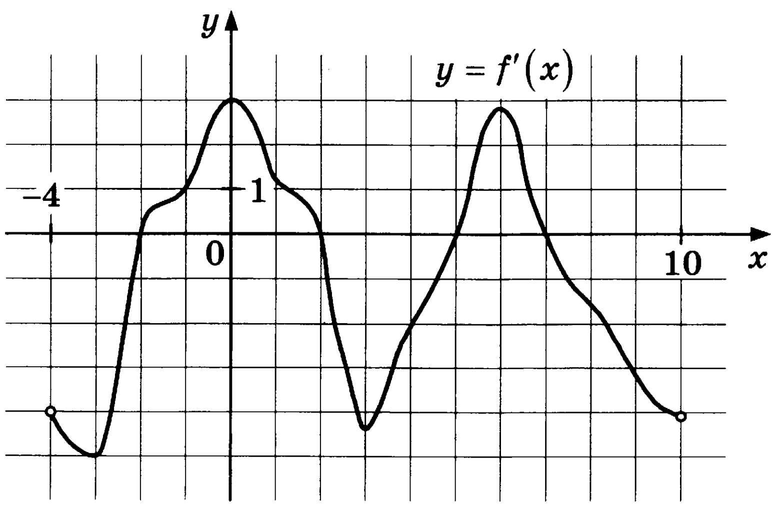
4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно три раза.

5. Найдите корень уравнения $\log_3(2-x)=2$.

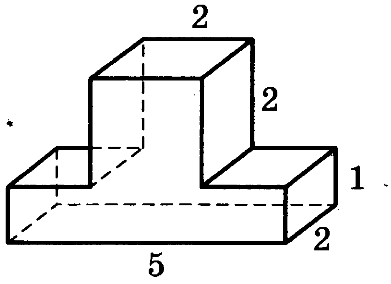
6. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 28°. Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4;\ 10)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y=-2x+16$ или совпадает с ней.



8. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{4\cos 146^\circ}{\cos 34^\circ}$.

10. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5{,}7\cdot 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{м^2\cdot \text{К}^4}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{256}\cdot 10^{21}\ \text{м}^2$, а излучаемая ею мощность P равна $5{,}7\cdot 10^{25}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Ответ выразите в градусах Кельвина.

11. Игорь и Паша могут покрасить забор за 30 часов. Паша и Володя могут покрасить этот же забор за 36 часов, а Володя и Игорь — за 45 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроём?

12. Найдите точку минимума функции $y = x^2 - 14x + 20\ln x - 6$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2\sin^4 x + 3\cos 2x + 1 = 0$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

13

14. Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144.
а) Докажите, что угол между плоскостью SAC и плоскостью, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания, равен $45°$.
б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью SAC.

14

15. Решите неравенство $7^{\ln\left(x^2-2x\right)} \le (2-x)^{\ln 7}$.

15

16. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков MA, MB и MC соответственно.
а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.
б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

16

17. 1 января 2015 года Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Александр Сергеевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс. рублей?

17

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$ имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу $(4; 19)$.

18

19. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.
а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.
б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?
в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

19

ОТВЕТЫ

Вариант 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
23	11	3	0,2	2	28	0,5	112	535	5,5	7	1

13	$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
14	80
15	$(-\infty; -3], [-2; 5)$
16	$3\sqrt{5}$
17	165 кг
18	$\left(-\infty; -\frac{1}{5}\right]; [8; +\infty)$
19	$n = 0,\ x = 3;\ n = 0,\ x = -3$

Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	1,5	10,5	0,375	−1	11	−0,5	175	−0,4	1,6	53	8

13	а) $\pi k;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-5\pi;\ -4\pi$
14	б) 105
15	$[-1; 4)$
16	0,96
17	12,5
18	$\left(-\infty; -\frac{9}{40}\right)$
19	а) Например, 50 и 60; б) нет; в) 108 или 110

Вариант 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
11	5	39	0,26	−6	155	1	6	−22	8	15	7

13	а) $-\mathrm{arctg}\,2 + \pi n,\ -\mathrm{arctg}\,3 + \pi m,\ n,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $-\pi - \mathrm{arctg}\,2,\ -\pi - \mathrm{arctg}\,3$
14	б) 1
15	$[-9; -2), (-2, -1), (-1, 0), (0; 7]$
16	$1:15$
17	6
18	$\left(-\infty; -\frac{9}{16}\right)$
19	а) Например, подходит последовательность $2, 4, 5, 5, 4$; б) нет; в) при $n = 82$

Вариант 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
27	0,8	10,5	0,25	−20	71	6	4	12	1000	40	−18

13	а) −4; 0; б) 0
14	б) $\frac{21}{16}$
15	$(-6; -4], [4; +\infty)$
16	13
17	90 кг
18	$0 \le k < \frac{4\sqrt{2}-2}{21}$ или $\frac{4\sqrt{2}-2}{21} < k \le \frac{1}{3}$
19	а) Да, например, числа 10, 11 и 15; б) нет; в) $\frac{25}{17}$

Вариант 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2420	4500	20	0,98	8	3	0,25	84	20	400	120	9

13	а) $2\pi n$, $\pm\arccos\frac{1}{6} + 2\pi m$, n, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi - \arccos\frac{1}{6}$, $-2\pi + \arccos\frac{1}{6}$
14	б) $\frac{10}{7}$
15	$(-\infty; -2]$; 0; $[1; 5]$
16	289
17	119
18	$-\frac{9}{4} < a \le -2$
19	а) Например, последовательность $1, 28, 46, 58$; б) нет; в) 2

Вариант 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
26	4	10	0,04	2	4	7	1	14	40	4	−1

13	а) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{4}$
14	$\frac{\sqrt{2}}{4}$
15	$(5; 7), (7; 10)$
16	$\frac{ac}{b}$
17	300 кг
18	$a < \frac{3-\sqrt{57}}{4}$; $a > \frac{3+\sqrt{57}}{4}$
19	а) нет, б) нет, в) да

Вариант 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	1400	45	0,086	3	6	4	24	2	1	16	49

13	а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{8}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{8}$
14	$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$
15	$(3+\log_9 7; +\infty)$
16	15
17	2005
18	0; $\frac{49}{16}$
19	а) да; б) нет; в) 33

Вариант 8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
32	5	135	0,5	25	124	6	6	−5	0,64	65	20

13	а) $0; -\log_2 19$; б) $-\log_2 19$
14	б) $\frac{1}{4}$
15	$[2; 4)$
16	6
17	69 000 000 рублей
18	$\left[\frac{9-3\sqrt{5}}{2}; \frac{9+3\sqrt{5}}{2}\right]$
19	а) 17; б) 36; в) 18

Вариант 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	4	15	0,17	2,8	0,8	6	6	−2	2,25	9	−8,25

13	а) $\frac{\pi}{6}+2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$.
14	б) $\operatorname{arctg}\frac{21}{17}$
15	$[0; \log_2 3]$
16	49
17	1 866 000 рублей
18	$[7-\sqrt{39}; 7+\sqrt{39}]$; $[-5-\sqrt{15}; -5+\sqrt{15}]$
19	а) нет; б) нет; в) 16

Вариант 10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
60	5	4	0,25	−7	59	4	18	−4	4000	24	5

13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$
14	б) 36
15	$[-1; 0)$
16	$\frac{63}{2}$
17	5
18	$1{,}5 \le a \le 3$; $a \ge 6$
19	а) 1, 2, 3; б) нет; в) 8

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

Вариант 10

Часть 2

13. а) Решите уравнение $2\sin^4 x + 3\cos 2x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

Из неё следует, что $\sin^4 x = \dfrac{1}{4}\left(\cos^2 2x - 2\cos 2x + 1\right)$.

Поэтому уравнение можно преобразовать так:

$$\frac{1}{2}\cos^2 2x - \cos 2x + \frac{1}{2} + 3\cos 2x + 1 = 0;$$

$$\cos^2 2x + 4\cos 2x + 3 = 0.$$

Сделаем замену $t = \cos 2x$. Получим

$$t^2 + 4t + 3 = 0;$$

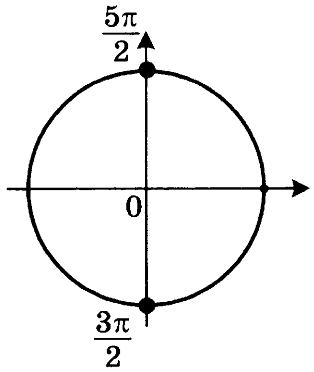
$$t = -1 \text{ или } t = -3;$$

$$\cos 2x = -1 \text{ или } \cos 2x = -3.$$

Уравнение $\cos 2x = -3$ не имеет решений. Из уравнения $\cos 2x = -1$ получаем

$$2x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие заданному отрезку.



Получим $x = \dfrac{3\pi}{2}$; $x = \dfrac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{3\pi}{2}$; $\dfrac{5\pi}{2}$.

14. Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144.
а) Докажите, что угол между плоскостью SAC и плоскостью, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания, равен $45°$.
б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью SAC.

Решение.

Площадь основания пирамиды равна $144 - 108 = 36$, поэтому $AB = 6$.

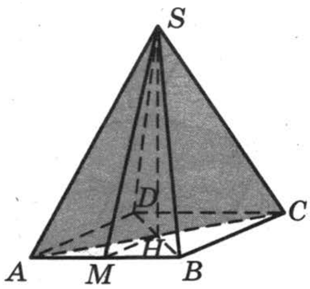
Площадь боковой грани равна $\frac{108}{4} = 27$.

Пусть SM — высота грани SAB. Тогда $S_{SAB} = \frac{SM \cdot AB}{2} = SM \cdot 3 = 27$, поэтому $SM = 9$.

а) Пусть SH — высота пирамиды. Тогда H — середина основания пирамиды. Значит, SH — прямая, по которой пересекаются данные плоскости. Прямая SH перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости основания пирамиды, в том числе и прямым AH и MH. Значит, угол между плоскостями SAC и SMH — это угол AHM, который равен $45°$.

б) Имеем $SH = \sqrt{SM^2 - MH^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

Тогда $S_{SAC} = \frac{SH \cdot AC}{2} = 6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 36$.



Ответ: б) 36.

15. Решите неравенство $7^{\ln\left(x^2-2x\right)} \le (2-x)^{\ln 7}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\ln\left(7^{\ln\left(x^2-2x\right)}\right) \le \ln\left((2-x)^{\ln 7}\right);$$

$$\ln 7 \cdot \ln\left(x^2 - 2x\right) \le \ln 7 \cdot \ln(2-x);$$

$$\ln\left(x^2 - 2x\right) \le \ln(2-x);$$

$$0 < x^2 - 2x \le 2 - x;$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x > 0, \\ (x-2)(x+1) \le 0, \end{cases}$$

откуда получаем, что $-1 \le x < 0$.

Ответ: $[-1; 0)$.

16. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков MA, MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

Решение:

а) Площадь треугольника A_1MB_2 в два раза меньше площади треугольника A_1MB, поскольку $MB = 2MB_2$, а высота, проведённая из вершины A_1, у этих треугольников общая:

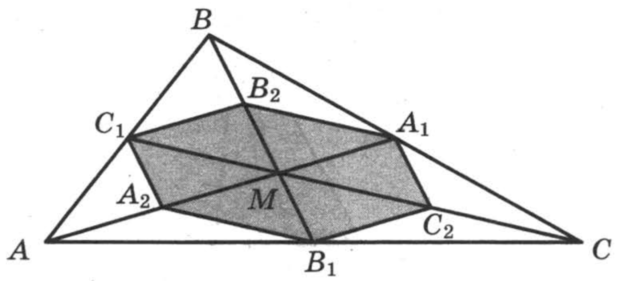
$$S_{A_1MB} = 2S_{A_1MB_2}.$$

Аналогично получаем ещё 5 равенств:

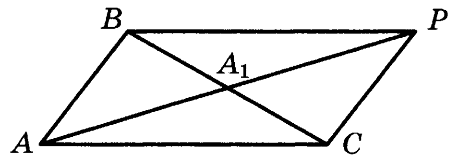
$$S_{A_1MC} = 2S_{A_1MC_2},\ S_{B_1MC} = 2S_{B_1MC_2},\ S_{B_1MA} = 2S_{B_1MA_2},\ S_{C_1MA} = 2S_{C_1MA_2} \text{ и } S_{C_1MB} = 2S_{C_1MB_2}.$$

Складывая эти равенства почленно, получаем

$$S_{ABC} = 2S_{A_1C_2B_1A_2C_1B_2}.$$



б) Обозначим длины сторон BC, AC, AB треугольника ABC через a, b, c.



Докажем, что квадрат медианы AA_1 равен $\frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$.

Для доказательства на продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложим отрезок $A_1P = AA_1$. Получим параллелограмм $ACPB$ со сторонами $AC = PB = b$ и $AB = CP = c$ и диагоналями $BC = a$ и $AP = 2AA_1$. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон:

$2b^2 + 2c^2 = a^2 + 4AA_1^2$, откуда $AA_1^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$.

Аналогично доказывается, что $BB_1^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$, а $CC_1^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$.

Отрезок C_1A_2 — средняя линия треугольника ABM, значит,

$$C_1A_2 = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}BB_1 = \frac{1}{3}BB_1.$$

Рассуждая аналогично, мы получим, что стороны шестиугольника втрое меньше медиан треугольника ABC: $B_2C_1 = B_1C_2 = \frac{1}{3}AA_1$, $A_2B_1 = A_1B_2 = \frac{1}{3}CC_1$. Следовательно, сумма квадратов сторон шестиугольника равна

$$2\cdot\left(B_1C_2^2 + A_1C_2^2 + A_1B_2^2\right) = \frac{2}{9}\left(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2\right) =$$
$$= \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2\right) =$$
$$= \frac{1}{18}\cdot 3\cdot\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = \frac{1}{6}\cdot\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Подставляя в эту формулу длины сторон треугольника ABC, получаем ответ: сумма квадратов сторон шестиугольника равна $\frac{63}{2}$.

Ответ: $\frac{63}{2}$.

17. 1 января 2015 года Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Александр Сергеевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс. рублей?

Решение:

Заметим, что за 4 месяца Александр Сергеевич выплатит 1,1 млн рублей. Таким образом, он не покроет долг с процентами.

Каждый месяц долг увеличивается не более, чем на $1\,100\,000\cdot 0{,}01 = 11\,000$ рублей. Значит, за пять месяцев Александр Сергеевич должен будет выплатить не более $1\,100\,000 + 5\cdot 11\,000 = 1\,155\,000$ рублей, что менее чем $5\cdot 275\,000 = 1\,375\,000$ рублей. Таким образом, Александр Сергеевич сможет выплатить кредит за 5 месяцев.

Ответ: 5.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|x - a^2 + a + 2\right| + \left|x - a^2 + 3a - 1\right| = 2a - 3$ имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу (4; 19).

Решение:

Разность выражений, стоящих под знаками модуля, совпадает с правой частью уравнения:

$$\left(x - a^2 + 3a - 1\right) - \left(x - a^2 + a + 2\right) = 2a - 3.$$

Сделаем замену: $m = x - a^2 + 3a - 1$, $n = x - a^2 + a + 2$.

Тогда уравнение примет вид:

$$|m| + |n| = m - n.$$

Это равносильно условию $n \le 0 \le m$. Получаем

$$x - a^2 + a + 2 \le 0 \le x - a^2 + 3a - 1;$$
$$a^2 - 3a + 1 \le x \le a^2 - a - 2.$$

Уравнение имеет корни, ни один из которых не принадлежит интервалу (4; 19), только если правая граница отрезка решений не больше 4 или левая граница не меньше 19. Получаем

$$\begin{cases} a^2 - 3a + 1 \le a^2 - a - 2, \\ \left[\begin{array}{l} a^2 - a - 2 \le 4, \\ a^2 - 3a + 1 \ge 19; \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a \ge 3, \\ \left[\begin{array}{l} a^2 - a - 6 \le 0, \\ a^2 - 3a - 18 \ge 0; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \ge 1,5, \\ \left[\begin{array}{l} (a-3)(a+2) \le 0, \\ (a-6)(a+3) \ge 0; \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} a \ge 1,5, \\ \left[\begin{array}{l} a \le -3, \\ -2 \le a \le 3, \\ a \ge 6. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $1,5 \le a \le 3;\ a \ge 6$.

19. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Решение.

а) Пример: 1, 2, 3. Разность квадрата суммы и суммы квадратов равна 36 – 14 = 22. Если добавить число 4, то разность будет равна 100 – 30 = 70, что ровно на 48 больше, чем было.

б) Обозначим члены прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогда разность, вычисленная математиком в первый раз, равна

$$\begin{aligned}&(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 - a_1^2 - a_2^2 - \ldots - a_n^2 = \\ &= 2a_n(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + \\ &+ 2a_{n-1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2}) + \\ &+ \ldots + \\ &+ 2a_3(a_1 + a_2) + \\ &+ 2a_2a_1.\end{aligned}$$

Когда к прогрессии добавили член a_{n+1}, то вычисленная во второй раз разность отличается от первой дополнительным слагаемым

$$2a_{n+1}\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)=2\left(a_1+nd\right)\frac{2a_1+(n-1)d}{2}n=\left(a_1+nd\right)\left(2a_1+(n-1)d\right)n,$$

где d — разность прогрессии.
Из условия следует, что $a_1 \geq 0$ и $d \geq 1$, поэтому

$$\left(a_1+nd\right)\left(2a_1+(n-1)d\right)n \geq n^2(n-1).$$

Получаем неравенство

$$n^2(n-1) \leq 1440,$$

откуда $n \leq 11$. Значит, 12 членов в начальной прогрессии быть не может.
в) Из равенства $\left(a_1+nd\right)\left(2a_1+(n-1)d\right)n=1440$ следует, что n является делителем числа 1440. Значит, $n \neq 11$.
Если $n = 10$, получаем

$$\left(a_1+10d\right)\left(2a_1+9d\right)=144.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $90d^2 \geq 90 \cdot 4 = 360 > 144$.
Следовательно, $d=1$. Получаем уравнение

$$2a_1^2+29a_1-54=0,$$

которое не имеет целых решений.
Если $n=9$, получаем

$$\left(a_1+9d\right)\left(2a_1+8d\right)=160.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $72d^2 \geq 72 \cdot 4 = 288 > 160$.
Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$a_1^2+13a_1-44=0,$$

которое не имеет целых решений.
Если $n = 8$, получаем:

$$\left(a_1+8d\right)\left(2a_1+7d\right)=180.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $56d^2 \geq 56 \cdot 4 = 224 > 180$.
Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$2a_1^2+23a_1-124=0,$$

которое имеет единственный натуральный корень 4.
Значит, прогрессия из восьми чисел 4, 5, 6, ..., 11 удовлетворяет условию задачи.

Ответ: а) 1, 2, 3; **б)** нет; **в)** 8.

Справочное издание

Ященко И. В., Волчкевич М. А., Высоцкий И. Р., Гордин Р. К., Семёнов П. В., Косухин О. Н., Фёдоровых Д. А., Суздальцев А. И., Рязановский А. Р., Сергеев И. Н., Смирнов В. А., Хачатурян А. В., Шестаков С. А., Шноль Д. Э.

ЕГЭ
МАТЕМАТИКА
ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ
ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU.ПЩ01.Н00199 от 19.05.2016 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо*
Редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректоры *Л. К. Корнилова, Н. Н. Яковлева*
Дизайн обложки *Л. В. Демьянова*
Компьютерная верстка *К. А. Реутова*

107045, Москва, Луков пер., д. 8. www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 8 (495) 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО "ИПК Парето-Принт", 170546, Тверская область
Промышленная зона Боровлево-1, комплекс №3А
www.pareto-print.ru

По вопросам реализации обращаться по тел.: 8 (495) 641-00-30 (многоканальный).