ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

ЭКЗАМЕН

Ю. В. САДОВНИЧИЙ

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ЗАДАНИЕ 19

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ И УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

ЕГЭ 2017

- Все типы задач в целых числах
- Уравнения и неравенства в целых числах
- Систематизация по типам
- Основные методы решения
- Разбор решений примеров
- Ответы к задачам для самостоятельного решения

ЕГЭ

ВЫСШИЙ БАЛЛ

Ю. В. Садовничий

МАТЕМАТИКА

ЗАДАНИЕ 19

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ И УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

Все типы задач в целых числах

Уравнения и неравенства в целых числах

Систематизация по типам

Основные методы решения

Разбор решений примеров

Ответы к задачам для самостоятельного решения

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА, 2017

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
С14

Садовничий Ю. В.

С14 ЕГЭ 2017. Математика. Задание 19. Решение задач и уравнений в целых числах / Ю. В. Садовничий. — М. : Издательство «Экзамен», 2017. — 126, [2] с. (Серия «ЕГЭ. Высший балл»)

ISBN 978-5-377-11073-6

Данная книга посвящена задачам, при решении которых используются свойства целых чисел. На примере задач, аналогичных задачам из вариантов ЕГЭ, а также заданий, предлагавшихся на различных математических олимпиадах, предпринята попытка систематизировать их по типам и изложить основные методы решения.

Автор надеется, что данная книга будет полезна учащимся старших классов для самостоятельной подготовки к ЕГЭ, а также учителям математики, руководителям кружков и всем тем, кто хочет самостоятельно научиться решать интересные математические задачи.

Приказом Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Формат 60x90/16.
Гарнитура «Школьная». Бумага газетная. Уч.-изд. л. 4,0. Усл. печ. л. 8,0.
Тираж 10 000 экз. Заказ № 1941/16.

ISBN 978-5-377-11073-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы значительно возрос интерес к задачам, при решении которых используются свойства целых чисел. Это определено, в первую очередь, изменившимся форматом Единого государственного экзамена по математике. В вариантах ЕГЭ последних лет задача высокого уровня сложности (задача 19) традиционно связана с целыми числами. Кроме того, такие задачи встречаются едва ли не в каждом варианте различных олимпиад, проводимых для старшеклассников и дающих льготы при поступлении в вузы.

Задачи на целые числа всегда считались одними из наиболее сложных задач, предлагаемых учащимся старших классов. Это объясняется отсутствием единого метода или даже нескольких методов их решения. При этом решение большинства подобных задач, за исключением, может быть, задач, разбираемых на специальных курсах физико-математических школ, не содержит теоретического материала, выходящего за рамки программы курса математики средней школы. Более того, теория в каком-то смысле здесь вообще сведена к минимуму. К примеру, для решения задач на целые числа совершенно не обязательно знать все формулы тригонометрии. Но что совершенно необходимо, так это умение логически мыслить, охватывать всю задачу целиком, как говорят шахматисты, «просчитывать на несколько ходов вперед».

В данной книге на примере конкурсных задач для поступающих в вузы, задач, аналогичных задачам из вариантов ЕГЭ, а также заданий, предлагавшихся на различных математических олимпиадах, предпринята попытка систематизировать их по темам и изложить основные методы решения. В связи с вышесказанным теоретический материал составляет не главную часть книги, а упор делается на разбор большого количества примеров различных типов. В конце каждой главы читателю предлагаются задачи для самостоятельного решения, снабженные ответами.

Материал, изложенный в настоящей книге, разбит на главы, объединяющие задачи какого-либо одного типа. При этом рассматриваются как классические задачи, например решение диофантовых уравнений или задачи на делимость, так и некоторые специфические задачи, такие как нахождение целочисленного экстремума, или задачи, решаемые графически. В каждой главе дается краткий теоретический материал, а также необходимое количество примеров, чтобы составить полное представление по данной теме. Рекомендуется сделать попытку решить данные задания самостоятельно, а в случае неудачи ознакомиться с предлагаемым решением.

Последние две главы являются обобщающими. В них разобрано большое количество задач, аналогичных тем, которые были предложены на Едином государственном экзамене, а также заданий, предлагавшихся в разные годы на олимпиадах «Ломоносов» и «Покори Воробьевы горы» по математике и на Московской математической олимпиаде. Эти главы содержат также достаточно много задач для самостоятельного решения.

Автор надеется, что данная книга будет полезна учащимся старших классов для самостоятельной подготовки к поступлению в вузы, подготовки к ЕГЭ, а также учителям математики, руководителям кружков и всем тем, кто хочет самостоятельно научиться решать интересные математические задачи.

Желаем успехов!

ГЛАВА 1. ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Диофантовым уравнением первого порядка с двумя неизвестными x, y будем называть уравнение вида

$$mx + ny = k,$$

где m, n, k, x, $y \in Z$. Будем считать, что m и n — взаимно простые числа. Если это не так, то всегда можно сократить обе части уравнения на наибольший общий делитель (НОД) чисел m и n (если при этом в правой части получится нецелое число, то такое уравнение не будет иметь решений). Далее метод решения зависит от того, насколько большие модули чисел m и n. Если хотя бы один из коэффициентов (пусть m) невелик по модулю, перепишем уравнение в виде

$$mx = k - ny.$$

Левая часть полученного уравнения делится нацело на m. Значит, должна делиться нацело на m и правая часть этого уравнения. Рассматривая всевозможные остатки l от деления y на m; $l = 0, 1, \ldots, m - 1$, получим, что при одном значении l из указанного промежутка будет делиться на m и правая часть (докажите это). Поскольку число m невелико по модулю, то и перебор вариантов будет тоже невелик.

Пример 1. Решить уравнение $3x - 4y = 1$ в целых числах.

Решение. Перепишем уравнение в виде $3x = 4y + 1$. Поскольку левая часть уравнения делится на 3, то должна делиться на 3 и правая часть. Рассмотрим три случая.

1. Если $y = 3t$; $t \in Z$, то $4y + 1 = 12t + 1$ не делится на 3.
2. Если $y = 3t + 1$, то $4y + 1 = 4(3t + 1) + 1 = 12t + 5$ не делится на 3.

3. Если $y = 3t + 2$, то $4y + 1 = 4(3t + 2) + 1 = 12t + 9$ делится на 3, поэтому $3x = 12t + 9$, т.е. $x = 4t + 3$.

Ответ: $\{(4t + 3, 3t + 2)\}$; $t \in Z$.

Описанный способ удобно применять и в том случае, если числа m и n не малы, но зато разлагаются на простые множители.

Пример 2. Решить уравнение $36x - 25y = 1$ в целых числах.

Решение. Перепишем уравнение в виде $25y = 36x - 1$. Число слева делится на 5, следовательно, должно делиться на 5 и число справа. Рассмотрим всевозможные остатки от деления x на 5.

1. Если $x = 5t$; $t \in Z$, то $36x - 1 = 180t - 1$ не делится на 5.

2. Если $x = 5t + 1$, то $36x - 1 = 36(5t + 1) - 1 = 180t + 35$ делится на 5.

В рассмотрении других остатков нет необходимости, так как при других остатках правая часть делиться на 5 не будет. Итак, $25y = 180t + 35$ или $5y = 36t + 7$.

Далее будем рассуждать аналогично. Число слева делится на 5, следовательно, делится на 5 и число справа.

1. Если $t = 5u$; $u \in Z$, то $36t + 7 = 180u + 7$ не делится на 5.

2. Если $t = 5u + 1$, то $36t + 7 = 36(5u + 1) + 7 = 180u + 43$ не делится на 5.

3. Если $t = 5u + 2$, то $36t + 7 = 36(5u + 2) + 7 = 180u + 79$ не делится на 5.

4. Если $t = 5u + 3$, то $36t + 7 = 36(5u + 3) + 7 = 180u + 115$ делится на 5.

В рассмотрении других остатков нет необходимости. Итак, $5y = 180u + 115$ или $y = 36u + 23$. Осталось выразить x через u: $x = 5t + 1 = 5(5u + 3) + 1 = 25u + 16$.

Ответ: $\{(25u + 16, 36u + 23)\}$; $u \in Z$.

Метод рассмотрения остатков становится неэффективным, если числа $|m|$ и $|n|$ являются большими простыми числами. В этом случае применяется алгоритм, основанный на последовательном уменьшении по модулю коэффициентов при неизвестных.

1. Выбор наименьшего по модулю коэффициента (пусть $|m| < |n|$).

2. Проведение процедуры уменьшения коэффициентов. Это делается с помощью деления с остатком. Пусть $n = l|m| + q$, где $0 < q \le |m| - 1$, тогда $mx + ny = k \Leftrightarrow mx + (l|m| + q)y = k \Leftrightarrow mx + l|m|y = k - qy$.

   Левая часть последнего уравнения делится на m. Значит, должна делиться на m и правая часть: $k - qy = mt$, где $t \in Z$, t — новое неизвестное.

3. Повторение процедуры уменьшения коэффициентов. Новое уравнение отличается от старого только тем, что его коэффициенты по модулю меньше коэффициентов старого. За конечное число шагов добъемся того, что коэффициент при одном из новых неизвестных будет равен 1.

4. Возврат от новых переменных к исходным.

Пример 3. Решить уравнение $79y - 23x = 1$ в целых числах.

Решение. Проведем деление с остатком: $79 = 23 \cdot 3 + 10$ и перепишем исходное уравнение в виде $23x = 79y - 1 = (23 \cdot 3 + 10)y - 1 = 69y + 10y - 1 \Leftrightarrow 23x - 69y = 10y - 1$.

Левая часть последнего уравнения делится нацело на 23, поэтому должна делиться на 23 и правая часть: $10y - 1 = 23t$ или $10y = 23t + 1$; $t \in Z$ — новое неизвестное.

Полученное новое уравнение по типу точно такое же, как исходное. Однако коэффициенты при неизвестных в нем уменьшились по модулю. Повторим процедуру уменьшения коэффициентов еще раз: $10y = 23t + 1 = (10 \cdot 2 + 3)t + 1 \Leftrightarrow 10y - 20t = 3t + 1 \Rightarrow 3t + 1 = 10u$, $u \in Z$ — новое неизвестное. Проведем процедуру уменьшения коэффициентов в последний раз: $3t + 1 = 10u = (3 \cdot 3 + 1)\,u \Leftrightarrow 3t - 9u = u - 1 \Rightarrow u - 1 = 3v$, $v \in Z$.

Осталось выразить x и y через v. Поскольку $u = 3v + 1$, то

1. $3t = 10u - 1 = 10(3v + 1) - 1 = 30v + 9 \Rightarrow t = 10v + 3$.
2. $10y = 23t + 1 = 23(10v + 3) + 1 = 230v + 70 \Rightarrow y = 23v + 7$.
3. $23x = 79y - 1 = 79(23v + 7) - 1 = 79 \cdot 23v + 552 \Rightarrow x = 79v + 24$.

Ответ: $\{(79v + 24,\ 23v + 7)\};\ v \in Z$.

Диофантовы уравнения первого порядка возникают и в некоторых прикладных задачах. Рассмотрим следующие примеры.

Пример 4. Найти все целые l, при которых дробь $\frac{5l+6}{8l+7}$ сократима.

Решение. Пусть $k \neq \pm 1$ — общий делитель числителя и знаменателя. Тогда

$$\begin{cases} 5l + 6 = km, \\ 8l + 7 = kn; \quad k, m, n \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 40l + 48 = 8km, \\ 40l + 35 = 5kn. \end{cases}$$

Вычтем из первого равенства второе и получим $13 = k(8m - 5n)$, откуда $k = \pm 13$. Для нахождения l решим в целых числах уравнение $5l + 6 = 13m$. Напомним, что это уравнение можно решить двумя способами: перебором всевозможных остатков и процедурой уменьшения коэффициентов. Решив уравнение, получим $l = 13s + 4$, где $s \in Z$.

Ответ: $l = 13s + 4$; $s \in Z$.

Пример 5. Решить уравнение $\frac{\sin 4x}{\cos 6x} = 1$.

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\frac{\sin 4x}{\cos 6x} = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin 4x - \cos 6x}{\cos 6x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x - \cos 6x = 0 \\ \cos 6x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) = 0 \\ \cos 6x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\left(5x - \dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) = 0 \\ \cos 6x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 5x - \dfrac{\pi}{4} = \pi n \\ \dfrac{\pi}{4} - x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \end{array}\right. \\ 6x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad n, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi n}{5} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n \end{array}\right. \\ x \neq \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi k}{6}. \end{cases}$$

Решим два уравнения в целых числах. Рассмотрим сначала первое уравнение:

$$\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6} \quad \Leftrightarrow \quad 5k = 6n - 1.$$

Перебирая все возможные остатки при делении n на 5, находим, что решением последнего уравнения являются $n = 5l + 1$; $l \in Z$. Значит, решением задачи будут служить $x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi n}{5}$, где $n \in Z$, $n \neq 5l + 1$; $l \in Z$. Теперь рассмотрим второе уравнение:

$$-\frac{\pi}{4} + \pi n = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6} \Leftrightarrow 6n = 2 + k.$$

Ясно, что любое целое n является решением этого уравнения. Таким образом, ни одно значение x из серии $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi n}{5}$; $n \in Z$, $n \neq 5l + 1$; $l \in Z$.

Пример 6. Целое число кратно 7 и при делении на 4 дает в остатке 3. Найти остаток от деления этого числа на 28.

Решение. Пусть x — данное целое число. Имеем:

$$x = 7k = 4n + 3;\ k, n \in Z, \Rightarrow n = \frac{7k - 3}{4}.$$

Перебирая все возможные остатки при делении k на 4, находим, что решением последнего уравнения являются $k =$

$= 4m + 1$; $m \in Z$. Таким образом, $x = 7k = 7(4m + 1) = 28m + 7$ и дает остаток 7 при делении на 28.

Ответ: 7.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение $19x - 21y = 2$ в целых числах.
2. Найти все целые неотрицательные m и n, удовлетворяющие уравнению $19m + 84n = 1984$.
3. Решить уравнение $20x - 19y = 3$ в целых числах и найти сумму трех наименьших положительных x, являющихся корнями данного уравнения.
4. Найти наименьшее натуральное число, которое обладает следующими свойствами: при делении его на 2 в остатке получается 1, при делении на 19 остаток равен 3, а на 7 оно делится без остатка.
5. Найти наименьшее натуральное число x такое, что остаток от деления x на 8 на 5 больше остатка от деления x на 5 и в 2 раза больше остатка от деления x на 7.
6. На какую минимальную величину могут отличаться друг от друга натуральные числа m и n, если известно, что дробь $\dfrac{89}{3m+7n}$ является натуральным числом?
7. Найти остаток от деления целого числа n на 30, если известно, что остаток от его деления на 15 равен 4, а остаток от деления на 18 равен 7.
8. Решить уравнение $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - 4x\right) - \sin\left(3x - \dfrac{5\pi}{16}\right) = -1$.
9. Решить уравнение $2 + \cos x = \sqrt{3}\left|\sin\dfrac{3x}{4}\right|\sin x$.

ГЛАВА 2. ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Диофантовым уравнением второго порядка с двумя неизвестными x, y будем называть уравнение вида

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F,$$

где A, B, C, D, E, F, x, $y \in Z$ и хотя бы одно из чисел A, B, C отлично от нуля. Общая теория решения таких уравнений достаточно сложна, поэтому приведем лишь основные методы.

Одним из таких методов является *разложение на множители*. Он состоит в том, что левая часть данного уравнения каким-либо образом раскладывается на множители (чаще всего путем нахождения дискриминанта), и задача сводится к перебору конечного числа вариантов.

Пример 1. Найти все пары целых чисел (x, y), каждая из которых удовлетворяет уравнению $2x^2 + 5 = 3y^2 + 5xy$.

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$2x^2 + 5 = 3y^2 + 5xy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3y^2 + 5xy - 2x^2 = 5 \Leftrightarrow (3y - x)(y + 2x) = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y - x = 5 \\ y + 2x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} 3y - x = -5 \\ y + 2x = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} 3y - x = 1 \\ y + 2x = 5 \end{cases} \vee \begin{cases} 3y - x = -1 \\ y + 2x = -5. \end{cases}$$

Первые две системы не имеют решений в целых числах, третья и четвертая имеют решением пары $(x, y) = (2, 1)$ и $(x, y) = (-2, -1)$ соответственно.

Ответ: $\{(2, 1); (-2, -1)\}$.

Пример 2. Найти все пары натуральных чисел разной четности, удовлетворяющие уравнению $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{12}$.

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow 12m + 12n = mn \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow mn - 12m - 12n + 144 = 144 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (m - 12)(n - 12) = 144.$$

Так как m и n — натуральные числа разной четности, возможны следующие варианты:

$$\begin{cases} m-12=1 \\ n-12=144 \end{cases} \vee \begin{cases} m-12=3 \\ n-12=48 \end{cases} \vee \begin{cases} m-12=9 \\ n-12=16 \end{cases} \vee$$
$$\vee \begin{cases} m-12=144 \\ n-12=1 \end{cases} \vee \begin{cases} m-12=48 \\ n-12=3 \end{cases} \vee \begin{cases} m-12=16 \\ n-12=9. \end{cases}$$

Здесь учитываем, что числа $m - 12$ и $n - 12$ будут также разной четности, кроме того, оба этих числа должны быть положительны, иначе $(m - 12)(n - 12) < 12^2$. Таким образом, решением задачи будут служить пары $\{(13, 156); (15; 60); (21; 28); (156, 13); (60; 15); (28; 21)\}$.

Ответ: $\{(13, 156); (15; 60); (21; 28); (156, 13); (60; 15); (28; 21)\}$.

Пример 3. Найти все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 4y^2 + 4z^2 + 20z + 12y + x\sqrt{3} - 34 = 0, \\ 3x^2 - 2\sqrt{3}(\cos \pi y + \cos \pi z)x + 4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы как квадратное относительно x. Это уравнение будет иметь решение тогда и только тогда, когда его дискриминант больше либо равен нулю. Имеем:

$$D = 3(\cos \pi y + \cos \pi z)^2 - 12 \ge 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos \pi y + \cos \pi z \ge 2 \\ \cos \pi y + \cos \pi z \le -2. \end{array}\right.$$

В первом случае $\cos\pi y = \cos\pi z = 1$, т.е. $y = 2k$, $z = 2n$; k, $n \in Z$, при этом $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Первое уравнение системы в этом случае примет вид $4n^2 + 10n - 4k^2 + 6k = 7$ и не будет иметь решений, так как в левой части этого уравнения всегда будет получаться четное число.

Во втором случае $\cos\pi y = \cos\pi z = -1$, откуда следует, что $y = 2k + 1$, $z = 2n + 1$; k, $n \in Z$, при этом $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$. Первое уравнение системы в этом случае преобразуется к виду $2n^2 + 7n - 2k^2 + k = 0$.

Дискриминант этого уравнения (которое мы рассматриваем как квадратное относительно n) равен $D = 49 + 16k^2 - 8k = (4k - 1)^2 + 48 = m^2$; $m \in Z$, иначе число n не может быть целым. Последнее уравнение принимает вид: $(m + 4k - 1)(m - 4k + 1) = 48$.

Разность первого и второго чисел, стоящих в скобках, равна $8k - 2$, т.е. дает остаток 6 при делении на 8. В соответствии с этим получаем четыре варианта:

$$\begin{cases} m + 4k - 1 = 24 \\ m - 4k + 1 = 2, \end{cases} \vee \begin{cases} m + 4k - 1 = -2 \\ m - 4k + 1 = -24, \end{cases} \vee$$

$$\vee \begin{cases} m + 4k - 1 = 6 \\ m - 4k + 1 = 8, \end{cases} \vee \begin{cases} m + 4k - 1 = -8 \\ m - 4k + 1 = -6. \end{cases}$$

В первых двух случаях получаем $k = 3$, $n = -5$, откуда $y = 7$, $z = -9$; в третьем и четвертом случаях находим, что $k = n = 0$ и $y = z = 1$.

Ответ: $\{(-\frac{2}{\sqrt{3}},\ 7,\ -9);\ (-\frac{2}{\sqrt{3}},\ 1,\ 1)\}$.

Если в уравнении отсутствует член, содержащий x^2 или y^2, т.е. A либо C равно нулю, но при этом $B \neq 0$, то такое уравнение решается методом выделения целой части. Пусть, например, $A = 0$. Выразим x через y:

$$Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F \Leftrightarrow x(By + D) = F - Ey - Cy^2,$$

откуда $x = \dfrac{F - Ey - Cy^2}{By + D}$. Далее делим многочлен $F - Ey - Cy^2$ на многочлен $By + D$ с остатком, т.е. представляем данную дробь в виде

$$\frac{F - Ey - Cy^2}{By + D} = Py + Q + \frac{R}{By + D},$$

где P, Q, R — рациональные числа. Подобрав, при необходимости, целое число T и домножив на него обе части уравнения

$$x = Py + Q + \frac{R}{By + D},$$

получим уравнение

$$Tx = P'y + Q' + \frac{R'}{By + D},$$

где P', Q' и R' уже являются целыми числами. Дальнейшее решение сводится к перебору всех делителей числа R' (если $R' = 0$, то уравнение становится линейным).

Пример 4. Решить в целых числах уравнение $x^2 - xy - 2x + 3y = 10$.

Решение. Выразим в данном уравнении y через x:

$$x^2 - xy - 2x + 3y = 10 \Leftrightarrow y(3 - x) = 10 + 2x - x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 2x - 10}{x - 3} = x + 1 - \frac{7}{x - 3}.$$

Из полученного равенства видно, что дробь $\frac{7}{x-3}$ должна быть целым числом. Это возможно, когда $x - 3$ принимает значения ± 7 и ± 1. Разбирая четыре случая, находим все пары $(x,\ y)$, удовлетворяющие данному уравнению: $(x,\ y) = \{(10,\ 10);\ (-4,\ -2);\ (4,\ -2);\ (2,\ 10)\}$.

Ответ: $\{(10,\ 10);\ (-4,\ -2);\ (4,\ -2);\ (2,\ 10)\}$.

Пример 5. Найти все корни уравнения $\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}\right)\right) = 1$, являющиеся целыми числами.

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}\right)\right) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{8}\left(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}\right) = 2\pi k, \quad k \in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800} = 16k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9x^2 + 160x + 800} = 3x - 16k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 16k \geq 0 \\ 9x^2 + 160x + 800 = (3x - 16k)^2. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение системы:

$$9x^2 + 160x + 800 = (3x - 16k)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 + 160x + 800 = 9x^2 - 96xk + 256k^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 160x + 96xk = 256k^2 - 800 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x + 3xk = 8k^2 - 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(5 + 3k) = 8k^2 - 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8k^2 - 25}{5 + 3k} = \frac{8}{3}k - \frac{40}{9} - \frac{25}{9(5 + 3k)} \quad (*) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9x = 24k - 40 - \frac{25}{5 + 3k}.$$

При этом равенство (*) получается путем деления в столбик многочлена $8k^2 - 25$ на многочлен $5 + 3k$.

Далее, так как числа $9x$ и $24k - 40$ — целые, также целым должно быть число $\frac{25}{5 + 3k}$, а это значит, что 25 делится нацело на $5 + 3k$, т.е. $5 + 3k = \pm 1, \pm 5, \pm 25$. Поскольку k — целое число, имеем $k = 0$, $k = -2$ или $k = -10$. Если $k = 0$, то $x = -5$, что не удовлетворяет условию $3x - 16k \geq 0$. Если $k = -2$, то $x = -7$, что удовлетворяет условию $3x - 16k \geq 0$. Если $k = -10$, то $x = -31$ удовлетворяет условию $3x - 16k \geq 0$. Следовательно, решением задачи будут служить $x = -7$ и $x = -31$.

Ответ: $x = -7$, $x = -31$.

Пример 6. Какие из значений: 8, 43, 2010 может принимать N, если известно, что уравнение $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{N}$ имеет единственное решение в натуральных числах x и y?

Решение. Пусть N — некоторое натуральное число. Считая x и y натуральными числами, преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{N} \Leftrightarrow \frac{y - x}{xy} = \frac{1}{N} \Leftrightarrow Ny - Nx = xy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(N + y) = Ny \Leftrightarrow x = \frac{Ny}{N + y} = \frac{Ny + N^2 - N^2}{N + y} =$$

$$= N - \frac{N^2}{N + y}.$$

Из полученного равенства следует, что число $\dfrac{N^2}{N+y}$ должно быть целым. Если N — простое число, то число N^2 имеет единственный делитель, больший N (равный N^2). Поэтому данное уравнение имеет в натуральных числах единственное решение: $y = N^2 - N$, $x = N - 1$. Если же N — составное, существуют, по крайней мере, два числа, большие N и являющиеся делителями N^2. Например, если $N = p \cdot q$, где p и q — натуральные числа такие, что $1 < p$, $q < N$, то p^2q и p^2q^2 больше N и являются делителями N^2. Значит, в этом случае данное уравнение будет иметь, по крайней мере, два различных решения. Таким образом, из трех предложенных чисел только $N = 43$ удовлетворяет условию задачи.

О т в е т: $N = 43$.

Пример 7. Решить уравнение $9x^2y^2 + 6xy^2 - 9x^2y + 2x^2 + y^2 - 18xy + 7x - 5y + 6 = 0$ в целых числах.

Решение. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно y. Имеем

$$y^2(3x + 1)^2 - y(3x + 1)(3x + 5) + 2x^2 + 7x + 6 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения равен $D = (3x + 1)^2((3x + 5)^2 - 4(2x^2 + 7x + 6)) = (3x + 1)^2(x + 1)^2$.

Так как при всех целых значениях переменной x число $3x + 1$ отлично от нуля, корни квадратного уравнения равны $y = \dfrac{(3x+1)(3x+5) \pm (3x+1)(x+1)}{2(3x+1)^2} = \dfrac{3x+5 \pm (x+1)}{2(3x+1)}$.

В первом случае получаем уравнение

$$y = \frac{2x+3}{3x+1} = \frac{2}{3} + \frac{7}{3(3x+1)} \Leftrightarrow 3y = 2 + \frac{7}{3x+1}.$$

Перебирая для числа $3x + 1$ все возможные делители числа 7, находим, что решением этого уравнения являются пары $(x, y) = \{(0, 3); (2, 1)\}$. Во втором случае уравнение принимает вид

$$y = \frac{x+2}{3x+1} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3(3x+1)} \Leftrightarrow 3y = 1 + \frac{5}{3x+1}.$$

Здесь 5 делится нацело на $3x+1$, и решением этого уравнения будут служить пары чисел $(x, y) = \{(0, 2); (-2, 0)\}$.

Таким образом, ответ к задаче будет состоять из четырех пар чисел $(x, y) = \{(0, 3); (2, 1); (0, 2); (-2, 0)\}$.

Ответ: $\{(0, 3); (2, 1); (0, 2); (-2, 0)\}$.

Если диофантово уравнение второго порядка каким-либо образом (например, выделением полных квадратов) приводится к виду $Ax^2 + Cy^2 = F$, где A, C и F — целые, отличные от нуля, числа, то метод решения зависит от знаков коэффициентов при переменных. Если A и C имеют один и тот же знак, то используются следующие оценки (пусть $A, C, F > 0$):

$$Ax^2 + Cy^2 = F \Rightarrow x^2 \le \frac{F}{A} \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{F}{A}} \le x \le \sqrt{\frac{F}{A}}.$$

Далее задача сводится к перебору конечного числа вариантов. Если же A и C имеют разные знаки, то в общем виде решение уравнения достаточно сложно, но в некоторых случаях можно, например, перебором остатков доказать, что уравнение не имеет решений в целых числах.

Пример 8. Найти целочисленные решения уравнения $14x^4 - 5y^4 - 3x^2y^2 + 82y^2 - 125x^2 + 51 = 0$.

Решение. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно x^2. Имеем: $14x^4 - 5y^4 - 3x^2y^2 + 82y^2 - 125x^2 + 51 = 0 \Leftrightarrow 14x^4 - x^2(3y^2 + 125) - 5y^4 + 82y^2 + 51 = 0$.

Дискриминант этого уравнения равен $D = (3y^2 + 125)^2 + 56(5y^4 - 82y^2 - 51) = 289y^4 - 3842y^2 + 12769 = (17y^2 - 113)^2$.

Корни уравнения равны

$$x^2 = \frac{3y^2 + 125 + 17y^2 - 113}{28} = \frac{5y^2 + 3}{7}$$

или

$$x^2 = \frac{3y^2 + 125 - 17y^2 + 113}{28} = \frac{-y^2 + 17}{2}.$$

Таким образом, левая часть исходного уравнения раскладывается на множители следующим образом:

$$(7x^2 - 5y^2 - 3)(2x^2 + y^2 - 17) = 0,$$

и задача сводится к решению двух уравнений в целых числах.

Докажем сначала, что уравнение $7x^2 = 5y^2 + 3$ не имеет целочисленных решений. Для этого посмотрим, какие остатки могут давать при делении на 3 левая и правая части этого уравнения. Так как любой полный квадрат дает при делении на 3 остаток 0 или остаток 1, число $7x^2$ также дает при делении на 3 остатки 0 и 1. Остатки от деления на 3 числа $5y^2 + 3$ могут быть равны 0 или 2. Таким образом, равенство может иметь место только в том случае, когда x и y кратны 3. Но в этом случае числа x^2 и $5y^2$ делятся без остатка на 9, поэтому равенство также не может иметь место (поскольку 3 не делится на 9).

Рассмотрим теперь уравнение $2x^2 + y^2 = 17$. Из оценки $x^2 \le 8{,}5$ сразу следует, что x по модулю не превосходит 2. Перебирая все возможные варианты, находим, что решением задачи будут служить пары чисел $(x, y) = \{(2, 3); (-2, 3); (-2, -3); (2, -3)\}$.

Ответ: $\{(2, 3); (-2, 3); (-2, -3); (2, -3)\}$.

Наконец, рассмотрим уравнение вида $Ax^2 + Dx + Ey = F$, где A, D, E, F — целые числа и A, и E отличны от нуля. Это уравнение решается перебором остатков при делении на E числа $F - Dx - Ax^2$. Но в отличие от уравнений первого порядка разрешимость данного уравнения может быть и при нескольких значениях остатка q. Кроме того, может оказаться, что такое уравнение и вовсе не имеет решений.

Пример 9. Решить в целых числах уравнение $3x^2 + 2x + 3y = 2$.

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде $3y = 2 - 2x - 3x^2$.

Левая часть полученного уравнения делится на 3, значит, должна делиться на 3 и его правая часть. Рассмотрим три случая.

1. Если $x = 3k$; $k \in Z$, то $2 - 2x - 3x^2 = 2 - 6k - 27k^2$ не делится на 3.

2. Если $x = 3k + 1$, то $2 - 2x - 3x^2 = 2 - 2(3k + 1) - 3(3k + 1)^2 = -27k^2 - 24k - 3$ делится на 3.

3. Если $x = 3k + 2$, то $2 - 2x - 3x^2 = 2 - 2(3k + 2) - 3(3k + 2)^2 = -27k^2 - 42k - 14$ не делится на 3.

Итак, $x = 3k + 1$, откуда $y = -9k^2 - 8k - 1$, где $k \in Z$.

Ответ: $\{(3k + 1, -9k^2 - 8k - 1)\}$; $k \in Z$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющих уравнению $2x^2 = 2y^2 + 3xy + 7$.

2. Найти все целые числа m и n, для которых выполнены условия: $2nm + n = 14$ и $mn \geq 9$.

3. Найти все пары целых неотрицательных чисел (m, n), которые являются решениями уравнения $2m^2 + 3m = 2nm + n + 41$.

4. Найти все целочисленные решения уравнения $x^2 - 14x + 4y^2 + 32y + 88 = 0$.

5. Решить уравнение в целых числах $3x^2 + 5xy + 2y^2 = 7$.

6. Найти все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющие уравнению $3x = 5y^2 + 4y - 1$, и доказать, что для каждой такой пары сумма $x^3 + y^3$ является нечетным числом.

7. Найти все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие системе уравнений
$$\begin{cases} 15x^2 + 2y^2 - 2z^2 - 3\sqrt{5}x - 2y + 10z - 4 = 0, \\ 5x^2 - 2\sqrt{5}x\cos\pi y\cos\pi z + 1 = 0. \end{cases}$$

8. Доказать, что уравнение $x^2 - 5y^2 = 3$ не имеет решений в целых числах.

9. Существуют ли пятерки последовательных целых чисел, сумма квадратов которых является квадратом целого числа?

10. Сколько различных целочисленных пар (x, y) удовлетворяют уравнению $x^2 = 4y^2 + 2025$?

11. Решить в целых числах уравнение $x^2 = 2(xy - y^2 - y)$.

12. Решить в целых числах уравнение $xy = 2x + 2y$.

13. Решить в натуральных числах уравнение $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{p}$, где p — заданное простое число.

14. Найти все корни уравнения

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(3x + \sqrt{9x^2 + 224x + 1416}\right)\right) = 1,$$

являющиеся целыми числами.

15. Найти такое натуральное двузначное число, что сумма квадрата числа его десятков и ушестеренного квадрата числа единиц равна умноженной на пять сумме произведения цифр этого числа и единицы.

16. Решить уравнение $15y^2x^2 - 8yx^2 + 28y^2x + x^2 + 5y^2 - 38xy + 8x - 24y + 16 = 0$ в целых числах.

ГЛАВА 3. ДРУГИЕ УРАВНЕНИЯ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

Все описанные в предыдущей главе методы применимы для решения не только диофантовых уравнений второго порядка с двумя неизвестными, но и других уравнений в целых числах. К таким уравнениям относятся уравнения второго порядка с тремя и более переменными, уравнения более высокого, чем второго, порядка, уравнения, содержащие показательные и логарифмические функции, а также некоторые другие уравнения. Выбор нужного метода при решении подобного уравнения порой является определяющим условием для успешного решения задачи. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить в целых числах уравнение $x^2 + 5y^2 + 34z^2 + 2xy - 10xz - 22yz = 0$.

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$x^2 + 5y^2 + 34z^2 + 2xy - 10xz - 22yz = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2 + 2x(y - 5z) + y^2 - 10yz + 25z^2) + 4y^2 - 12yz + 9z^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x + y - 5z)^2 + (2y - 3z)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 5z = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3n \\ z = 2n \\ x = 7n, \quad n \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $x = 7n$, $y = 3n$, $z = 2n$; $n \in Z$.

Пример 2. Найти все пары целых чисел (x, y), каждая из которых удовлетворяют уравнению $(x^2 + y^2)(x + y - 3) = 2xy$.

Решение. Ясно, что пара $(0, 0)$ является решением данного уравнения. Предположим теперь, что хотя бы одно из чисел x, y отлично от нуля. Имеем

$$(x^2 + y^2)(x + y - 3) = 2xy \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x + y - 3 = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \in [-1, 1]$$

при всех значениях x и y. Так как $x + y - 3$ — целое число, то возможны три варианта.

1. Если $x + y - 3 = -1$, то $x = -y$, нет решений.
2. Если $x + y - 3 = 0$, то либо $x = 0$, $y = 3$, либо $x = 3$, $y = 0$.
3. Если $x + y - 3 = 1$, то $x = y$, следовательно, $x = 2$ и $y = 2$.

Таким образом, решением данного уравнения будут служить следующие пары чисел:

$(x, y) = \{(2, 2); (3, 0); (0, 3); (0, 0)\}$.

Ответ: $\{(2, 2); (3, 0); (0, 3); (0, 0)\}$.

Пример 3. Найти все тройки простых чисел (p, q, r), которые удовлетворяют равенству $p^q + q^p = r$.

Решение. Заметим сначала, что если тройка удовлетворяет условию задачи, то и для тройки (q, p, r) данное равенство также выполняется. Предположим, что оба числа p и q нечетны. Тогда $p^q + q^p = r$ четно. Однако r простое, значит, $r = 2$. Легко видеть, что равенство $p^q + q^p = 2$ при натуральных p, q выполняется лишь при $p = q = 1$, однако число 1 не является простым.

Итак, хотя бы одно из чисел p и q четно (и, значит, равно 2). Если $p = q = 2$, то $p^q + q^p = 2^2 + 2^2 = 8$ не является простым числом. Пусть $p = 2 \neq q$. Заметим, что при $q = 3$, $2^3 + 3^2 = 17$ — простое число, т.е. тройка (2, 3, 17) удовлетворяет условию задачи.

Пусть $q > 3$. Так как q простое нечетное, то при делении на 6 оно может давать остаток 1 или 5, тогда q^2 при делении на 6 дает остаток 1. Рассмотрим остатки от деления на 6 степеней двойки. Они периодически повторяются: 2, 4, 2, 4, ... Если q дает при делении на 6 остаток 1 или 5, то 2^q дает остаток 2. Следовательно, $2^q + q^2 = r$ дает остаток 3 при делении на 6 и поэтому делится на 3. Это может быть только при $r = 3$. Однако ясно, что никакое $q > 3$ не удовлетворяет равенству $2^q + q^2 = 3$. Таким образом, решением задачи будут служить тройки (2, 3, 17) и (3, 2, 17).

Ответ: $\{(2, 3, 17); (3, 2, 17)\}$.

Пример 4. Найти все x, при которых оба числа, $\dfrac{5x^2+10x+4}{7x^2+6x+1}$ и $\dfrac{x}{1+x}$, являются целыми.

Решение. Пусть $y = \dfrac{x}{1+x}$ — целое число. Тогда

$$x = \frac{y}{1-y} \text{ и}$$

$$k = \frac{5x^2 + 10x + 4}{7x^2 + 6x + 1} = \frac{-y^2 + 2y + 4}{2y^2 + 4y + 1} = -\frac{1}{2} + \frac{4y + \frac{9}{2}}{2y^2 + 4y + 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2k + 1 = \frac{8y + 9}{2y^2 + 4y + 1},$$

где k — целое число. Решим последнее уравнение в целых числах. При $y \geq 4$ или $y \leq -6$ дробь $\dfrac{8y+9}{2y^2+4y+1}$ лежит в интервале $(-1,\ 1)$ и не является целым числом. Перебирая остальные y, находим, что решением уравнения являются $y = -5$, $y = -2$, $y = -1$ и $y = 0$, т.е. ответом к задаче будут служить $x = -\dfrac{5}{6}$, $x = -\dfrac{2}{3}$, $x = -\dfrac{1}{2}$ и $x = 0$.

Ответ: $x = -\dfrac{5}{6}$, $x = -\dfrac{2}{3}$, $x = -\dfrac{1}{2}$ и $x = 0$.

Пример 5. Найти все целые значения переменной n, при каждом из которых справедливо равенство $\dfrac{5n^2 + 4n + 13}{n+1} = 11 - 8\sqrt{1-8n}$.

Решение. Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\frac{5n^2 + 4n + 13}{n+1} = 11 - 8\sqrt{1-8n} \Leftrightarrow 8\sqrt{1-8n} =$$

$$= \frac{-5n^2 + 7n - 2}{n+1} = -5n + 12 - \frac{14}{n+1}.$$

Так как число $8\sqrt{1-8n}$, стоящее в левой части полученного уравнения, при целых n является либо целым, либо иррациональным, то и число, стоящее в правой части этого уравнения, должно быть целым (так как оно всегда рационально). Перебирая для числа $n + 1$ все делители числа 14, находим, что решением задачи является $n = -15$.

Ответ: $n = -15$.

Пример 6. Решить в натуральных числах уравнение $3^x + 4^y = 5^z$.

Решение. Так как правая часть исходного уравнения при натуральных z дает при делении на 4 остаток 1, то и левая часть этого уравнения должна давать такой же остаток при делении на 4, откуда следует, что x четно. Пусть $x = 2m$, где m — натуральное число. Аналогично рассмотрим остатки обеих частей уравнения при делении на 3. Левая часть при всех натуральных x и y дает остаток 1, а 5^z дает остаток 1 только при четных z, откуда следует, что $z = 2k$, где k — натуральное число. Тогда исходное уравнение можно переписать в виде $3^{2m} + 2^{2y} = 5^{2k}$, или $5^{2k} - 2^{2y} = 3^{2m}$.

Разложим левую часть полученного уравнения по формуле разности квадратов. Имеем

$$(5^k - 2^y)(5^k + 2^y) = 3^{2m}.$$

Так как разложение правой части на простые множители содержит только тройки, то каждая из скобок левой части должна быть неотрицательной степенью тройки. Поскольку разность чисел, стоящих в этих скобках, равна $2 \cdot 2^y$ и не делится на 3, то это возможно только в случае, когда $5^k - 2^y = 1$, а $5^k + 2^y = 3^{2m}$. Отсюда $5^k = 2^y + 1$, а $5^k + 2^y = 2^y + 1 + 2^y = 3^{2m}$, или $3^{2m} - 1 = 2^{y+1}$.

Еще раз применяя формулу разности квадратов, получаем $(3^m - 1)(3^m + 1) = 2^{y+1}$.

Значит, оба сомножителя в левой части являются степенями двойки, отличающимися на 2. Следовательно, $3^m - 1 = 2$, а $3^m + 1 = 4$, откуда $m = 1$, а $2^{y+1} = 8$, т.е. $y = 2$. Тогда $x = 2$ и $3^2 + 4^2 = 5^z$, откуда $z = 2$. Таким образом, единственным решением данного уравнения являются $x = 2$, $y = 2$ и $z = 2$.

Ответ: $x = 2$, $y = 2$, $z = 2$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить в целых числах уравнение $34x^2 + y^2 + 5z^2 - 10xy - 22xz + 2yz = 0$.

2. Найти все x, при которых оба числа, $\dfrac{x^2+4x-1}{7x^2-6x-5}$ и $\dfrac{1-x}{1+x}$, являются целыми.

3. Найти все целые значения параметра k, при которых графики функций $y = \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x-2k)$ и $y = \log_2(x - 2k^3 - 3k^2)$ пересекаются в точке с целочисленными координатами.

4. Целые числа k, n и m в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию с целым знаменателем. Известно, что число m на 39 больше, чем k, а прогрессия не является возрастающей. Чему равна сумма чисел k, n и m?

5. Найти все тройки (x, y, z) натуральных чисел, для которых выполнено следующее равенство: $3xy + 3yz + 3xz = 5xyz + 3$.

6. Найти все пары (m, n) натуральных чисел, для которых выполнено следующее равенство: $\log_m(n-7) + \log_n(5m-17) = 1$.

7. Для каких целых n выражение $\dfrac{n^3+\dfrac{n^2}{5}-n+115}{5n^2-4n-1}$ принимает целочисленные значения?

8. Решить в целых числах уравнение $\dfrac{xy}{z}+\dfrac{xz}{y}+\dfrac{yz}{x}=3$.

9. Найти все тройки натуральных чисел $k \le m \le n$, сумма обратных величин которых равна единице.

10. Найти все тройки натуральных чисел (x, y, z), удовлетворяющих равенству

$$x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\frac{30}{13}.$$

11. Найти все тройки целых чисел (x, y, z), для каждой из которых выполняется соотношение $5x^2 + y^2 + 3z^2 - 2yz = 30$.

12. Найти все целые значения переменной n, при каждом из которых справедливо равенство $\frac{2n^2 + n + 1}{n + 3} = 4\sqrt{3n + 10} - 6$.

13. Решить уравнение $x(y + 1)^2 = 243y$ в натуральных числах.

14. Найти все решения в целых числах уравнения $1 + 2^k + 2^{2k+1} = n^2$.

15. Найти наименьшее и наибольшее натуральные значения параметра n, при которых уравнение $(x^2 + y^2)^{2010} = x^n \cdot y^n$ имеет натуральные решения.

ГЛАВА 4. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

В завершение тем предыдущих глав рассмотрим несколько текстовых задач, при решении которых возникают уравнения в целых числах. В таких задачах необходимым условием их решения является правильная формализация задачи, т.е. введение нужных переменных и составление уравнения (или системы уравнений), содержащего эти переменные.

Пример 1. Длина дороги, соединяющей пункты A и B, равна 2 км. По этой дороге курсируют два автобуса. Достигнув пункта A или пункта B, каждый из автобусов немедленно разворачивается и следует без остановок к другому пункту. Первый автобус движется со скоростью 51 км/час, а второй — 42 км/час. Сколько раз за 8 часов движения автобусы встретятся в пункте B, если известно, что первый стартует из пункта A, а второй — из пункта B?

Решение. Первый автобус проезжает путь между A и B за $\frac{2}{51}$ часа, второй — за $\frac{1}{21}$ часа. Если оба автобуса встретились в пункте B, то за одинаковое время первый проехал этот путь нечетное число раз, второй — четное число раз. Имеем:

$$\frac{2}{51}\cdot(2n+1)=\frac{1}{21}\cdot 2k\le 8;\ n,\ k\in N \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14n+7=17k, \\ k\le 84. \end{cases}$$

Из последнего уравнения видно, что k нечетно и кратно 7. Таких чисел в интервале от 1 до 84 шесть, это 7, 21, 35, 49, 63 и 77. Каждому такому k соответствует целое значение n. Таким образом, за 8 часов движения автобусы встретятся в пункте B шесть раз.

Ответ: 6 раз.

Пример 2. Тринадцать пиратов делят клад золотых монет на палубе шхуны. При попытке разделить клад поровну оказалось, что остается 8 монет. Налетевшим штормом двух пиратов смыло за борт. Когда оставшиеся пираты снова стали поровну делить клад, то лишними оказались 3 золотые монеты. Затем в перестрелке погибли еще три пирата. Когда уцелевшие пираты опять стали делить клад, то на этот раз оказалось, что остается 5 монет. Из какого количества монет состоял клад, если для его переноски достаточно сундука, вмещающего 500 золотых монет?

Решение. Пусть $S \le 500$ — количество монет, из которых состоит клад, k, m и n — число монет, которые достались бы каждому пирату при первом, втором и третьем делении соответственно. Согласно условиям задачи имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} S = 13k + 8, \\ S = 11m + 3, \\ S = 8n + 5. \end{cases}$$

Решим эту систему в целых числах. Рассмотрим сначала уравнение $11m + 3 = 8n + 5$. Имеем:

$$11m + 3 = 8n + 5 \Leftrightarrow 8n = 11m - 2.$$

Перебирая все возможные остатки от деления m на 8, находим, что решением последнего уравнения являются $m = 8l + 6$; $l \in Z$. Следовательно, $S = 11m + 3 = 11(8l + 6) + 3 = 88l + 69$. Рассмотрим теперь уравнение $13k + 8 = 88l + 69$ или $13k = 88l + 61$. Применим к этому уравнению алгоритм последовательного уменьшения модулей коэффициентов при неизвестных. Имеем:

1. $13k = 88l + 61 = (13 \cdot 6 + 10)l + 61 \Leftrightarrow 13k - 78l = 10l + 61 \Rightarrow 13p = 10l + 61$, $p \in Z$.

2. $13p = 10l + 61 \Leftrightarrow 10l - 10p = 3p - 61 \Rightarrow 10q = 3p - 61$, $q \in Z$.

3. $10q = 3p - 61 \Leftrightarrow 3p - 9q = q + 61 \Rightarrow 3r = q + 61$, $r \in Z \Leftrightarrow q = 3r - 61$.

Вернемся теперь к исходным переменным:

1. $3p = 10q + 61 = 30r - 549 \Leftrightarrow p = 10r - 183$.

2. $10l = 13p - 61 = 130r - 2440 \Leftrightarrow l = 13r - 244$.

3. $S = 88l + 69 = 1144r - 21403$.

Так как S — натуральное число, не превосходящее 500, то единственный возможный вариант $S = 333$ при $r = 19$.

Замечание. Данную конкретную задачу можно решить проще, а именно, перебирая последовательно $l = 1, 2, \dots$, нужно выяснить, при каком l число $88l + 69$ при делении на 13 дает остаток 8.

Ответ: 333 монеты.

Пример 3. Мастер делает за 1 час целое число деталей, большее 5, а ученик — на 2 детали меньше. Один мастер выполняет заказ за целое число часов, а два ученика вместе — на 1 час быстрее. Из какого количества деталей состоит заказ?

Решение. Пусть $x > 5$ деталей делает мастер за 1 час, тогда ученик за один час делает $x - 2$ детали. Пусть также мастер выполняет заказ за t часов, где t — целое число. Согласно условиям задачи имеем уравнение

$$xt = 2(x-2)(t-1) \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{2x-4}{x-4} = 2 + \frac{4}{x-4}.$$

Дробь $\dfrac{4}{x-4}$ должна быть целым числом. При $x > 5$ это возможно, когда $x = 6$ или $x = 8$. В первом случае получаем, что $t = 4$, во втором — $t = 3$. В обоих случаях заказ состоит из $xt = 24$ деталей.

Ответ: Из 24 деталей.

Пример 4. Ваня и Петя ходили за грибами. Ваня нашёл 35 грибов, среди которых было несколько подосиновиков, а Петя грибов не нашёл. Ваня взял себе все белые грибы, а остальные отдал Пете. Петя, обнаружив среди них червивый подберёзовик, выкинул его. Сколько было найдено подосиновиков, если доля белых в найденных Ваней грибах оказалась равна доле подосиновиков в принесенных Петей домой грибах?

Решение. Обозначим число найденных Ваней подосиновиков за x, а белых грибов за y. Согласно условиям задачи имеем следующее уравнение:

$$\frac{y}{35} = \frac{x}{34 - y}; \quad x, y \in N \iff x = \frac{y(34 - y)}{35}.$$

Так как $35 = 5 \cdot 7$, а 5 и 7 — взаимно простые числа, то одно из чисел y и $34 - y$ должно делиться на 5, а другое — на 7. Перебирая все возможные варианты, получаем, что либо $y = 20$ и $34 - y = 14$, либо $y = 14$ и $34 - y = 20$. В обоих случаях находим, что $x = 8$. Таким образом, Ваня нашел 8 подосиновиков.

Ответ: 8 подосиновиков.

Пример 5. Любая из трех барж разной грузоподъемности может при полной загрузке в каждом рейсе перевезти некоторый груз, причем баржа наименьшей грузоподъемности — за 15 рейсов. Две другие баржи перевозят весь груз за 3 совместных рейса. Сколько рейсов необходимо барже наибольшей грузоподъемности для перевозки всего груза, если недогрузка барж запрещается?

Решение. Пусть x и y — количество рейсов, за которое перевозят весь груз баржи средней и наибольшей грузоподъемности ($x, y \in N$; $15 > x > y$), а объем (или масса) всего груза равен единице. Тогда $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ — грузоподъемности этих двух барж. Согласно условию задачи имеем уравнение

$$3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \iff y = \frac{3x}{x - 3} = 3 + \frac{9}{x - 3}.$$

Из последнего равенства следует, что число $x - 3$ должно быть делителем числа 9. Перебирая все возможные варианты, находим, что решением уравнения будут служить пары $(x, y) = \{(12, 4); (6, 6); (4, 12)\}$, а решением задачи — пара $x = 12$, $y = 4$. Таким образом, баржа наибольшей грузоподъемности сможет перевезти весь груз за 4 рейса.

Ответ: 4 рейса.

Пример 6. Абитуриенты сдавали экзамены в течение трех дней в одних и тех же аудиториях первого корпуса. Число экзаменовавшихся каждый день абитуриентов в каждой аудитории было равно числу аудиторий. Если бы экзамены проводились во втором корпусе, то их можно было провести за два дня, используя каждый день одни и те же аудитории, причем каждый день в каждой аудитории абитуриентов удалось бы рассадить по рядам так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равным числу используемых аудиторий. Найти минимальное возможное число абитуриентов, которое могло бы быть проэкзаменовано при этих условиях.

Решение. Пусть x и y — количество аудиторий в первом и во втором корпусе соответственно. Согласно условиям задачи получаем уравнение $3x^2 = 2y^3$, которое необходимо решить в натуральных числах. Заметим сначала, что y должно делиться на 3, поэтому $y = 3k$; $k \in N$. Уравнение в этом случае принимает вид $x^2 = 18k^3$. Выясним, при каких k число $18k^3$ является полным квадратом. Ясно, что это произойдёт тогда и только тогда, когда число $18k$ также будет полным квадратом. Имеем: $18k = n^2$; $n \in N$, откуда следует, что n^2 делится нацело на 18, т.е. $n = 6m$; $m \in N$. Тогда $k = 2m^2$, $x = 12m^3$ и $y = 6m^2$. Общее число абитуриентов в этом случае равно $3x^2 = 2y^3 = 432m^6$. Таким образом, минимальное возможное число абитуриентов, которое могло бы быть проэкзаменовано при данных условиях, равно 432.

Ответ: 432 абитуриента.

Пример 7. Игорь и Володя решали задачу: некоторое заданное трехзначное число прологарифмировать по основанию 2, из полученного числа вычесть некоторое заданное натуральное число и затем разность разделить на то же самое натуральное число. Игорь перепутал и в первом действии прологарифмировал по основанию 3, а Володя посчитал правильно. Когда они сверили свои результаты, оказалось, что полученные ими числа взаимно обратны. Найти исходное трехзначное число.

Решение. Пусть x — заданное трёхзначное число, а y — заданное натуральное число. Согласно условию задачи имеем следующее уравнение:

$$\frac{\log_2 x - y}{y} \cdot \frac{\log_3 x - y}{y} = 1 \Leftrightarrow \log_2 x \cdot \log_3 x =$$

$$= y(\log_2 x + \log_3 x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 3} = y\left(\frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{\log_x 3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = y(\log_x 3 + \log_x 2) = y \cdot \log_x 6,$$

откуда $\log_6 x = y$ и $x = 6^y$. Заметим теперь, что $6^2 = 36$ — двузначное число, $6^3 = 216$ — трёхзначное число, а $6^4 = 1296$ — четырёхзначное число. Таким образом, условию задачи удовлетворяют $x = 216$ и $y = 3$.

Ответ: 216.

Задачи для самостоятельного решения

1. Учительница принесла в класс счётные палочки. Дети раскладывали их в пакетики. Когда разложили по две палочки в каждый пакетик, то осталась одна лишняя палочка. Затем разложили по 13 штук в пакетик, и тогда осталось 7 лишних палочек. Когда же палочки разложили по 9 штук в пакетик, то лишних не осталось. Сколько, самое меньшее, было счётных палочек?

2. Длина дороги, соединяющей пункты A и B, равна 3 км. По этой дороге курсируют два автобуса. Достигнув пункта A или пункта B, каждый из автобусов немедленно разворачивается и следует без остановок к другому пункту. Первый автобус движется со скоростью 50 км/ч, а второй — 44 км/ч. Сколько раз за 9 часов движения автобусы встретятся в пункте B, если известно, что первый стартует из пункта A, а второй — из пункта B?

3. Турфирма планирует экскурсионный маршрут для группы туристов с посещением городов A, B и C. Для проезда до города A по железной дороге были забронированы все места в 5 одинаковых вагонах и 1 место еще в одном ва-

гоне. Для проезда из A в B по морю были арендованы все места в 7 одинаковых яхтах и 2 места еще в одной яхте. Для проезда из B в C были выкуплены все места в 11 одинаковых автобусах и 3 места еще в одном автобусе. Определить количество туристов в группе, если на обратный путь заказан чартерный авиарейс на самолёт, вмещающий не более 400 пассажиров.

4. Один рабочий на новом станке производит за 1 ч целое число деталей, большее 8, а на старом станке — на 3 детали меньше. На новом станке один рабочий выполняет дневную норму за целое число часов, а два рабочих вместе выполняют норму на старых станках на 1 ч быстрее. Из какого количества деталей состоит дневная норма, если производительность рабочих одинакова?

5. Коля и Толя ходили за грибами. Толя нашёл 21 гриб, среди которых было несколько подберезовиков, а Коля грибов не нашёл. Толя взял себе все подосиновики, а остальные отдал Коле. Коля, обнаружив среди них червивый белый гриб, выкинул его. Сколько было найдено подберезовиков, если доля подосиновиков в найденных Толей грибах оказалась равна доле подберёзовиков в принесённых Колей домой грибах?

6. Любой из трёх грузовиков разной грузоподъемности при полной загрузке в каждой ездке может перевезти некоторый груз, причем грузовик с наименьшей грузоподъёмностью — за 10 ездок. Сколько совместных ездок необходимо двум другим грузовикам для перевозки всего груза, если недогрузка грузовиков запрещается?

7. Собранные на бахче арбузы уложили в одинаковые контейнеры, положив в каждый контейнер одинаковое число арбузов. Когда третью часть всех контейнеров погрузили в автомобили, то число погруженных контейнеров оказалось равно числу арбузов в одном контейнере. Пятая часть всех собранных арбузов была продана магазином в течение нескольких дней, причем каждый день продавалось одно и то же число арбузов, равное квадрату

числа дней продажи. Какое минимальное количество арбузов могло быть собрано?

8. Саша и Олег решали задачу: некоторое заданное трёхзначное число прологарифмировать по основанию 3, полученное число разделить на некоторое заданное натуральное число, а затем из частного вычесть единицу. Саша перепутал и в первом действии прологарифмировал по основанию 5, а Олег посчитал правильно. Когда они сравнили свои результаты, оказалось, что полученные ими числа взаимно обратны. Найти исходное трёхзначное число.

ГЛАВА 5. ОЦЕНКИ ПЕРЕМЕННЫХ. ОРГАНИЗАЦИЯ ПЕРЕБОРА

Один из самых распространенных приемов при решении задач в целых числах — это заключение целочисленной переменной в интервал с последующим перебором всех целых значений из этого интервала. Иногда для этого приходится складывать неравенства, полученные согласно условиям задачи (при этом знаки неравенств должны быть «повернуты» в одну сторону). Также возможен переход от двойного неравенства к одинарному путём исключения центральной части двойного неравенства. Надо понимать, что оба этих преобразования не являются равносильными, а осуществляют переход к следствию, т.е. при их применении возможно появление посторонних решений. В связи с вышесказанным после применения данных преобразований необходима проверка. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем в три раза превышает число деталей во втором ящике. Утроенное число деталей в первом ящике превышает удвоенное число деталей во втором ящике, но менее чем на 60. Сколько деталей в каждом ящике?

Решение. Обозначим через x число деталей в первом ящике, а через y — число деталей во втором. Тогда, согласно условию, имеет место система неравенств

$$\begin{cases} x + y > 29 \\ x - 2 > 3y \\ 0 < 3x - 2y < 60. \end{cases}$$

Перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases} x > 29 - y \\ x > 3y + 2 \\ x > \dfrac{2}{3}y \\ 20 + \dfrac{2}{3}y > x. \end{cases}$$

Отсюда следует, что справедливы неравенства

$$20 + \frac{2}{3}y > 29 - y, \ 20 + \frac{2}{3}y > 3y + 2.$$

Первое из них можно переписать в виде $y > \frac{27}{5}$, а второе — в виде $y < \frac{54}{7}$. Так как y — натуральное число, то y равен либо 6, либо 7. Если y равен 6, то система неравенств перепишется в виде

$$\begin{cases} x > 23 \\ x > 20 \\ x > 4 \\ x < 24. \end{cases}$$

Ясно, что нет натуральных чисел x, удовлетворяющих ей. Значит, $y = 7$. Тогда исходная система перепишется в виде

$$\begin{cases} x > 22 \\ x > 23 \\ x > 4\frac{2}{3} \\ x < 24\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что существует единственное натуральное число $x = 24$, ей удовлетворяющее. Следовательно, в первом ящике 24 детали, а во втором — 7 деталей.

Ответ: 24 детали и 7 деталей.

Пример 2. Рабочий изготовил некоторое количество деталей двух видов: A и B, причем деталей A он изготовил больше, чем деталей B. Если он изготовит деталей A в 2 раза больше, то общее число деталей станет менее 32, а если деталей B в 2 раза больше, то общее число деталей станет больше 28. Сколько деталей A и сколько деталей B изготовил рабочий?

Решение. Обозначим через x и y количество изготовленных рабочим деталей вида A и B соответственно. Согласно условиям задачи имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} x > y \\ 2x + y < 32 \\ x + 2y > 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y > 0 \\ -2x - y > -32 \\ x + 2y > 28. \end{cases}$$

Умножив первое неравенство на 2 и сложив со вторым, получим $-3y > -32 \Leftrightarrow y < \dfrac{32}{3}$. Умножив третье неравенство на 2 и сложив со вторым, получим $3y > 24 \Leftrightarrow y > 8$. Так как y — целое число, то из полученных неравенств следует, что $y = 9$ или $y = 10$. Подставив $y = 9$ в исходную систему, получим

$$\begin{cases} x > 9 \\ 2x + 9 < 32 \\ x + 18 > 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 9 \\ x < \dfrac{23}{2} \\ x > 10 \end{cases} \overset{\text{так как } x \in Z}{\Leftrightarrow} \quad x = 11.$$

Подставив $y = 10$ в исходную систему, получим

$$\begin{cases} x > 10 \\ 2x + 10 < 32 \\ x + 20 > 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 10 \\ x < 11 \\ x > 8 \end{cases} \overset{\text{так как } x \in Z}{\Leftrightarrow} \quad x \in \varnothing.$$

Ответ: 11 деталей и 9 деталей.

Пример 3. Груз вначале погрузили в вагоны по 80 тонн, но один вагон оказался загружен не полностью. Тогда весь груз переложили в вагоны по 60 тонн, однако понадобилось на 8 вагонов больше и при этом все равно один вагон оказался не полностью загруженным. Наконец, груз переложили в вагоны вместимостью по 50 тонн, однако понадобилось еще на 5 вагонов больше, при этом все такие вагоны были загружены полностью. Сколько было груза?

Решение. Пусть x — количество вагонов вместимостью 80 тонн, а S — количество тонн груза. То, что один вагон оказался не полностью загружен, означает выполнение неравенств

$$80(x - 1) < S < 80x.$$

Аналогично, используя остальные условия задачи, получим систему:

$$\begin{cases} 80(x-1) < S < 80x \\ 60(x+7) < S < 60(x+8) \\ 50(x+13) = S \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 80(x-1) < 50(x+13) < 80x \\ 60(x+7) < 50(x+13) < 60(x+8) \\ 50(x+13) = S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{73}{3} \\ x > \dfrac{65}{3} \\ x < 23 \\ x > 17 \\ 50(x+13) = S. \end{cases}$$

Так как количество вагонов — целое число, то единственное возможное значение x, удовлетворяющее полученной системе неравенств, это $x = 22$. Значит, $S = 50(x + 13) = 1750$.

Ответ: 1750 тонн.

Пример 4. Бригаде грузчиков выделена некоторая сумма денег на разгрузку баржи, однако три человека заболели и в работе не участвовали. Оставшиеся выполнили задание, заработав каждый на 1,5 тыс. руб. больше, чем в случае работы в составе полной бригады. Определить выделенную бригаде сумму денег, если 5%-й сбор за ее банковский перевод обошелся работодателю дополнительно в величину, находящуюся в пределах от 1,2 до 1,6 тыс. руб.

Решение. Пусть x тыс. руб. — выделенная сумма денег, n — первоначальное количество членов бригады. Согласно условиям задачи имеем следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{n} + 1,5 = \dfrac{x}{n-3} \\ 1,2 \le 0,05x \le 1,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{n^2 - 3n}{2} \\ 24 \le x \le 32 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 48 < n^2 - 3n < 64.$$

Существует единственное натуральное число $n = 9$, удовлетворяющее последнему неравенству, при этом $x = 27$. Таким образом, выделенная бригаде сумма денег составляла 27 тыс. руб.

Ответ: 27 тыс. руб.

Пример 5. Линию, связывающую города A и B, обслуживают самолеты трех типов. Каждый из самолетов первого, второго и третьего типов может принять на борт, соответственно, 230, 110 и 40 пассажиров, а также 27, 12 и 5 контейнеров. Все самолеты линии могут принять на борт, одновременно 760 пассажиров и 88 контейнеров. Найти число действующих на линии самолетов каждого типа, зная, что их общее число не превосходит 8.

Решение. Пусть x, y и z — число самолетов первого, второго и третьего типов соответственно. Согласно условиям задачи имеем следующую систему:

$$\begin{cases} 230x + 110y + 40z = 760 \\ 27x + 12y + 5z = 88 \\ x + y + z \le 8. \end{cases}$$

Если разделим первое уравнение системы на 10 и вычтем его из второго уравнения, то получим, что $4x + y + z = 12$. Так как $y \ge 1$ и $z \ge 1$, то отсюда следует, что $4x \le 10$ и $x \le 2$ (так как x — целое число). С другой стороны, из полученного равенства и условия задачи вытекает, что $x + y + z = 12 - 3x \le 8$, т.е. $3x \ge 4$ и $x \ge 2$. Значит, $x = 2$ и $y + z = 4$. Имеем далее:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y + z = 4 \\ 27x + 12y + 5z = 88 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 2.$$

Таким образом, линию обслуживают по два самолета каждого типа.

Ответ: По два самолета каждого типа.

Часто бывает так, что перебирать приходится большое число вариантов, и такой перебор становится неразумным. В этом случае на помощь приходят дополнительные соображения. Иногда проблему решают свойства делимости (например, в силу каких-либо условий задачи рассматриваются не все целые числа в данном промежутке, а только те числа, которые делятся на 5). В некоторых задачах бывает полезным дополнительно воспользоваться неотрицательностью какой-либо переменной. Кроме этого, существуют некоторые специальные приемы решения такого рода задач. В целом можно сказать, что наибольшую сложность при решении задач данного типа представляет разумная организация перебора. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 6. В течение нескольких дней двое рабочих изготовляли специальные детали, причем ежедневная выработка деталей у каждого рабочего была постоянной. В итоге за все эти дни второй рабочий изготовил на k деталей больше, чем первый, где число k удовлетворяет неравенствам $127 \le k \le$ ≤ 132. Если бы первый рабочий увеличил ежедневную выработку в 2 раза, то за то же количество дней он изготовил бы на 77 деталей больше, чем второй. Сколько дней рабочие изготовляли детали? Какова была ежедневная выработка каждого из них?

Решение. Пусть x и y — производительность первого и второго рабочего, соответственно, а n — количество рабочих дней. Согласно условиям задачи имеем систему:

$$\begin{cases} 127 \le (y - x)n \le 132 \\ (2x - y)n = 77. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы следует, что число n должно быть делителем числа 77, т.е. n может принимать значения 1, 7, 11 или 77. Так как согласно условию задачи дней было несколько, n не может быть равным единице. Пусть $n = 7$. Имеем:

$$\begin{cases} 127 \le 7(y - x) \le 132 \\ 2x - y = 11. \end{cases}$$

Так как $(y - x)$ — целое число, то число $7(y - x)$ должно делиться на 7. Однако в промежутке [127, 132] нет ни одного такого числа. Поэтому $n = 7$ не удовлетворяет условию задачи. При $n = 11$ получим следующую систему:

$$\begin{cases} 127 \le 11(y - x) \le 132 \\ 2x - y = 7. \end{cases}$$

В промежутке [127, 132] существует единственное целое число, делящееся на 11, это число — 132. При этом данная система примет вид

$$\begin{cases} y - x = 12 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

и имеет решением пару чисел $x = 19$ и $y = 31$. И, наконец, случай $n = 77$ разбирается аналогично случаю $n = 7$ и решений задачи не дает.

Ответ: 11 дней; 19 деталей и 31 деталь.

Пример 7. В школьной газете сообщается, что процент учеников некоторого класса, повысивших во втором полугодии свою успеваемость, заключен в пределах от 2,9 до 3,1%. Определить минимально возможное число учеников в таком классе.

Решение. Пусть x — число учеников в классе. Ясно, что x будет минимальным, если минимально число учеников, повысивших во втором полугодии свою успеваемость. Пусть это будет один ученик. Число 1 от числа x составляет $\frac{1}{x} \cdot 100\%$. Согласно условию задачи имеем

$$2{,}9\% \le \frac{1}{x} \cdot 100\% \le 3{,}1\% \Leftrightarrow \frac{100}{3{,}1} \le x \le \frac{100}{2{,}9}.$$

Только два целых числа x удовлетворяют полученным неравенствам: это $x = 33$ и $x = 34$. Ясно, что меньшее среди них — это $x = 33$.

Ответ: 33 ученика.

Пример 8. Непустое множество X состоит из конечного числа n натуральных чисел. Четных чисел в X меньше двух третей от n, а нечетных — не больше 36% от n. Какое минимальное значение может принимать число n?

Решение. Пусть m — количество четных чисел в X. Согласно условиям задачи имеем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} m < \dfrac{2}{3}n \\ n - m \le \dfrac{9}{25}n \end{cases} \Leftrightarrow \frac{16}{25}n \le m < \frac{2}{3}n \Leftrightarrow \frac{48}{25}n \le 3m < 2n.$$

Так как неравные между собой целые числа $3m$ и $2n$ различаются по крайней мере на единицу, последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$\frac{48}{25}n \le 3m \le 2n - 1 \Rightarrow \frac{48}{25}n \le 2n - 1 \Leftrightarrow n \ge 12{,}5.$$

Если $n = 13$, то промежуток $\left[\frac{16}{25}n,\ \frac{2}{3}n\right)$ не содержит целых чисел, если же $n = 14$, то этот промежуток содержит целое число $m = 9$. Таким образом, общее количество чисел в X равно 14.

Ответ: $n = 14$.

Пример 9. На первом складе сахара было на 16 тонн больше, чем соли. За день с первого склада вывезли $\frac{1}{m}$ часть сахара и $\frac{1}{3}$ часть соли, причем сахара вывезли на 2 тонны больше, чем соли. На втором складе соли было на 4 тонны больше, чем сахара. За день со второго склада также вывезли $\frac{1}{m}$ часть сахара и $\frac{1}{5}$ часть соли, причем сахара вывезли на 3 тонны больше, чем соли. Сколько соли было на первом и втором складах, если известно, что m — целое число? При каких m задача имеет решение?

Решение. Обозначим через x количество соли на первом складе, тогда $x + 16$ — количество сахара на этом же складе. Пусть также y и $y + 4$ — соответственно, количество сахара и соли на втором складе. Согласно условиям задачи имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x+16}{m} = 2 + \dfrac{x}{3} \\ \dfrac{y}{m} = 3 + \dfrac{y+4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6m-48}{3-m} > 0 \\ y = \dfrac{19m}{5-m} > 0 \end{cases} \Rightarrow m \in (3, 5),$$

следовательно, $m = 4$, так как m — целое число. Значит, $x = 24$, $y = 76$ и $y + 4 = 80$. Таким образом, на первом и втором складах было 24 и 80 тонн соли соответственно.

Ответ: 24 и 80 тонн; $m = 4$.

Пример 10. Две бригады однотипных тракторов задействованы на вспашке поля. Время вспашки поля только первой бригадой отличается от времени вспашки поля только второй бригадой не более чем на $\frac{1}{25}$ часть времени вспашки поля одним трактором. Если сначала восьмая часть первой бригады вспашет первую половину поля, а затем пятая часть второй бригады вспашет оставшуюся половину поля, тогда затраченное на вспашку поля время составит $\frac{2}{9}$ от времени вспашки поля одним трактором. Определить количество тракторов в каждой бригаде.

Решение. Пусть m и n — количество тракторов в первой и второй бригаде соответственно, x — производительность одного трактора, всю работу примем за единицу. Согласно условиям задачи получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \left|\frac{1}{mx}-\frac{1}{nx}\right| \le \frac{1}{25x} \\ \frac{1}{2\cdot\frac{1}{8}mx}+\frac{1}{2\cdot\frac{1}{5}nx}=\frac{2}{9x}, \end{cases}$$

причем $\frac{m}{8}$ и $\frac{n}{5}$ — целые числа, т.е. m кратно 8, а n кратно 5. Преобразуем данную систему следующим образом:

$$\begin{cases} \left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right| \le \frac{1}{25} \\ \frac{4}{m}+\frac{5}{2n}=\frac{2}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{1}{m}-\frac{4m-72}{45m}\right| \le \frac{1}{25} \\ n=\frac{45m}{4m-72} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{117-4m}{9m}\right| \le \frac{1}{5} \\ n=\frac{45m}{4m-72} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{5} \le \frac{117-4m}{9m} \le \frac{1}{5} \\ n=\frac{45m}{4m-72} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \in [21,\ 53].$$

так как m — целое число. Кроме того, m кратно 8, поэтому $m = 24,\ 32,\ 40,\ 48$. Если $m = 24$, то $n = 45$ кратно 5. Если

$m = 32$ или $m = 40$, то n не является целым числом. И, наконец, если $m = 48$, то $n = 18$ не кратно 5. Таким образом, в первой бригаде было 24 трактора, а во второй — 45 тракторов.

Ответ: 24 трактора и 45 тракторов.

Пример 11. Через некоторое время после начала работы первая бригада собрала на 2 автомобиля больше, чем вторая. Затем вторая бригада увеличила производительность труда в 1,1 раза и, собрав на втором этапе работы целое число автомобилей n, догнала первую, работавшую все время с постоянной производительностью. Найти наименьшее возможное целое число n.

Решение. Пусть на первом этапе работы первая бригада собрала $k + 2$ автомобилей, а вторая бригада — k автомобилей. Тогда на втором этапе первая бригада собрала $n - 2$ автомобилей, а вторая — n автомобилей. Ясно, что на каждом этапе работы отношение числа собранных первой и второй бригадой автомобилей есть отношение производительностей труда этих бригад. Так как на втором этапе последнее отношение уменьшилось в 1,1 раза, имеем следующее уравнение:

$$\frac{k+2}{k} = 1{,}1 \cdot \frac{n-2}{n} \Leftrightarrow k = \frac{20n}{n-22} > 0,$$

поскольку k является натуральным числом. Ясно, что наименьшее возможное значение n равно 23 (при этом $k = 460$). Таким образом, на втором этапе работы вторая бригада собрала 23 автомобиля.

Ответ: $n = 23$.

Задачи для самостоятельного решения

1. В первый день у Васи было денег на 30 рублей больше, чем у Пети. Вася внес на покупку книг $\frac{1}{n}$ часть своих денег, а Петя $\frac{1}{2}$ часть своих денег, при этом Петя внес

на 20 рублей больше Васи. На второй день мальчики пошли в магазин за тетрадями. На этот раз у Васи было на 60 рублей больше, чем у Пети. На покупку тетрадей Вася снова внес $\frac{1}{n}$ часть своих денег, а Петя внес $\frac{1}{4}$ часть своих денег, при этом Вася внёс на 40 рублей больше Пети. Сколько денег было у Пети в первый и второй день, если известно, что n — целое число? При каких n задача имеет решение?

2. Непустое множество Y состоит из конечного числа l действительных чисел, отличных от нуля. Положительных чисел в Y меньше трёх четвертей от l, а отрицательных — не больше 27% от l. Какое минимальное значение может принимать число l?

3. Группа школьников, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки 2, 3, 4 и 5. Сумма всех полученных оценок равна 93, причём троек было больше, чем пятерок, и меньше, чем четвёрок. Число четвёрок делилось на 10, а число пятерок было чётным. Определить, сколько и каких оценок получили школьники.

4. Рассматриваются четыре натуральных числа. Сумма первого, удвоенного второго и утроенного третьего меньше четвёртого на 17; сумма второго, удвоенного первого и утроенного третьего меньше четвёртого на 28; сумма первого, второго и 5 раз взятого третьего равна четвёртому. Найти четвёртое число, если оно нечётное, а второе число не превосходит третьего.

5. За время t первый рабочий сделал на 3 детали больше второго. Затем второй рабочий увеличил производительность труда на 0,2 детали в минуту и через некоторое целое число минут догнал и обогнал первого, работавшего с постоянной производительностью, на 2 детали. Найти наибольшее возможное время t.

6. Найти все трёхзначные натуральные числа, каждое из которых больше суммы квадратов своих цифр на 517.

7. Из аэропорта одновременно вылетают два самолёта и сразу набирают скорость и высоту. Они летят по замкнутым круговым маршрутам: первый — по окружности радиуса R, а второй — по окружности радиуса r. Предполагается, что самолёты летят безостановочно с одинаковыми постоянными скоростями и каждый из них облетает свою окружность за целое число часов. Кроме того, не ранее чем через 43 часа и не позднее чем через 49 часов после вылета произошли следующих два события: первый самолёт облетел свою окружность 4 раза, а второй облетел свою окружность 5 раз, — и разрыв во времени между этими событиями составил не менее двух часов. Найти отношение $\frac{r}{R}$.

8. Вовочка написал домашнее сочинение и допустил орфографические и пунктуационные ошибки. Затем его сестра проверила сочинение и исправила часть ошибок. В новом тексте количество пунктуационных ошибок оказалось в пределах от 15,5 до 18% от числа пунктуационных ошибок в старом тексте. Количество орфографических ошибок уменьшилось втрое и составило 25% от числа пунктуационных ошибок в первоначальном тексте. Может ли в новом тексте содержаться ровно 6 ошибок? Какое наименьшее число ошибок могло содержаться в первоначальном тексте?

9. Один рабочий бригады, состоящей из 5 человек, производит в среднем 14 деталей в час, причем каждый из рабочих производит в час целое число деталей, не превышающее 16. Сколько деталей в час может делать при этих условиях рабочий с самой низкой производительностью?

10. В академическом собрании сочинений, включающем менее 20 томов, число томов с художественными произведениями кратно числу томов с письмами, которых, в свою очередь, в 3 раза меньше, чем томов с публицистикой. Если число томов с художественными произве-

дениями увеличить в 2 раза, то их станет на 14 больше, чем томов с письмами. Сколько томов с публицистикой содержит собрание сочинений?

11. Для рытья котлована первоначально планировалось использовать звено экскаваторов одной модели, однако перед началом работы в звено было добавлено дополнительно 4 экскаватора той же модели. В результате котлован был вырыт на 3 часа ранее первоначально запланированного срока. Определить время, за которое котлован мог быть вырыт одним экскаватором, если в этом случае при расходе топлива 20 кг в час необходимое для работы экскаватора количество топлива находится в пределах от 1,2 до 1,71 тонны.

12. Автоматы двух типов красили детали, и все детали были покрашены за час. Определить число автоматов, если известно, что каждый из них мог бы покрасить все детали за целое число часов, общая сумма которых равна 55.

13. В двух группах учится одинаковое количество студентов. Каждый студент изучает по крайней мере один язык: английский или французский. Известно, что 5 человек в первой и 5 во второй группе изучают оба языка. Количество изучающих французский в первой группе в 3 раза меньше, чем во второй. Количество изучающих английский во второй группе в 4 раза меньше, чем в первой. Каково минимально возможное количество студентов в одной группе?

14. Две бригады маляров одинаковой квалификации задействованы на покраске фасада торгового центра. Время покраски фасада только первой бригадой отличается от времени покраски фасада только второй бригадой не более чем на $\frac{1}{8}$ часть времени покраски фасада одним маляром. Если сначала пятая часть первой бригады покрасит первую половину фасада, а затем третья часть второй бригады покрасит оставшуюся половину фасада, тогда затраченное на покраску фасада время составит $\frac{7}{20}$ от времени покраски фасада одним маляром. Определить численность бригад.

15. Около дома посажены липы и берёзы, причём общее их количество более 14. Если увеличить вдвое количество лип, а количество берёз увеличить на 18, то берёз станет больше. Если увеличить вдвое количество берёз, не изменяя количества лип, то лип все равно будет больше. Сколько лип и сколько берёз было посажено?

16. Автоматическая линия выпускает за 600 операций три партии шин для легковых автомобилей и 11 партий шин для грузовых автомобилей. Если бы эта автоматическая линия изготовляла только шины для грузовых автомобилей и изготовила столько партий таких шин, сколько операций она тратит на изготовление партии шин для легковых автомобилей, то этой автоматической линии потребовалось бы не менее 2727 операций. Сколько операций требуется автоматической линии для изготовления одной партии шин для грузовых автомобилей?

17. При подведении итогов соревнования вычислено, что процент числа членов бригады, перевыполнивших план, заключён в пределах от 92,5 до 93,5%. Определить минимально возможное число членов этой бригады.

18. В течение нескольких дней в города A и B завозили арбузы, причем ежедневные поставки арбузов в каждый город были постоянными и составляли целое число тонн. В итоге за все эти дни в город B было завезено на k тонн арбузов больше, чем в город A, где число k удовлетворяет неравенствам $155 \le k \le 160$. Если бы ежедневные поставки в город A были увеличены в 2 раза, то за то же число дней в A завезли бы на 91 тонну арбузов больше, чем в B. Сколько дней продолжался завоз арбузов? Каковы были ежедневные поставки в каждый город?

19. Химический завод имеет цеха трёх типов. В каждом цехе первого, второго и третьего типов работают, соответственно, 350, 80 и 30 рабочих, а также 91, 19 и 8 технологов. Всего в цехах завода работают 980 рабочих и 252 технолога. Найти число цехов каждого типа, зная, что их общее число не превосходит 15.

20. В поле работают тракторные бригады, содержащие по одинаковому количеству гусеничных тракторов и по одинаковому количеству колёсных тракторов, причём в каждой бригаде число всех тракторов меньше 9. Если в каждой бригаде число колёсных тракторов увеличить в 3 раза, а гусеничных в 2 раза, то общее число колесных тракторов во всех бригадах будет на 27 больше общего числа гусеничных тракторов, а в каждой бригаде число тракторов превысит 20. Определить количество бригад, работающих в поле, и число гусеничных и колёсных тракторов в каждой бригаде.

21. Группа самолетов, пятая часть из которых — бомбардировщики, вылетела с аэродрома. При этом не более 10 из них полетели на запад, а остальные — на восток. Оказалось, что число самолетов, полетевших на восток, больше 50%, но меньше 55% от общего количества. Сколько самолетов полетели на запад?

ГЛАВА 6. НЕРАВЕНСТВА В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ. ГРАФИЧЕСКИЕ ИЛЛЮСТРАЦИИ

Часто при решении уравнений, неравенств, систем, а также текстовых задач, связанных с целыми числами, удобно пользоваться графической иллюстрацией. Иногда удаётся достаточно несложно изобразить множество решений на координатной плоскости, и возникает необходимость выделить из этого множества точки с целочисленными координатами. Не всегда такую задачу можно решить «на глазок». В этом случае используются какие-либо дополнительные соображения. Можно, например, заключить данное множество в прямоугольник с последующим исключением лишних точек путем проверки. В любом случае применение графической иллюстрации при решении задачи требует сопутствующих вычислений и строгого обоснования. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти все пары целых чисел $(x,\ y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y^3 - 3x^2 - 4y + 18x - 26 > 0, \\ y^3 + x^2 - 4y - 8x + 14 < 0. \end{cases}$$

Решение. Умножим первую строку данной системы на (-1) и сложим со второй строкой. Имеем:

$$\begin{cases} y^3 - 3x^2 - 4y + 18x - 26 > 0 \\ y^3 + x^2 - 4y - 8x + 14 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y^3 + 3x^2 + 4y - 18x + 26 < 0 \\ y^3 + x^2 - 4y - 8x + 14 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 26x + 40 < 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} < x < 4 \Rightarrow x = 3,$$

так как x — целое число. Подставляя $x = 3$ в исходную систему, получаем

$$\begin{cases} y^3 - 4y > -1 \\ y^3 - 4y < 1 \end{cases} \Rightarrow \ y^3 - 4y = 0,$$

так как y — целое число. Следовательно, $y = 0$ или $y = \pm 2$, и ответом к задаче будут служить пары чисел $(x,\ y) = \{(3,\ 0);\ (3,\ 2);\ (3,\ -2)\}$.

Ответ: $\{(3,\ 0);\ (3,\ 2);\ (3,\ -2)\}$.

Пример 2. Найти все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| < y + 1, \\ y + |x - 1| < 2. \end{cases}$$

Решение. Пусть $t = x - 1$, тогда данная система примет следующий вид:

$$\begin{cases} |t^2 - 1| < y + 1 \\ y + |t| < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > |t^2 - 1| - 1 \\ y < 2 - |t|. \end{cases}$$

На координатной плоскости Oty полученная система определяет множество точек, изображенное на рис. 1 (граница не принадлежит данному множеству).

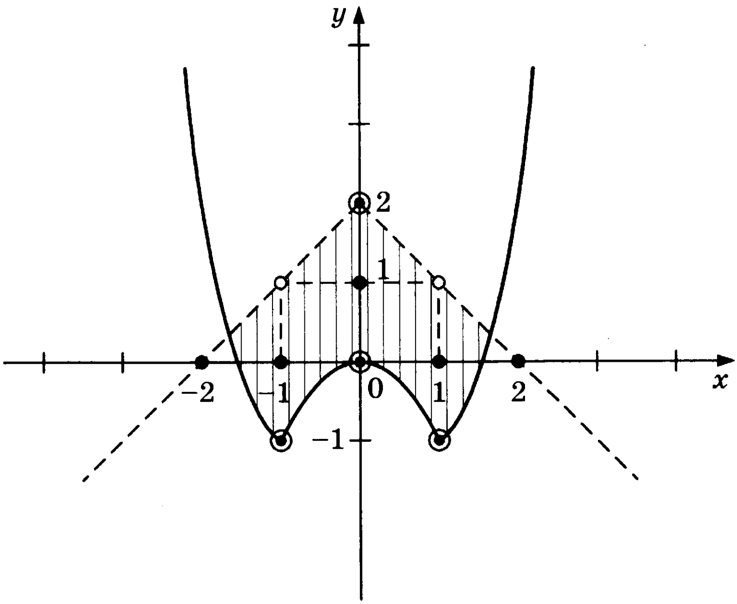

Рис. 1

Из этого рисунка видно, что в полученном множестве содержатся только три точки с целочисленными координатами — это $(t,\ y) = \{(-1,\ 0);\ (1,\ 0);\ (1,\ 1)\}$. Таким образом, ответом к задаче будут служить пары чисел $(x,\ y) = \{(0,\ 0);\ (2,\ 0);\ (1,\ 1)\}$.

Ответ: $\{(0,\ 0);\ (2,\ 0);\ (1,\ 1)\}$.

Пример 3. Найти все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x - y \le -25, \\ x^2 - y \le 8, \\ 4x + y \le 1. \end{cases}$$

Решение. Складывая первое неравенство данной системы с третьим, получаем неравенство $5x \le -24$, откуда $x \le -\dfrac{24}{5}$.

Если же сложить между собой второе и третье неравенства исходной системы, то получится неравенство $x^2 + 4x \le 9$, которое будет иметь своим решением промежуток $x \in \left[-2-\sqrt{13}, -2+\sqrt{13}\right]$. Следовательно, искомые значения переменной x должны принадлежать промежутку $x \in \left[-2-\sqrt{13}, -\dfrac{24}{5}\right]$. А так как x — целое число, то $x = -5$.

Подставляя $x = -5$ в данную систему, находим, что

$$\begin{cases} -5 - y \le -25 \\ 25 - y \le 8 \\ -20 + y \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 20 \\ y \ge 17 \\ y \le 21 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 20 \\ y = 21, \end{array}\right.$$

так как y также является целым числом. Таким образом, ответом к задаче будут служить пары чисел $(x, y) = \{(-5, 20); (-5, 21)\}$.

Ответ: $\{(-5, 20); (-5, 21)\}$.

Пример 4. Найти все тройки целых чисел (x, y, z), удовлетворяющих неравенству

$$\lg(2x + 3y - 6z + 3) + \lg(3x - 5y + 2z - 2) + \lg(2y + 4z - 5x + 2) > z^2 - 9z + 17.$$

Решение. Заметим сначала, что при любых значениях переменных x, y, z сумма трёх чисел, стоящих под знаком логарифмов, равна 3. Кроме того, каждое из этих чисел является целым и положительным. Следовательно, все три указанных числа равны 1, а левая часть неравенства при этом обращается в нуль. Имеем:

$$z^2 - 9z + 17 < 0;\ z \in Z \Leftrightarrow z = 3, 4, 5, 6.$$

При $z = 3$ для нахождения x и y получаем систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 3x - 5y = -3, \end{cases}$$

которая не имеет решений в целых числах. При $z = 4$ имеем:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 22 \\ 3x - 5y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4. \end{cases}$$

Если $z = 5$, система принимает вид

$$\begin{cases} 2x + 3y = 28 \\ 3x - 5y = -7, \end{cases}$$

и не имеет целочисленных решений. И, наконец, если $z = 6$, находим, что

$$\begin{cases} 2x + 3y = 34 \\ 3x - 5y = -9. \end{cases}$$

Полученная система также не имеет решений в целых числах. Таким образом, ответом к задаче будут служить $x = 5$, $y = 4$ и $z = 4$.

Ответ: $\{(5, 4, 4)\}$.

Пример 5. Найти все пары целых чисел x, y, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 12x + 20y + 65 < 0, \\ 4x + 2y > 3. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем данную систему следующим образом:

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 - 12x + 20y + 65 < 0 \\ 4x + 2y > 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (y+5)^2 < \dfrac{3}{2} \\ y > \dfrac{3}{2} - 2x. \end{cases}$$

На координатной плоскости Oxy полученная система определяет множество точек, изображенное на рис. 2 (граница не принадлежит данному множеству).

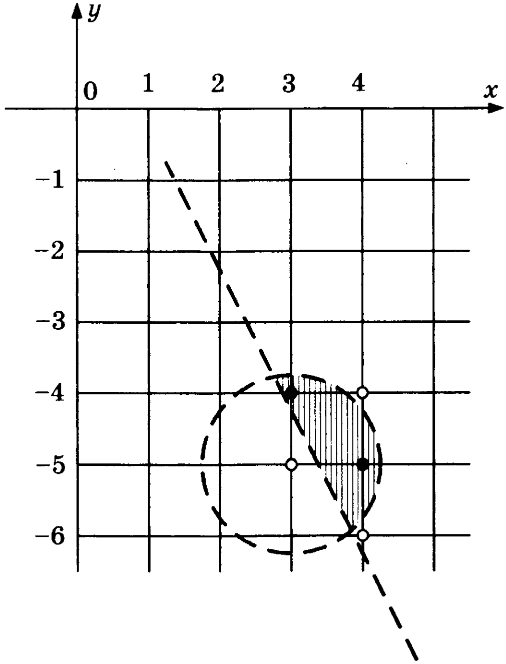

Рис. 2

Из рисунка видно, что этому множеству принадлежат только две точки с целочисленными координатами — это точки (3, −4) и (4, −5).

Ответ: {(3, −4); (4, −5)}.

Пример 6. Найти все пары целых чисел m, n, удовлетворяющих одновременно двум неравенствам

$$\begin{cases} m^2 + n^2 < 16m - 22n - 171, \\ 30m - n^2 > 252 + 14n + m^2. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем данную систему следующим образом:

$$\begin{cases} m^2 + n^2 < 16m - 22n - 171 \\ 30m - n^2 > 252 + 14n + m^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-8)^2 + (n+11)^2 < 14 \\ (m-15)^2 + (n+7)^2 < 22. \end{cases}$$

На координатной плоскости Omn множество решений этой системы будет представлять собой пересечение двух кругов (исключая их границы), ограниченных окружностью с центром $O_1 = (8, -11)$ и радиусом $R_1 = \sqrt{14}$ и окружностью с центром $O_2 = (15, -7)$ и радиусом $R_2 = \sqrt{22}$ (см. рис. 3).

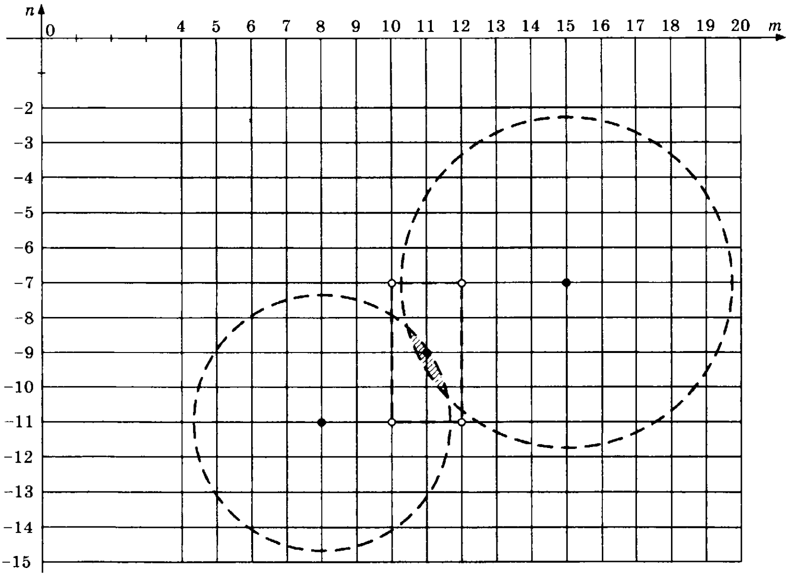

Рис. 3

Так как $R_1 < 4$, а $R_2 < 5$, то точка с координатами (12, −11) не принадлежит ни одному из этих кругов (поскольку расстояние от центра круга O_2 до точки с координатами (12, −11) равно 5). То же самое можно сказать и про точку с координатами (10, −7). Это означает, что искомое множество целиком содержится внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $m = 10$, $m = 12$, $n = -7$, $n = -11$ (границы прямоугольника не включаются). Внутри этого прямоугольника имеются только три точки с целочисленными координатами — это точки (11, −8), (11, −9) и (11, −10). Проверкой убеждаемся, что решением задачи будет служить пара чисел (11, −9).

Ответ: {(11, −9)}.

Пример 7. Найти все такие пары целых чисел (x, y), каждая из которых удовлетворяет уравнению $\sqrt{2x - y - 3} + \sqrt{2y - x + 3} = 2\sqrt{3 - x - y}$.

Решение. Для нахождения области определения данного уравнения рассмотрим следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} 2x - y - 3 \ge 0 \\ 2y - x + 3 \ge 0 \\ 3 - x - y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 2x - 3 \\ y \ge \dfrac{x - 3}{2} \\ y \le 3 - x. \end{cases}$$

Изобразим множество решений этой системы на координатной плоскости Oxy (рис. 4).

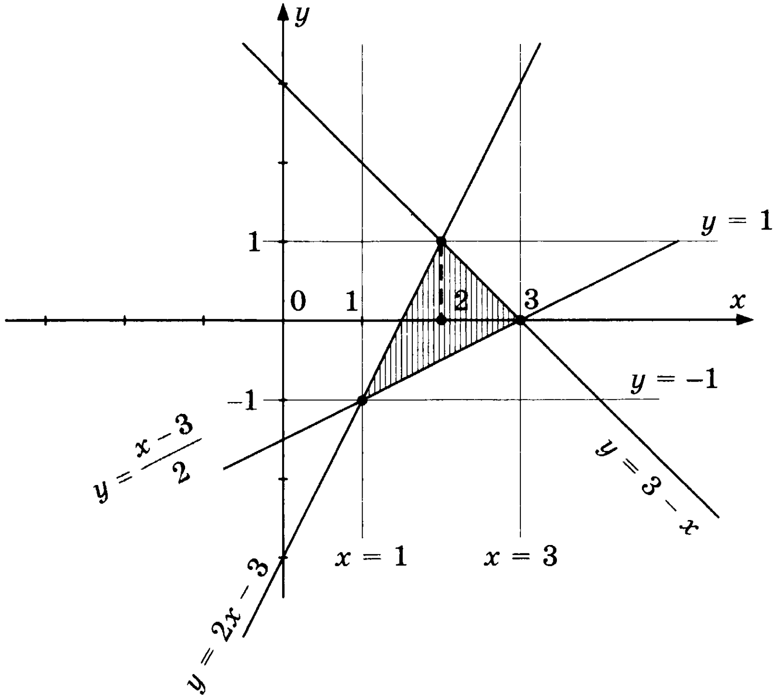

Рис. 4

Из рисунка видно, что это множество является треугольником и целиком содержится в квадрате, ограниченном прямыми $x = 1$, $x = 3$, $y = -1$, $y = 1$. При этом из граничных точек квадрата треугольнику принадлежат точки $(1, -1)$, $(2, 1)$ и $(3, 0)$. Так как x и y — целые числа, то в область определения исходного уравнения может войти также внутренняя точка квадрата, имеющая координаты $(2, 0)$. Проверкой убеждаемся, что из четырех рассмотренных пар чисел решением уравнения будет служить только пара $(x, y) = (2, 0)$.

Ответ: $\{(2, 0)\}$.

Пример 8. При каких значениях параметра $a \neq 0$ количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих неравенству $|y| \leq \dfrac{a^2 - x^2}{a^3}$, минимально?

Решение. Заметим сначала, что при $a < 0$ данное неравенство будет иметь бесконечно много целочисленных решений. Действительно, решениями будут служить пары чисел (x, y), где $y = 0$ и $a^2 - x^2 \leq 0$, т.е. $x \in (-\infty, a] \cup [-a, +\infty)$.

Пусть теперь $a > 0$. Данное неравенство эквивалентно неравенству

$$-\frac{a^2 - x^2}{a^3} \le y \le \frac{a^2 - x^2}{a^3}.$$

Необходимо рассмотреть несколько случаев. При $a = 1$ полученное неравенство принимает вид $-1 + x^2 \le y \le 1 - x^2$ и имеет своим решением следующие пять пар целых чисел: $(x, y) = \{(0, 0); (-1, 0); (1, 0); (0, -1); (0, 1)\}$. При $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ множество решений этого неравенства изображено на рис. 5.

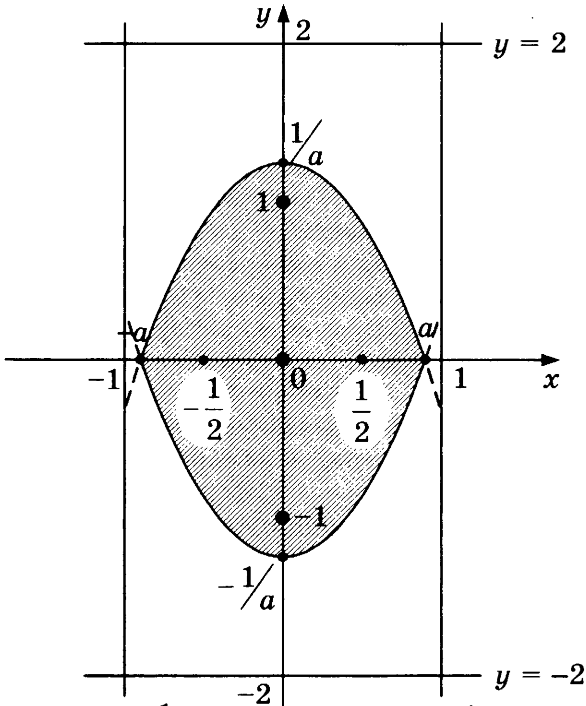

Рис. 5

Ясно, что это множество целиком содержится внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x = -1$, $x = 1$, $y = -2$, $y = 2$ (границы прямоугольника не включаются), и имеет три пары целочисленных решений: $(x, y) = \{(0, 0); (0, -1); (0, 1)\}$. Аналогично, если $a \in (1, 2)$, то решениями $x \in Z$, $y \in Z$ будут служить $(x, y) = \{(0, 0); (-1, 0); (1, 0)\}$ (рис. 6).

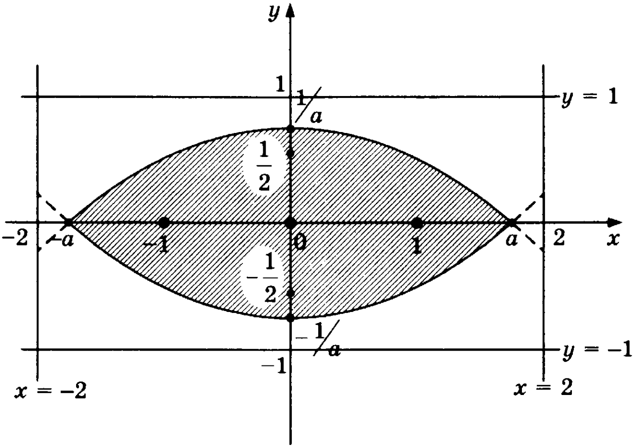

Рис. 6

При $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ и при $a \geq 2$ исходное неравенство будет иметь, по крайней мере, пять пар целочисленных решений (x, y); в первом случае это будут числа $x = 0$, $y = 0, \pm1, \pm2$, во втором — числа $y = 0$, $x = 0, \pm1, \pm2$ (рис. 7 и 8).

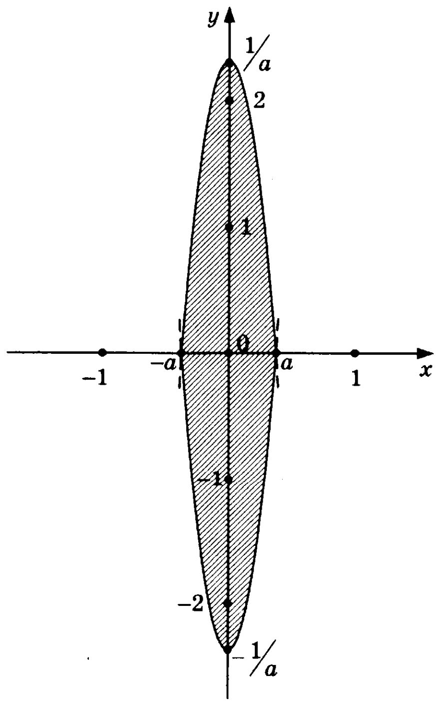

Рис. 7

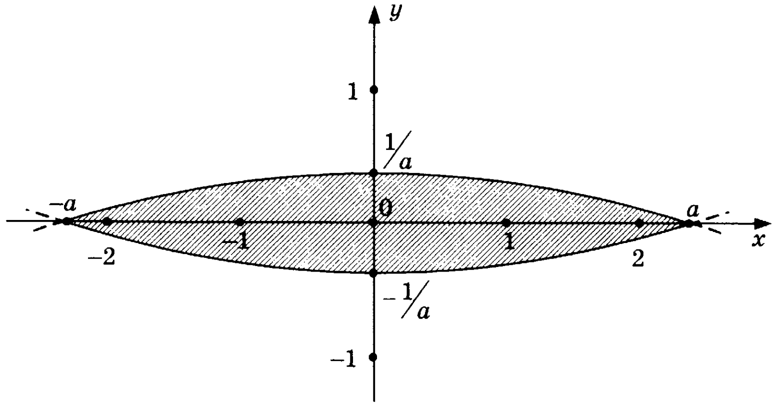

Рис. 8

Таким образом, ответом к задаче будут служить $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1,\ 2)$.

Ответ: $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1,\ 2)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти все пары целых чисел x, y, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0 \\ 2x + 4y < 15. \end{cases}$$

2. Найти все пары целых чисел p, q, удовлетворяющих одновременно двум неравенствам

$$\begin{cases} p^2 + q^2 < 18p - 20q - 166, \\ 32p - q^2 > 271 + 12q + p^2. \end{cases}$$

3. Найти все такие пары целых чисел $(x,\ y)$, каждая из которых удовлетворяет уравнению $\sqrt{2x + y - 4} + \sqrt{5 - x - 2y} = 2\sqrt{2 - x + y}$.

4. При каких значениях параметра $b \neq 0$ количество пар целых чисел $(y,\ z)$, удовлетворяющих неравенству $b^3y^2 + |z| \leq b^2$, минимально?

5. Найти все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} |x^2+2x| < y+1, \\ y+|x+1| < 2. \end{cases}$$

6. Найти все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-4)^2 < 5, \\ 4y \le x+11. \end{cases}$$

7. Найти все пары целых чисел $(x,\ y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y^3-3x^2-9y+24x-47 > 0, \\ y^3+x^2-9y-10x+23 < 0. \end{cases}$$

8. При каких целых значениях параметра k система неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y \le k^2+10k+20, \\ 5x^2+5y^2-2kx+4ky \le 5-k^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение?

9. Найти все пары целых чисел $(x,\ y)$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} x-y \le -50, \\ x^2-y \le 6, \\ 6x+y \le 2. \end{cases}$$

10. Найти все тройки целых чисел $(x,\ y,\ z)$, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{1}{\sqrt{7+2x-4y+3z}}+\frac{3}{\sqrt{2y+2z-5x}} >$$

$$> \frac{2}{\sqrt{3x+2y-5z-4}}+x^2+7x+11.$$

ГЛАВА 7. ЗАДАЧИ НА ДЕЛИМОСТЬ

Важную роль при решении задач на делимость играет основная теорема арифметики. Она утверждает, что каждое натуральное число $n > 1$ имеет единственное (с точностью до порядка множителей) разложение на простые множители

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — попарно различные простые числа, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — натуральные числа. Данная форма записи называется каноническим разложением числа n.

Отметим также некоторые признаки делимости, не имеющие широкого распространения.

1. Число делится на 2^k тогда и только тогда, когда число, составленное из последних k цифр его десятичной записи, идущих в том же порядке, делится на 2^k.
2. Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма всех его цифр делится на 9. Более того, любое натуральное число даёт при делении на 9 тот же остаток, что и сумма всех его цифр. Сказанное верно и для делимости на 3.
3. Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность суммы цифр, стоящих на нечётных местах, считая справа в десятичной записи данного числа, и суммы цифр, стоящих на чётных местах в десятичной записи данного числа, делится на 11.

Некоторые задачи на делимость решаются путем перебора всевозможных остатков при делении на какое-либо натуральное число так, как это делалось при решении некоторых диофантовых уравнений. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Определить сумму всех таких натуральных чисел n, для которых числа 5600 и 3024 делятся без остатка на n и $n + 5$ соответственно.

Решение. Разложим числа 5600 и 3024 на простые множители. Имеем:

$$5600 = 2^5 \cdot 5^2 \cdot 7; \; 3024 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7.$$

Если число n делится на 5, то и число $n + 5$ также делится на 5. Но в этом случае число 3024 не может делиться на $n + 5$, так как в его разложении на простые множители пятерки отсутствуют. Следовательно, n не делится на 5. В этом случае n является делителем числа $2^5 \cdot 7 = 224$. Все возможные варианты запишем в виде таблицы:

n	1	2	4	7	8	14	16	28	32	56	112	224
$n + 5$	6	7	9	12	13	19	21	33	37	61	117	229

Из чисел второй строки делителями числа $3024 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7$ являются 6, 7, 9, 12 и 21. Соответствующие им значения n равны 1, 2, 4, 7 и 16. Их сумма равна 30.

Ответ: 30.

Пример 2. Пусть m и n — натуральные числа, причем $\frac{m}{n}$ — правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3n - m}{5n + 2m}$, если известно, что она сократима?

Решение. Пусть $k \neq 1$ — общий делитель чисел $3n - m$ и $5n + 2m$. Имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 3n - m = kx \\ 5n + 2m = ky; \quad x, y \in N. \end{cases}$$

Если домножим первое уравнение этой системы на 2 и сложим со вторым, то получим уравнение $11n = k(2x + y)$. Аналогично, умножив первое уравнение системы на 5, а второе на 3 и произведя вычитание, получим, что $11m = k(3y - 5x)$. Запишем полученные равенства в виде системы:

$$\begin{cases} 11n = k(2x + y) \\ 11m = k(3y - 5x). \end{cases}$$

Рассмотрим несколько случаев.

Если k не делится на 11, то k является общим делителем чисел m и n, что противоречит условию задачи. Если k делится на 11, но $k \neq 11$, тогда число $\frac{k}{11}$ также будет являться общим делителем m и n, что невозможно. И, наконец, если $k = 11$, то в качестве примера можно взять $m = 1$ и $n = 4$.

Тогда дробь $\dfrac{3n - m}{5n + 2m}$, равную $\dfrac{11}{22}$, можно сократить на 11. Таким образом, если данная в условии задачи дробь сократима, то ее можно сократить только на число 11.

Ответ: на 11.

Пример 3. Найти все натуральные n, при которых число $n^2 + 5n + 16$ делится нацело на 169.

Решение. Если данное число

$$n^2 + 5n + 16 = (n + 9)(n - 4) + 52$$

делится на $169 = 13^2$, то оно делится и на 13. Поскольку число 52 делится на 13, то и произведение $(n + 9)(n - 4)$ также делится на 13. Поэтому хотя бы один из его сомножителей $n + 9$ или $n - 4$ делится на 13, а так как

$$(n + 9) - (n - 4) = 13,$$

то сразу оба числа $n + 9$ и $n - 4$ делятся на 13. Следовательно, их произведение делится на 169, а поскольку 52 не делится на 169, то сумма

$$(n + 9)(n - 4) + 52$$

также не делится на 169.

Ответ: таких чисел нет.

Пример 4. Совокупность A состоит из различных натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A.

Решение. Разложим числа 210 и 1920 на простые множители:

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7; \; 1920 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5.$$

Так как произведение всех чисел из A делится на 1920, A должно содержать по крайней мере семь чисел, имеющих в своём разложении на простые множители двойку. Среди делителей числа 210 таких чисел восемь:

$$2,\ 2 \cdot 3,\ 2 \cdot 5,\ 2 \cdot 7,\ 2 \cdot 3 \cdot 5,\ 2 \cdot 3 \cdot 7,\ 2 \cdot 5 \cdot 7,$$
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Совокупность A не может состоять только из этих восьми чисел, так как тогда их произведение равно $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4$ и является полным квадратом. Но, согласно условию задачи, количество чисел в A больше семи. А это означает, что в A присутствует, по крайней мере, одно число, не входящее в данный список, т.е. не содержащее в своём разложении двойку. Следовательно, число 2 не может входить в A, так как иначе A содержало бы два взаимно простых числа, что противоречит одному из условий задачи. Кроме того, ясно, что число, содержащееся в A и не входящее в список, — это $3 \cdot 5 \cdot 7$, так как любое другое такое число будет взаимно просто с одним из чисел списка — например, число $3 \cdot 5$ взаимно просто с числом $2 \cdot 7$. Значит, совокупность A состоит из следующих восьми чисел:

$$2 \cdot 3,\ 2 \cdot 5,\ 2 \cdot 7,\ 2 \cdot 3 \cdot 5,\ 2 \cdot 3 \cdot 7,\ 2 \cdot 5 \cdot 7,\ 3 \cdot 5 \cdot 7,\ 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Ответ: $A = \{6, 10, 14\ 30, 42, 70, 105, 210\}$.

Пример 5. Натуральные числа k, l, m, взятые в указанном порядке, образуют возрастающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой является целым числом. Числа 2835 и 2646 делятся без остатка на l и m соответственно. Найти числа k, l и m, если известно, что при указанных условиях сумма $k + l + m$ максимальна.

Решение. Пусть $q > 1$ — целое число, являющееся знаменателем данной геометрической прогрессии. Тогда $l = kq$, $m = kq^2$. Разложим числа 2835 и 2646 на простые множители. Имеем:

$$2835 = 3^4 \cdot 5 \cdot 7;\ 2646 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7^2.$$

Так как первое из этих чисел делится на q, а второе на q^2, то q может принимать только одно из трех значений: $q = 3$, $q = 7$ и $q = 21$.

Если $q = 3$, то число 2835 должно делиться на $l = kq = 3k$, следовательно, $3^3 \cdot 5 \cdot 7$ должно делиться на k. Аналогично 2646 делится на $m = kq^2 = 9k$, т.е. $2 \cdot 3 \cdot 7^2$ делится на k. Так как при этих условиях k должно быть максимальным (при фиксированном q сумма $k + kq + kq^2$ максимальна тогда и только тогда, когда максимально k), то k есть наибольший общий делитель (НОД) чисел $3^3 \cdot 5 \cdot 7$ и $2 \cdot 3 \cdot 7^2$, т.е. $k = 3 \cdot 7 = 21$. В этом случае $l = kq = 63$, $m = kq^2 = 189$ и $k + l + m = 273$.

Если $q = 7$, то 2835 делится на $7k$, а 2646 делится на $7^2 \cdot k$, откуда непосредственно вытекает, что k = НОД $(3^4 \cdot 5; 2 \cdot 3^3) = 27$. При этом $l = 189$, $m = 1323$ и $k + l + m = 1539$. И, наконец, при $q = 21$ имеем, что k = НОД $(3^3 \cdot 5; 2 \cdot 3) = 3$. В этом случае $k + l + m = 3 + 63 + 1323 = 1389$. Таким образом, сумма $k + l + m$ максимальна при $k = 27$ и $q = 7$ и ответом к задаче будут служить числа $k = 27$, $l = 189$ и $m = 1323$.

Ответ: $k = 27$, $l = 189$ и $m = 1323$.

Пример 6. Найти все пары пятизначных чисел n и m такие, что число $\overline{nm}$, полученное приписыванием десятичной записи числа m после десятичной записи числа n, делится на $n \cdot m$.

Решение. Согласно условию задачи число $10^5 \cdot n + m$ делится на nm, следовательно, это число делится на n. Так как $10^5 \cdot n + m$ делится на n и $10^5 \cdot n$ делится на n, то и m делится на n. Пусть $m = kn$; $k \in N$. Тогда число $10^5 \cdot n + kn$ должно делиться на kn^2, т.е. число $10^5 + k$ должно делиться на kn. Сразу заметим, что число k не может превосходить 9, так как иначе при умножении на k пятизначного числа получим шестизначное (или состоящее из большего количества знаков) число.

Далее, число $10^5 + k$ делится на kn, следовательно, это число делится на k. Отсюда вытекает, что и число 10^5 делится на k. С учётом вышесказанного k может принимать одно из следующих пяти значений: $k = 1$, $k = 2$, $k = 4$, $k = 5$ или $k = 8$. Тогда $\frac{10^5}{k} + 1$ делится на n. Пусть $\frac{10^5}{k} + 1 = \text{ln}$; $l \in N$. Обратим внимание, что число l не может быть равно единице. Действительно, в этом случае $\frac{10^5}{k} + 1 = n$ и $m = kn = 10^5 + k$ не является пятизначным числом.

Рассмотрим каждый случай в отдельности. Пусть сначала $k = 1$, тогда должно быть выполнено равенство $100001 = ln$. При этом l не может превосходить 10 (действительно, $100001 : 11 = 9091$ является четырехзначным числом). Но у числа 100001 нет делителей, лежащих в интервале от 2 до 10. Таким образом, данный случай невозможен. Пусть теперь $k = 2$. В этом случае имеем, что $50001 = ln$. По тем же соображениям l здесь не превосходит 5. Из чисел 2, 3, 4 делителем 50001 является число $l = 3$. При этом $n = 16667$ и $m = 2n = 33334$.

Если $k = 4$, равенство $\frac{10^5}{k} + 1 = ln$ примет вид $25001 = ln$. Здесь имеем только одно возможное значение l — это $l = 2$ (при $l \geq 3$ число $\frac{25001}{l}$ уже не будет пятизначным). Ясно, что $l = 2$ не является делителем числа 25001. Аналогично случаи $k = 5$ и $k = 8$ также являются невозможными. Действительно, при $k = 5$ получаем равенство $20001 = ln$, а при $k = 8$ равенство $12501 = ln$. Как легко видеть, нет таких натуральных l, чтобы n в этих равенствах было пятизначным числом.

Таким образом, ответом к задаче будут служить $n = 16667$ и $m = 33334$.

Ответ: $n = 16667$, $m = 33334$.

Пример 7. Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр можно получить другую степень двойки?

Решение. Два числа, отличающиеся лишь порядком цифр, дают одинаковые остатки при делении на 9. Это следует из того факта, что число даёт такой же остаток при делении на 9, что и сумма всех его цифр. Выясним, какие остатки при делении на 9 могут давать числа вида 2^n; $n = 1, 2, 3...$:

Степень числа 2:	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
Остаток степени при делении на 9:	2	4	8	7	5	1	2

Докажем, что последовательность остатков при делении на 9 степеней двойки 2, 4, 8, 7, 5, 1, 2, ... периодична с периодом 6. Действительно, $2^{n+6} - 2^n = 2^n \cdot 63$ делится на 9. Предположим, что две степени двойки отличаются только лишь порядком цифр, тогда они дают одинаковый остаток при делении на 9 и отличаются не менее чем в $2^6 = 64$ раза, т.е. в них разное количество цифр. Получаем противоречие.

Ответ: Не существует.

Задачи для самостоятельного решения

1. Натуральные числа m и n таковы, что НОД (m, n) + НОК $(m, n) = m + n$. Доказать, что одно из них является делителем другого.

2. Натуральные числа a, b, c, взятые в указанном порядке, образуют возрастающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой является целым числом. Числа 2240 и 4312 делятся без остатка на b и c соответственно. Найти числа a, b, c, если известно, что при указанных условиях сумма $a + b + c$ максимальна.

3. Доказать, что $n^2 + 3n + 5$ не делится на 121 ни при каком целом n.

4. Доказать, что для любого простого числа $p > 5$ число $p^4 - 50p^2 + 49$ делится на 2880.

5. Доказать, что число $n^3 - n + 3$ составное для любого натурального $n > 1$.

6. Доказать, что если сумма целых чисел делится на 6, то и сумма кубов этих же чисел делится на 6.

7. Существует ли такое натуральное число n, что число $2n^2 + 3n + 4$ делится нацело на 2005?

8. Доказать, что при любом натуральном n число $4^n + 15n - 1$ делится на 9.

9. Найти все простые числа вида $\frac{n(n+1)}{2} - 1$, где n — натуральное число.

10. Известно, что натуральное трехзначное число $p = \overline{abc}$ делится нацело на 37. Должны ли числа $q = \overline{bca}$ и $r = \overline{cab}$ также делиться нацело на 37?

11. Является ли число $100007 \cdot 100013 \cdot 100001 + 55$ простым?

12. Каждое из целых чисел n, m, k не делится на три. Доказать, что число $n^6 + m^4 + k^2$ делится на три.

13. Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

14. Определить сумму всех таких натуральных чисел n, для которых числа 3920 и 4320 делятся без остатка на n и $n + 7$ соответственно.

15. Пусть q и d — наименьшее общее кратное и соответственно наибольший общий делитель натуральных чисел x и y. Найти наименьшее значение величины $q : d$, если выполнено условие $3x = 8y - 29$.

16. Пусть m и n — натуральные числа, причем $\frac{m}{n}$ — правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{2n - m}{3n + 2m}$, если известно, что она сократима?

17. Доказать, что натуральное число является полным квадратом тогда и только тогда, когда у него нечетное число натуральных делителей.

18. Доказать, что при любом натуральном n сумма цифр числа 1981^n не меньше 19.

ГЛАВА 8. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

В отличие от уже рассмотренных в предыдущих главах текстовых задач в задачах настоящей главы свойства делимости имеют определяющее значение. В процессе решения таких задач необходимо следить за целочисленностью всех переменных, которые должны быть таковыми по смыслу задачи. Конечно, при этом остаются в силе и другие уже рассмотренные методы решения задач в целых числах. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Среди учеников начальной школы провели опрос: кто любит зиму, а кто — лето. Оказалось, что 90% любителей зимы любят и лето, а 72% любителей лета любят и зиму. Зато 10% всех опрошенных не любят ни зимы, ни лета. Каким при этих условиях могло быть наименьшее число опрошенных?

Решение. Обозначим через x число школьников, которые любят лето, через y — число школьников, которые любят зиму, а через z — число всех опрошенных школьников. Согласно условиям задачи имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,9x = 0,72y \\ 0,9z = x + 0,28y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 4y \\ 9z = x + 10y. \end{cases}$$

Кроме этого, числа $0{,}1x$ и $0,28y = \dfrac{7}{25}y$ должны быть целыми. Это означает, что x делится без остатка на 10, а y — на 25. Наименьшие значения переменных при этих условиях — это $x = 20$ и $y = 25$. При этом $z = \dfrac{x+10y}{9} = 30$.

Таким образом, было опрошено минимум 30 школьников.

Ответ: 30 школьников.

Пример 2. За 2005 год число книг в фонде библиотеки поселка увеличилось на 0,4%, а за 2006 год — на 0,8%, оставшись при этом меньше 50 тысяч. На сколько книг увеличился фонд библиотеки поселка за 2006 год?

Решение. Пусть x — число книг в библиотеке в начале 2005 года. Тогда в конце 2005 года в библиотеке было $1{,}004x = \dfrac{251}{250}x$, а в конце 2006 года — $1{,}008 \cdot 1{,}004x = \dfrac{126}{125} \cdot \dfrac{251}{250}x$. Так как последнее число является целым, а каждое из чисел 125 и 250 взаимно просто с каждым из чисел 126 и 251, то x делится без остатка на $125 \cdot 250 = 31250$. Поскольку x при этом не превосходит 50000, то $x = 31250$. Тогда за 2006 год фонд библиотеки увеличился на

$$\frac{126}{125} \cdot \frac{251}{250}x - \frac{251}{250}x = (x = 125 \cdot 250) = 126 \cdot 251 - 125 \cdot 251 = 251 \text{ (книгу).}$$

Ответ: на 251 книгу.

Пример 3. На заводе было несколько одинаковых прессов, штампующих детали, и завод выпускал 6480 деталей в день. После реконструкции все прессы заменили на более производительные, но также одинаковые, а их число увеличилось на 3. Завод стал выпускать в день 11 200 деталей. Сколько прессов было первоначально?

Решение. Разложим числа 6480 и 11 200 на простые множители:

$$6480 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5; \; 11\,200 = 2^6 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Пусть n — количество прессов, которое было на заводе первоначально. Тогда $(n + 3)$ — количество прессов, которое стало после реконструкции. Так как каждый пресс выпускает в день целое число деталей, то 6480 должно делиться на n, а 11 200 — на $(n + 3)$. При этом n не может делиться на 3, так как тогда бы и $(n + 3)$ делилось на 3, а в разложении числа 11 200 на простые множители тройки отсутствуют. Значит, $n > 1$ является делителем числа $2^4 \cdot 5 = 80$, т.е. может принять одно из следующих значений:

$$2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80.$$

Тогда $n + 3$ принимает, соответственно, значения

$$5, 7, 8, 11, 13, 19, 23, 43, 83.$$

Ясно, что всем условиям делимости удовлетворяют $n = 2$, $n = 4$ и $n = 5$. В случае $n = 2$ производительность каждого пресса до реконструкции равна 3240 деталей в день, а после реконструкции — 2240 деталей в день, что противоречит условию задачи. В случае $n = 4$ производительность каждого пресса до реконструкции равна 1620 деталей в день, а после реконструкции — 1600 деталей в день, что также противоречит условию задачи. И, наконец, в случае $n = 5$ производительность каждого пресса до реконструкции равна 1296 деталей в день, а после реконструкции — 1400 деталей в день, что не противоречит условию задачи.

Ответ: 5 прессов.

Пример 4. Юля и Лера верили в народную примету: встретить машину, номер которой содержит две одинаковые цифры, — к удаче. В первый день Юля встретила на 20% «счастливых» машин меньше, чем Лера. Во второй день, наоборот, Юля встретила на 30% машин больше, чем Лера в этот день. Всего за два дня Лера встретила на 10% меньше «счастливых» машин, чем Юля. Какое минимальное количество «счастливых» машин могли встретить студентки за два дня при данных условиях?

Решение. Пусть x и y — число машин, которые встретила Лера в первый и второй день соответственно. Тогда Юля встретила в первый день $0{,}8x$, а во второй — $1{,}3y$ автомобилей. Согласно условию задачи имеем

$$0{,}9(0{,}8x + 1{,}3y) = x + y \Leftrightarrow 28x = 17y.$$

Так как числа $0{,}8x = \frac{4}{5}x$ и $1{,}3y = \frac{13}{10}y$ должны быть целыми, то x должно делиться на 5, а y на 10 без остатка. При этих условиях наименьшим натуральным решением полученного уравнения является пара чисел $x = 17 \cdot 5 = 85$ и $y = 28 \cdot 5 = 140$. Таким образом, за два дня студентки встретили $1{,}8x + 2{,}3y = 475$ (машин).

Ответ: 475 машин.

Пример 5. За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5%, затем 12%, потом $11\frac{1}{9}\%$ и, наконец, 12,5% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на $104\frac{1}{6}\%$. Определите срок хранения вклада.

Решение. Пусть x, y, z и t — число месяцев, которое вклад находился под действием каждой из перечисленных процентных ставок соответственно. Имеем уравнение:

$$\left(1+\frac{5}{100}\right)^x\cdot\left(1+\frac{12}{100}\right)^y\cdot\left(1+\frac{11\frac{1}{9}}{100}\right)^z\cdot\left(1+\frac{12,5}{100}\right)^t=$$

$$=\left(1+\frac{104\frac{1}{6}}{100}\right)$$

или после преобразований

$$\left(\frac{21}{20}\right)^x\cdot\left(\frac{28}{25}\right)^y\cdot\left(\frac{10}{9}\right)^z\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^t=\frac{49}{24}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2^{2y+z+3}\cdot 3^{x+2t+1}\cdot 5^z\cdot 7^{x+y}=2^{2x+3t}\cdot 3^{2z}\cdot 5^{x+2y}\cdot 7^2.$$

Используя теорему об единственности разложения любого натурального числа на простые множители, получим систему:

$$\begin{cases}2y+z+3=2x+3t\\ x+2t+1=2z\\ z=x+2y\\ x+y=2.\end{cases}$$

Так как x и y — натуральные числа, из последнего уравнения немедленно следует, что $x=y=1$. Далее не составляет труда найти, что $z=3$ и $t=2$. Таким образом, общее число месяцев, которое вклад находился в банке, есть $x+y+z+t=7$.

Ответ: 7 месяцев.

Пример 6. Брокерская фирма выставила на торги акции двух компаний: нефтяной компании — по 100 долларов за акцию и газовой компании — по 65 долларов 60 центов за акцию. Всего было 200 акций. Все акции газовой компании были проданы, а часть акций нефтяной компании осталась непроданной. Общая сумма выручки оказалась равной 13 120 долларов. Найти сумму выручки, полученной за акции газовой компании.

Решение. Пусть x и y — количество проданных акций нефтяной и газовой компаний соответственно. Согласно условию задачи получаем уравнение:

$$100x + 65{,}6y = 13120 \Leftrightarrow \frac{125}{82}x + y = 200.$$

Так как число $\frac{125}{82}x$ является целым, а числа 125 и 82 взаимно простые, то x должно делиться на 82 без остатка. Следовательно, $x = 82$, так как иначе число $y = 200 - \frac{125}{82}x$ будет отрицательным. Таким образом, выручка от продажи акций газовой компании составляет $65{,}6y = 13120 - 100x = 4920$ долларов.

Ответ: 4920 долларов.

Пример 7. В цехе имелось n одинаковых станков, которые, работая вместе, вытачивали в день 5850 деталей. После реконструкции число производимых в день каждым станком деталей возросло на 20%. Это позволило, по крайней мере, без сокращения общего объема продукции цеха уменьшить число станков максимум на четыре. Найти n.

Решение. Пусть x — количество деталей, которые вытачивал в день каждый станок до реконструкции. Тогда, согласно условиям задачи, имеем следующую систему:

$$\begin{cases} nx = 5850 \\ (n-4)\cdot 1{,}2x \ge nx \\ (n-5)\cdot 1{,}2x < nx \end{cases} \Rightarrow \quad 24 \le n < 30.$$

Так как n — целое число, то $n = 24, 25, 26, 27, 28, 29$. Разложим теперь число 5850 на простые множители: $5850 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 13$. Поскольку n является делителем числа 5850, то $n = 25$ или $n = 26$. Если $n = 25$, то $x = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$ и число $1{,}2x$ не является целым. Если же $n = 26$, то $x = 3^2 \cdot 5^2$ и $1{,}2x$ — целое число. Таким образом, в цехе до реконструкции было 26 станков.

Ответ: $n = 26$.

Пример 8. Каждый из трех брокеров имел в начале дня акции каждого из видов A и B общим числом 11, 21 и 29 штук соответственно. Цены на акции в течение всего дня не менялись, причем цена одной акции вида A больше цены одной акции вида B. К концу дня брокерам удалось продать все свои акции, выручив от продажи по 4402 рубля каждый. Определить цену продажи одной акции видов A и B.

Решение. Обозначим через x, y, z количество акций вида A в начале дня у первого, второго и третьего брокеров соответственно, а через p и q — цены на акции видов A и B ($p > q$). Согласно условиям задачи имеем следующую систему:

$$\begin{cases} px + q(11 - x) = 4402 \\ py + q(21 - y) = 4402 \\ pz + q(29 - z) = 4402 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p - q)x + 11q = 4402 \\ (p - q)y + 21q = 4402 \\ (p - q)z + 29q = 4402. \end{cases}$$

Вычтем третье уравнение из первого и третье из второго. Имеем:

$$\begin{cases} (p - q)(x - z) = 18q \\ (p - q)(y - z) = 8q \end{cases} \Rightarrow \quad 4(x - z) = 9(y - z).$$

Последнее равенство было получено делением двух уравнений с одновременным выполнением условий $p > q > 0$, $x - z > 0$, $y - z > 0$. Далее, так как $1 \le x \le 10$ и $z \ge 1$, то $x - z = 9$ (поскольку из полученного равенства следует, что $x - z$ делится на 9) и, значит, $x = 10$ и $z = 1$. Тогда $y - z = 4$ и $y = 5$. Возвращаясь к исходной системе находим, что $p = 426$ и $q = 142$.

Ответ: 426 рублей и 142 рубля.

Задачи для самостоятельного решения

1. Среди учащихся старших классов провели опрос: кто любит волейбол, а кто — баскетбол. Оказалось, что 52% любителей волейбола любят и баскетбол, а 65% любителей баскетбола любят и волейбол. Зато 36% всех опрошенных не любят ни волейбол, ни баскетбол. Каким при этих условиях могло быть наименьшее число опрошенных?

2. На фабрике несколько одинаковых поточных линий вместе выпускали в день 15 000 банок консервов. После реконструкции все поточные линии заменили на более производительные, но также одинаковые, а их количество увеличилось на 5. Фабрика стала выпускать 33 792 банки в день. Сколько поточных линий было первоначально?

3. Техническая реконструкция предприятия была проведена в четыре этапа. Каждый из этапов продолжался целое число месяцев и сопровождался падением производства. Ежемесячное падение производства составило на первом этапе 4%, на втором — $6\frac{2}{3}\%$, на третьем — $6\frac{1}{4}\%$ и на четвертом — $11\frac{2}{7}\%$ в месяц. По окончании реконструкции первоначальный объем производства на предприятии сократился на 37%. Определить продолжительность периода реконструкции.

4. После рыбалки в ведре у Бориса (ведро у него вмещает не более 100 рыб) оказалось карасей на 25% меньше, чем у Андрея. Зато Андрей поймал других рыб на 25% меньше, чем Борис. Сколько всего рыб поймал Андрей, если известно, что это количество составляет 55% от общего количества пойманных Борисом и Андреем рыб?

5. Интервалы движения морских катеров по трём маршрутам, начинающимся на общей пристани, составляют 30, 36 и 45 минут соответственно. Сколько раз с 7 часов 40 минут до 17 часов 35 минут того же дня на этой пристани одновременно встречаются катера всех трёх маршрутов, если одна из таких встреч происходит в 11 часов 15 минут?

6. Компания предложила 350 своим служащим выполнить сверхурочную работу, причем каждому мужчине предлагалось в виде вознаграждения 20 долларов, а каждой женщине — 16 долларов 30 центов. Все женщины согласились с этим предложением, а часть мужчин отказалась. Общая сумма выплаченного вознаграждения составила 5705 долларов. Какова сумма вознаграждения, выплаченного всем женщинам?

7. Численность населения города, не превышавшая 50 тыс. человек, за 2005 год сократилась на 1,2%, а за 2006 год — на 2,4%. На сколько человек сократилась численность населения города за 2006 год?

8. Птицеферма имела m куриц одинаковой породы, которые могли снести в сумме 8232 яйца в год. После выведения новой яйценосной породы число яиц, приносимых одной курицей в год, возросло на 25%. Это позволило, по крайней мере, без сокращения общего объема продукции птицефермы уменьшить число куриц максимум на четыре. Найти m.

9. В киоске были проданы одинаковые комплекты, состоящие только из синих и красных карандашей, причем в каждом комплекте число синих карандашей больше чем на 3 превосходило число красных. Если бы в каждом комплекте число синих карандашей увеличили в 3 раза, а красных — в 2 раза, то число синих карандашей в одном комплекте превосходило бы число красных не более чем на 16, а общее число всех проданных карандашей равнялось бы 81. Определить, сколько было продано комплектов и сколько в каждом комплекте было синих и красных карандашей.

10. Производительность первого автомобильного завода не превышает 950 машин в сутки. Производительность второго автомобильного завода первоначально составляла 95% от производительности первого завода. После ввода дополнительной линии второй завод увеличил производство машин в сутки на 23% от числа машин, выпускаемых в сутки на первом заводе, и стал их выпускать более 1000 штук в сутки. Сколько автомобилей в сутки выпускал каждый завод до реконструкции второго завода? Предполагается, что каждый завод в сутки выпускает целое число машин.

11. Три фермера отправились на ярмарку для продажи баранов. Первый привел 10, второй — 16, третий — 26 голов. Каждый продал часть своих баранов (не менее одного, но не всех) в течение первого дня по одинаковой цене за одного барана. На второй день цена на баранов упала, и фермеры, опасаясь дальнейшего понижения цены, продали остальных баранов и опять по одинаковой цене за каждого барана. По какой цене продавались бараны в первый и второй день, если каждый из фермеров выручил от продажи 35 000 рублей?

12. «...Словарь людоеда из племени «Мумбо-Юмбо» составляет 300 слов. Эллочка Щукина легко и свободно обходилась тридцатью...» Однажды людоед начал посещать проповеди миссионера, поэтому его словарный запас стал, оставаясь целочисленным, увеличиваться на некоторое число процентов за каждые полгода. Эллочка поступила в вечернюю школу и каждый месяц стала узнавать целое число новых слов, равное 50% от того количества слов, которое людоед знал к концу первого полугодия. Однако через несколько месяцев Эллочка бросила школу. Какое наибольшее целое число месяцев могла проучиться Эллочка в школе, чтобы при этих условиях словарь людоеда после одного года посещения проповедей обязательно оказался богаче словаря Эллочки?

ГЛАВА 9. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

Экстремум — это обобщающее понятие, означающее либо максимум, либо минимум. Мы в основном будем рассматривать задачи с «экономическим» уклоном, в которых требуется найти экстремум функции (последовательности) целочисленного аргумента. Особенностью таких задач является отсутствие какого-либо единого метода их решения. Будут применяться все уже изученные методы решения задач в целых числах (делимость, оценки переменных, графические иллюстрации и т.д.). Однако при этом каждая «экстремальная» задача имеет свою ярко выраженную специфику. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Фабрика получила заказ на изготовление 1005 деталей типа P и 2010 деталей типа Q. Каждый из 192 рабочих фабрики затрачивает на изготовление двух деталей типа P время, за которое он мог бы изготовить одну деталь типа Q. Каким образом следует разделить рабочих фабрики на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

Решение. Пусть x — число рабочих в бригаде, изготовляющей детали типа P, $192 - x$ — число рабочих в бригаде, изготовляющей детали типа Q, y — количество деталей типа Q, которое один рабочий делает за единицу времени, тогда $2y$ — количество деталей типа P, которое один рабочий делает за ту же единицу времени. Тогда время изготовления деталей типа P составит $t_1 = \dfrac{1005}{2yx}$, а время изготовления деталей типа Q есть $t_2 = \dfrac{2010}{y(192 - x)}$. Время выполнения заказа равно

$$t=\max\{t_1,t_2\}=\frac{1005}{y}f(x),\text{ где } f(x)=\max\left\{\frac{1}{2x},\frac{2}{192-x}\right\}.$$

Таким образом, задача свелась к поиску натурального x, лежащего в интервале $1 \le x \le 191$, для которого достигается минимум функции $f(x)$. Для решения этой задачи удобно нарисовать график функции $f(x)$ (рис. 9).

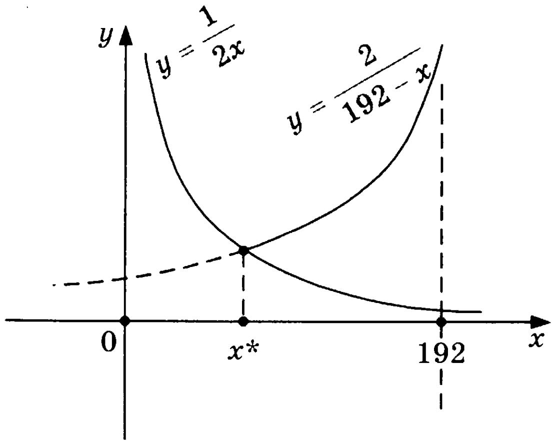

Рис. 9

Очевидно, что минимум $f(x)$ достигается при $x = x^*$, где x^* есть решение уравнения $\frac{1}{2x}=\frac{2}{192-x}$, т.е. $x^* = 38\frac{2}{5}$. Поскольку x^* не является целым числом, необходимо исследовать два близлежащих целых числа $x_1 = 38$ и $x_2 = 39$ и сравнить $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Так как $f(x_1)=\frac{1}{76}>\frac{2}{153}=f(x_2)$, то минимум $f(x)$ достигается при $x = 39$. Таким образом, рабочих фабрики следует разделить на бригады в количестве 39 и 153 человека.

Ответ: 39 и 153 человека.

Пример 2. Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 12-квартирного дома необходимо 70 деталей первого и 100 деталей второго вида. Для 16-квартирного дома требуется 110 и 150, а для дома на 21 квартиру нужно 150 и 200 деталей первого и второго видов соответственно. Всего имеется 900 деталей первого и 1300 деталей второго вида. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим?

Решение. Пусть x, y и z — число домов на 12, 16 и 21 квартиру соответственно. Тогда условие задачи можно сформулировать следующим образом: «Какое наибольшее значение может принять выражение $12x + 16y + 21z$ при условиях, что $70x + 110y + 150z \le 900$ и $100x + 150y + 200z \le 1300$?» Пусть $t = 12x + 16y + 21z$. Имеем:

$$\begin{cases} t = 12x + 16y + 21z \\ 70x + 110y + 150z \le 900 \\ 100x + 150y + 200z \le 1300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{12}(t - 16y - 21z) \\ 7x + 11y + 15z \le 90 \\ 2x + 3y + 4z \le 26 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{12}(t - 16y - 21z) \\ 7t + 20y + 33z \le 1080 \\ t + 2y + 3z \le 156. \end{cases}$$

Так как числа y и z не принимают отрицательных значений, из второго неравенства системы следует, что $t \le 154$. Пусть $t = 154$. Имеем:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{12}(154 - 16y - 21z) \\ 20y + 33z \le 2 \\ 2y + 3z \le 2. \end{cases}$$

Так как y и z — целые неотрицательные числа, то полученной системе удовлетворяет единственная пара чисел $y = z = 0$, однако при этом x не является целым числом. Аналогичная ситуация и при $t = 153$ и $t = 152$. Пусть $t = 151$. Имеем:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{12}(151 - 16y - 21z) \\ 20y + 33z \le 23 \\ 2y + 3z \le 5. \end{cases}$$

Данной системе удовлетворяют пары чисел $y = 0$, $z = 0$ и $y = 1$, $z = 0$, однако x ни в одном из случаев не является целым числом. Аналогичная ситуация и при $t = 150$. Пусть $t = 149$. Имеем:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{12}(149 - 16y - 21z) \\ 20y + 33z \le 37 \\ 2y + 3z \le 7. \end{cases}$$

Данной системе удовлетворяют пары чисел $y = 0$, $z = 0$; $y = 1$, $z = 0$ и $y = 0$, $z = 1$, однако x снова ни в одном из случаев не является целым числом. И, наконец, если $t = 148$, система примет вид

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{12}(148 - 16y - 21z) \\ 20y + 33z \le 44 \\ 2y + 3z \le 8 \end{cases}$$

и будет иметь единственное целочисленное решение $x = 11$, $y = 1$ и $z = 0$.

Ответ: Один дом на 16 квартир и 11 домов на 12 квартир.

Пример 3. Зоопарк ежедневно распределяет 111 кг мяса между лисами, леопардами и львами. Каждой лисе полагается 2 кг мяса, леопарду — 14 кг, льву — 21 кг. Известно, что у каждого льва бывает ежедневно 230 посетителей, у каждого леопарда — 160, у каждой лисы — 20. Сколько должно быть лис, леопардов и львов в зоопарке, чтобы ежедневное число посетителей у этих животных было максимальным?

Решение. Пусть x, y и z — количество лис, леопардов и львов соответственно. Тогда условие задачи можно сформулировать следующим образом: «При каких натуральных x, y и z, таких, что $2x + 14y + 21z = 111$, выражение $20x + 160y + 230z$ принимает наибольшее значение?» Пусть $t = 2x + 16y + 23z$. Выразив x через t, y и z и подставив в первое уравнение, получим систему:

$$\begin{cases} (t - 16y - 23z) + 14y + 21z = 111 \\ 2x = t - 16y - 23z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2y + 2z + 111 \\ 2x = t - 16y - 23z. \end{cases}$$

Значит, t максимально, когда максимально $y + z$. Это означает, что леопардов и львов в сумме должно быть как можно больше. Но так как леопард съедает меньше мяса, чем лев, надо брать как можно больше леопардов. При этом наибольшее возможное число леопардов — семь, иначе им не хватит на всех 111 кг мяса. Пусть $y = 7$. Имеем:

$$\begin{cases} t = 14 + 2z + 111 \\ 2x = t - 112 - 23z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2z + 125 \\ 2x = 13 - 21z. \end{cases}$$

Так как $2x \geq 0$, то и $13 - 21z \geq 0$, следовательно, $z = 0$, поскольку z — натуральное число. Но тогда x не является целым числом, поэтому последняя система решений не имеет. Пусть $y = 6$. Имеем:

$$\begin{cases} t = 12 + 2z + 111 \\ 2x = t - 96 - 23z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2z + 123 \\ 2x = 27 - 21z. \end{cases}$$

Так как $2x \geq 0$, то и $27 - 21z \geq 0$, следовательно, $z = 0$ или $z = 1$, поскольку z — натуральное число. Если $z = 0$, то x не является целым числом, если $z = 1$, то $x = 3$.

Ответ: 3 лисы, 6 леопардов и 1 лев.

Пример 4. На полевых работах геологу нужно собрать образцы типов A и B. Вес одного образца типа A равен 3 кг, а типа B — 4 кг. По каждому из образцов типа A требуется провести 5 видов анализов, а по каждому из образцов типа B — 7 видов. Известно, что вес всех собранных образцов не должен превышать 149 кг, а общее число всех проведенных анализов должно быть не менее чем 249. Какое минимальное и максимальное суммарное количество образцов обоих типов можно собрать при указанных условиях?

Решение. Пусть x и y — количество собранных образцов типа A и B соответственно, $t = x + y$ — суммарное количество образцов. Согласно условиям задачи имеем следующую систему:

$$\begin{cases} 3x + 4y \leq 149 \\ 5x + 7y \geq 249 \\ t = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4(t - x) \leq 149 \\ 5x + 7(t - x) \geq 249 \\ y = t - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \leq \dfrac{149 + x}{4} \\ t \geq \dfrac{249 + 2x}{7}. \end{cases}$$

На координатной плоскости Oxt изобразим множество точек, являющихся решением последней системы неравенств с учетом условия $x > 0$ и $t > 0$ (рис. 10).

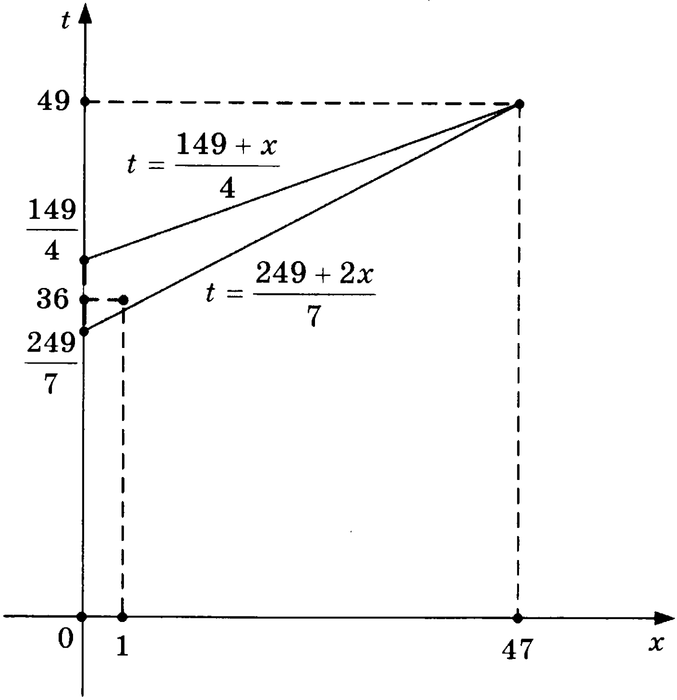

Рис. 10

Так как x и t — натуральные числа, то точка этого множества с наименьшей ординатой есть точка $(x, t) = (1, 36)$, а точка с наибольшей ординатой есть точка $(x, t) = (47, 49)$. Таким образом, при данных условиях можно собрать минимально 36 образцов, максимально — 49 образцов.

Ответ: 36 и 49.

Пример 5. Паром грузоподъемностью 109 тонн перевозит джипы и грузовики. Количество перевозимых на пароме грузовиков не менее чем на 20% превосходит количество перевозимых джипов. Вес и стоимость перевозки одного джипа составляют 3 тонны и 600 рублей, а грузовика — 5 тонн и 700 рублей соответственно. Определить наибольшую возможную суммарную стоимость перевозки всех джипов и грузовиков при данных условиях.

Решение: Пусть x и y — количество перевозимых на пароме джипов и грузовиков соответственно. Согласно условиям задачи имеем следующую систему:

$$\begin{cases} 3x + 5y \le 109 \\ y \ge 1,2x \\ 600x + 700y = 100t, \end{cases}$$

где $100t$ — суммарная стоимость перевозки всех джипов и грузовиков, которую надо сделать максимальной. Исключая из системы переменную x, получаем:

$$\begin{cases} x = \dfrac{t-7y}{6} \\ \dfrac{t-7y}{2} + 5y \le 109 \Rightarrow \\ y \ge \dfrac{t-7y}{5} \end{cases} \begin{cases} y \le \dfrac{218-t}{3} \\ y \ge \dfrac{t}{12} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t}{12} \le \frac{218-t}{3} \Leftrightarrow t \le 174,4.$$

Так как t — целое число, получаем, что $t \le 174$. Пусть $t = 174$. Имеем:

$$\begin{cases} y \le \dfrac{44}{3} \\ y \ge \dfrac{174}{12} \end{cases} \text{— нет целых решений.}$$

Если $t = 173$, получаем

$$\begin{cases} y \le 15 \\ y \ge \dfrac{173}{12} \end{cases} \Rightarrow y = 15 \Rightarrow x = \frac{68}{6}$$

— не является целым числом.

При $t = 172$ имеем

$$\begin{cases} y \le \dfrac{46}{3} \\ y \ge \dfrac{172}{12} \end{cases} \Rightarrow y = 15 \Rightarrow x = \frac{67}{6}$$

— не является целым числом.

И, наконец, если $t = 171$, получаем

$$\begin{cases} y \le \dfrac{47}{3} \\ y \ge \dfrac{172}{12} \end{cases} \Rightarrow y = 15 \Rightarrow x = 11.$$

Таким образом, ответом к задаче будет служить сумма $100t = 17\ 100$ рублей.

Ответ: 17 100 рублей.

Пример 6. С завода на стройку нужно перевезти 24 больших и 510 маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомашинами, каждая из которых вмещает в себя 44 маленьких блока и имеет грузоподъемность 10 тонн. Вес маленького блока — 0,2 тонны, большой блок весит 3,6 тонны и занимает место 14 маленьких. Найти минимальное число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков.

Решение. Покажем сначала, как все блоки можно перевезти за 20 рейсов. Сначала грузим в машину один большой и 30 маленьких блоков и делаем таких 16 рейсов. По объему это как раз составляет 44 маленьких блока, а по весу — $3{,}6 + 30 \cdot 0{,}2 = 9{,}6$ тонны за один рейс. После этого у нас остаётся 8 больших и 30 маленьких блоков, и мы их перевозим за 4 рейса следующим образом. В машину грузим по 2 больших и 8 маленьких блоков (последние два рейса — по 7 маленьких блоков). По объёму это составляет $28 + 8 = 36$ маленьких блоков, а по весу — $2 \cdot 3{,}6 + 8 \cdot 0{,}2 = 8{,}8$ тонны за каждый рейс (меньше за последние два рейса).

Теперь докажем, что все блоки нельзя перевезти за 19 рейсов. Действительно, суммарный объём всех блоков равен $24 \cdot 14 + 510 = 846$ маленьких блоков, а в 19 машин можно погрузить максимум $19 \cdot 44 = 836$ маленьких блоков. Таким образом, минимальное число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков, равно 20.

Ответ: 20 рейсов.

Пример 7. На покупку тетрадей в клетку и в линейку можно затратить не более 140 рублей. Тетрадь в клетку стоит 3 рубля, тетрадь в линейку — 2 рубля. При закупке число тетрадей в клетку не должно отличаться от числа тетрадей в линейку более чем на 9. Необходимо закупить максимально возможное суммарное количество тетрадей, при этом тетрадей в линейку нужно закупить как можно меньше. Сколько тетрадей в клетку и сколько тетрадей в линейку можно закупить при указанных условиях?

Решение. Пусть x и y — количество закупленных тетрадей в клетку и в линейку соответственно, $t = x + y$ — общее количество тетрадей. Согласно условиям задачи имеем следующую систему:

$$\begin{cases} 3x + 2y \le 140 \\ |\,x - y\,| \le 9 \\ t = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(t - y) + 2y \le 140 \\ t - 2y \ge -9 \\ t - 2y \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t - 2y \le 280 \\ 2y - t \le 9 \\ t - 2y \le 9. \end{cases}$$

Сложив первые два неравенства, получим неравенство $5t \le 289$, которое эквивалентно неравенству $t \le 57$, поскольку t — целое число. Следовательно, максимально возможное значение переменной t — это $t = 57$. При этом исходная система принимает следующий вид:

$$\begin{cases} 171 - y \le 140 \\ 57 - 2y \ge -9 \\ 57 - 2y \le 9 \end{cases} \Rightarrow \quad 31 \le y \le 33.$$

Ясно, что минимально возможное значение переменной y — это $y = 31$, при этом $x = t - y = 26$. Таким образом, нужно купить 26 тетрадей в клетку и 31 тетрадь в линейку.

Ответ: 26 тетрадей в клетку и 31 тетрадь в линейку.

Задачи для самостоятельного решения

1. Один рабочий бригады, состоящей из 5 человек, производит в среднем 14 деталей в час, причём каждый из рабочих производит в час целое число деталей, не превышающее 16. Сколько деталей в час может делать при этих условиях рабочий с самой низкой производительностью?

2. В контейнер упакованы комплектующие изделия трёх типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 400 тыс. руб. и 12 кг для первого типа, 500 тыс. руб. и 16 кг для второго типа, 600 тыс. руб. и 15 кг для третьего типа. Общий вес комплектующих равен 326 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере комплектующих изделий.

3. При проведении геологических исследований требуется пробурить скважины типов A и B. Каждая скважина типа A имеет глубину 70 метров, а типа B — 90 метров. Расходы на бурение одной скважины типа A составляют 500 тыс.руб, а одной скважины типа B — 600 тыс. руб. Суммарная глубина всех скважин должна быть не менее 3290 метров, а общие затраты на бурение всех скважин не должны превышать 22 300 тыс. руб. Какое минимальное и максимальное суммарное количество скважин обоих типов можно пробурить при указанных условиях?

4. Предприятие производит телевизоры и является прибыльным. Известно, что при изготовлении n телевизоров в месяц расходы предприятия на выпуск одного телевизора составляют не менее $\left(\dfrac{40\,500}{n} + 270 - \left|90 - \dfrac{40\,500}{n}\right|\right)$ тыс. руб., а цена каждого телевизора не превосходит $\left(540 - \dfrac{3n}{10}\right)$ тыс. руб. Определите ежемесячный объем производства, при котором может быть получена наибольшая из возможных в данных условиях ежемесячная прибыль.

5. Имеются три пакета акций. Суммарное количество акций первых двух пакетов совпадает с количеством акций в третьем пакете. Первый пакет в 4 раза дешевле второго, а суммарная стоимость первого и второго пакетов совпадает со стоимостью третьего пакета. Одна акция из второго пакета дороже одной акции из первого пакета на величину, заключенную в пределах от 16 тыс.руб. до 20 тыс.руб., а цена одной акции из третьего пакета не меньше 42 тыс.руб. и не больше 60 тыс.руб. Определить, какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций может содержаться в первом пакете.

6. Автофургон грузоподъемностью 339 кг перевозит ящики с виноградом и яблоками. Вес и стоимость одного ящика

с виноградом составляют 15 кг и 10 условных единиц, ящика с яблоками — 27 кг и 8 условных единиц соответственно. Известно, что количество загруженных на автофургон ящиков с виноградом составляет не более 70% от количества загруженных ящиков с яблоками. Определить наибольшую возможную суммарную стоимость всех ящиков с виноградом и яблоками, перевозимых автофургоном при данных условиях.

7. Цех получил заказ на изготовление 2000 деталей типа A и 14 000 деталей типа B. Каждый из 146 рабочих цеха затрачивает на изготовление одной детали типа A время, за которое он мог бы изготовить 2 детали типа B. Каким образом следует разделить рабочих цеха на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

8. В профком поступили путёвки трёх типов на отдых в санатории. Одна путёвка первого типа стоит 4 тыс.руб., одна путёвка второго типа — 6 тыс.руб., одна путёвка третьего типа — 9 тыс.руб. По путёвке первого типа можно отдыхать 8 дней, по путёвке второго типа — 14 дней, по путёвке третьего типа — 20 дней. Сколько путёвок каждого типа надо купить, чтобы общее число дней отдыха было наибольшим, а сумма, израсходованная на приобретение всех путевок, составляла 100 тыс.руб.?

9. Детский сад хочет приобрести на сумму 2200 рублей наборы конфет. Наборы одного типа стоят 50 рублей (в каждой коробке 10 конфет), наборы другого типа — 180 рублей (в каждой коробке 38 конфет), наборы третьего типа — 150 рублей (в каждой коробке 32 конфеты). Сколько коробок каждого типа должен купить детский сад, чтобы общее число купленных конфет было максимальным?

10. В магазине продаются гвоздики и розы. Гвоздика стоит 30 рублей, роза — 40 рублей. На покупку гвоздик и роз можно потратить не более 710 рублей. При покупке

число гвоздик не должно отличаться от числа роз более чем на 6. Необходимо купить максимально возможное суммарное количество цветов, при этом гвоздик нужно купить как можно меньше. Сколько гвоздик и сколько роз можно купить при указанных условиях?

11. Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 6-квартирного дома необходимо 30 деталей первого и 40 деталей второго вида. Для 10-квартирного дома требуется 40 и 60, а для дома на 14 квартир нужно 90 и 120 деталей первого и второго видов соответственно. Всего имеется 600 деталей первого и 800 деталей второго вида. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим?

12. Из пункта A в пункт B по железной дороге нужно перевезти 20 больших и 250 малых контейнеров. Один вагон вмещает 30 малых контейнеров, вес каждого из которых 2 тонны. Большой контейнер занимает место 9 малых и весит 30 тонн. Грузоподъемность вагона равна 80 тонн. Найти минимальное число вагонов, достаточное для перевозки всех контейнеров.

ГЛАВА 10. ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ПРОГРЕССИИ

Пусть a_1 и d — первый член и разность некоторой арифметической прогрессии, n — количество её членов. Пусть также a_n — n-й член этой прогрессии, S_n — сумма n первых её членов. Имеют место следующие соотношения:

$$a_n = a_1 + d(n - 1),\ S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Пусть теперь b_1 и q — первый член и знаменатель некоторой геометрической прогрессии ($b_1 \neq 0$, $q \neq 0$), n — количество её членов. Пусть также b_n — n-й член этой прогрессии, S_n — сумма n первых её членов. Тогда выполнены следующие равенства:

$$b_{\text{n}} = b_1 \cdot q^{n-1},\ S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \text{ при } q \neq 1,$$

$$S_n = nb_1 \text{ при } q = 1.$$

В данной главе в основном рассматриваются задачи на арифметическую либо геометрическую прогрессии, все члены которой являются целыми числами. При решении таких задач используются уже изученные нами методы и приемы. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Последние члены двух арифметических прогрессий $a_1 = 5$, $a_2 = 8$, ..., a_M и $b_1 = 9$, $b_2 = 14$, ..., b_K совпадают, а сумма всех их общих членов равна 815. Найти M и K.

Решение. Очевидно, что $a_m = 5 + 3(m - 1)$, $b_k = 9 + 5(k - 1)$, где $1 \leq m \leq M$ и $1 \leq k \leq K$. Для нахождения общего члена двух прогрессий составим и решим в натуральных числах уравнение:

$$5 + 3(m - 1) = 9 + 5(k - 1) \Leftrightarrow 3m = 5k + 2.$$

Рассматривая всевозможные остатки от деления k на 3, получим, что $k = 3n - 1$, где $n \in Z$ и $1 \leq n \leq N$, откуда $m = 5n - 1$. Найдем N. Легко видеть, что общие члены обеих арифметических прогрессий сами образуют арифметическую прогрессию с первым членом, равным 14, разностью, равной 15, и количеством членов, равным N. Применим к этой прогрессии формулу для нахождения суммы её первых N членов:

$$S_N = \frac{2 \cdot 14 + 15(N-1)}{2} \cdot N = 815 \Leftrightarrow 15N^2 + 13N - 1630 = 0,$$

откуда $N = 10$, $M = 5N - 1 = 49$ и $K = 3N - 1 = 29$.

Ответ: $M = 49$, $K = 29$.

Пример 2. Все члены геометрической прогрессии $\{b_n\}$ являются целыми числами. Определить, при каких из указанных ниже значений k число $b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_k^2$ делится на $b_1 + b_2 + \ldots + b_k$ независимо от выбора прогрессии, если а) $k = 3$; б) $k = 4$; в) $k = 5$.

Решение. Пусть b — первый член геометрической прогрессии, а q — её знаменатель. Согласно условиям задачи b и q — целые числа, кроме того, b, $q \neq 0$. Если $q = 1$, то $b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_k^2 = kb^2$, а $b_1 + b_2 + \ldots + b_k = kb$. Поэтому первое число делится нацело на второе. Пусть $q \neq 1$. Имеем:

$$\frac{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_k^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_k} = \frac{b^2(q^{2k} - 1)}{q^2 - 1} : \frac{b(q^k - 1)}{q - 1} = \frac{b(q^k + 1)}{q + 1}.$$

При любом нечётном k полученная дробь является целым числом. Действительно,

$$\frac{q^{2m+1} + 1}{q + 1} = q^{2m} - q^{2m-1} + q^{2m-2} - q^{2m-3} + \ldots + q^2 - q + 1.$$

Поэтому $k = 3$ и $k = 5$ удовлетворяют требованиям задачи. В то же время, к примеру, для $b_1 = 1$, $q = 2$ и $k = 4$ получаем $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 = 85$, а $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 15$, т.е. первое из чисел не делится нацело на второе.

Ответ: $k = 3$, $k = 5$.

Пример 3. Количество сотрудников корпорации ежегодно возрастало в геометрической прогрессии и за шесть лет увеличилось на 20 615 человек. Найти первоначальную численность сотрудников корпорации.

Решение. Пусть x — первоначальная численность сотрудников корпорации, а $q = \frac{m}{n}$, где m, $n \in N$, $m > n$, m и n взаимно просты, — знаменатель геометрической прогрессии (q рационально как отношение двух натуральных чисел). Прирост за шесть лет равен

$$xq^6 - x = x\left(\frac{m^6}{n^6} - 1\right) = \frac{x}{n^6}(m^6 - n^6) = y(m^6 - n^6) = 20\ 615,$$

где $y = \dfrac{x}{n^6}$ — натуральное число, поскольку m и n взаимно просты, а значит, числа $m^6 - n^6$ и n^6 также взаимно просты. Имеем далее:

$y(m - n)(m + n)(m^2 + n^2 - mn)(m^2 + n^2 + mn) = 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 31,$ причем

$$m + n \le m(m - n) + n^2 = m^2 + n^2 - mn.$$

Возможны четыре случая:

1. Если $m - n > 1$, то каждое из четырех чисел $m - n < m + n < m^2 + n^2 - mn < m^2 + n^2 + mn$ должно совпадать с соответствующим из чисел $5 < 7 < 19 < 31$, поэтому $m - n = 5$, $m + n = 7$, откуда $m = 6$, $n = 1$, что невозможно, так как $m^2 + n^2 - mn = 43 \ne 31$.

2. Если $m - n = 1$, а $m + n = 5$, то $m = 3$, $n = 2$, $m^2 + n^2 - mn = 7$, $m^2 + n^2 + mn = 19$, $y = 31$ и $x = yn^6 = 1984$.

3. Если $m - n = 1$, а $m + n = 7$, то $m = 4$, $n = 3$, $m^2 + n^2 - mn = 13$, что не делится ни на одно из чисел 5, 19, 31.

4. Если $m - n = 1$, а $m + n > 7$, то $m + n \ge 19$, откуда получаем, что $m \ge 10$, $m^2 + n^2 + mn \ge 10^2$ и $(m - n)(m + n) \times (m^2 + n^2 - mn)(m^2 + n^2 + mn) \ge 19^2 \cdot 100 = 36\ 100$, что невозможно. Таким образом, первоначальная численность сотрудников корпорации составляла 1984 человека.

Ответ: 1984 сотрудника.

Пример 4. Сумма первых четырнадцати членов арифметической прогрессии равна 77. Известно, что ее первый и одиннадцатый члены — натуральные числа. Чему равен восемнадцатый член прогрессии?

Решение. Пусть a_1 и d — первый член и разность данной арифметической прогрессии, а S_{14} — сумма её первых четырнадцати членов. Согласно условию задачи имеем уравнение

$$S_{14} = \frac{2a_1 + 13d}{2} \cdot 14 = 77 \Leftrightarrow 2a_1 + 13d = 11,$$

откуда вытекает, что $6a_1 + 39d = 33$ является целым числом. Далее, $a_{11} = a_1 + 10d$ — целое число, следовательно, $4a_{11} = 4a_1 + 40d$ также является целым числом. Имеем:

$$\begin{cases} 6a_1 + 39d \in Z \\ 4a_1 + 40d \in Z \end{cases} \Rightarrow 2a_1 - d \in Z \Rightarrow d \in Z,$$

так как a_1 — целое число. Итак, мы доказали, что разность прогрессии d является целым числом.

Из равенства $2a_1 + 13d = 11$ вытекает, что $a_1 = \frac{11 - 13d}{2}$ и $a_{11} = a_1 + 10d = \frac{11 + 7d}{2}$. Так как a_1 и a_{11} не только целые, но и натуральные числа, имеем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{11 - 13d}{2} > 0 \\ \frac{11 + 7d}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{11}{7} < d < \frac{11}{13} \Rightarrow d = 0 \text{ или } d = -1,$$

поскольку d — целое число. Если $d = 0$, то $a_1 = \frac{11 - 13d}{2}$ не является целым числом. Если же $d = -1$, то $a_1 = 12$ и $a_{18} = a_1 + 17d = -5$.

Ответ: $a_{18} = -5$.

Пример 5. Найти первый член целочисленной арифметической прогрессии, у которой сумма первых шести членов отличается от суммы следующих шести членов менее чем на 450, а сумма первых пяти членов превышает более чем на 5 сумму любого другого набора различных членов этой прогрессии.

Решение. Пусть a_1 и d — первый член и разность данной арифметической прогрессии, a_n и S_n; $n \in N$ — n-й член и сумма ее первых n членов соответственно. Тогда первое из условий задачи можно записать следующим образом:

$|S_6 - S_{7-12}| < 450 \Leftrightarrow |S_6 - (S_{12} - S_6)| < 450 \Leftrightarrow |2S_6 - S_{12}| < 450 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow |6(2a_1 + 5d) - 6(2a_1 + 11d)| < 450 \Leftrightarrow |36d| < 450 \Leftrightarrow |d| \le 12$, так как d — целое число. Здесь S_{7-12} — сумма членов данной прогрессии с седьмого по двенадцатый включительно.

Далее, согласно второму условию задачи, имеем неравенства $S_5 \ge 6 + S_4$ и $S_5 \ge 6 + S_6$ (здесь используем целочисленность данной прогрессии). Первое из этих неравенств эквивалентно неравенству $a_5 \geq 6$, а второе — неравенству $a_6 \leq -6$. Имеем:

$$\begin{cases} a_5 = a_1 + 4d \geq 6 \\ a_6 = a_1 + 5d \leq -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_1 - 4d \leq -6 \\ a_1 + 5d \leq -6 \end{cases} \Rightarrow d \leq -12.$$

Итак, $d = -12$, первое неравенство системы принимает вид $a_1 \geq 54$, второе неравенство преобразуется к виду $a_1 \leq 54$. Значит, $a_1 = 54$.

Ответ: $a_1 = 54$.

Пример 6. Первый член конечной геометрической прогрессии с целочисленным знаменателем меньше последнего, но не более чем на 17, а сумма её членов со второго по последний не меньше 26. Найти знаменатель прогрессии.

Решение. Пусть b_n и S_n, $n \in N$ — соответственно, n-й член и сумма n первых членов данной прогрессии, q — ее знаменатель. Заметим, что $q \neq 1$, иначе не выполняется первое из условий задачи. Согласно остальным условиям задачи при $q \neq 1$ имеем следующую систему неравенств:

$$\begin{cases} b_1 \geq b_n - 17 \\ S_n - b_1 \geq 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \geq b_1 \cdot q^{n-1} - 17 \\ b_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1} - b_1 \geq 26 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1(q^{n-1} - 1) \leq 17 \\ b_1\left(\dfrac{q(q^{n-1} - 1)}{q - 1}\right) \geq 26. \end{cases}$$

Так как дробь $\dfrac{q}{q-1}$ положительна при всех целых q, отличных от нуля и единицы, полученная система эквивалентна следующему двойному неравенству:

$$\frac{26(q-1)}{q} \leq b_1\left(q^{n-1} - 1\right) \leq 17 \Rightarrow \frac{26(q-1)}{q} \leq 17 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9q - 26}{q} \leq 0.$$

Ясно, что последнему неравенству с учетом всех вышеперечисленных условий удовлетворяет только $q = 2$. При этом двойное неравенство принимает вид $13 \leq b_1(2^{n-1} - 1) \leq 17$ и выполняется, например, при $n = 3$ и $b_1 = 5$. Таким образом, знаменатель данной геометрической прогрессии равен двум.

Ответ: $q = 2$.

Пример 7. Найти все возможные значения суммы возрастающей арифметической прогрессии:

$$a_1 = \frac{4k - k^2 - 1}{4k - k^2 + 5}; \ a_2 = \frac{4k - k^2 + 3}{4k - k^2 + 5}; \ \ldots; \ a_n = \frac{15}{4k - k^2 + 5},$$

где k — некоторое целое число.

Решение. Заметим, что разность данной прогрессии равна $d = a_2 - a_1 = \dfrac{4}{4k - k^2 + 5}$. Прогрессия является возрастающей, если $d > 0$, т.е. $k = 0, 1, 2, 3, 4$ (так как k — целое число). При $k = 0$ или $k = 4$ имеем $a_1 = -\dfrac{1}{5}$, $a_n = 3$, $d = \dfrac{4}{5}$.

По формуле n-го члена арифметической прогрессии находим, что

$$a_n = a_1 + d(n - 1) \Leftrightarrow 3 = -\frac{1}{5} + \frac{4}{5}(n - 1) \Leftrightarrow n = 5.$$

Тогда сумма первых n членов этой прогрессии будет равна $S_n = S_5 = \dfrac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 = 7$.

Если $k = 1$ или $k = 3$, имеем $a_1 = \dfrac{1}{4}$, $a_n = \dfrac{15}{8}$, $d = \dfrac{1}{2}$. В этом случае:

$$a_n = a_1 + d(n - 1) \Leftrightarrow \frac{15}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(n - 1) \Leftrightarrow n = \frac{17}{4}$$ — не является целым числом. И, наконец, при $k = 2$ находим, что $a_1 = \dfrac{1}{3}$, $a_n = \dfrac{5}{3}$, $d = \dfrac{4}{9}$. В этом случае получаем, что

$$a_n = a_1 + d(n - 1) \Leftrightarrow \frac{5}{3} = \frac{1}{3} + \frac{4}{9}(n - 1) \Leftrightarrow n = 4.$$

Тогда $S_n = S_4 = \dfrac{2a_1 + 3d}{2} \cdot 4 = 4$. Таким образом, сумма членов данной арифметической прогрессии может быть равна 7 или 4.

Ответ: $S = 7$ или $S = 4$.

Пример 8. Шесть простых чисел являются последовательными членами возрастающей арифметической прогрессии. Доказать, что разность этой прогрессии не меньше 30.

Решение. Предположим, что разность прогрессии нечетна. Тогда в этой прогрессии будет как минимум три чётных числа, что невозможно. Аналогично, если разность прогрессии не кратна 3, то в этой прогрессии будут как минимум два числа, кратных трем. Значит, разность прогрессии кратна 2 и 3, т.е. кратна 6.

Если разность прогрессии не кратна 5, то в ней есть член, кратный 5. Тогда это простое число 5. Если 5 — первый член прогрессии, то среди оставшихся пяти членов есть еще один член, кратный 5, что невозможно. Если же 5 не является первым членом, то первый член будет отрицательным, ибо ранее доказано, что разность прогрессии не меньше 6.

Итак, разность прогрессии кратна 5 и 6, т.е. кратна 30, а значит, не менее 30. Прогрессия с разностью 30, удовлетворяющая условию задачи, существует. В качестве примера можно взять прогрессию 7, 37, 67, 97, 127, 157, состоящую из простых чисел.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти сумму первых ста общих членов арифметических прогрессий 0, 7, 14, ... и 3, 7, 11, ...

2. Известно, что последние члены двух арифметических прогрессий $a_1 = 3$, $a_2 = 9$, ..., a_L и $b_1 = 4$, $b_2 = 9$, ..., b_M совпадают и что сумма всех общих членов этих прогрессий равна 1440. Найти L и M.

3. Найти сумму чисел, одновременно являющихся членами двух арифметических прогрессий: 2, 5, 8, ..., 332 и 7, 12, 17, ..., 157.

4. Сумма первых четырёх членов арифметической прогрессии равна 56. Все члены этой прогрессии — натуральные числа. Двенадцатый член больше 67, но меньше 74. Найти двадцатый член этой прогрессии.

5. Сумма первых двенадцати членов арифметической прогрессии равна 54. Известно, что её первый и девятый члены — натуральные числа. Чему равен девятнадцатый член прогрессии?

6. Найти первый член целочисленной арифметической прогрессии, у которой сумма первых семи членов отличается от суммы следующих семи членов менее чем на 400, а сумма первых шести членов превышает более чем на 3 сумму любого другого набора различных членов этой прогрессии.

7. Первый член конечной геометрической прогрессии с целочисленным знаменателем меньше последнего, но не более чем на 15, а сумма её членов со второго по последний не меньше 23. Найти знаменатель прогрессии.

8. Найти все возможные значения суммы убывающей арифметической прогрессии:

$$a_1 = \frac{6m - m^2 - 9}{6m - m^2};\ a_2 = \frac{6m - m^2 - 12}{6m - m^2};\ \ldots;\ a_n = \frac{(-10)}{6m - m^2},$$

где m — некоторое целое число.

9. Сумма первых пятнадцати членов арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, больше 337, но меньше 393. Чему равен восьмой член этой прогрессии, если известно, что он кратен четырем?

10. Количество жителей поселка ежегодно возрастало в геометрической прогрессии и за шесть лет увеличилось на 37 037 человек. Найти первоначальную численность жителей поселка.

ГЛАВА 11. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА И КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

В данной главе рассматриваются задачи на целые числа, связанные с квадратным трехчленом. Во многих случаях при решении таких задач используется графический метод. В некоторых задачах применяется теорема Виета, которая формулируется следующим образом. Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},\ x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти все целые значения a, при каждом из которых квадратный трехчлен $x^2 - 3ax + 2a^2 + 1$ можно разложить в произведение $(x + b)(x + c)$ двух сомножителей с целыми b и c.

Решение. Согласно условию задачи имеем следующее равенство:

$$x^2 - 3ax + 2a^2 + 1 = (x + b)(x + c) = x^2 + (b + c)x + bc,$$

откуда следует, что

$$\begin{cases} -3a = b + c \\ 2a^2 + 1 = bc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -3a - b \\ 2a^2 + 1 = -3ab - b^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -3a - b \\ (a + b)(2a + b) = -1. \end{cases}$$

Из последнего равенства ввиду целочисленности значений a и b вытекают два случая:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + b = 1. \end{cases}$$

В первом случае получаем, что $a = -2$, $b = 3$, $c = 3$, во втором — $a = 2$, $b = -3$, $c = -3$. Таким образом, ответом к задаче будут служить $a = \pm 2$.

Ответ: $a = \pm 2$.

Пример 2. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $9^x < 20 \cdot 3^x + a$ не имеет ни одного целочисленного решения.

Решение. Обозначим $3^x = t > 0$, тогда данное неравенство принимает вид $t^2 - 20t - a < 0$. Рассмотрим функцию $y(t) = t^2 - 20t - a$. На координатной плоскости Oty графиком этой функции будет служить парабола, абсцисса вершины которой равна $t_0 = 10$. Тогда целочисленным решениям исходного неравенства $x = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ будут соответствовать $t = 3^x = \ldots, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27, \ldots$. Отсюда следует, что исходное неравенство не имеет ни одного целочисленного решения тогда и только тогда, когда число $t = 9$ не входит в промежуток, являющийся решением неравенства $y(t) < 0$ (или это неравенство вообще не имеет решений). И в том и в другом случае должно выполняться условие $y(9) \geq 0$ (рис. 11).

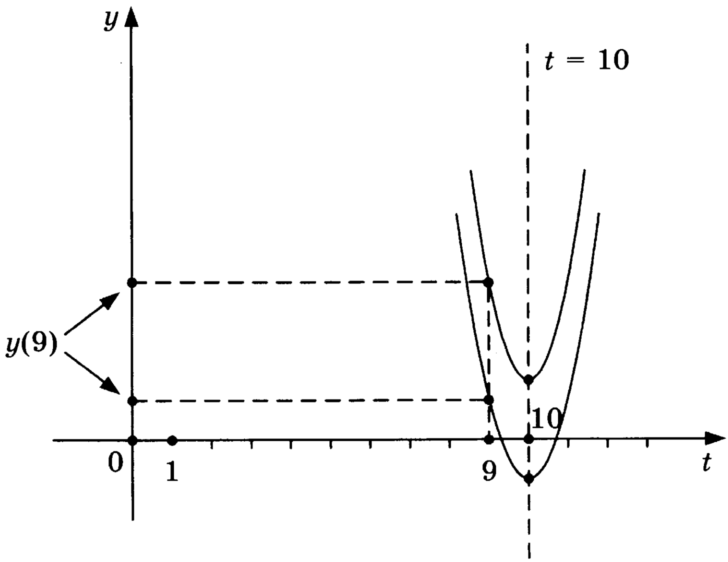

Рис. 11

В противном случае (т.е. когда $y(9) < 0$) число $t = 9$ попадает в промежуток, являющийся решением неравенства $y(t) < 0$, и, значит, $x = 2$ является решением исходного неравенства. Окончательно имеем:

$$y(9) \geq 0 \Leftrightarrow 81 - 20 \cdot 9 - a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq -99.$$

Полученные значения a и будут служить ответом к задаче.

Ответ: $a \leq -99$.

Пример 3. Найти все значения параметра a, при которых существует ровно 1998 целых чисел, удовлетворяющих неравенству $x^2 - \pi x + a < 0$.

Решение. Обозначим заданный квадратный трёхчлен через $f(x) = x^2 - \pi x + a$. Так как вершина параболы $x_0 = \frac{\pi}{2}$ удовлетворяет неравенствам $\frac{3}{2} < x_0 < 2$, то множество решений данного неравенства содержит ровно 1998 целых чисел в том и только в том случае, когда парабола $y = f(x)$ расположена так, как показано на рис. 12.

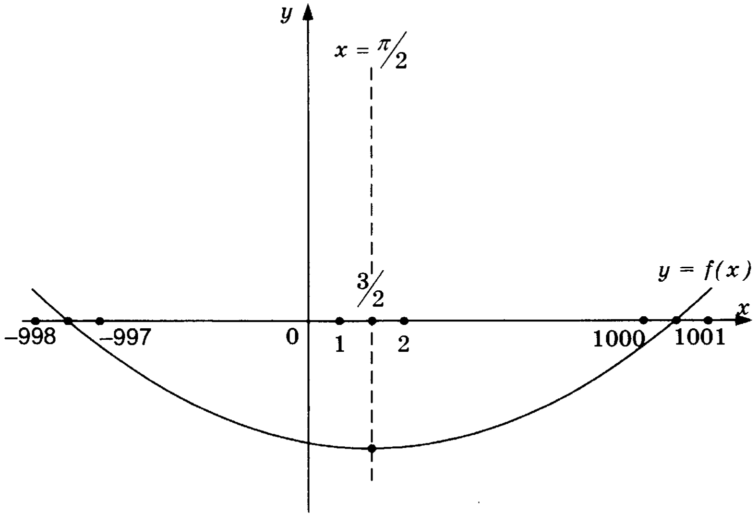

Рис. 12

Значит, корни трёхчлена x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ должны удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} -998 \le x_1 < -997 \\ 1000 < x_2 \le 1001 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-997) < 0 \\ f(1001) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 997^2 + 997\pi + a < 0 \\ 1001^2 - 1001\pi + a \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1001(\pi - 1001) \le a < -997(\pi + 997).$$

Ответ: $1001(\pi - 1001) \le a < -997(\pi + 997)$.

Пример 4. Найти все значения параметра q, при каждом из которых число целочисленных решений неравенства $x^2 - 5(x - 1) + 3|x - q| - q \le 0$ максимально.

Решение. Преобразуем данное неравенство следующим образом:

$$x^2 - 5(x-1) + 3|x-q| - q \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge q \\ x^2 - 5x + 5 + 3x - 3q - q \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \le q \\ x^2 - 5x + 5 - 3x + 3q - q \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q \le x \\ q \ge \dfrac{x^2 - 2x + 5}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} q \ge x \\ q \le \dfrac{-x^2 + 8x - 5}{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

На координатной плоскости Oxq изобразим множество точек, координаты которых удовлетворяют полученной совокупности (рис. 13).

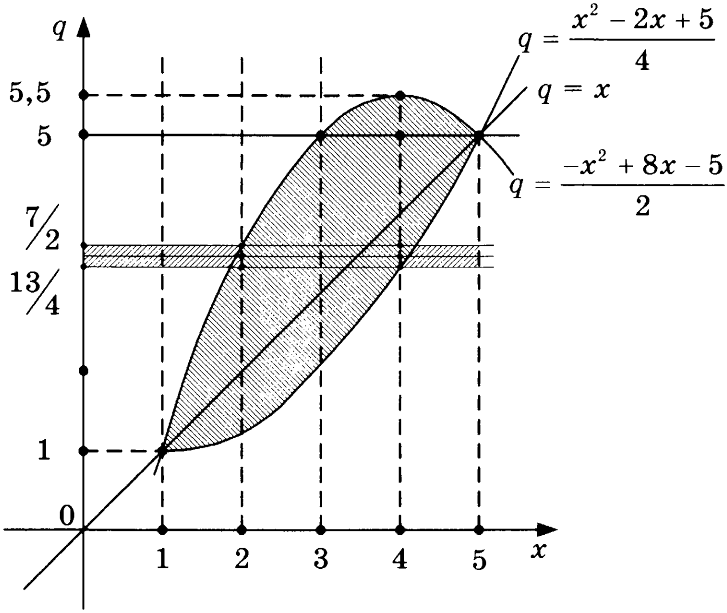

Рис. 13

Из рисунка видно, что наибольшее число целочисленных решений (а именно три решения) данное неравенство будет иметь при $\frac{13}{4} \le q \le \frac{7}{2}$ и $q = 5$.

Ответ: $\frac{13}{4} \le q \le \frac{7}{2}$, $q = 5$.

Пример 5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $6x^2 + 4a^2 + 6ax - - 3x - 24a + 35 < 0$ содержит хотя бы одно целое число.

Решение. Рассмотрим данное неравенство как квадратное относительно a:

$$4a^2 + (6x - 24)a + 6x^2 - 3x + 35 < 0.$$

Необходимым и достаточным условием существования его решений является положительность дискриминанта:

$$(3x - 12)^2 - 4(6x^2 - 3x + 35) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15x^2 + 60x - 4 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(\frac{-30 - 8\sqrt{15}}{15}, \frac{-30 + 8\sqrt{15}}{15}\right).$$

Полученному интервалу принадлежат всего пять целых значений x — это $x = -4$, $x = -3$, $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$. Требуется для каждого из этих значений x найти соответствующие значения параметра a.

1. Если $x = -4$, то неравенство принимает вид

$$4a^2 - 48a + 143 < 0 \Leftrightarrow a \in \left(\frac{11}{2}, \frac{13}{2}\right).$$

2. Если $x = -3$, получаем

$$2a^2 - 21a + 49 < 0 \Leftrightarrow a \in \left(\frac{7}{2}, 7\right).$$

3. При $x = -2$ имеем

$$4a^2 - 36a + 65 < 0 \Leftrightarrow a \in \left(\frac{5}{2}, \frac{13}{2}\right).$$

4. Для $x = -1$ получаем

$$2a^2 - 15a + 22 < 0 \Leftrightarrow a \in \left(2, \frac{11}{2}\right).$$

5. Если $x = 0$, то

$$4a^2 - 24a + 35 < 0 \Leftrightarrow a \in \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right).$$

Ответ выписывается как результат объединения всех полученных интервалов: $a \in (2, 7)$.

Ответ: $a \in (2, 7)$.

Пример 6. Каждый из двух различных корней некоторого квадратного трёхчлена $f(x) = x^2 + (3a + 10)x + 5b - 14$ и его значение при $x = 1$ являются простыми числами. Найти a, b и корни трёхчлена $f(x)$.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $f(x)$ (будем считать, что $x_1 < x_2$), тогда $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ и $f(1) = (1 - x_1)(1 - x_2) = (x_1 - 1)(x_2 - 1)$.

Так как по условию x_1, x_2 и $f(1)$ являются простыми числами, то числа $x_1 - 1$ и $x_2 - 1$ — натуральные и меньшее из них равно 1 (иначе $f(1)$ не будет простым). Следовательно, $x_1 = 2$ и $f(1) = x_2 - 1$. Значит, $x_2 - 1$ и x_2 — два последовательных простых числа, что возможно, только если этими числами являются 2 и 3. Итак, $x_2 = 3$, $3a + 10 = -(x_1 + x_2) = -5$, $5b - 14 = x_1 \cdot x_2 = 6$, откуда $a = -5$ и $b = 4$.

Ответ: $a = -5$, $b = 4$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Пример 7. Найти все a, при которых уравнение $(1 + a)x^2 + (1 - a)x + a + 3 = 0$ имеет, по крайней мере, один корень и все его корни являются целыми числами.

Решение. При $a = -1$ получаем, что данное уравнение имеет единственный корень $x = -1$, поэтому $a = -1$ удовлетворяет условию задачи. Если $a \neq -1$ и квадратное уравнение $(1 + a)x^2 + (1 - a)x + a + 3 = 0$ имеет корни x_1, x_2, то, согласно теореме Виета, выполнены следующие соотношения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{a-1}{a+1} \\ x_1 x_2 = \dfrac{a+3}{a+1} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_1 x_2 =$$

$$= \frac{a-1}{a+1} + \frac{a+3}{a+1} = \frac{2a+2}{a+1} = 2$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_1 x_2 + 1 = 3 \Leftrightarrow (x_1 + 1)(x_2 + 1) = 3.$$

Так как x_1 и x_2 — целые числа, то возможны следующие случаи:

$$\begin{cases} x_1 + 1 = 1 \\ x_2 + 1 = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1 + 1 = 3 \\ x_2 + 1 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1 + 1 = -1 \\ x_2 + 1 = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1 + 1 = -3 \\ x_2 + 1 = -1. \end{cases}$$

Или, что то же самое,

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -4 \end{cases} \vee \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = -2. \end{cases}$$

В первом и втором случаях квадратный трёхчлен принимает вид

$$(1 + a)(x - x_1)(x - x_2) = (1 + a)x(x - 2)$$

и должен совпадать с исходным квадратным трёхчленом; отсюда находим $a = -3$. В третьем и четвёртом случаях получаем, что

$$(1 + a)(x + 2)(x + 4) \equiv (1 + a)x^2 + (1 - a)x + a + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6(1 + a) = 1 - a \\ 8(1 + a) = a + 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{5}{7}.$$

Таким образом, ответом к задаче будут служить $a = -1$, $a = -3$, $a = -\frac{5}{7}$.

Ответ: $a = -1$, $a = -3$, $a = -\frac{5}{7}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $16^x + a < 30 \cdot 4^x$ не имеет ни одного целочисленного решения.

2. Найти все целые значения параметра a, при которых существуют ровно два целых значения x, удовлетворяющих неравенству $x^2 + 5\sqrt{2}x + a < 0$.

3. Квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + px + q$ имеет два различных целых корня. Один из корней трёхчлена и его значение в точке $x = 11$ являются простыми числами. Найти корни трёхчлена.

4. Найти все такие целые a и b, что корни уравнения $x^2 + (2a + 9)x + 3b + 5$ являются различными целыми числами, а коэффициенты $2a + 9$ и $3b + 5$ — простыми числами.

5. Найти все a, при которых уравнение $(1 + a)x^2 + (1 - a)x - 5a - 3 = 0$ имеет, по крайней мере, один корень и все его корни являются целыми числами.

6. Найти все целые значения a, при которых квадратный трёхчлен $x^2 - (a + 5)x + 5a + 1$ можно разложить в произведение $(x + b)(x + c)$ двух сомножителей с целыми b и c.

7. Найти все значения параметра p, при которых число целочисленных решений неравенства $x^2 + 5(x + 1) + 3|x - p| + p \leq 0$ максимально.

8. Найти все значения параметра a, при каждом из которых множество решений неравенства $2x^2 + 12a^2 - 6ax + 17x + 2a + 56 < 0$ содержит хотя бы одно целое число.

ГЛАВА 12. ЗАДАЧИ, АНАЛОГИЧНЫЕ ЗАДАЧАМ 19 ИЗ ЕГЭ

В данной главе рассматриваются задачи типа 19, аналогичные тем, которые предлагались на Едином государственном экзамене по математике.

Пример 1. Найти все пары натуральных чисел k и n таких, что $k < n$ и выполнено равенство $(n^2)^k = (k^2)^n$.

Решение. Ясно, что данное уравнение эквивалентно уравнению $n^k = k^n$. Рассмотрим общее уравнение $x^y = y^x$ (x и y различные действительные положительные числа). Преобразуем его следующим образом:

$$x^y = y^x \Leftrightarrow y \cdot \ln x = x \cdot \ln y \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}.$$

Рассмотрим функцию $f(t) = \dfrac{\ln t}{t}$, тогда наше уравнение примет вид $f(x) = f(y)$. Производная этой функции равна

$$f'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2} = 0 \Leftrightarrow t = e.$$

Следовательно, $f(t)$ строго возрастает при $0 < t < e$ и строго убывает при $t > e$. Поэтому на каждом из этих промежутков функция $f(t)$ принимает любое своё значение ровно по одному разу. Это означает, что равенство $f(x) = f(y)$ при $x \neq y$ возможно тогда и только тогда, когда x и y принадлежат разным промежуткам. Но интервалу $(0, e)$ принадлежат только два натуральных числа — это 1 и 2. При этом значение $f(1) = 0$ не принимается на интервале $(e, +\infty)$. Таким образом, в натуральных числах исходное уравнение имеет решение только при $k = 2$.

Число $n > 2$ находим из уравнения:

$$\frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln n}{n} \quad \Leftrightarrow \quad n = 4.$$

В силу приведённых выше рассуждений это решение будет единственным.

Ответ: $k = 2$. $n = 4$.

Пример 2. Найти все тройки натуральных чисел k, m и n, удовлетворяющие уравнению $5 \cdot k! = m! - n!$. Здесь ($1! = 1$; $2! = 1 \cdot 2 = 2$; $n! = 1 \cdot 2 \ldots n$).

Решение. Возможны три случая. Если $k = n < m$, имеем:

$$5 \cdot k! = m! - k! \Leftrightarrow 6 \cdot k! = m! \Leftrightarrow 6 = (k + 1)(k + 2) \ldots (m - 1)m.$$

Несложным перебором получаем, что либо $k = 1$ и тогда $m = 3$, либо $k = 5$ и $m = 6$. Если $k < n < m$, исходное уравнение преобразуется следующим образом:

$$5 \cdot k! = m! - n! \Leftrightarrow 5 = [(k + 1)(k + 2) \ldots (m - 1)m] - [(k + 1)(k + 2) \ldots (n - 1)n] \Leftrightarrow 5= [(k + 1)(k + 2) \ldots (n - 1)n] \times [(n + 1)(n + 2) + \ldots + (m - 1)m - 1].$$

Последнее равенство невозможно, так как оба множителя (стоящие в квадратных скобках) больше единицы. И, наконец, если $n < k < m$, получаем, что

$$5 \cdot k! = m! - n! \Leftrightarrow n! = m! - 5 \cdot k! \Leftrightarrow 1 = [(n + 1)(n + 2) \ldots (m - 1)m] - 5 \cdot [(n + 1)(n + 2) \ldots (k - 1)k] \Leftrightarrow 1 = [(n + 1)(n + 2) \ldots (k - 1)k] \cdot [(k + 1)(k + 2) + \ldots + (m - 1)m - 5].$$

Полученное равенство также невозможно, поскольку число, стоящее в первой квадратной скобке, всегда больше единицы. Таким образом, решением задачи будут служить $k = n = 1$, $m = 3$ и $k = n = 5$, $m = 6$.

Ответ: $k = n = 1$, $m = 3$; $k = n = 5$, $m = 6$.

Пример 3. Найти все натуральные n, для которых уравнение $n^2 + 2 = (2n - 1)^x$ имеет хотя бы один рациональный корень x.

Решение. Пусть $\frac{p}{q}$ — рациональный корень данного уравнения. Преобразуем это уравнение следующим образом:

$$n^2 + 2 = (2n - 1)^{\frac{p}{q}} \Leftrightarrow (n^2 + 2)^q = (2n - 1)^p.$$

Ясно, что $(n^2 + 2) - (2n - 1)= n^2 - 2n + 3 > 0$ при всех n, откуда следует, что $n^2 + 2 > 2n - 1 > 0$ при всех натуральных n. Поэтому будем считать числа p и q положительными и взаимно простыми, причём $p > q$. Пусть $p = q + t$, $t \in N$. Имеем:

$$(n^2 + 2)^q = (2n - 1)^{q + t} \Leftrightarrow \left(\frac{n^2 + 2}{2n - 1}\right)^q = (2n - 1)^t.$$

Значит, дробь $\dfrac{n^2+2}{2n-1}$ является целым числом. Разделим $n^2 + 2$ на $2n - 1$ в «столбик» с остатком:

$$\frac{n^2+2}{2n-1} = \frac{n}{2} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4(2n-1)} \Leftrightarrow \frac{4(n^2+2)}{2n-1} =$$

$$= 2n + 1 + \frac{9}{2n-1}.$$

Следовательно, число $2n - 1$ является делителем числа 9, поэтому возможны варианты $n = 1$, $n = 2$ или $n = 5$. При $n = 1$ получаем, что $3^q = 1$ — нет решений в натуральных числах. При $n = 2$ имеем $\left(\dfrac{4}{3}\right)^q = 3t$, чего не может быть, так как в левой части не целое число. И, наконец, при $n = 5$ получаем уравнение $3^q = 9^t$, которое имеет решение в натуральных числах: $q = 2$, $t = 1$, $p = 3$ и, значит, $x = \dfrac{3}{2}$.

Ответ: $n = 5$.

Пример 4. Найти все несократимые дроби $\dfrac{a}{b}$, представимые в виде $\overline{b,a}$ (запятая разделяет десятичные записи натуральных чисел b и a).

Решение. Пусть натуральные числа a и b взаимно просты, а десятичная запись числа a имеет n знаков. Тогда условие задачи записывается в виде уравнения

$$\frac{a}{b} = b + a \cdot 10^{-n} \Leftrightarrow 10^n(a - b^2) = ab,$$

из которого следует, в частности, что $a > b$. В силу взаимной простоты чисел a и b число $a - b^2$ не имеет общих делителей ни с a, ни с b, следовательно, уравнение превращается в систему из двух уравнений

$$a - b^2 = 1,\ 10^n = ab.$$

В силу все той же взаимной простоты чисел a и b (с учетом $a > b$) последнему уравнению удовлетворяют только пары чисел $a = 10^n$, $b = 1$ и $a = 5^n$, $b = 2^n$. Первая пара при подстановке дает для числа n уравнение $10^n = 2$, которое не имеет решений. Если же $a = 5^n$ и $b = 2^n$, получаем, что

$$5^n - 4^n = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^n = 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Так как левая часть полученного уравнения возрастает, а правая убывает, то это уравнение имеет не более одного корня, который угадывается: $n = 1$, откуда $a = 5$ и $b = 2$.

Ответ: $\frac{5}{2}$.

Пример 5. Десятичная запись целого числа n, большего 9, должна состоять из различных цифр одной чётности, а само оно должно быть квадратом целого числа. Найти все такие числа n.

Решение. Заметим сначала, что n — чётное число, так как при возведении любого нечётного числа, большего 3, в квадрат вторая цифра справа получается чётной. Действительно, квадрат любого нечётного числа оканчивается либо на 1, либо на 5, либо на 9 и должен давать остаток 1 при делении на 4, что не может произойти, если вторая справа цифра нечётная. Последней цифрой числа n не может быть 6. Если это так, то вторая справа цифра должна быть нечётной, иначе n будет давать остаток 2 при делении на 4, что также невозможно.

Следовательно, последняя цифра числа n — это 4 (если последняя цифра числа есть 0, то и предпоследняя должна быть равна 0, что приводит к противоречию). Рассмотрим теперь возможные остатки при делении числа n на 3. Полный квадрат при делении на 3 дает либо остаток 1, либо 0. Остатки при делении на 3 чисел 2, 4, 6, 8, 0 есть 2, 1, 0, 2, 0 соответственно. Так как любое число дает при делении на 3 тот же остаток, что и сумма его цифр, то число n дает остаток 1 при различных комбинациях цифр 4, 6, 0 (4 — последняя цифра, могут входить не все цифры), а остаток 0 — при различных комбинациях цифр 4, 6, 8, 0 (в этом случае n делится на 9, поэтому сумма цифр должна быть равна 18, цифра 0 может не входить, 4 — последняя цифра). В первом случае полным квадратом является число $n = 64$, во втором — число $n = 6084$.

Ответ: 64, 6084.

Пример 6. Какое наибольшее число членов может иметь геометрическая прогрессия, все члены которой — различные натуральные числа, большие 340 и меньшие 520?

Решение. Без ограничения общности будем рассматривать только возрастающие геометрические прогрессии (если прогрессия убывающая, всегда можно положить первый член новой прогрессии равным последнему члену исходной, второй — предпоследнему и т.д., последний — ее первому члену). Знаменатель q такой геометрической прогрессии должен быть рационален как отношение двух натуральных чисел. Пусть $q = \frac{c}{d}$, где $c > d$ — несократимая дробь, $b_1 = x$ — первый член данной прогрессии, n — количество её членов. Докажем, что ответом к задаче является $n = 4$. В качестве примера возьмём прогрессию, у которой $b_1 = x = 7^3 = 343$, $q = \frac{8}{7}$, $b_2 = 7^2 \cdot 8$, $b_3 = 7 \cdot 8^2$ и $b_4 = 8^3 = 512$. Покажем, что для любой другой прогрессии, удовлетворяющей условиям задачи, всегда $n \le 3$.

Из неравенств $340 < b_1 < b_1 \cdot q^{n-1} < 520$ следует, что $q^{n-1} < \frac{520}{340} = \frac{26}{17}$. Если $d = 1, 2, \dots 6$, имеем

$$\left(\frac{2}{1}\right)^3 > \left(\frac{3}{2}\right)^3 > \left(\frac{4}{3}\right)^3 > \left(\frac{5}{4}\right)^3 > \left(\frac{6}{5}\right)^3 > \left(\frac{7}{6}\right)^3 > \frac{26}{17}$$

(каждый раз берём минимально возможное q, чтобы «уместить» как можно больше членов прогрессии). Значит, при всех таких d количество членов прогрессии не превосходит 3. Пусть теперь $d \ge 8$. Так как числа c и d — взаимно простые, а числа $x \cdot \frac{c^k}{d^k}$ при $k = 0,1, \dots n-1$ натуральные, то x должно делиться без остатка на d^{n-1}. В предположении $n \ge 4$ нужно найти в промежутке $340 < x < 520$ такое натуральное число, которое делилось бы нацело на куб натурального числа, большего либо равного 8. Ясно, что такое число только одно, это число 512, и оно соответствует уже построенной нами геометрической прогрессии.

Следовательно, данная в условии задачи геометрическая прогрессия может иметь максимум 4 члена.

Ответ: 4 члена.

Пример 7. Найти все пары натуральных чисел a и b, которые удовлетворяют равенству $\overline{ba} = a^b + 90$ (в левой части стоит число, получаемое дописыванием десятичной записи числа a после десятичной записи числа b).

Решение. При $a = 1$ данное уравнение принимает вид $\overline{b1} = 91$ и имеет решение $b = 9$. Если $b = 1$ и a является k-значным числом, то исходное уравнение преобразуется к виду

$$\overline{1a} = a + 90 \Leftrightarrow 10^k + a = a + 90 \Leftrightarrow 10^k = 90$$

и не имеет решений в целых числах. Далее будем считать, что $a \geq 2$ и $b \geq 2$. Если $a \leq 9$ и $b \leq 9$, то в левой части уравнения стоит двузначное число, откуда следует неравенство $a^b \leq 9$. Ясно, что это неравенство выполняется только для следующих пар чисел: $(a, b) = \{(2, 2); (2, 3); (3, 2)\}$. Проверкой убеждаемся, что ни одна из этих пар не является решением задачи. Если же $a \leq 9$, а b является k-значным числом, где $k \geq 2$, то справедлива следующая оценка:

$$a^b \geq 2^{10^{k-1}} \geq 2^{10(k-1)} > 10^{3(k-1)} = 10^{k+(2k-3)} \geq 10^{k+1} > \overline{ba}.$$

Следовательно, в этом случае исходное уравнение решений не имеет.

Пусть теперь $a \geq 10$. Тогда для выполнения равенства необходимы условия: $b = 2$ и $a \leq 31$, так как иначе, если b является k-значным числом, а a является $(m + 1)$-значным числом, где $m \geq 1$, имеем:

если $k > 1$, то

$$a^b \geq (10^m)^{10^{k-1}} \geq 10^{m(k+2)} = 10^{(m+m)+mk} \geq 10^{(m+1)+k} > \overline{ba};$$

если $k = 1$, $b \geq 3$, то

$$a^b \geq (10^m)^3 = 10^{(m+m)+m} \geq 10^{(m+1)+k} > \overline{ba};$$

если $k = 1$, $b = 2$, $m \geq 2$, то

$$a^b \geq (10^m)^2 = 10^{(m+m/2)+m/2} \geq 10^{(m+1)+k} > \overline{ba};$$

если $k = 1$, $b = 2$, $m = 1$, $a \geq 32$, то

$$a^b \geq 32^2 \geq 10^3 = 10^{(m+1)+k} > \overline{ba}.$$

Конечным перебором для всех пар a и b, для которых $10 \leq a \leq 31$ и $b = 2$, получаем, что уравнению удовлетворяет всего одна пара $a = 11$ и $b = 2$. Таким образом, ответом к задаче будут служить две пары чисел $(a, b) = \{(11, 2); (1, 9)\}$.

Ответ: $a = 11$, $b = 2$; $a = 1$, $b = 9$.

Пример 8. Каждое из чисел 2, 3, ..., 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, ..., 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все полученные 54 результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение. Если все произведения взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна

$$(2 + \ldots + 7)(13 + \ldots + 21) = 27 \cdot 153 = 4131.$$

Так как предыдущая сумма оказалась нечётной, то число нечётных слагаемых в ней — нечётно, причём это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого её слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечётной, а значит, не будет равна нулю. Значение 1 сумма принимает, например, при такой расстановке знаков у произведений, которая получается при раскрытии следующих скобок:

$$(-2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7) \cdot (-13 - 14 - 15 - 16 + 17 - 18 + \\ + 19 + 20 + 21) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Таким образом, наименьшая по модулю сумма, которую можно получить исходя из условий задачи, равна 1, а наибольшая сумма равна 4131.

Ответ: 1 и 4131.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти все тройки натуральных чисел k, m и n, удовлетворяющие уравнению $2 \cdot k! = m! - 2 \cdot n!$ Здесь $(1! = 1;\ 2! = = 1 \cdot 2 = 2;\ n! = 1 \cdot 2\ \ldots \cdot n)$.

2. Найти все натуральные n, для которых уравнение $n^2 + 4 = = (2n + 3)^x$ имеет хотя бы один рациональный корень x.

3. Рассматриваются наборы различных целых чисел, произведение которых равно 180. Для каждого такого набора

рассматриваются арифметические прогрессии, состоящие из чисел этого набора. Из какого наибольшего количества членов может состоять такая арифметическая прогрессия?

4. Набор состоит из 41 натурального числа, среди которых есть числа 3, 5 и 7. Среднее арифметическое любых 34 чисел этого набора меньше 2.

а) Может ли такой набор содержать ровно 17 единиц?

б) Меньше 17 единиц?

в) Доказать, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 35.

5. Найти все пары натуральных чисел a и b, удовлетворяющие равенству $\overline{ab} = a^b + 23$ (в левой части равенства стоит число, получаемое приписыванием десятичной записи числа a перед десятичной записью числа b).

6. Какое наибольшее число членов может иметь геометрическая прогрессия, все члены которой — различные натуральные числа, большие 210 и меньшие 350?

7. Перед каждым из чисел 22, 23, ..., 26 и 50, 51, ..., 60 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 55 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

ГЛАВА 13. ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

В данной главе рассматриваются задачи на целые числа, предлагавшиеся в разные годы на олимпиадах «Ломоносов» и «Покори Воробьевы горы» по математике, а также на Московской математической олимпиаде.

Пример 1. На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник $m \times n$ клеток, причём числа m и n взаимно просты и $m < n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 его клеток. Найти все возможные значения m и n при данных условиях.

Решение. Диагональ прямоугольника не может проходить через узлы клеток, лежащие внутри прямоугольника. Действительно, если бы это было не так, то существовал бы прямоугольник меньшего размера $m_1 \times n_1$ клеток, причём $m = km_1$ и $n = kn_1$ (k, m_1 и n_1 — натуральные числа). Тогда числа m и n не являлись бы взаимно простыми, что противоречит условию задачи.

Далее, диагональ прямоугольника, пересекая каждую новую клетку, пересекает либо вертикальную, либо горизонтальную линию клетчатой бумаги, находящуюся внутри этого прямоугольника. Это значит, что число пересекаемых ею клеток, уменьшенное на единицу (не рассматривается клетка, прилегающая к той вершине прямоугольника, из которой выходит данная диагональ), равно суммарному количеству вертикальных и горизонтальных линий, лежащих внутри прямоугольника, т.е. $(m - 1) + (n - 1)$. Итак, число пересекаемых клеток равно $m + n - 1$, и из условия задачи получаем уравнение

$$mn - 116 = m + n - 1 \Leftrightarrow (m - 1)(n - 1) = 116.$$

Поскольку $m < n$, пара $(m - 1,\ n - 1)$ равна либо $(1,116)$, либо $(2,58)$, либо $(4,29)$. Первые две пары приводят к ответу, в последнем случае получаются числа $m = 5$ и $n = 30$, не являющиеся взаимно простыми.

Ответ: $\{(2,117); (3,59)\}$.

Пример 2. Каким может быть наибольший общий делитель натуральных чисел m и n, если при увеличении числа m на 6 он увеличивается в 9 раз?

Решение. Пусть d — наибольший общий делитель чисел m и n, тогда $9d$ — наибольший общий делитель чисел $m + 6$ и n. Так как d — делитель m и $m + 6$, то d — делитель разности этих чисел, т.е. делитель числа 6. Следовательно, $d = 1$, $d = 2$, $d = 3$ или $d = 6$. Так как числа $m + 6$ и n делятся на 9, то числа m и n делятся на 3, следовательно, d делится на 3. Таким образом, $d = 3$ или $d = 6$. Осталось проверить, что оба случая имеют место. Если $d = 3$, то, например, $m = 21$, $n = 27$; если $d = 6$, то $m = 48$, $n = 54$.

Ответ: 3 или 6.

Пример 3. Каким может быть произведение нескольких различных простых чисел, если оно кратно каждому из них, уменьшенному на 1? Найти все возможные значения этого произведения.

Решение. Пусть $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_к$ $(k \geq 2)$ — произведение нескольких различных простых чисел $p_1 < p_2 < \ldots < p_к$, удовлетворяющих условию задачи. Поскольку по условию N кратно чётному числу $p_2 - 1$, оно само чётно и $p_1 = 2$. Число $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_к$ имеет единственный делитель p_1 из интервала $(1, p_2)$, но $p_2 - 1$ также принадлежит этому интервалу, значит, $p_2 - 1 = p_1 = 2$. Таким образом, $p_2 = 3$, а N может принимать значение $2 \cdot 3 = 6$.

Если $k \geq 3$, то по условию задачи $p_3 - 1$, принадлежащее интервалу (p_2, p_3), является делителем числа N. Этому интервалу может принадлежать единственный делитель N — число $p_1 \cdot p_2 = 6$. Следовательно, $p_3 = p_1 \cdot p_2 + 1 = 7$. Число $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ удовлетворяет условию задачи.

Если $k \geq 4$, то по условию чётное число $p_4 - 1$, принадлежащее интервалу (p_3, p_4), также является делителем N. Из чётных делителей числа N этому интервалу могут принадлежать лишь числа $p_1 \cdot p_3 = 14$ и $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 42$. Число $15 = p_1 \cdot p_3 + 1$ является составным, значит, $p_4 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 + 1 = 43$. Число $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 = 1806$ удовлетворяет условию задачи.

Если $k \geq 5$, то по условию чётное число $p_5 - 1$, принадлежащее интервалу (p_4, p_5), также должно являться делителем

N. Из чётных делителей числа N этому интервалу могут принадлежать лишь числа $p_1 \cdot p_4 = 86$, $p_1 \cdot p_2 \cdot p_4 = 258$, $p_1 \cdot p_3 \cdot p_4 = 602$ и $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 = 1806$. Каждое из чисел 87, 259, 603, 1807 является составным. Значит, у числа N не может быть более четырёх различных простых делителей. Таким образом, ответом к задаче будут служить числа 6, 42 и 1806.

Ответ: 6, 42, 1806.

Пример 4. Найти наименьшее натуральное n, для которого число n^n не является делителем числа 2008!, где $2008! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2008$.

Решение. Если $n^2 \le 2008$, то 2008! будет делиться на n^n (так как числа n, $2n$, ..., $(n-1)n$ и n^2 содержатся среди чисел 1, 2, ..., 2007, 2008). Поскольку верны неравенства $44^2 < 2008 < 45^2$, то достаточно проверить делимость 2008! на n^n при $n \ge 45$.

1. 2008! делится на $45^{45} = 5^{45} \cdot 3^{90}$, так как среди чисел 1, 2, ..., 2007, 2008 заведомо найдется 45 чисел, кратных 5, и 90 чисел, кратных 3.

2. 2008! делится на $46^{46} = 2^{46} \cdot 23^{46}$, так как среди чисел 1, 2, ..., 2007, 2008 заведомо найдется 46 чисел, кратных 2, и 46 чисел, кратных 23, поскольку $23 \cdot 46 = 1058 < 2008$.

3. 2008! не делится на 47^{47}, так как число 47 простое, и поэтому среди чисел 1, 2, ... 2007, 2008 есть лишь 42 числа, кратных 47. Действительно, $47 \cdot 42 = 1974 < 2008 < 2021 = 43 \cdot 47$.

Замечание. Легко заметить, что для произвольного натурального x наименьшим натуральным n, для которого $x!$ не делится на n^n, является наименьшее простое число p, большее $\sqrt{x}$.

Ответ: 47.

Пример 5. Для каждого простого p найти наибольшую натуральную степень числа $p!$, на которую делится число $(p^2)!$.

Решение. Если $(p^2)!$ кратно $(p!)^n$, $n \in N$, то $n \le p + 1$, так как p входит в разложение числа $p!$ на простые множители в степени 1 (а значит, в разложение числа $(p!)^n$ — в степени

n), а в разложение числа $(p^2)!$ — в степени $p + 1$. Докажем, что $(p^2)!$ делится на $(p!)^{p+1}$.

Запишем p^2 различных элементов в виде таблицы $p \times p$. Две такие таблицы назовем эквивалентными, если одна получается из другой некоторыми перестановками элементов внутри строк, а также некоторой перестановкой самих строк. Скажем, что все таблицы, эквивалентные данной, образуют класс эквивалентности. Так как m объектов можно переставить $m!$ способами, то всего таблиц $(p^2)!$, количество перестановок в каждой строке — $p!$, количество таблиц, которые можно получить, переставляя элементы внутри строк, — $(p!)^p$, количество таблиц в одном классе эквивалентности — $(p!)^p \cdot p! = (p!)^{p+1}$. Так как общее число таблиц есть произведение количества таблиц в одном классе эквивалентности на число таких классов, то $(p^2)!$ делится на $(p!)^{p+1}$.

Ответ: $p + 1$.

Пример 6. Доказать, что для любого натурального числа d существует делящееся на него натуральное число n, в десятичной записи которого можно вычеркнуть некоторую ненулевую цифру так, что получившееся число тоже будет делиться на d.

Решение. Рассмотрим для произвольного натурального k число $n_к = 10^к d - d$. Пусть l — количество знаков в десятичной записи числа d ($l = [\lg d] + 1$). Заметим, что при достаточно больших k (а именно, при $k > l$) десятичная запись числа n_k выглядит следующим образом: сначала идёт десятичная запись числа $d - 1$, затем — серия девяток, и наконец — десятичная запись числа $10^l - d$. Таким образом, при $k > l$ число n_k можно получить из числа $n_{к+1}$ путем вычеркивания одной из девяток в центральной части десятичной записи. Очевидно также, что все числа n_k делятся на d.

Пример 7. Дана последовательность $a_n = 1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$. Существуют ли пять идущих подряд её членов, делящихся на 2005?

Решение. Докажем, что при $n = 4k$; $k \in N$, член последовательности с номером n не делится на 5. Действительно, $a_{4k} = 1 + 16^k + 81^k + 256^k + 625^k$. Числа 16, 81, 256 являются числами вида $5m + 1$; $m \in N$. Остаток при делении чисел вида $(5m + 1)^k$ на 5 равен 1, что несложно получить, раскрыв, например, скобки в выражении $(5m + 1)^k$. Число 625^k делится, очевидно, на 5 без остатка. Следовательно, число a_{4k} дает при делении на 5 остаток 4, т.е. не делится на 5 нацело. Таким образом, не существуют пять идущих подряд членов последовательности a_n, делящихся на 2005.

Замечание. Согласно малой теореме Ферма $a^{p-1} - 1$ делится на p для любого простого числа p и любого натурального числа a, не кратного p. При $p = 5$ и $a = 2^k, 3^k, 4^k$; $k \in N$ получаем, что $a^4 - 1$ делится на 5, т.е. a^4 даёт остаток 1 при делении на 5.

Ответ: Нет.

Пример 8. Натуральные числа a, b и c таковы, что НОК $(a, b) = 60$ и НОК $(a, c) = 270$. Найти НОК (b, c).

Решение. Разложим числа 60 и 270 на простые множители. Имеем:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5,\ 270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5.$$

Пусть теперь

$$a = 2^{p_1} \cdot 3^{p_2} \cdot 5^{p_3},\quad b = 2^{q_1} \cdot 3^{q_2} \cdot 5^{q_3},\quad c = 2^{r_1} \cdot 3^{r_2} \cdot 5^{r_3},$$

где p_i, q_i, r_i — целые неотрицательные числа; $i = 1, 2, 3$. Выполнение условий НОК $(a, b) = 60$ и НОК $(a, c) = 270$ означает, что $\max\{p_1, q_1\} = 2$ и $\max\{p_1, r_1\} = 1$. Следовательно, $q_1 = 2$, $p_1 = \{0, 1\}$ и $r_1 = \{0, 1\}$, причём p_1 и r_1 одновременно не равны нулю. Во всех этих случаях $\max\{q_1, r_1\} = 2$.

Аналогично $\max\{p_2, q_2\} = 1$ и $\max\{p_2, r_2\} = 3$. Значит, $r_2 = 3$, $p_2 = \{0, 1\}$ и $q_2 = \{0, 1\}$, причём p_2 и q_2 одновременно не равны нулю. Отсюда следует, что $\max\{q_2, r_2\} = 3$. И, наконец, $\max\{p_3, q_3\} = 1$ и $\max\{p_3, r_3\} = 1$. Здесь существуют две возможности: $\max\{q_3, r_3\} = 1$ или $\max\{q_3, r_3\} = 0$ (например, если $p_3 = 1$, $q_3 = r_3 = 0$). Таким образом,

$$\text{НОК}(b, c) = 2^{\max\{q_1, r_1\}} \cdot 3^{\max\{q_2, r_2\}} \cdot 5^{\max\{q_3, r_3\}} =$$

$$= 540 \text{ или } 108.$$

Ответ: 540, 108.

Пример 9. Числа 54 и 128 являются членами геометрической прогрессии. Найти все натуральные числа, которые могут встретиться в этой прогрессии.

Решение. Пусть b_1 и q — первый член и знаменатель данной геометрической прогрессии, b_k — натуральное число, являющееся k-м членом этой прогрессии. Согласно условию задачи существуют такие натуральные числа n, m и k ($n \neq m$), что имеет место следующая система уравнений:

$$\begin{cases} 54 = b_1 \cdot q^{n-1} \\ 128 = b_1 \cdot q^{m-1} \\ b_k = b_1 \cdot q^{k-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{54}{128} = q^{n-m} \\ \dfrac{54}{b_k} = q^{n-k} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{54}{128}\right)^{n-k} = \left(\frac{54}{b_k}\right)^{n-m}.$$

Так как $54 = 2 \cdot 3^3$, а $128 = 2^7$, последнее уравнение преобразуется к следующему виду:

$$\frac{3^{3(n-k)}}{2^{6(n-k)}} = \frac{3^{3(n-m)} \cdot 2^{n-m}}{b_k^{n-m}} \Leftrightarrow b_k^{n-m} = 2^{7n-m-6k} \cdot 3^{3k-3m}.$$

Отсюда следует, что, во-первых, существуют такие целые неотрицательные числа x и y, что $b_k = 2^x \cdot 3^y$, и, во-вторых, выполняется следующее соотношение:

$$2^{x(n-m)} \cdot 3^{y(n-m)} = 2^{7n-m-6k} \cdot 3^{3k-3m} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(n-m) = 7n - m - 6k \\ y(n-m) = 3k - 3m. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение полученной системы на 2 и сложим его с первым уравнением. Имеем:

$(x + 2y)(n - m) = 7(n - m) \Leftrightarrow x + 2y = 7$

(так как $n \neq m$).

Полученное уравнение имеет четыре пары решений в целых неотрицательных числах: это $(x, y) = \{(1, 3); (3, 2); (5, 1); (7, 0)\}$. Этим решениям будут соответствовать значения b_k, равные 54, 72, 96 и 128. Таким образом, только эти четыре натуральных числа могут встретиться в данной геометрической прогрессии.

Ответ: 54, 72, 96, 128.

Задачи для самостоятельного решения

1. На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник $m \times n$ клеток, причём числа m и n взаимно просты и $m < n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 124 его

клетки. Найти все возможные значения m и n при данных условиях.

2. Натуральные числа a, b и c таковы, что НОК $(a, b) = 90$ и НОК $(a, c) = 120$. Найти НОК (b, c).

3. Числа 24 и 2187 являются членами геометрической прогрессии. Найти все натуральные числа, которые могут встретиться в этой прогрессии.

4. В течение четверти учитель ставил Мише оценки «1», «2», «3», «4» и «5», при этом среднее арифметическое всех его оценок оказалось равным в точности 3,5. Тогда учитель заменил одну оценку «4» парой оценок «3» и «5». Доказать, что от этого средняя оценка Миши увеличилась. Найти наибольшее возможное ее значение после такой замены: 1) одной оценки «4»; 2) всех его оценок «4».

5. Найти все натуральные значения n, удовлетворяющие уравнению

$$2002\left[n\sqrt{1001^2+1}\right] = n\left[2002\sqrt{1001^2+1}\right],$$

где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее числа x.

6. Найти все пары натуральных чисел (x, y) таких, что числа $x^3 + y$ и $y^3 + x$ делятся без остатка на $x^2 + y^2$.

7. Решить в натуральных числах уравнение $(1 + n^k)^l = 1 + n^m$.

8. Дана геометрическая прогрессия. Известно, что ее первый, десятый и тридцатый члены — натуральные числа. Верно ли, что её двадцатый член — натуральное число?

9. Решить в целых числах уравнение $x^4 - 2y^2 = 1$.

10. В каждом подъезде нового дома одинаковое число этажей, а на каждом этаже одинаковое число квартир. На восьмом этаже третьего подъезда первая квартира имеет номер 106. Какой номер имеет вторая квартира на третьем этаже шестого подъезда?

11. Существует ли такой прямоугольный треугольник, что увеличенные на 1 оба его катета и гипотенуза являют-

ся, соответственно, катетами и гипотенузой другого прямоугольного треугольника? Тот же вопрос, если все три стороны исходного треугольника не увеличивать, а изменять на 1, т.е. увеличивать или уменьшать — каждую по своему усмотрению.

12. При каких значениях параметра a каждый из квадратных трёхчленов $x^2 + ax + 2008$ и $x^2 + 2008x + a$ имеет хотя бы один корень, причем все их корни — целые числа?

13. Известно, что наибольший общий делитель (НОД) двух натуральных чисел m и n равен единице. Какое максимальное значение может принимать наибольший общий делитель чисел $m + 2000n$ и $n + 2000m$?

14. Существует ли 2005 различных натуральных чисел таких, что сумма любых 2004 из них делится на оставшееся число?

15. Натуральное число n таково, что числа $3n + 1$ и $10n + 1$ являются квадратами натуральных чисел. Доказать, что число $29n + 11$ составное.

16. Существуют ли такие натуральные числа x и y, что $x^2 + x + 1$ является натуральной степенью y, а $y^2 + y + 1$ — натуральной степенью x?

17. Найти все возрастающие конечные арифметические прогрессии, которые состоят из простых чисел и у которых количество членов больше, чем разность прогрессии.

18. Петр родился в XIX веке, а его брат Павел — в XX веке. Однажды братья встретились на праздновании своего общего дня рождения. Петр сказал: «Мой возраст равен сумме цифр года моего рождения». «Мой тоже», — ответил Павел. На сколько лет Павел младше Петра?

19. На доске написаны три натуральных числа, не превосходящие 40. За один ход можно увеличить любое из написанных чисел на число процентов, равное одному из двух оставшихся чисел, если в результате получится целое число. Существуют ли такие исходные числа, что за несколько ходов одно из чисел на доске можно сделать больше 2011?

20. Существует ли арифметическая прогрессия из 2011 натуральных чисел, в которой количество чисел, делящихся на 8, меньше, чем количество чисел, делящихся на 9, а последнее в свою очередь меньше, чем количество чисел, делящихся на 10?

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Глава 1. Диофантовы уравнения первого порядка с двумя неизвестными

1. $\{(21n - 1, 19n - 1)\}$; $n \in Z$. **2.** $\{(100, 1); (16, 20)\}$. **3.** $\{(19n + 3, 20n + 3)\}$; $n \in Z$; сумма равна 66. **4.** 231. **5.** 206. **6.** 3. **7.** 19. **8.** $x = \frac{15\pi}{16} + 2\pi n$; $n \in Z$. **9.** $x = \frac{2\pi}{3} + 4\pi n$; $n \in Z$.

Глава 2. Диофантовы уравнения второго порядка с двумя неизвестными

1. $\{(3, 1); (-3, -1)\}$. **2.** $m = -1$, $n = -14$. **3.** $\{(10, 9)\}$. **4.** $\{(12, -4); (10, -2); (4, -2); (10, -6); (2, -4); (4, -6)\}$. **5.** $\{(5, -4); (-13, 20); (-5, 4); (13, -20)\}$. **6.** $x = 15k^2 - 6k$, $y = 3k - 1$; $k \in Z$. **7.** $\{(\frac{\sqrt{5}}{5}, 2, 0); (\frac{\sqrt{5}}{5}, -1, 5)\}$. **9.** Нет. **10.** 30. **11.** $\{(0, 0); (-2, -2); (0, -1); (-2, -1)\}$. **12.** $\{(1, -2); (3, 6); (0, 0); (4, 4); (-2, 1); (6, 3)\}$. **13.** $\{(p + 1, p^2 + p); (2p, 2p); (p^2 + p, p + 1)\}$. **14.** $x = -7$, $x = -15$. **15.** 74. **16.** $\{(-2, -2); (-4, 0); (0, 4)\}$.

Глава 3. Другие уравнения в целых числах

1. $x = 2n$, $y = 7n$, $z = 3n$; $n \in Z$. **2.** $x = -\frac{1}{3}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{3}{4}$, $x = 1$. **3.** $k = 0$, $k = -2$. **4.** $k + n + m = 39$. **5.** $\{(1, 2, 3); (1, 3, 2); (2, 3, 1); (2, 1, 3); (3, 1, 2); (3, 2, 1)\}$. **6.** $\{(4, 9); (5, 8)\}$. **7.** $n = 0$, $n = -5$. **8.** $\{(1, 1, 1); (-1, -1, 1); (1, -1, -1); (-1, 1, -1)\}$. **9.** $\{(2, 3, 6); (2, 4, 4); (3, 3, 3)\}$. **10.** $\{(2, 3, 4)\}$. **11.** $\{(1, 5, 0); (1, -5, 0); (-1, 5, 0); (-1, -5, 0)\}$. **12.** $n = 13$. **13.** $\{(24, 8); (54, 2)\}$. **14.** $\{(0, 2); (0, -2); (4, 23); (4, -23)\}$. **15.** $n_{\min} = 2011$, $n_{\max} = 3015$.

Глава 4. Текстовые задачи, использующие уравнения в целых числах

1. 189 палочек. **2.** 3 раза. **3.** 366 туристов. **4.** Из 36 деталей. **5.** 4 подберёзовика. **6.** 2 ездки. **7.** 16 875 арбузов. **8.** 255.

Глава 5. Оценки переменных. Организация перебора

1. 180 рублей и 240 рублей; $n = 3$. **2.** $l = 15$. **3.** 11 двоек, 7 троек, 10 четверок и 2 пятерки. **4.** 99. **5.** $t = 390$ минут. **6.** 618, 659 и 698. **7.** $\frac{r}{R} = \frac{3}{4}$. **8.** Нет, 21. **9.** 6, 7, ..., 14 деталей. **10.** 6 томов. **11.** 72 часа. **12.** 7 автоматов. **13.** 28 студентов. **14.** 10 маляров и 15 маляров. **15.** 11 лип и 5 берёз. **16.** 27 операций. **17.** 14 человек. **18.** 13 дней; 19 тонн и 31 тонна. **19.** По 2 цеха первого и второго типов, 4 цеха третьего типа. **20.** 3 бригады; в бригаде 3 гусеничных и 5 колёсных тракторов. **21.** 7 самолётов.

Глава 6. Неравенства в целых числах. Графические иллюстрации

1. $\{(-7, 7); (-6, 6)\}$. **2.** $(12; -8)$. **3.** $\{(2, 1)\}$. **4.** $b \in \left(\frac{1}{4}, 1\right) \cup (1, \sqrt{2})$. **5.** $\{(0, 0); (-2, 0); (-1, 1)\}$. **6.** $\{(2, 3); (3, 2); (3, 3); (4, 3); (5, 4)\}$. **7.** $\{(4, 0); (4, 3); (4, -3)\}$. **8.** $k = \dots -14, -13, -12, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$. **9.** $\{(-7, 43); (-7, 44)\}$. **10.** $\{(-3, -3, -4)\}$.

Глава 7. Задачи на делимость

2. $a = 8$, $b = 56$, $c = 392$. **7.** Не существует. **9.** 2 и 5. **10.** Да. **11.** Нет. **14.** 36. **15.** 4. **16.** На 7.

Глава 8. Текстовые задачи, использующие делимость целых чисел

1. 50 школьников. **2.** 6. **3.** 6 месяцев. **4.** 77 рыб. **5.** 4 раза. **6.** 2445 долларов. **7.** на 741 человек. **8.** $m = 21$. **9.** Продано 3 комплекта; в комплекте 7 синих и 3 красных карандаша. **10.** 900 автомобилей и 855 автомобилей. **11.** 3750 и 1250 рублей. **12.** 2 месяца.

Глава 9. Экстремальные задачи в целых числах

1. 6, 7, 8, ..., 14. **2.** 10 500 тыс. руб. и 12 600 тыс. руб. **3.** 37 и 39. **4.** 300 или 600 телевизоров. **5.** 12,5% и 15%. **6.** 132 у.е. **7.** 33 рабочих и 113 рабочих. **8.** 1 путевку первого типа и 16 путевок второго типа. **9.** 2 набора первого типа и 14 наборов третьего типа. **10.** 11 гвоздик и 7 роз. **11.** Два дома на 6 квартир и 12 домов на 10 квартир. **12.** 15 вагонов.

Глава 10. Целочисленные прогрессии

1. $S = 139\,300$. 2. $L = 47$, $M = 56$. **3.** $S = 845$. **4.** $a_{20} = 119$. **5.** $a_{19} = -8$. **6.** $a_1 = 44$. **7.** $q = 2$. **8.** $S = -\dfrac{21}{5}$ или $S = -\dfrac{11}{4}$. **9.** $a_8 = 24$. **10.** 8019.

Глава 11. Целые числа и квадратный трехчлен

1. $a \geq 224$. **2.** $25(\sqrt{2} - 1) \leq a \leq 3(5\sqrt{2} - 3)$. **3.** $x_1 = 12$, $x_2 = 13$. **4.** $a = -3$, $b = -1$. **5.** $a = -1$, $a = -\dfrac{3}{5}$, $a = 1$. **6.** $a = 3$, $a = 7$. **7.** $p = -5$, $-\dfrac{17}{4} \leq p \leq -\dfrac{7}{2}$. **8.** $a \in \left(-\dfrac{8}{3}, -1\right)$.

Глава 12. Задачи, аналогичные задачам 19 из ЕГЭ

1. $k = 1$, $n = 2$, $m = 3$; $k = n = 3$, $m = 4$; $k = 2$, $n = 1$, $m = 3$. **2.** $n = 1$, $n = 11$. **3.** Из 5 членов. **4.** Да, нет. **5.** $a = 3$, $b = 2$; $a = 7$, $b = 2$. **6.** 4. **7.** 1 и 4345.

Глава 13. Задачи математических олимпиад

1. $\{(2,\ 125);\ (5,\ 32)\}$. **2.** 360, 72. **3.** 24, 108, 486, 2187. **4.** 1) $3\dfrac{2}{3}$; 2) $3\dfrac{8}{11}$. **5.** $n = 1, 2, \ldots, 2002$. **6.** $\{(1,\ 1)\}$. **7.** $n = 2$, $k = 1$, $l = 2$, $m = 3$. **8.** Да. **9.** $\{(1,\ 0);\ (-1,\ 0)\}$. **10.** 218. **11.** 1) Нет; 2) Нет. **12.** $a = -2009$. **13.** $2000^2 - 1$. **14.** Да. **16.** Нет. **17.** $\{(2,\ 3);\ (3,\ 5,\ 7)\}$. **18.** На 9 лет. **19.** Да. **20.** Да.

Справочное издание

Садовничий Юрий Викторович

ЕГЭ
МАТЕМАТИКА

ЗАДАНИЕ 19
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ И УРАВНЕНИЙ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU.ПЩ01.Н00199 от 19.05.2016 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо*
Редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректоры *Н. Е. Жданова, О. Ю. Казанаева*
Дизайн обложки *А. А. Козлова*
Компьютерная верстка *М. А. Серова*

107045, Москва, Луков пер., д. 8.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 8(495)641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО «ИПК Парето-Принт», 170546, Тверская область,
Промышленная зона Боровлево-1, комплекс № 3А. www.pareto-print.ru

По вопросам реализации обращаться по тел.:
8(495)641-00-30 (многоканальный).