36
вариантов заданий

СОЗДАНО РАЗРАБОТЧИКАМИ ЕГЭ

К НОВОЙ ОФИЦИАЛЬНОЙ ДЕМОНСТРАЦИОННОЙ ВЕРСИИ ЕГЭ

+800 ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ЧАСТИ 2

Под редакцией И. В. Ященко

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ЕГЭ 2019

ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

- 36 вариантов заданий
- + 800 заданий части 2
- Ответы и решения
- Критерии оценок
- Бланки ответов

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

Под редакцией И. В. Ященко

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

36 вариантов заданий
+ 800 заданий части 2
Ответы и решения
Критерии оценок
Бланки ответов

Издательство
«ЭКЗАМЕН»

МОСКВА
2019

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
Е33

Е33 **ЕГЭ** 2019. Математика. Профильный уровень. 36 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ и 800 заданий части 2 / И. В. Ященко, М. А. Волчкевич, И. Р. Высоцкий, Р. К. Гордин, П. В. Семёнов, О. Н. Косухин, Д. А. Фёдоровых, А. И. Суздальцев, А. Р. Рязановский, И. Н. Сергеев, В. А. Смирнов, А. С. Трепалин, А. В. Хачатурян, С. А. Шестаков, Д. Э. Шноль; **под ред. И. В. Ященко**. — М. : Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2019. — 239, [1] с. (Серия «ЕГЭ. 30 вариантов. Тесты от разработчиков»)

ISBN 978-5-377-13510-4 (Издательство «Экзамен»)
ISBN 978-5-4439-2768-8 (МЦНМО)

Авторы пособия — ведущие специалисты, принимающие непосредственное участие в разработке методических материалов для подготовки к выполнению контрольных измерительных материалов ЕГЭ.

Глава I книги содержит 36 вариантов комплектов типовых тестовых заданий по математике, составленных с учетом всех особенностей и требований Единого государственного экзамена по математике профильного уровня 2019 года.

В главе II книги отдельно представлены качественная информация о заданиях части 2 и обширная подборка задач части 2, скомпонованных по всем темам школьной математики.

Назначение пособия — предоставить читателям информацию о структуре и содержании контрольных измерительных материалов по математике профильного уровня, степени трудности заданий.

В сборнике даны ответы на все варианты тестов, приводятся решения всех заданий части 2 двух вариантов, а также ответы на все задания главы II, части 2 книги.

Кроме того, приведены образцы бланков, используемых на ЕГЭ для записи ответов и решений.

Пособие может быть использовано учителями для подготовки учащихся к экзамену по математике в форме ЕГЭ, а также старшеклассниками и выпускниками — для самоподготовки и самоконтроля.

Приказом № 699 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Формат 60×90/8. Гарнитура «Школьная». Бумага газетная. Уч.-изд. л. 11,45.
Усл. печ. л. 30. Тираж 39 000 экз. Заказ 6137/18

ISBN 978-5-377-13510-4 (Издательство «Экзамен»)
ISBN 978-5-4439-2768-8 (МЦНМО)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I. ТРЕНИРОВОЧНЫЕ РАБОТЫ

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом и 7 заданий с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Единый государственный экзамен

Бланк ответов № 1

Заполнять гелевой или капиллярной ручкой ЧЕРНЫМИ чернилами ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по следующим образцам:

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ь Ы Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z ,

Регион

Код предмета

Название предмета

С правилами экзамена ознакомлен и согласен
Совпадение номеров вариантов в задании
и бланке регистрации подтверждаю
Подпись участника ЕГЭ строго внутри окошка

Номер варианта

ВНИМАНИЕ! ***Данный бланк использовать только совместно с двумя другими бланками из данного пакета***

Результаты выполнения заданий с ответом в краткой форме

1
2
3
4
5

6
7
8
9
10

11
12
13
14
15

16
17
18
19
20

21
22
23
24
25

26
27
28
29
30

31
32
33
34
35

36
37
38
39
40

-
-
-
-
-
-
-
-

Единый государственный экзамен

Бланк ответов № 2

Регион	Код предмета	Название предмета	Номер варианта

Перепишите значения указанных выше полей из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ.
Отвечая на задания теста, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.
Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете.
Условия задания переписывать не нужно.

ВНИМАНИЕ! ***Данный бланк использовать только совместно с двумя другими бланками из данного пакета***

При недостатке места для ответа используйте оборотную сторону бланка

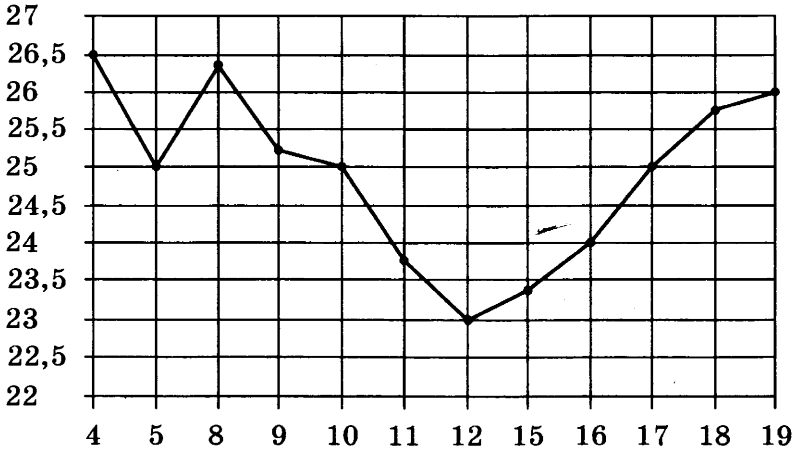
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

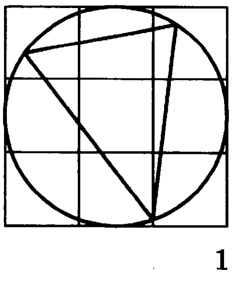
Часть 1

1. Задачу № 1 правильно решили 17 955 человек, что составляет 63% от выпускников города. Сколько всего выпускников в этом городе?

2. На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 4 по 19 апреля 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена нефти в долларах США за баррель. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую цену нефти на момент закрытия торгов за данный период. Ответ дайте в долларах США за баррель.



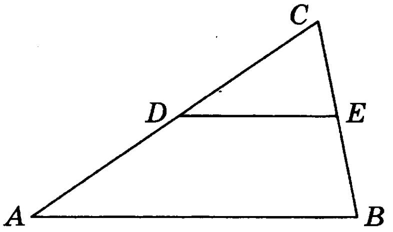
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



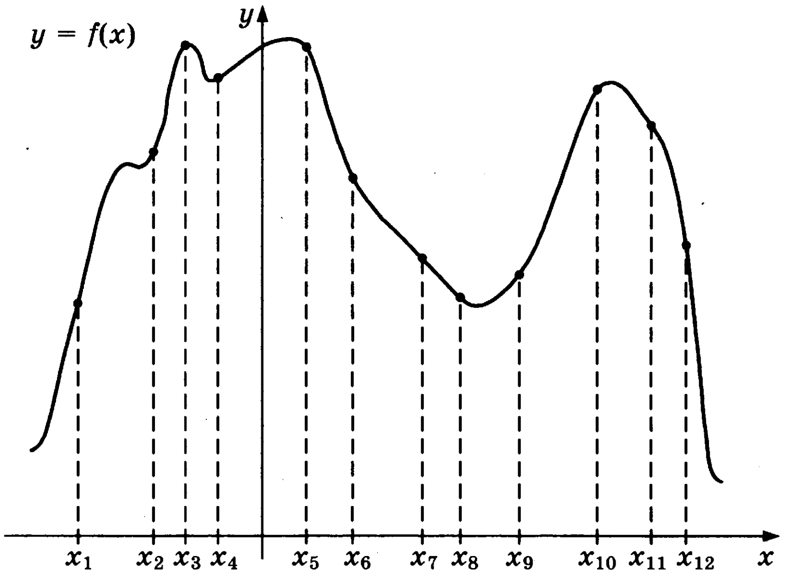
4. Монету бросают 8 раз. Во сколько раз событие «орёл выпадет ровно шесть раз» более вероятно, чем событие «орёл выпадет ровно один раз»?

5. Найдите корень уравнения $3^{\log_{81}(8x+8)} = 4$.

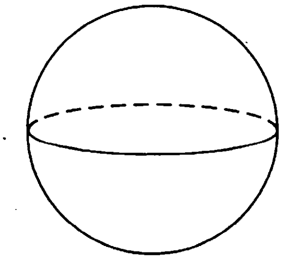
6. Площадь треугольника ABC равна 36, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: x_1, x_2, ... , x_{12}. Сколько из этих точек удовлетворяют неравенству $f'(x) > 0$?



8. Площадь поверхности шара равна 80. Найдите площадь сечения этого шара плоскостью, проходящей через центр шара.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $4\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{8}\cdot\cos\frac{7\pi}{8}$.

10. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре равна $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 16$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время $t = \alpha RC\log_2\frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 35 с. Ответ дайте в киловольтах.

11. Автомобиль выехал с постоянной скоростью 86 км/ч из города А в город В, расстояние между которыми равно 344 км. Одновременно с ним из города С в город В, расстояние между которыми равно 300 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 40 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город В одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 4^{x^2-14x+50}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\left(3^x-6\right)^2-16\left|3^x-6\right|=15-2\cdot3^{x+1}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [1; 2].

14. Основанием правильной треугольной пирамиды $MABC$ служит треугольник ABC со стороной 6. Ребро MA перпендикулярно грани MBC. Через вершину пирамиды M и середины рёбер AC и BC проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите расстояние от вершины C до плоскости α.

15. Решите неравенство $\dfrac{1}{\log_{(x-1)}\dfrac{x}{6}} \geqslant -1$.

16. Окружность с центром O, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается гипотенузы AB в точке M, а катета AC — в точке N, $AC < BC$. Прямые MN и CO пересекаются в точке K.

а) Докажите, что угол CKN в два раза меньше угла ABC.

б) Найдите BK, если $BC = 3\sqrt{2}$.

17. По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 14% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 8% в первый год и на целое число n процентов за второй год. Найдите наименьшее значение n, при котором за два года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin\sqrt{ax - x^2 - \pi^2} + \cos 2\sqrt{ax - x^2 - \pi^2} = 0$$

имеет ровно два решения.

19. У Бори нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух из которых есть вода. За один шаг Боря переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из вёдер запрещается.

а) Мог ли Боря через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 2 литра воды, если сначала у него были вёдра объёмами 4 литра и 7 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 8 литров?

б) Мог ли Боря через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех вёдрах, если сначала у него были вёдра объёмами 5 литров и 7 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 10 литров?

в) Сначала у Бори были вёдра объёмами 3 литра и 6 литров полные воды, а также пустое ведро объёмом n литров. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n, если известно, что, как бы ни старался Боря, он не сможет получить через несколько шагов ровно 4 литра воды в одном из вёдер?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 2

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

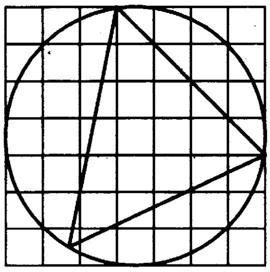
Часть 1

1. Задачу № 1 правильно решили 19 125 человек, что составляет 51% от выпускников города. Сколько всего выпускников в этом городе?

2. На рисунке жирными точками показана цена палладия, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена палладия в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую цену палладия за указанный период. Ответ дайте в рублях за грамм.

3 ☐

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



4 ☐

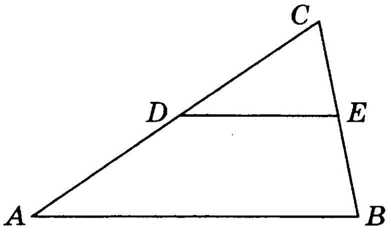
4. Монету бросают 10 раз. Во сколько раз событие «орёл выпадет ровно пять раз» более вероятно, чем событие «орёл выпадет ровно семь раз»?

5 ☐

5. Найдите корень уравнения $2^{\log_4(9x+9)} = 6$.

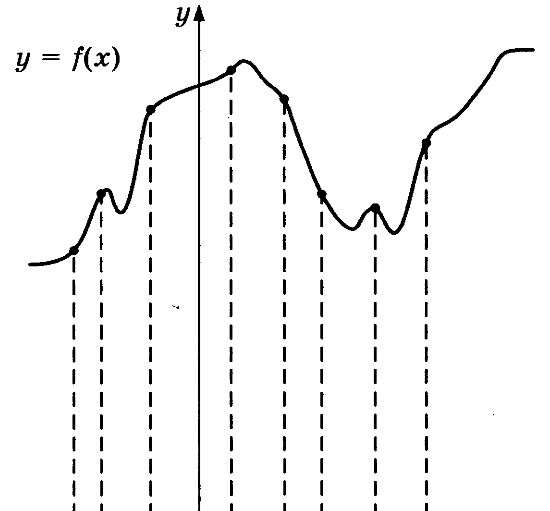
6 ☐

6. Площадь треугольника ABC равна 40, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.

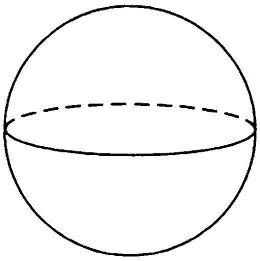


7 ☐

7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: x_1, ... , x_8. Сколько из этих точек удовлетворяют неравенству $f'(x) > 0$?



8. Площадь поверхности шара равна 16. Найдите площадь сечения этого шара плоскостью, проходящей через центр шара.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $5\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}$.

10. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре равна $C = 2\cdot10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 6\cdot10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 10$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время $t = \alpha RC\log_2\frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 16,8 с. Ответ дайте в киловольтах.

11. Автомобиль выехал с постоянной скоростью 63 км/ч из города А в город В, расстояние между которыми равно 168 км. Одновременно с ним из города С в город В, расстояние между которыми равно 174 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 15 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город В одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 2^{x^2-16x+67}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\left(4^x-5\right)^2+2\cdot4^x=9\left|4^x-5\right|$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [0; 1].

14. Основанием правильной треугольной пирамиды $MABC$ служит треугольник ABC со стороной $2\sqrt{3}$. Ребро MA перпендикулярно грани MBC. Через вершину пирамиды M и середины рёбер AC и BC проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости α.

15. Решите неравенство $\dfrac{1}{\log_{(x-3)}\dfrac{x}{10}} \geqslant -1$.

16. Окружность с центром O, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается гипотенузы AB в точке M, а катета AC — в точке N, $AC < BC$. Прямые MN и CO пересекаются в точке K.

а) Докажите, что угол CKN в два раза меньше угла ABC.

б) Найдите BK, если $BC = 5\sqrt{2}$.

17. По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 17% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 9% в первый год и на целое число n процентов за второй год. Найдите наименьшее значение n, при котором за два года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\cos\sqrt{2\pi ax - 4x^2} + \cos 2\sqrt{2\pi ax - 4x^2} = 0$$

имеет ровно два решения.

19. У Вити нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух из которых есть вода. За один шаг Витя переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из вёдер запрещается.

а) Мог ли Витя через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 5 литров воды, если сначала у него были вёдра объёмами 3 литра и 6 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 7 литров?

б) Мог ли Витя через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех вёдрах, если сначала у него были вёдра объёмами 6 литров и 9 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 7 литров?

в) Сначала у Вити были вёдра объёмами 2 литра и 4 литра, полные воды, а также пустое ведро объёмом n литров. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n, если известно, что, как бы ни старался Витя, он не сможет получить через несколько шагов ровно 3 литра воды в одном из вёдер?

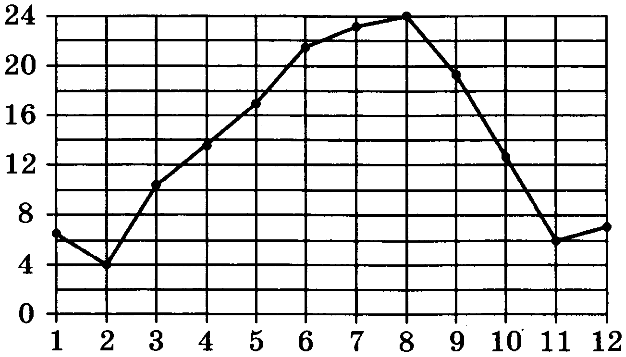
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 3

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

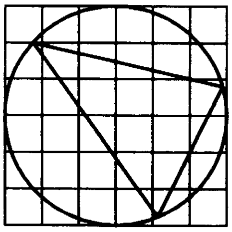
Часть 1

1. Задачу № 1 правильно решили 20 930 человек, что составляет 46% от выпускников города. Сколько всего выпускников в этом городе?

2. На рисунке жирными точками показана среднемесячная температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, какой была наименьшая среднемесячная температура в Сочи в 1920 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



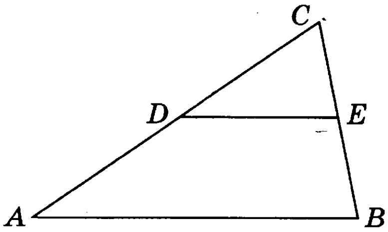
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



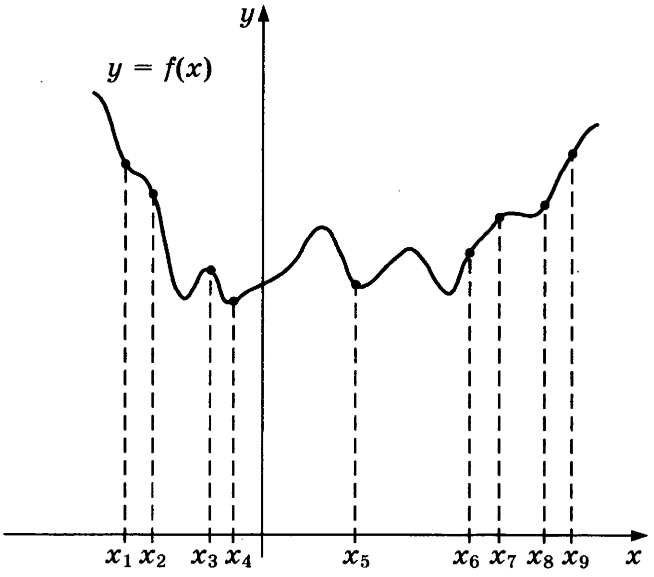
4. Монету бросают 9 раз. Во сколько раз событие «орёл выпадет ровно семь раз» более вероятно, чем событие «орёл выпадет ровно один раз»?

5. Найдите корень уравнения $3^{\log_9(2x+5)} = 3$.

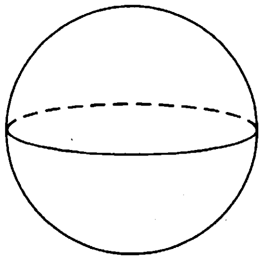
6. Площадь треугольника ABC равна 44, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и девять точек на оси абсцисс: x_1, ... , x_9. Сколько из этих точек удовлетворяют неравенству $f'(x) > 0$?



8. Площадь поверхности шара равна 120. Найдите площадь сечения этого шара плоскостью, проходящей через центр шара.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $3\sin\frac{19\pi}{12}\cdot\cos\frac{19\pi}{12}$.

10. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре равна $C = 4\cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 4\cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 36$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время $t = \alpha RC\log_2\frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 2$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 64 с. Ответ дайте в киловольтах.

11. Автомобиль выехал с постоянной скоростью 60 км/ч из города А в город В, расстояние между которыми равно 300 км. Одновременно с ним из города С в город В, расстояние между которыми равно 325 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 40 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город В одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 3^{x^2-18x+85}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2\left(3^x-5\right)^2+3^x+19=15\left|3^x-5\right|$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [0; 1].

14. Основанием правильной треугольной пирамиды $MABC$ служит треугольник ABC со стороной $3\sqrt{2}$. Ребро MA перпендикулярно грани MBC. Через вершину пирамиды M и середины рёбер AC и BC проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите расстояние от вершины B до плоскости α.

15. Решите неравенство $\dfrac{1}{\log_{(x-4)}\dfrac{x}{12}} \geqslant -1$.

16. Окружность с центром O, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается гипотенузы AB в точке M, а катета AC — в точке N, $AC < BC$. Прямые MN и CO пересекаются в точке K.

а) Докажите, что угол CKN в два раза меньше угла ABC.

б) Найдите BK, если $BC = 6\sqrt{2}$.

17. 15-го августа планируется взять кредит в банке на 20 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 21% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin\sqrt{\pi ax - x^2} + \cos 2\sqrt{\pi ax - x^2} = 0$$

имеет ровно два решения.

19. У Жени нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух из которых есть вода. За один шаг Женя переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из вёдер запрещается.

а) Мог ли Женя через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 6 литров воды, если сначала у него были вёдра объёмами 5 литров и 8 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 9 литров?

б) Мог ли Женя через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех вёдрах, если сначала у него были вёдра объёмами 7 литров и 8 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 10 литров?

в) Сначала у Жени были вёдра объёмами 5 литров и 10 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом n литров. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n, если известно, что, как бы ни старался Женя, он не сможет получить через несколько шагов ровно 6 литров воды в одном из вёдер?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 4

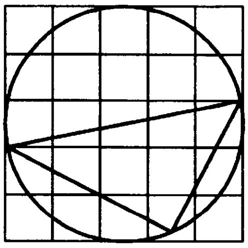
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Задачу № 1 правильно решили 24 650 человек, что составляет 85% от выпускников города. Сколько всего выпускников в этом городе?

2. На рисунке жирными точками показан курс доллара, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни в феврале 2006 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена доллара в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьший курс доллара за указанный период. Ответ дайте в рублях.

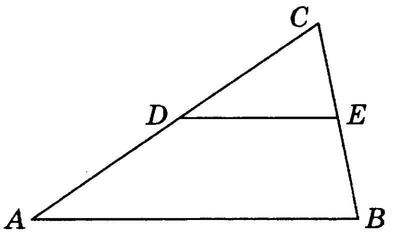
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



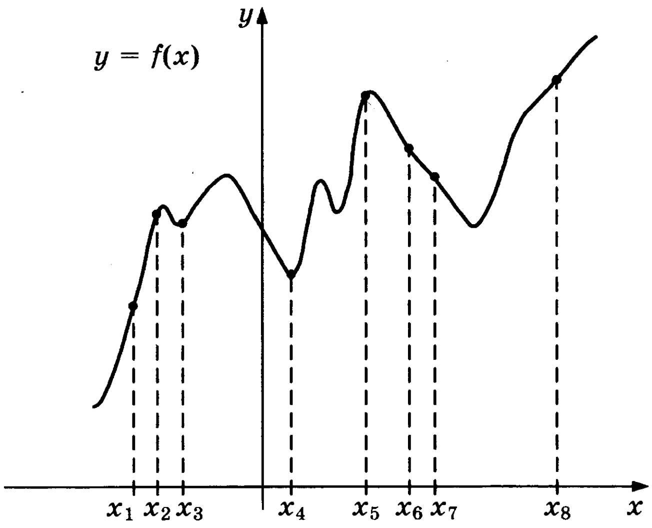
4. Монету бросают 10 раз. Во сколько раз событие «орёл выпадет ровно восемь раз» более вероятно, чем событие «орёл выпадет ровно девять раз»?

5. Найдите корень уравнения $2^{\log_8(2x-3)} = 5$.

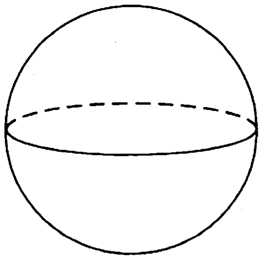
6. Площадь треугольника ABC равна 76, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: x_1, ... , x_8. Сколько из этих точек удовлетворяют неравенству $f'(x) > 0$?



8. Площадь поверхности шара равна 208. Найдите площадь сечения этого шара плоскостью, проходящей через центр шара.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $5\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}$.

10. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре равна $C = 3\cdot10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 7\cdot10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 8$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время $t = \alpha RC\log_2\frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1{,}1$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 46,2 с. Ответ дайте в киловольтах.

11. Автомобиль выехал с постоянной скоростью 82 км/ч из города А в город В, расстояние между которыми равно 123 км. Одновременно с ним из города С в город В, расстояние между которыми равно 63 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 45 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город В одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 5^{x^2+30x+229}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\left(5^x-6\right)^2-6\left|5^x-6\right|+5^2=25-5^x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [1; 2].

14. Основанием правильной треугольной пирамиды $MABC$ служит треугольник ABC со стороной 6. Ребро MA перпендикулярно грани MBC. Через вершину пирамиды M и середины рёбер AC и BC проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите расстояние между плоскостью α и ребром MC.

15. Решите неравенство $\dfrac{1}{\log_{(x-1)}\dfrac{x}{20}} \geqslant -1.$

16. Окружность с центром O, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается гипотенузы AB в точке M, а катета AC — в точке N, $AC < BC$. Прямые MN и CO пересекаются в точке K.

а) Докажите, что угол CKN в два раза меньше угла ABC.

б) Найдите BK, если $BC = 10\sqrt{2}$.

17. Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог в два с половиной раза (до $t_1 = 2{,}5t_0$), сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, если известно, что при налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства товара составляет $9000 - 2t$ единиц, если это число положительно, и 0 единиц иначе?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin 2\sqrt{2\pi x - x^2 + \frac{a^2}{4}} + \cos\sqrt{2\pi x - x^2 + \frac{a^2}{4}} = 0$$

имеет ровно два решения.

19. У Ромы нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух из которых есть вода. За один шаг Рома переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из вёдер запрещается.

а) Мог ли Рома через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 4 литра воды, если сначала у него были вёдра объёмами 3 литра и 8 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 9 литров?

б) Мог ли Рома через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех вёдрах, если сначала у него были вёдра объёмами 8 литров и 10 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 11 литров?

в) Сначала у Ромы были вёдра объёмами 4 литра и 8 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом n литров. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n, если известно, что, как бы ни старался Рома, он не сможет получить через несколько шагов ровно 5 литров воды в одном из вёдер?

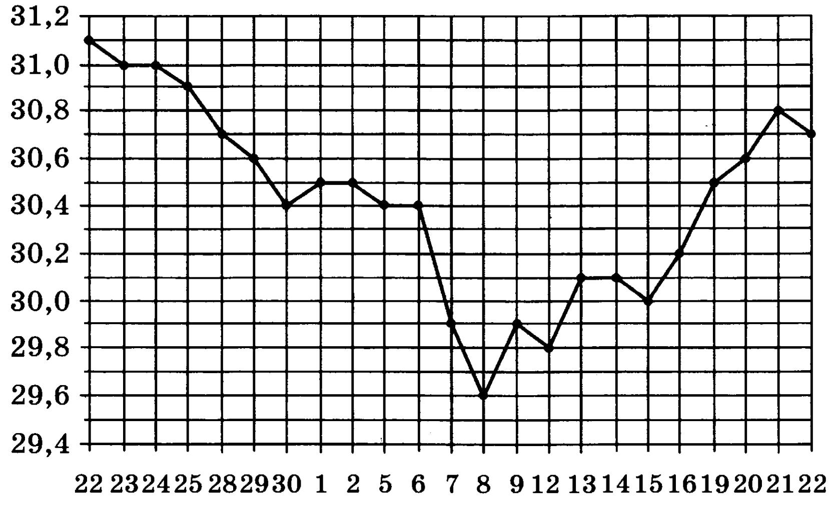
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 5

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

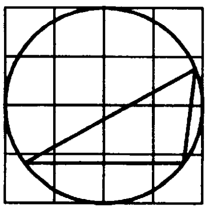
Часть 1

1. Задачу № 1 правильно решили 24 840 человек, что составляет 72% от выпускников города. Сколько всего выпускников в этом городе?

2. На рисунке жирными точками показан курс доллара, установленный Центробанком РФ, во все рабочие дни с 22 сентября по 22 октября 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена доллара в рублях. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьший курс доллара за указанный период. Ответ дайте в рублях.



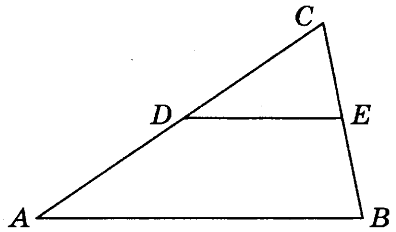
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



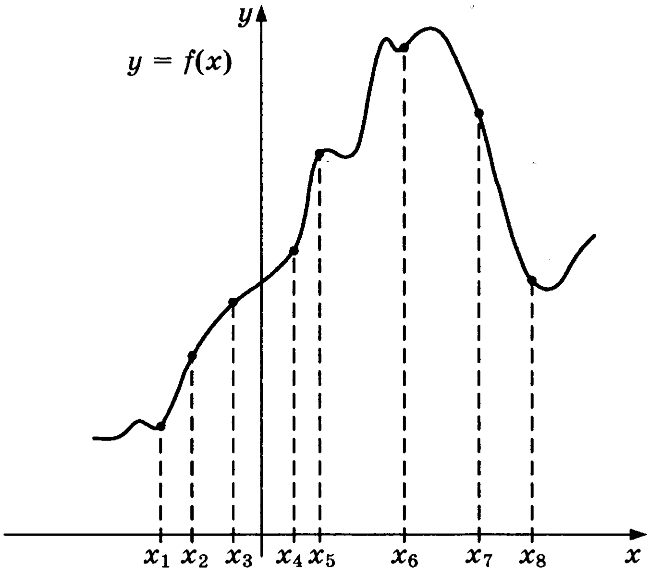
4. Монету бросают 9 раз. Во сколько раз событие «орёл выпадет ровно пять раз» более вероятно, чем событие «орёл выпадет ровно два раза»?

5. Найдите корень уравнения $3^{\log_9(2x+6)} = 6$.

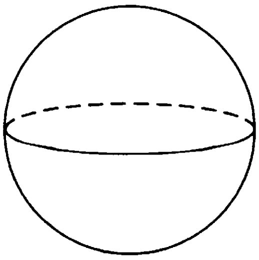
6. Площадь треугольника ABC равна 80, DE — средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции $ABED$.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: x_1, ... , x_8. Сколько из этих точек удовлетворяют неравенству $f'(x) > 0$?



8. Площадь поверхности шара равна 8. Найдите площадь сечения этого шара плоскостью, проходящей через центр шара.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $2\sin\frac{23\pi}{12}\cdot\cos\frac{23\pi}{12}$.

10. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре равна $C = 6\cdot10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 7\cdot10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 32$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время $t = \alpha RC\log_2\frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0{,}7$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 58,8 с. Ответ дайте в киловольтах.

11. Автомобиль выехал с постоянной скоростью 54 км/ч из города А в город В, расстояние между которыми равно 153 км. Одновременно с ним из города С в город В, расстояние между которыми равно 120 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 50 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город В одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 9^{x^2-6x+10}$.

- Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\left(4^x-8\right)^2-10\left|4^x-8\right|=3\cdot4^x-36$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [2; 3].

14. Основанием правильной треугольной пирамиды $MABC$ служит треугольник ABC со стороной 12. Ребро MA перпендикулярно грани MBC. Через вершину пирамиды M и середины рёбер AC и BC проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью AMB.

15. Решите неравенство $\dfrac{1}{\log_{(x-2)}\dfrac{x}{8}} \geqslant -1$.

16. Окружность с центром O, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается гипотенузы AB в точке M, а катета AC — в точке N, $AC < BC$. Прямые MN и CO пересекаются в точке K.

а) Докажите, что угол CKN в два раза меньше угла ABC.

б) Найдите BK, если $BC = 2\sqrt{2}$.

17. Производство некоторого товара облагалось налогом в размере t_0 рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог на 25% (до $t_1 = 1{,}25t_0$), сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, если известно, что при налоге, равном t рублей за единицу товара, объём производства товара составляет $7000 - t$ единиц, если это число положительно, и 0 единиц иначе?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin 2\sqrt{\pi a x - x^2} - \sin\sqrt{\pi a x - x^2} = 0$$

имеет ровно два решения.

19. У Игоря нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух из которых есть вода. За один шаг Игорь переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из вёдер запрещается.

а) Мог ли Игорь через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 3 литра воды, если сначала у него были вёдра объёмами 5 литров и 9 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 10 литров?

б) Мог ли Игорь через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех вёдрах, если сначала у него были вёдра объёмами 11 литров и 7 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 8 литров?

в) Сначала у Игоря были вёдра объёмами 6 литров и 12 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом n литров. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n, если известно, что, как бы ни старался Игорь, он не сможет получить через несколько шагов ровно 7 литров воды в одном из вёдер?

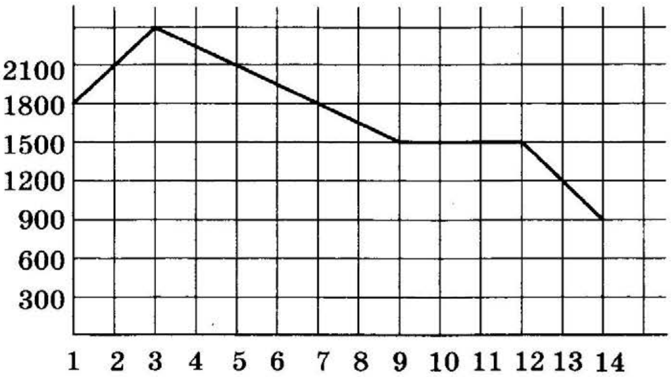
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 6

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

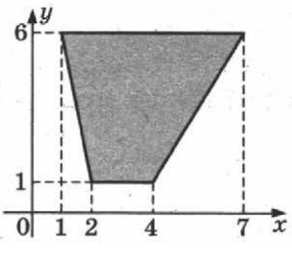
Часть 1

1. Железнодорожный билет для взрослого стоит 220 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 16 школьников и 3 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

2. На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели ноября. 2 ноября бизнесмен приобрел 10 акций этой компании. Шесть из них он продал 6 ноября, а 13 ноября — остальные 4. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?



3. Найдите площадь трапеции, вершинами которой являются точки с координатами (1; 6), (7; 6), (4; 1), (2; 1).

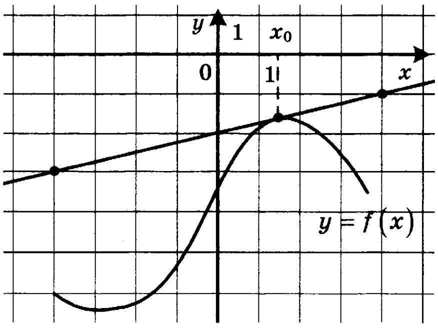


4. Андрей отправляет СМС другу. Связь не очень устойчивая, поэтому каждая попытка отправить СМС имеет вероятность успеха 0,8. Найдите вероятность того, что СМС будет отправлена с третьей попытки.

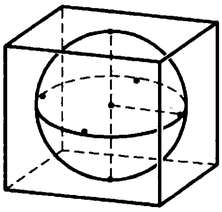
5. Найдите корень уравнения $x^2-15=(x-15)^2$.

6. Концы отрезка AB лежат по разные стороны от прямой l. Расстояние от точки A до прямой l равно 7, а расстояние от точки B до прямой l равно 13. Найдите расстояние от середины отрезка AB до прямой l.

7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. Шар, объём которого равен 14π, вписан в куб. Найдите объём куба.



Часть 2

9. Вычислите значение выражения $3^{\log_3 7}+49^{\log_7 \sqrt{13}}$.

10. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta=\frac{T_1-T_2}{T_1}\cdot 100\%$, где T_1 — температура нагревателя (в кельвинах), T_2 — температура холодильника (в кельвинах). При какой температуре нагревателя T_1 КПД двигателя будет 15%, если температура холодильника $T_2 = 340$ К? Ответ дайте в кельвинах.

11. Из пункта А круговой трассы, длина которой равна 30 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобилиста. Скорость первого равна 92 км/ч, скорость второго — 77 км/ч. Через сколько минут первый автомобилист будет опережать второго ровно на 1 круг?

12. Найдите наибольшее значение функции $y=6\sin x-3\sqrt{3}x+0,5\sqrt{3}\pi+6$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $6\sin^2 x + 7\cos x - 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\pi]$.

14. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер $AA_1 = 7$, $AB = 16$, $AD = 6$. Точка K — середина ребра C_1D_1.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через точку B перпендикулярно прямой AK, пересекает отрезок A_1K.

б) Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью ABC.

15. Решите неравенство $x^3 + 6x^2 + \dfrac{28x^2 + 2x - 10}{x - 5} \le 2$.

16. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB, H — точка пересечения прямых CM и DK.

а) Докажите, что прямые CM и DK перпендикулярны.

б) Найдите MH, если известно, что катеты треугольника ABC равны 130 и 312.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 18 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|10 \cdot 0{,}2^{1-x} - a\right| - \left|5^x + 2a\right| = 0{,}04^{-x}$ имеет ровно два неотрицательных решения.

19. Конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \ge 3$ натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \le n - 2$ выполнено равенство $3a_{k+2} = 5a_{k+1} - 2a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 4$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \ge 3$ выполняться равенство $a_n = 3a_2 - 2a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n = 667$?

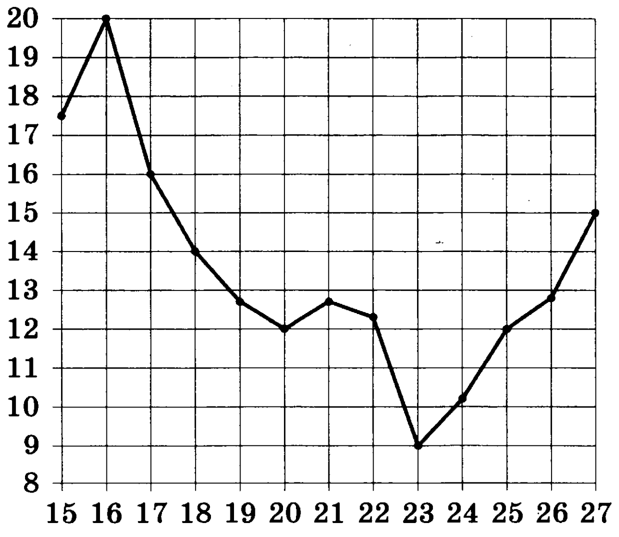
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 7

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

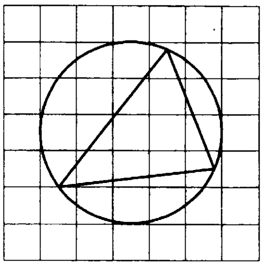
Часть 1

1. Показания счётчика электроэнергии 1 ноября составляли 12 625 кВт · ч, а 1 декабря — 12 802 кВт · ч. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за ноябрь, если 1 кВт · ч электроэнергии стоит 1 рубль 80 копеек? Ответ дайте в рублях.

2. На рисунке жирными точками показана средняя температура воздуха в Рязани во все дни с 15 по 27 сентября 2010 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите, какой была средняя температура в Рязани 18 сентября 2010 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



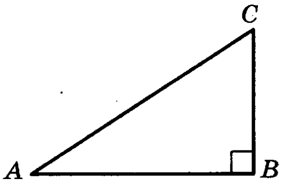
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён треугольник. Найдите радиус описанной около него окружности.



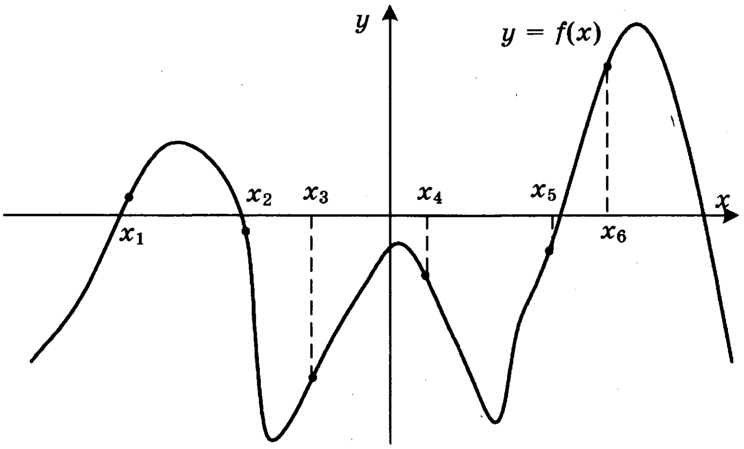
4. В торговом центре два одинаковых автомата продают чай. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится чай, равна 0,4. Вероятность того, что чай закончится в обоих автоматах, равна 0,2. Найдите вероятность того, что к концу дня чай останется в обоих автоматах.

5. Решите уравнение $3^{x-3} = 27$.

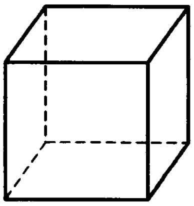
6. Один острый угол прямоугольного треугольника на 30° больше другого. Найдите больший острый угол. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите среди точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6 те точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.



8. Во сколько раз увеличится объём куба, если все его рёбра увеличить в семь раз?



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{12}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{12}+\sqrt{6}\right)$.

10. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1V_1^{1,4}=p_2V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 313,6 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

11. Брюки дороже рубашки на 30% и дешевле пиджака на 22%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

12. Найдите точку минимума функции $y=(1-2x)\cos x+2\sin x+3$, принадлежащую промежутку $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}x+1}{2\sin x-1}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2};\ 6\pi\right]$.

14. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S боковое ребро вдвое больше стороны основания.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C, делит апофему грани ASB в отношении 1 : 2, считая от вершины S.

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C, делит ребро SF, считая от вершины S.

15. Решите неравенство $4^{x-3} - 71 \cdot 2^{x-6} + 7 \le 0$.

16. Отрезок, соединяющий середины M и N оснований BC и AD соответственно трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 8. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB, основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за первые 12 месяцев нужно выплатить банку 177,75 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

18. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \le \frac{a + x^2 + 2\log_5(a^2 - 4a + 5)}{30\sqrt{17x^4 + 5x^2} + a + 1 + \log_5^2(a^2 - 4a + 5)}$$

состоит из одной точки, найдите это решение.

19. Про три различных натуральных числа известно, что они являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

а) Могло ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{13}{7}$?

б) Могло ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{8}{7}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине из этих чисел равно 25?

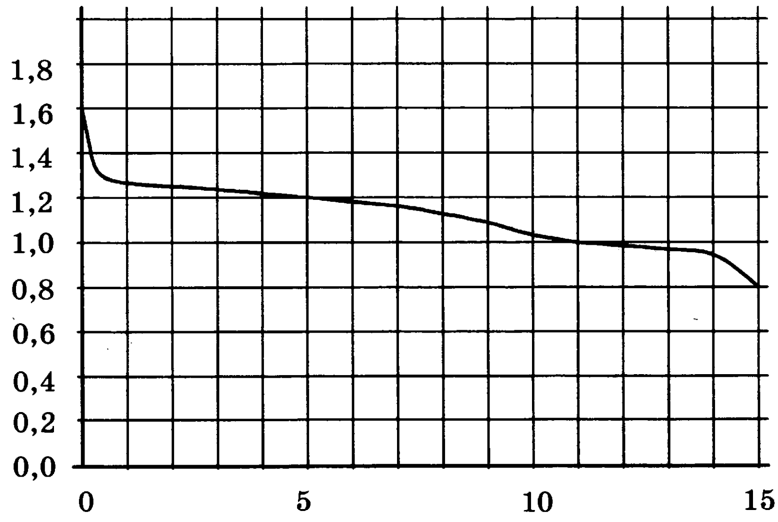
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 8

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

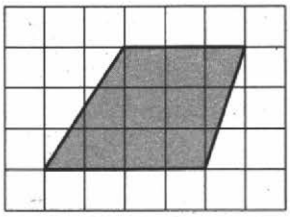
Часть 1

1. По тарифному плану «Просто как день» компания сотовой связи каждый вечер снимает со счёта абонента 18 рублей. Если на счету осталось меньше 18 рублей, то на следующее утро номер блокируют до пополнения счёта. Сегодня утром у Лизы на счету было 500 рублей. Сколько дней (включая сегодняшний) она сможет пользоваться телефоном, не пополняя счёт?

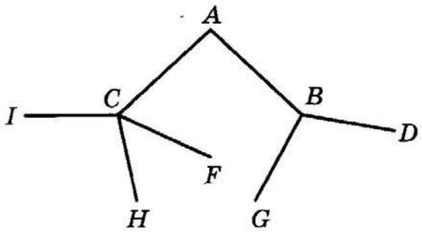
2. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается, и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, какое напряжение будет в цепи через 15 часов работы фонарика. Ответ дайте в вольтах.



3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.

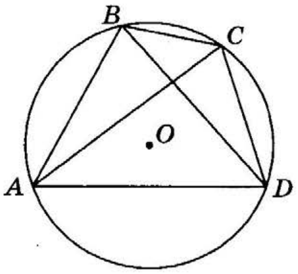


4. Павел Иванович совершает прогулку из точки A по дорожкам парка. На каждой развилке он наудачу выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Схема дорожек показана на рисунке. Найдите вероятность того, что Павел Иванович попадёт в точку G.

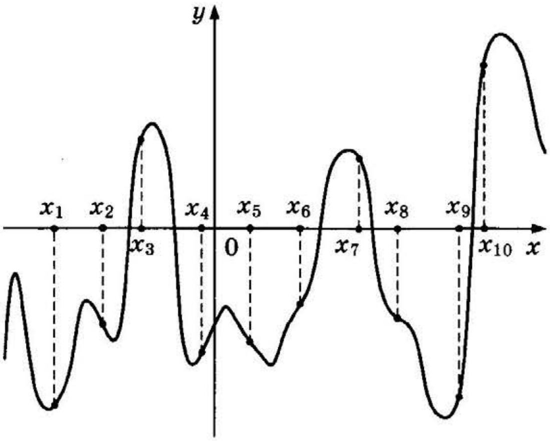


5. Найдите корень уравнения $\log_{\frac{1}{5}}(5-x)=-2$.

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 132°, угол ABD равен 61°. Найдите угол CAD. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$. В скольких из этих точек производная $f'(x)$ функции $f(x)$ положительна?



8. Бетонный шар весит 0,5 т. Сколько тонн будет весить шар вдвое большего радиуса, сделанный из такого же бетона?

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{60}{6^{\log_6 5}}$.

10. Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\ \%$. При каком значении температуры нагревателя T_1 (в кельвинах) КПД этого двигателя будет 80%, если температура холодильника $T_2 = 200$ К?

11. Брюки дороже рубашки на 30% и дешевле пиджака на 22%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = 13x - 13\operatorname{tg} x - 18$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $5 \cdot 4^{x^2+4x} + 20 \cdot 10^{x^2+4x-1} - 7 \cdot 25^{x^2+4x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3; 1]$.

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 7\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 8$.

а) Докажите, что плоскость BCA_1 перпендикулярна плоскости, проходящей через ребро AA_1 и середину ребра B_1C_1.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями BCA_1 и BB_1C_1.

15. Решите неравенство $x + \frac{20}{x+6} \geq 6$.

16. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB.

а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2}DK$.

б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC = 14$, $BC = 16$ и $\angle ACB = 150°$.

17. В двух областях есть по 50 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 2 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

18. Найдите все значения k, при каждом из которых уравнение $\frac{6k-(2-3k)\cos t}{\sin t-\cos t}=2$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

19. Три различных натуральных числа являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

а) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{3}{2}$?

б) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{5}{4}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине число равно 18?

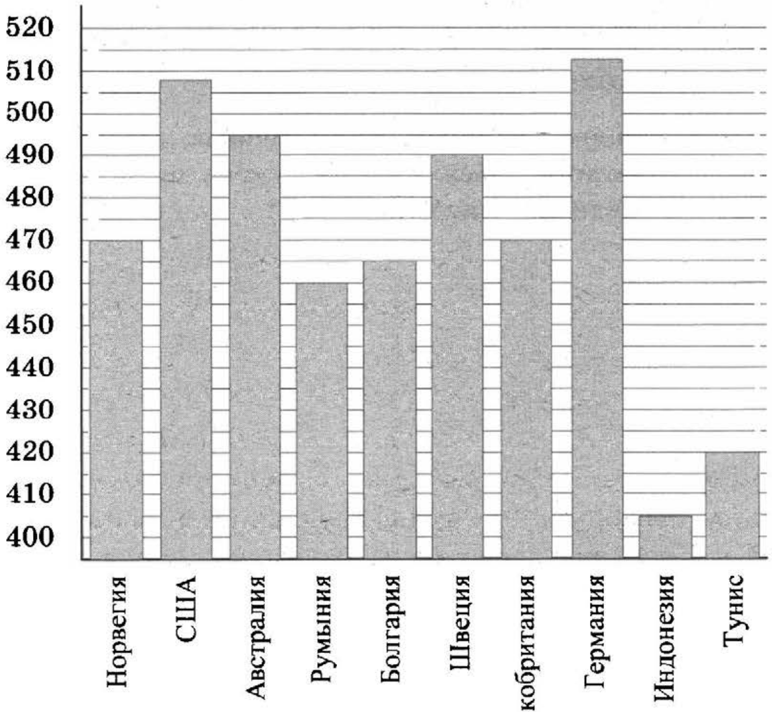
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 9

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

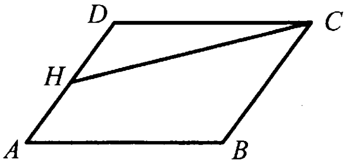
Часть 1

1. Цена на принтер была понижена на 20% и составила 4800 рублей. Сколько рублей стоил принтер до понижения цены?

2. На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Среди указанных стран третье место принадлежит Австралии. Определите, какое место с конца занимает Тунис.



3. Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 3. Точка H — середина стороны AD. Найдите площадь трапеции $AHCB$.

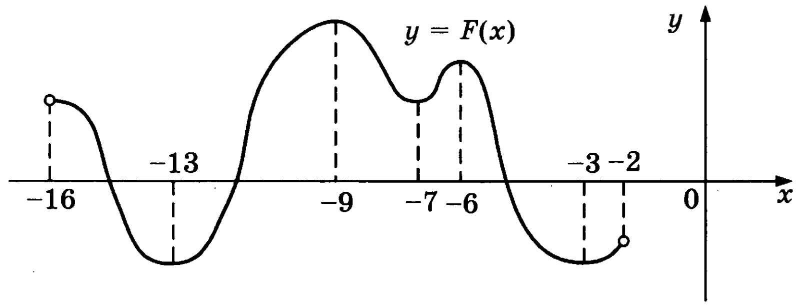


4. По отзывам покупателей Игорь Игоревич оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,94. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,8. Игорь Игоревич заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

5. Найдите корень уравнения $\log_6(4-x)=\log_6 7$.

6. В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 21°, угол CAD равен 30°. Найдите угол B. Ответ дайте в градусах.

7. На рисунке изображён график первообразной $y=F(x)$ некоторой функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-16;-2)$. Пользуясь рисунком, найдите количество решений уравнения $f(x)=0$ на отрезке $[-15;-8]$.

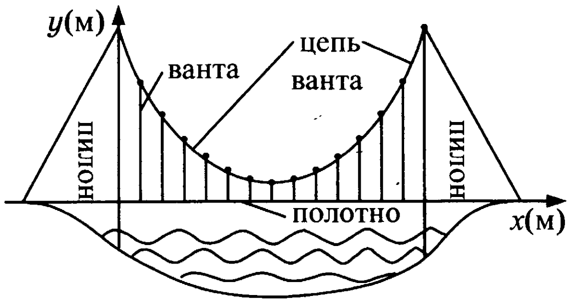


8. Объём данной правильной треугольной призмы равен 80. Найдите объём правильной треугольной призмы, сторона основания которой в 4 раза меньше стороны основания данной призмы, а высота в 4 раза больше высоты данной призмы.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $9^{\frac{4}{9}} \cdot 81^{\frac{5}{18}}$.

10. На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами. Введём систему координат: ось *Oy* направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось *Ox* направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0{,}0021x^2 - 0{,}47x + 31$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 70 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



11. В четверг акции компании подорожали на некоторое число процентов, а в пятницу подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 9% дешевле, чем при открытии торгов в четверг. На сколько процентов подорожали акции компании в четверг?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 5\cos x - 6x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};\ 0\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\cos 4x - \cos 2x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

14. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что прямая BD_1 перпендикулярна плоскости ACB_1.

б) Найдите угол между плоскостями AD_1C_1 и A_1D_1C.

15. Решите неравенство $x^3+5x^2+\dfrac{28x^2+5x-30}{x-6}\le 5$.

16. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.

а) Докажите, что $ABCD$ — ромб.

б) Эта окружность пересекает сторону AB в точке M, причём $AM:MB=3:1$. Найдите диагональ AC, если известно, что $AD=2\sqrt{2}$.

17. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 квадратных метров и номера «люкс» площадью 45 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 981 квадратный метр. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 4000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$27x^6+(4a-2x)^3+6x^2+8a=4x$$

не имеет корней.

19. В турнире по шахматам принимают участие мальчики и девочки. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. По правилам турнира каждый участник играет с каждым другим дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если в турнире принимают участие пять мальчиков и три девочки?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если всего участников девять?

в) Сколько девочек могло принимать участие в турнире, если известно, что их в 9 раз меньше, чем мальчиков, и что мальчики набрали в сумме ровно в четыре раза больше очков, чем девочки?

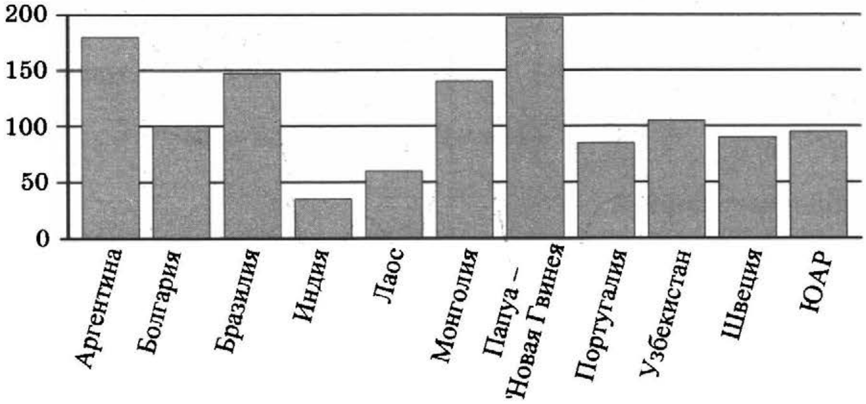
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 10

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

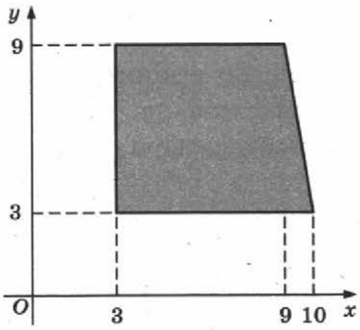
Часть 1

1. В доме, в котором живёт Женя, один подъезд. На каждом этаже по восемь квартир. Женя живёт в квартире 87. На каком этаже живёт Женя?

2. На диаграмме показано распределение выплавки меди в 11 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимала Папуа — Новая Гвинея, одиннадцатое место — Индия. Какое место занимал Узбекистан?



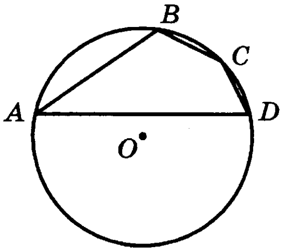
3. Найдите площадь прямоугольной трапеции, вершины которой имеют координаты (3; 3), (10; 3), (9; 9), (3; 9).



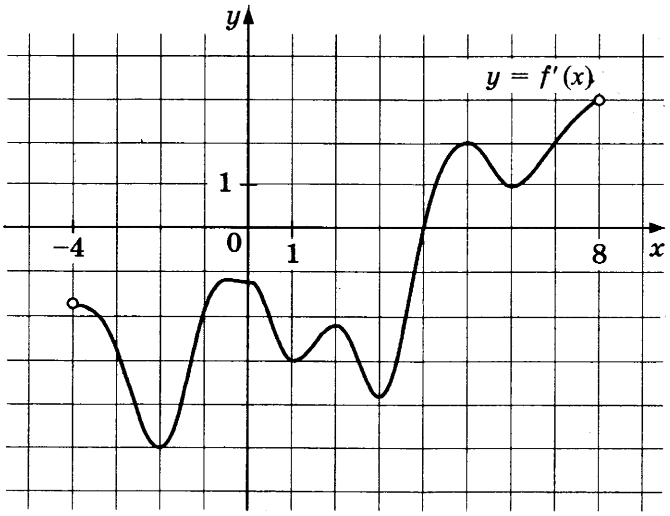
4. В сборнике билетов по истории всего 50 билетов, в 13 из них встречается вопрос о Великой Отечественной войне. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос о Великой Отечественной войне.

5. Найдите корень уравнения $\frac{1}{9x+2}=\frac{1}{8x-4}$.

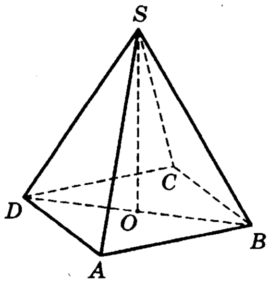
6. Угол A четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, равен 25°. Найдите угол C четырёхугольника. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график производной $y = f'(x)$ функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 8)$. В какой точке отрезка $[-3; 1]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



8. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SA = 10$, $BD = 16$. Найдите длину отрезка SO.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $-\dfrac{22}{\cos^2 34^\circ + \cos^2 124^\circ}$.

10. Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1V_1^{1,4} = p_2V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 256 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

11. Плиточник должен уложить 300 м^2 плитки. Если он будет укладывать на 5 м^2 в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 5 дней раньше, чем наметил. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

12. Найдите точку максимума функции $y = -\dfrac{x^2+49}{x}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x + 6 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

14. Ребро SA пирамиды $SABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC.

а) Докажите, что высота пирамиды, проведённая из точки A, делится плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, AC и SA, пополам.

б) Найдите расстояние от вершины A до этой плоскости, если $SA = \sqrt{5}$, $AB = AC = 5$, $BC = 2\sqrt{5}$.

15. Решите неравенство $\log^2_{|x+1|}(x+1)^4 + \log_2(x+1)^2 \le 22$.

16. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC, причём $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O.

а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC.

б) Найдите отношение площади четырёхугольника AB_1OC_1 к площади треугольника ABC, если известно, что $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 4$.

17. Тимофей хочет взять в кредит 1,1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет Тимофей может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 270 тысяч рублей?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$64x^6 + 4x^2 = (3x + a)^3 + 3x + a$$

не имеет корней.

19. Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n - 2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k - 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 4$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из трёхзначных чисел?

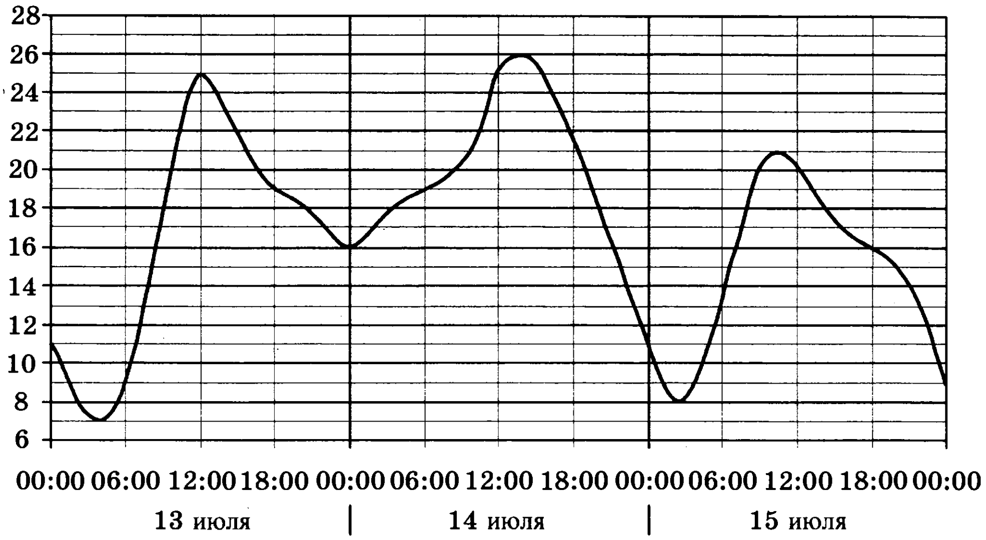
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 11

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

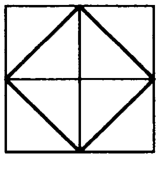
Часть 1

1. Розничная цена учебника 230 рублей, она на 15% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 8200 рублей?

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 14 июля. Ответ дайте в градусах Цельсия.



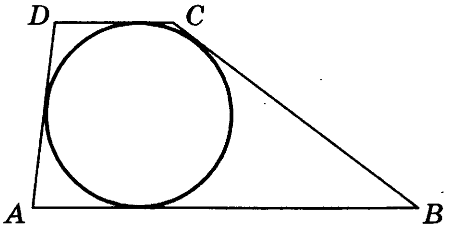
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён квадрат. Найдите радиус описанной около него окружности.



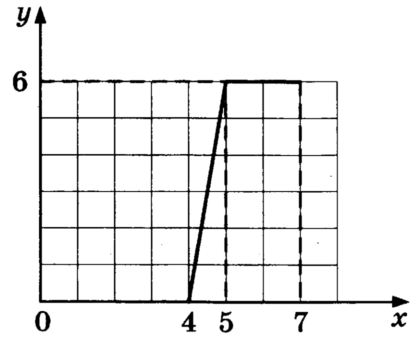
4. На фабрике керамической посуды 10% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 55% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

5. Найдите корень уравнения $\log_2 (10 - 5x) = 3 \log_2 5$.

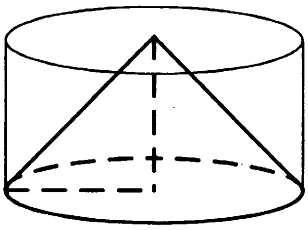
6. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 25 и 5. Найдите среднюю линию трапеции.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(7) - F(4)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



8. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $14\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{12}-\sqrt{48}\right)\cdot\sqrt{3}$.

10. Водолазный колокол, содержащий $\nu = 5$ моль воздуха при давлении $p_1 = 1{,}6$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\nu T\log_2\frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 7{,}4\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атмосферах) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 33 300 Дж.

11. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 13 рабочих, а во второй — 14 рабочих. Через 7 дней после начала работы в первую бригаду перешли 4 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^2(x-8)+10$ на отрезке $[-9;\ 5]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}(\pi+x)\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[7\pi;\ \frac{17\pi}{2}\right]$.

14. Противоположные боковые грани правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ с основанием $ABCD$ попарно перпендикулярны. Через середины K и L рёбер AB и AD соответственно и точку M проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды $MABCD$ плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью α и ребром MB.

15. Решите неравенство $0{,}5^{-\frac{x-2}{2x+4}}\cdot 10^{x}\cdot x^{-2}\geqslant\dfrac{32^{-\frac{x-2}{2x+4}}\cdot 40^{x}}{16x^{2}}$.

16. Вершины K и L квадрата $KLMN$ с центром O лежат на стороне AB треугольника ABC, а вершины M и N — на сторонах BC и AC соответственно. Высота CH треугольника ABC проходит через точку O и пересекает отрезок MN в точке D, причём $CD = DO = OH$.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный и прямоугольный.

б) Пусть прямая AD пересекает сторону BC в точке Q. Найдите AQ, если сторона квадрата $KL = 2$.

17. Клиент банка планирует взять 15-го августа кредит на 17 месяцев. Условия возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 9% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay+ax+3)(y+x-a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}$$

имеет от одного до пяти решений.

19. На доске в одну строку слева направо написаны несколько не обязательно различных натуральных чисел. Известно, что каждое следующее число (кроме первого) или на 1 больше предыдущего, или в 2 раза меньше предыдущего.

а) Может ли оказаться так, что первое число равно 8, а шестое равно 5?

б) Может ли оказаться так, что первое число равно 1000, а двадцатое равно 62?

в) Какое наименьшее количество чисел могло быть написано на доске, если первое число равно 1000, а последнее число равно 9?

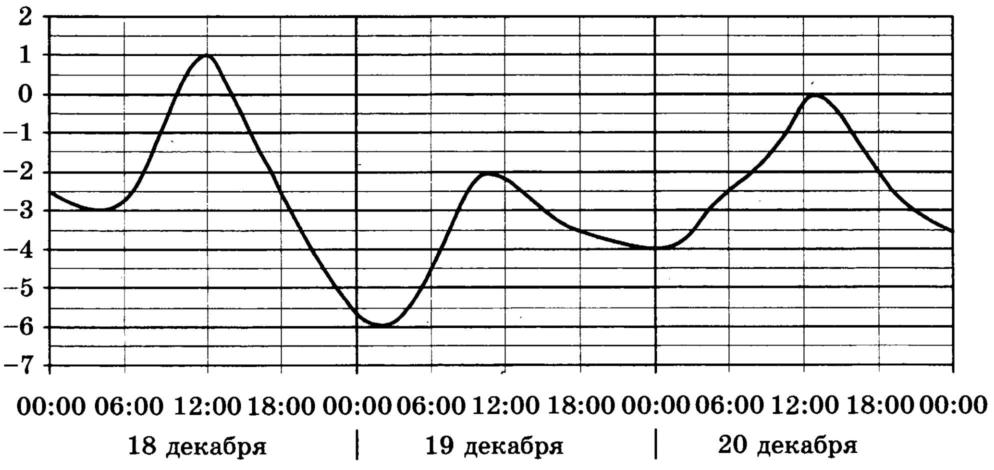
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 12

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

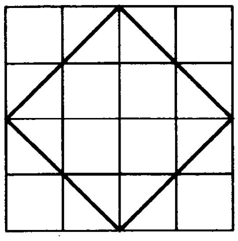
Часть 1

1. Розничная цена учебника 156 рублей, она на 30% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 4000 рублей?

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 18 декабря. Ответ дайте в градусах Цельсия.



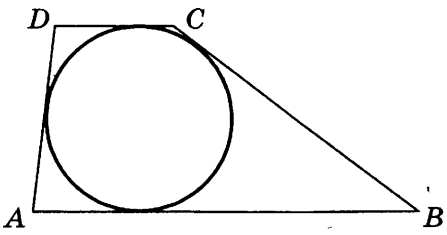
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён квадрат. Найдите радиус описанной около него окружности.



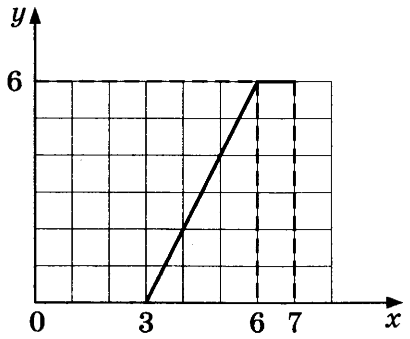
4. На фабрике керамической посуды 20% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 60% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

5. Найдите корень уравнения $\log_3(5-2x)=2\log_3 5$.

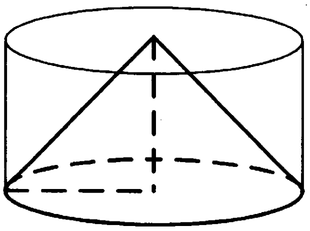
6. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 5 и 1. Найдите среднюю линию трапеции.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(7) - F(3)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



8. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $13\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{50}-\sqrt{18}\right)\cdot\sqrt{2}$.

10. Водолазный колокол, содержащий $\nu = 3$ моль воздуха при давлении $p_1 = 1{,}7$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\nu T\log_2\frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 9{,}3\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ — постоянная, T = 300 К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атмосферах) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 25 110 Дж.

11. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 19 рабочих, а во второй — 27 рабочих. Через 9 дней после начала работы в первую бригаду перешли 7 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

12. Найдите наибольшее значение функции $y=(x+9)^2(x-5)-5$ на отрезке $[-19; -5]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}(2\pi - x)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

14. Противоположные боковые грани правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ с основанием $ABCD$ попарно перпендикулярны. Через середины K и L рёбер AB и AD соответственно и точку M проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды $MABCD$ плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите расстояние от точки A до плоскости α, если $AB = 2\sqrt{3}$.

15. Решите неравенство $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{2x+2}{x+4}} \cdot 18^{2x} \cdot 3x^{-2} \leqslant \frac{27^{-\frac{x+1}{x+4}} \cdot 12^{x}}{9x^{2}}$.

16. Вершины K и L квадрата $KLMN$ с центром O лежат на стороне AB треугольника ABC, а вершины M и N — на сторонах BC и AC соответственно. Высота CH треугольника ABC проходит через точку O и пересекает отрезок MN в точке D, причём $CD = DO = OH$.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный и прямоугольный.

б) Пусть прямая AD пересекает сторону BC в точке Q. Найдите AQ, если сторона квадрата $KL = 4$.

17. Клиент банка планирует взять 15-го августа кредит на 17 месяцев. Условия возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 18% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay + ax - 2)(y + x + 3a) = 0,\\ |xy| = a\end{cases}$$

имеет ровно шесть решений.

19. На доске в одну строку слева направо написаны несколько не обязательно различных натуральных чисел. Известно, что каждое следующее число (кроме первого) или на 1 больше предыдущего, или в 2 раза меньше предыдущего.

а) Может ли оказаться так, что первое число равно 12, а седьмое равно 2?

б) Может ли оказаться так, что первое число равно 1200, а двадцать пятое равно 63?

в) Какое наименьшее количество чисел могло быть написано на доске, если первое число равно 1200, а последнее число равно 5?

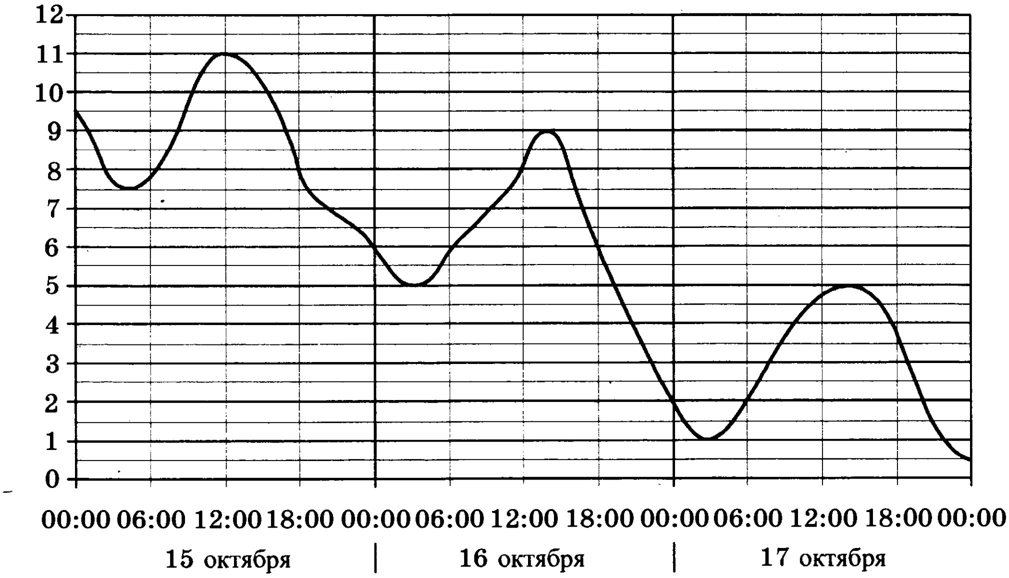
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 13

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

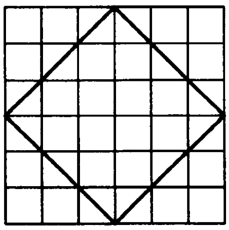
Часть 1

1. Розничная цена учебника 204 рубля, она на 20% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 7500 рублей?

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 17 октября. Ответ дайте в градусах Цельсия.



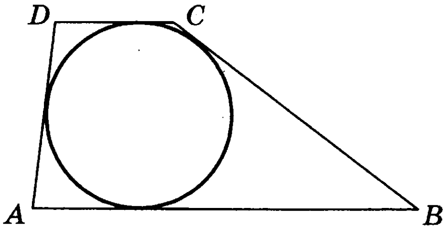
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён квадрат. Найдите радиус описанной около него окружности.



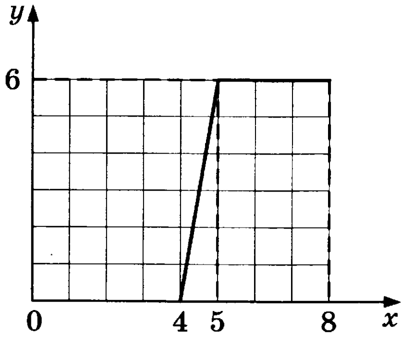
4. На фабрике керамической посуды 30% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 65% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

5. Найдите корень уравнения $\log_3(12-x)=3\log_3 4$.

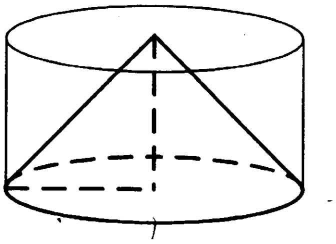
6. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 25 и 3. Найдите среднюю линию трапеции.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(4)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



8. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $21\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{72}-\sqrt{98}\right)\cdot\sqrt{8}$.

10. Водолазный колокол, содержащий ν = 3 моль воздуха при давлении p_1 = 1,8 атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A=\alpha\nu T\log_2\frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha=7{,}9\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ — постоянная, T = 300 K — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атмосферах) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 14 220 Дж.

11. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 7 рабочих, а во второй — 10 рабочих. Через 7 дней после начала работы в первую бригаду перешли 2 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

12. Найдите наибольшее значение функции $y=(x-8)^2(x-9)+1$ на отрезке $[-4;\ 8{,}5]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}(\pi+x)\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};\ 0\right]$.

14. Противоположные боковые грани правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ с основанием $ABCD$ попарно перпендикулярны. Через середины K и L рёбер AB и AD соответственно и точку M проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды $MABCD$ плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите объём пирамиды $MBKL$, если AB = 6.

15. Решите неравенство $0,2^{-\frac{2x+3}{x-5}} \cdot 15^{2x} \cdot 25x^{-2} \geqslant \dfrac{25^{-\frac{2x+3}{x-5}} \cdot 9^x}{5x^2}$.

16. Вершины K и L квадрата $KLMN$ с центром O лежат на стороне AB треугольника ABC, а вершины M и N — на сторонах BC и AC соответственно. Высота CH треугольника ABC проходит через точку O и пересекает отрезок MN в точке D, причём $CD = DO = OH$.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный и прямоугольный.

б) Пусть прямая AD пересекает сторону BC в точке Q. Найдите AQ, если сторона квадрата $KL = 5$.

17. Клиент банка планирует взять 15-го августа кредит на 19 месяцев. Условия возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 15% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay + ax + 3)(y + x - a) = 0,\\ |xy| = a\end{cases}$$

имеет ровно шесть решений.

19. Даны пять различных натуральных чисел. Известно, что их произведение равно 6000.

а) Могут ли все пять чисел образовывать геометрическую прогрессию?

б) Могут ли четыре числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

в) Могут ли три числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

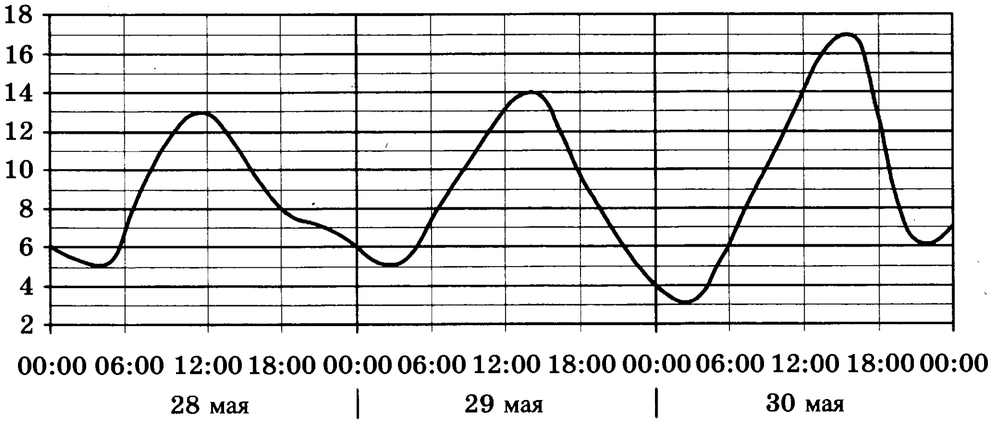
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 14

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

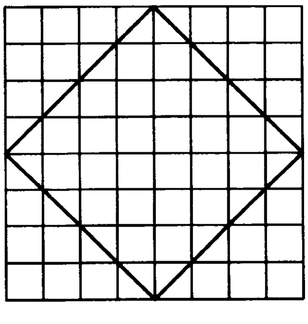
Часть 1

1. Розничная цена учебника 125 рублей, она на 25% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 5800 рублей?

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 29 мая. Ответ дайте в градусах Цельсия.



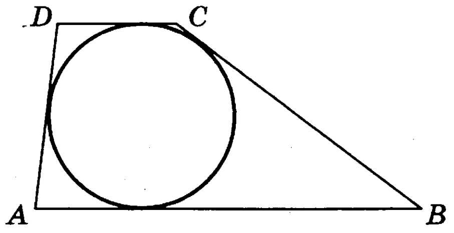
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён квадрат. Найдите радиус описанной около него окружности.



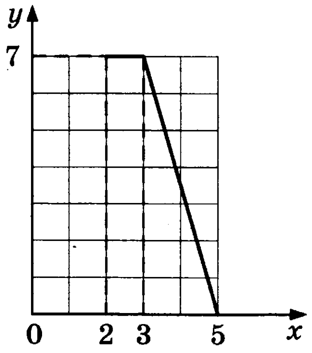
4. На фабрике керамической посуды 10% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 70% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

5. Найдите корень уравнения $\log_3(14-x)=2\log_3 5$.

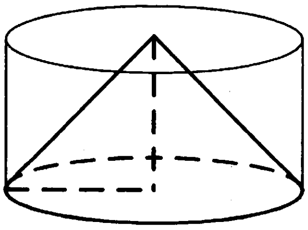
6. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 13 и 1. Найдите среднюю линию трапеции.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(5) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



8. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $80\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{96}-\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{6}$.

10. Водолазный колокол, содержащий $\nu = 5$ моль воздуха при давлении $p_1 = 1{,}8$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\nu T\log_2\frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 6{,}3\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атмосферах) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 28 350 Дж.

11. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 3 рабочих, а во второй — 9 рабочих. Через 4 дня после начала работы в первую бригаду перешли 7 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

12. Найдите наибольшее значение функции $y=(x+6)^2(x-10)+8$ на отрезке $[-14;\ -3]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}(\pi-x)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=\sin\frac{5\pi}{6}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

14. Противоположные боковые грани правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ с основанием $ABCD$ попарно перпендикулярны. Через середины K и L рёбер AB и AD соответственно и точку M проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды $MABCD$ плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите объём пирамиды $MCKL$, если $AB = 4$.

15. Решите неравенство $0{,}25^{-\frac{3x-2}{x+2}} \cdot 14^x \cdot x^{-2} \leqslant \frac{2^{-\frac{3x-2}{x+2}} \cdot 112^x}{4x^2}$.

16. Вершины K и L квадрата $KLMN$ с центром O лежат на стороне AB треугольника ABC, а вершины M и N — на сторонах BC и AC соответственно. Высота CH треугольника ABC проходит через точку O и пересекает отрезок MN в точке D, причём $CD = DO = OH$.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный и прямоугольный.

б) Пусть прямая AD пересекает сторону BC в точке Q. Найдите AQ, если сторона квадрата $KL = 10$.

17. Клиент банка планирует взять 15-го августа кредит на 19 месяцев. Условия возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 25% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay + ax - 2)(y + x + 3a) = 0,\\ |xy| = a\end{cases}$$

имеет ровно восемь решений.

19. Даны пять различных натуральных чисел. Известно, что их произведение равно 2160.

а) Могут ли все пять чисел образовывать геометрическую прогрессию?

б) Могут ли четыре числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

в) Могут ли три числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

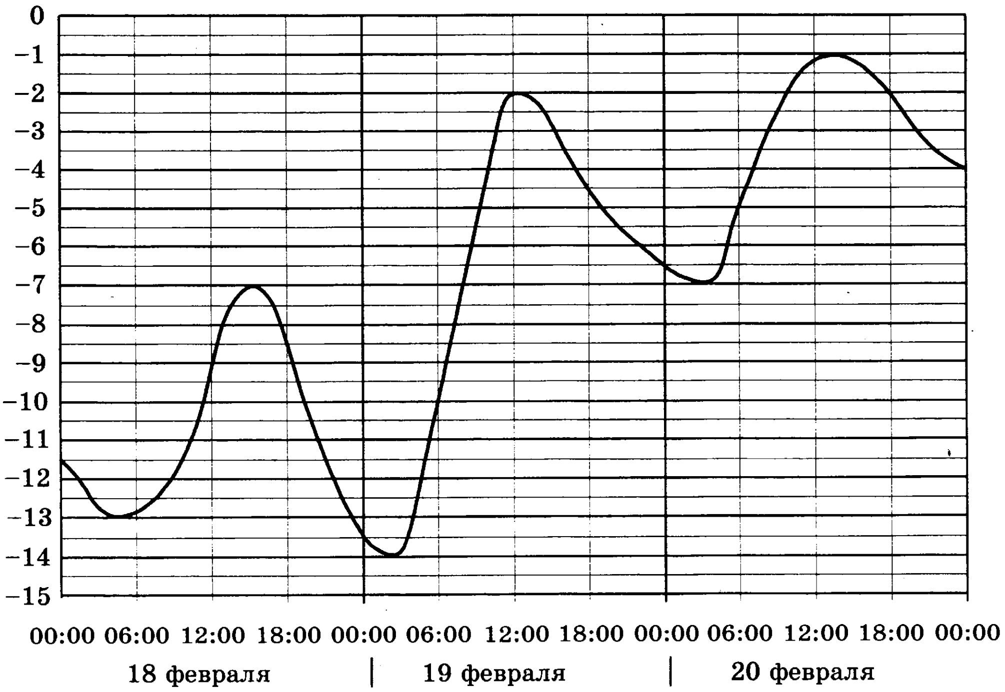
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 15

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

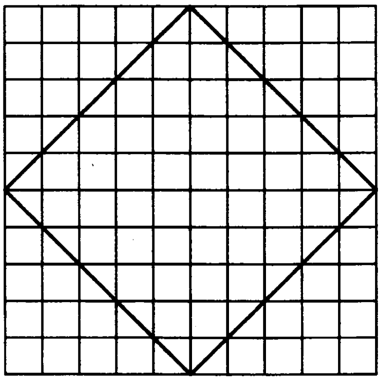
Часть 1

1. Розничная цена учебника 115 рублей, она на 15% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 5000 рублей?

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 18 февраля. Ответ дайте в градусах Цельсия.



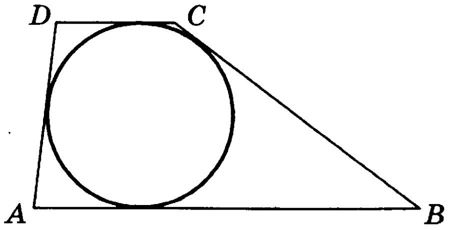
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён квадрат. Найдите радиус описанной около него окружности.



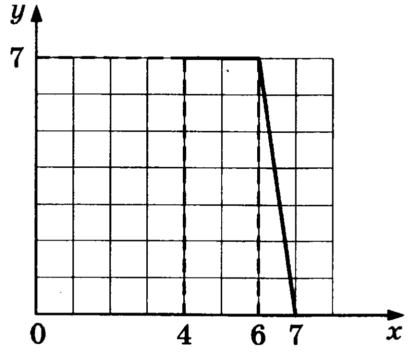
4. На фабрике керамической посуды 20% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 75% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

5. Найдите корень уравнения $\log_3(15-5x)=3\log_3 5$.

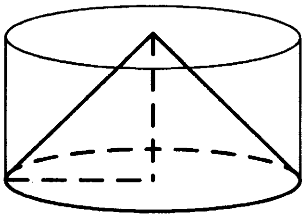
6. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 12 и 2. Найдите среднюю линию трапеции.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(7) - F(4)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



8. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $41\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{72}-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}$.

10. Водолазный колокол, содержащий $\nu = 2$ моль воздуха при давлении $p_1 = 1$ атмосфера, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит сжатие воздуха до конечного давления p_2. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha\nu T\log_2\frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 18{,}3\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атмосферах) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 21 960 Дж.

11. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 13 рабочих, а во второй — 21 рабочий. Через 4 дня после начала работы в первую бригаду перешли 5 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

12. Найдите наибольшее значение функции $y=(x+5)^2(x-1)+7$ на отрезке $[-17;\ -2]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}(2\pi+x)\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=\cos\pi$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\ \frac{9\pi}{2}\right]$.

14. Противоположные боковые грани правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ с основанием $ABCD$ попарно перпендикулярны. Через середины K и L рёбер AB и AD соответственно и точку M проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды $MABCD$ плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите расстояние от точки D до плоскости α, если $AB = 9$.

15. Решите неравенство $0,25^{-\frac{x+3}{x-2}}\cdot 30^{x}\cdot x^{-2}\leqslant\dfrac{16^{-\frac{x+3}{x-2}}\cdot 15^{x}}{8x^{2}}$.

16. Вершины K и L квадрата $KLMN$ с центром O лежат на стороне AB треугольника ABC, а вершины M и N — на сторонах BC и AC соответственно. Высота CH треугольника ABC проходит через точку O и пересекает отрезок MN в точке D, причём $CD = DO = OH$.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный и прямоугольный.

б) Пусть прямая AD пересекает сторону BC в точке Q. Найдите AQ, если сторона квадрата $KL = 1$.

17. Клиент банка планирует взять 15-го августа кредит на 21 месяц. Условия возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 33% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay+ax+3)(y+x-a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

19. Даны пять различных натуральных чисел. Известно, что их произведение равно 6750.

а) Могут ли все пять чисел образовывать геометрическую прогрессию?

б) Могут ли четыре числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

в) Могут ли три числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

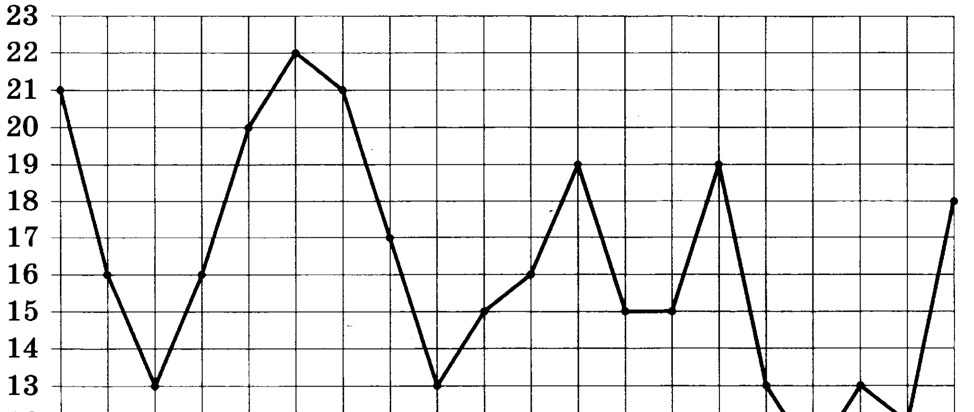
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 16

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

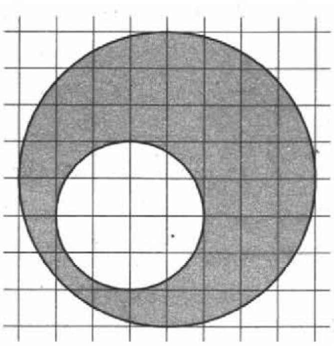
1. Студент получил свой первый гонорар в размере 1300 рублей за выполненный перевод. Он решил на все полученные деньги купить букет роз для своей учительницы английского языка. Какое наибольшее количество роз сможет купить студент, если удержанный у него налог на доходы составляет 13% гонорара, розы стоят 100 рублей за штуку и букет должен состоять из нечетного числа цветов?

2. На рисунке жирными точками показана средняя температура воздуха в Калининграде во все дни с 9 по 28 апреля 2018 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите, сколько дней за данный период средняя температура в Калининграде была меньше 16 градусов Цельсия.



3. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 2. Найдите площадь заштрихованной фигуры.

☐ 3



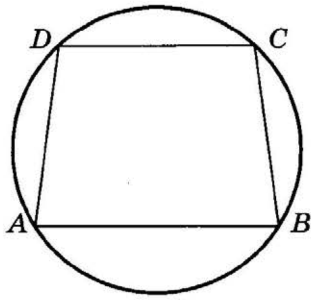
4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,03. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,97. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,02. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

☐ 4

5. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin\frac{\pi x}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

☐ 5

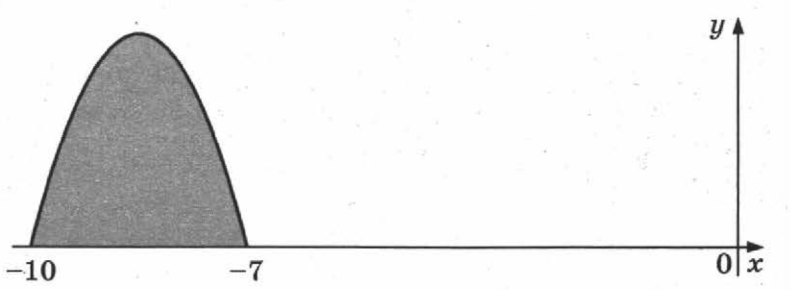
6. Основания равнобедренной трапеции равны 32 и 24. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит внутри трапеции, а радиус окружности равен 20. Найдите высоту трапеции.



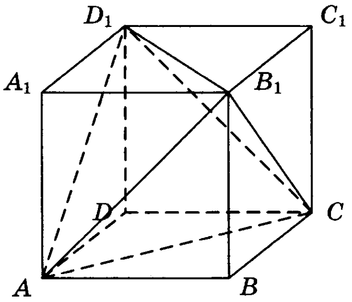
☐ 6

7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.
Функция $F(x)=-\frac{4}{9}x^3-\frac{34}{3}x^2-\frac{280}{3}x-\frac{18}{5}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

☐ 7



8. Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 3. Найдите объём треугольной пирамиды AD_1CB_1.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(2^{\frac{3}{5}}\cdot 5^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{10^9}$.

10. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_П = 25$ °C, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0{,}5$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x, вода охлаждается от начальной температуры $T_В = 85$ °C до температуры T, причём $x = \alpha\dfrac{cm}{\gamma}\log_2\dfrac{T_В - T_П}{T - T_П}$, где $c = 4200\dfrac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 21\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1{,}4$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 140 м.

11. Расстояние между городами A и B равно 500 км. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 2 часа следом за ним со скоростью 75 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он вернулся в A, автомобиль прибыл в B. Найдите скорость автомобиля. Ответ дайте в километрах в час.

12. В какой точке функция $y = \sqrt{x^2 + 10x + 55}$ принимает наименьшее значение?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\left(49^{\sin x}\right)^{\cos x} = 7^{\sqrt{3}\sin x}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

14. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB = 8$, $AC = 12$ и $AA_1 = 5$.

15. Решите неравенство $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}>\sqrt{x-2}$.

16. Дан треугольник ABC. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K, лежащей на стороне BC.

а) Докажите, что $AC^2=BC\cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC, если $\sin B = 0{,}6$ и сторона $AC = 24$.

17. У фермера есть два поля, каждое площадью 20 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 450 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором — 400 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 2000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 2500 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{a-3,5}\left(4x^2+8\right)=\log_{a-3,5}\left(4(a-3)x+9\right)$$

имеет ровно два различных корня.

19. Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2}=2a_{k+1}-a_k+1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 5$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из двузначных чисел?

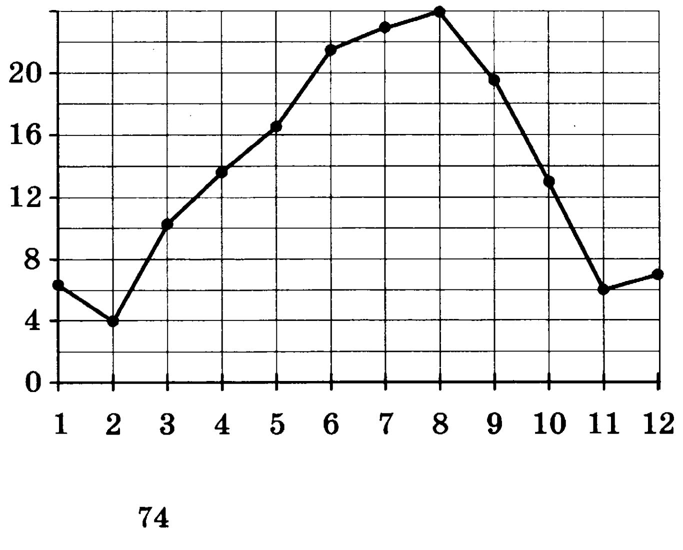
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 17

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

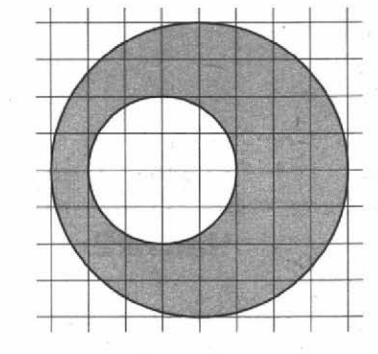
Часть 1

1. Студент получил свой первый гонорар в размере 700 рублей за выполненный перевод. Он решил на все полученные деньги купить букет гвоздик для своей учительницы английского языка. Какое наибольшее количество гвоздик сможет купить студент, если удержанный у него налог на доходы составляет 13% гонорара, гвоздики стоят 40 рублей за штуку и букет должен состоять из нечетного числа цветов?

2. На рисунке жирными точками показана среднемесячная температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.



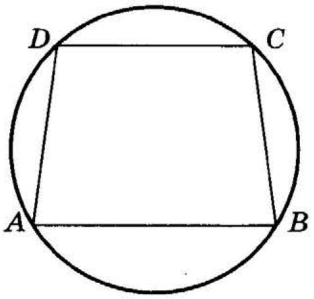
3. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 5. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



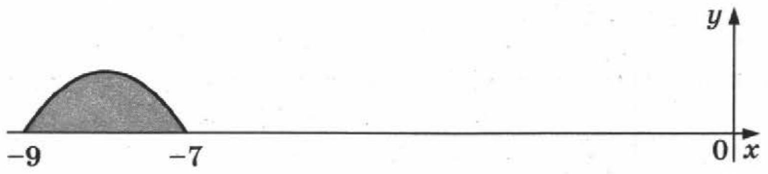
4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,97. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,02. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

5. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin\frac{\pi x}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

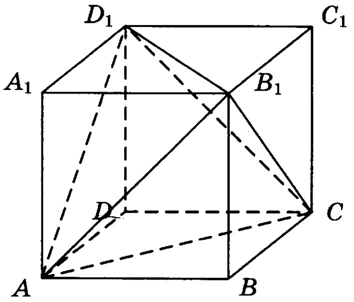
6. Основания равнобедренной трапеции равны 48 и 20. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит внутри трапеции, а радиус окружности равен 26. Найдите высоту трапеции.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.
Функция $F(x)=-\frac{1}{4}x^3-6x^2-\frac{189}{4}x-1$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



8. Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 6. Найдите объём треугольной пирамиды AD_1CB_1.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(5^{\frac{4}{7}}\cdot 9^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{45^{12}}$.

10. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\text{П}} = 25$ °С, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0{,}3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x, вода охлаждается от начальной температуры $T_{\text{В}} = 57$ °С до температуры T, причём $x = \alpha\dfrac{cm}{\gamma}\log_2\dfrac{T_{\text{В}} - T_{\text{П}}}{T - T_{\text{П}}}$, где $c = 4200\dfrac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{С}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 63\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot{}^\circ\text{С}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1{,}4$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 56 м.

11. Расстояние между городами А и В равно 400 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через час следом за ним со скоростью 120 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите скорость автомобиля. Ответ дайте в километрах в час.

12. В какой точке функция $y = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$ принимает наименьшее значение?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\left(81^{\sin x}\right)^{\cos x} = 9^{\sqrt{2}\cos x}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

14. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB = 5$, $AC = 8$ и $AA_1 = 4$.

15. Решите неравенство $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-1}>\sqrt{x-2}$.

16. Дан треугольник ABC. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K, лежащей на стороне BC.

а) Докажите, что $AC^2=BC\cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC, если $\sin B=\dfrac{\sqrt{11}}{6}$ и сторона $AC = 45$.

17. У фермера есть два поля, каждое площадью 15 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором — 450 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 200 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 1200 руб. за центнер, а свёклу — по цене 1400 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{a+2,5}\left(x^2+3\right)=\log_{a+2,5}\left((a+4)x+4\right)$$

имеет ровно два различных корня.

19. Конечная последовательность a_1, a_2, ..., a_n состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k\leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2}=2a_{k+1}-a_k+1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 3$.

б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_3 = a_{11}$?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 50?

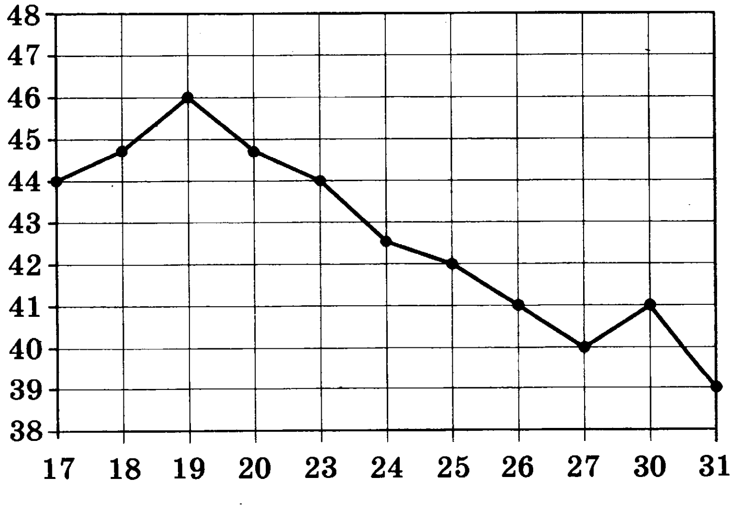
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 18

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

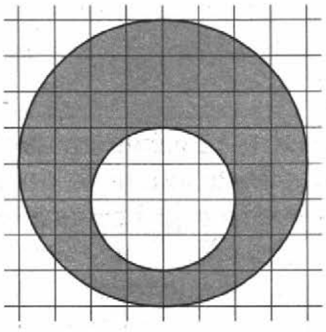
Часть 1

1. Студент получил свой первый гонорар в размере 1100 рублей за выполненный перевод. Он решил на все полученные деньги купить букет лилий для своей учительницы английского языка. Какое наибольшее количество лилий сможет купить студент, если удержанный у него налог на доходы составляет 13% гонорара, лилии стоят 120 рублей за штуку и букет должен состоять из нечетного числа цветов?

2. На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 17 по 31 августа 2004 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой нефти на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за баррель).



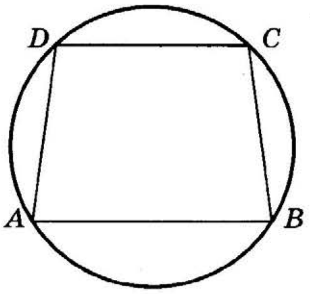
3. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 4. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,04. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,95. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

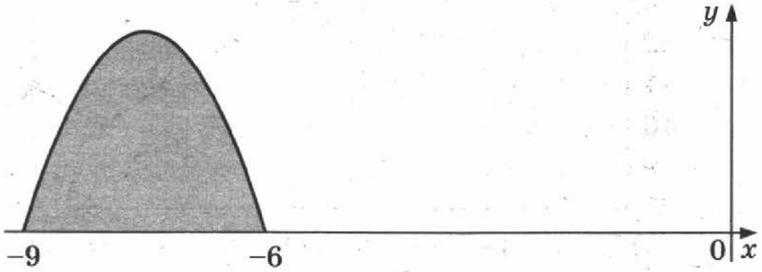
5. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin\frac{\pi x}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

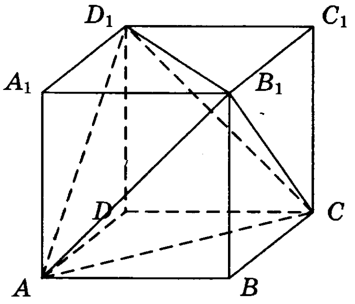
6. Основания равнобедренной трапеции равны 72 и 30. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит внутри трапеции, а радиус окружности равен 39. Найдите высоту трапеции.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.

Функция $F(x)=-\frac{10}{27}x^3-\frac{25}{3}x^2-60x-\frac{5}{11}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.





8. Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 21. Найдите объём треугольной пирамиды AD_1CB_1.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(4^{\frac{4}{7}}\cdot 7^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{28^{12}}$.

10. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\text{П}} = 25$ °C, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0{,}3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x, вода охлаждается от начальной температуры $T_{\text{В}} = 49$ °C до температуры T, причём $x=\alpha\dfrac{cm}{\gamma}\log_2\dfrac{T_{\text{В}}-T_{\text{П}}}{T-T_{\text{П}}}$, где $c=4200\dfrac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma=21\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1{,}1$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 66 м.

11. Расстояние между городами А и В равно 400 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 3 часа следом за ним со скоростью 110 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите скорость автомобиля. Ответ дайте в километрах в час.

12. В какой точке функция $y=\sqrt{x^2-18x+100}$ принимает наименьшее значение?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\left(36^{\sin x}\right)^{\cos x}=6^{\sqrt{3}\cos x}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[2\pi;\ 3\pi]$.

14. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB = 10$, $AC = 12$ и $AA_1 = 7$.

15. Решите неравенство $\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-1}>\sqrt{x-1}$.

16. Дан треугольник ABC. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K, лежащей на стороне BC.

а) Докажите, что $AC^2=BC\cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC, если $\sin B=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ и сторона $AC = 18$.

17. У фермера есть два поля, каждое площадью 15 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 150 ц/га, а на втором — 250 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 180 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 2000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 1800 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{2,5-a}\left(x^2+1\right)=\log_{2,5-a}\left((a-4)x+2\right)$$

имеет ровно два различных корня.

19. Конечная последовательность a_1, a_2, ..., a_n состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k\leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2}=2a_{k+1}-a_k+1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 2$.

б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_6 = a_{18}$?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 100?

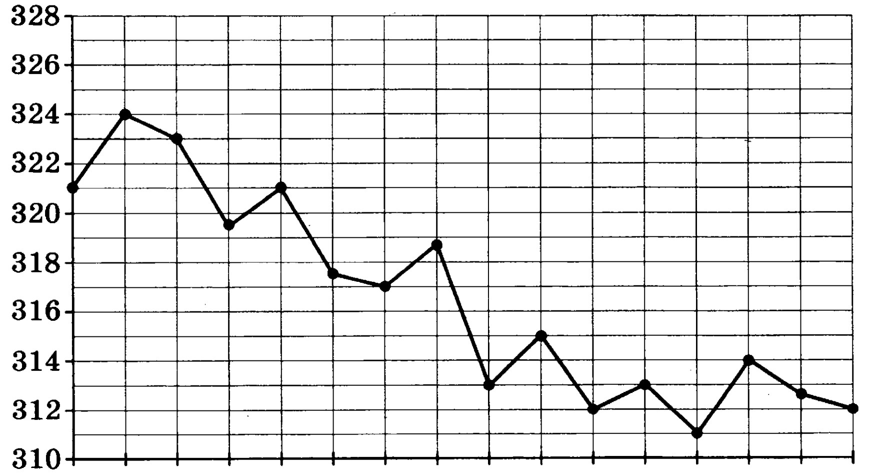
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 19

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

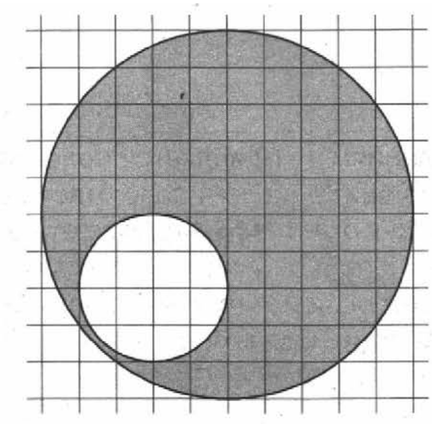
Часть 1

1. Студент получил свой первый гонорар в размере 900 рублей за выполненный перевод. Он решил на все полученные деньги купить букет тюльпанов для своей учительницы английского языка. Какое наибольшее количество тюльпанов сможет купить студент, если удержанный у него налог на доходы составляет 13% гонорара, тюльпаны стоят 60 рублей за штуку и букет должен состоять из нечетного числа цветов?

2. На рисунке жирными точками показана цена золота на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 3 по 24 октября 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена унции золота в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой золота на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за унцию).



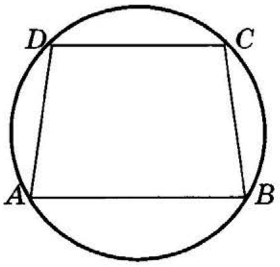
3. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 16. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



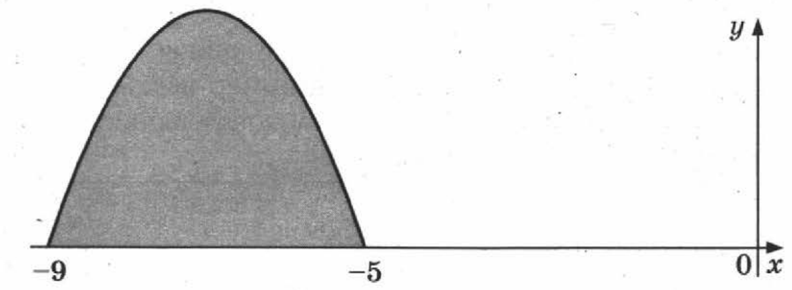
4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,98. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

5. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin\frac{\pi x}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

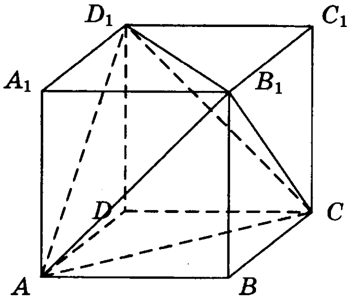
6. Основания равнобедренной трапеции равны 96 и 28. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит внутри трапеции, а радиус окружности равен 50. Найдите высоту трапеции.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.
Функция $F(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{21}{4}x^2-\frac{135}{4}x-\frac{13}{2}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



8. Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 12. Найдите объём треугольной пирамиды AD_1CB_1.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(7^{\frac{3}{5}}\cdot 9^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{63^9}$.

10. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_П = 15$ °C, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 1{,}4$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x, вода охлаждается от начальной температуры $T_В = 75$ °C до температуры T, причём $x=\alpha\dfrac{cm}{\gamma}\log_2\dfrac{T_В-T_П}{T-T_П}$, где $c=4200\dfrac{Вт\cdot с}{кг\cdot °C}$ — теплоёмкость воды, $\gamma=63\dfrac{Вт}{м\cdot °C}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1{,}8$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 168 м.

11. Расстояние между городами A и B равно 600 км. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 2 часа следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он вернулся в A, автомобиль прибыл в B. Найдите скорость автомобиля. Ответ дайте в километрах в час.

12. В какой точке функция $y=\sqrt{x^2-22x+122}$ принимает наименьшее значение?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\left(64^{\sin x}\right)^{\cos x}=8^{\sin x}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{3\pi}{2};\ -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

14. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB = 10$, $AC = 16$ и $AA_1 = 5$.

15. Решите неравенство $\sqrt{x+3}-\sqrt{3x-2}>\sqrt{x-2}$.

16. Дан треугольник ABC. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K, лежащей на стороне BC.

а) Докажите, что $AC^2 = BC\cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC, если $\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}$ и сторона $AC = 36$.

17. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором — 200 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 1500 руб. за центнер, а свёклу — по цене 1800 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{a-7,5}\left(x^2+2\right)=\log_{a-7,5}\left((a-6)x+2\right)$$

имеет ровно два различных корня.

19. Конечная последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2}=2a_{k+1}-a_k+1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 1$.

б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_6 = a_{16}$?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 75?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 20

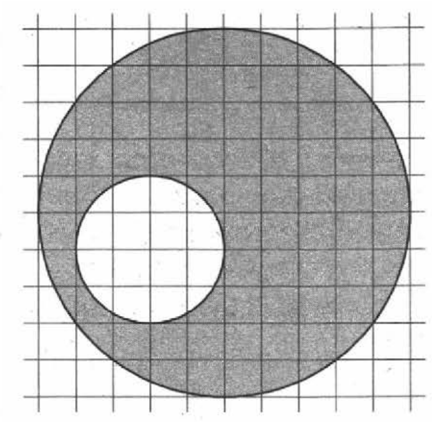
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Студент получил свой первый гонорар в размере 1300 рублей за выполненный перевод. Он решил на все полученные деньги купить букет гвоздик для своей учительницы английского языка. Какое наибольшее количество гвоздик сможет купить студент, если удержанный у него налог на доходы составляет 13% гонорара, гвоздики стоят 40 рублей за штуку и букет должен состоять из нечетного числа цветов?

2. На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Бресте каждый день с 6 по 19 июля 1981 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей среднесуточными температурами за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.

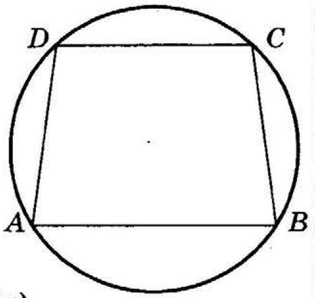
3. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 12. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,05. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,03. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

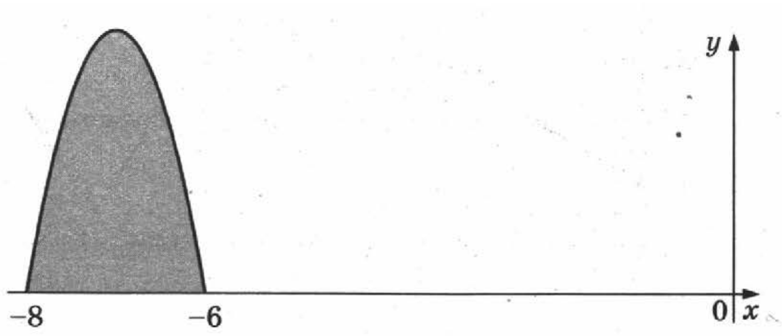
5. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin\frac{\pi x}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Основания равнобедренной трапеции равны 120 и 50. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит внутри трапеции, а радиус окружности равен 65. Найдите высоту трапеции.



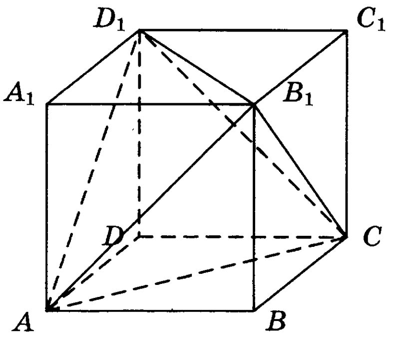
7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.

Функция $F(x)=-x^3-21x^2-144x-\frac{11}{4}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



8 ☐

8. Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 27. Найдите объём треугольной пирамиды AD_1CB_1.



Часть 2

9 ☐

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\left(4^{\frac{4}{7}}\cdot 11^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{44^{12}}$.

10 ☐

10. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\text{п}} = 20$ °C, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0{,}2$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x, вода охлаждается от начальной температуры $T_{\text{в}} = 68$ °C до температуры T, причём $x = \alpha\dfrac{cm}{\gamma}\log_2\dfrac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}}$, где $c = 4200\dfrac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 21\dfrac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1{,}7$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 136 м.

11 ☐

11. Расстояние между городами А и В равно 240 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 2 часа следом за ним со скоростью 80 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите скорость автомобиля. Ответ дайте в километрах в час.

12 ☐

12. В какой точке функция $y = \sqrt{x^2 + 30x + 248}$ принимает наименьшее значение?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $49^{\cos^2 x} = 7^{\sqrt{2}\cos^2 x}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.

14. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB = 14$, $AC = 16$ и $AA_1 = 6$.

15. Решите неравенство $\sqrt{x+5} - \sqrt{2x-3} > \sqrt{x-3}$.

16. Дан треугольник ABC. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K, лежащей на стороне BC.

а) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC, если $\sin B = 0{,}8$ и сторона $AC = 30$.

17. У фермера есть два поля, каждое площадью 20 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 230 ц/га, а на втором — 150 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором — 300 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 1800 руб. за центнер, а свёклу — по цене 1600 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{6,5-a}\left(x^2+3\right) = \log_{6,5-a}\left(\left(a-8\right)x-3\right)$$

имеет ровно два различных корня.

19. Конечная последовательность a_1, a_2, ..., a_n состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 1$.

б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_9 = a_{27}$?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 150?

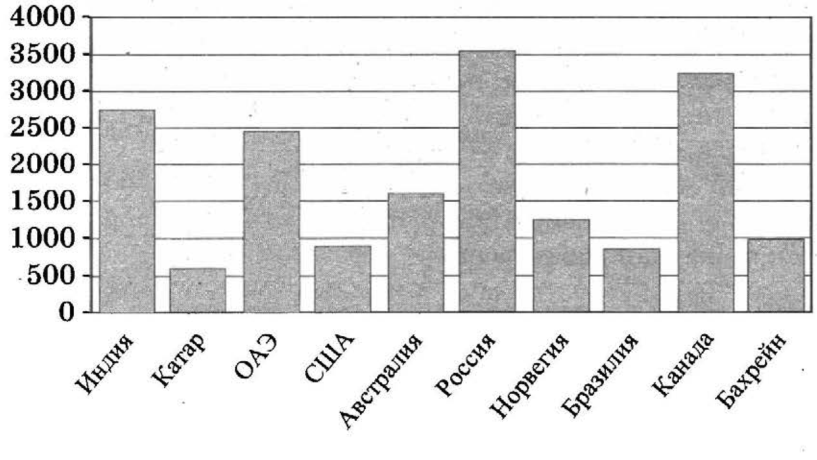
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 21

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

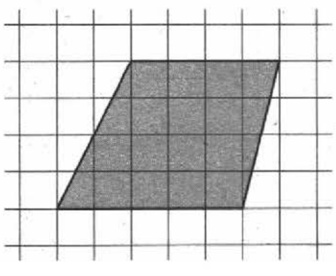
Часть 1

1. Показания счётчика электроэнергии 1 марта составляли 46 987 кВт · ч, а 1 апреля — 47 157 кВт · ч. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за март, если 1 кВт · ч электроэнергии стоит 2 рубля 50 копеек? Ответ дайте в рублях.

2. На диаграмме показано распределение выплавки алюминия в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2016 год. Среди представленных стран первое место по выплавке алюминия занимала Россия, десятое место занимал Катар. Какое место занимала Норвегия?



3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



4. Одиннадцать детей встают в хоровод в случайном порядке. Среди них Антон и его сестра Маша. Какова вероятность того, что Антон и Маша окажутся рядом?

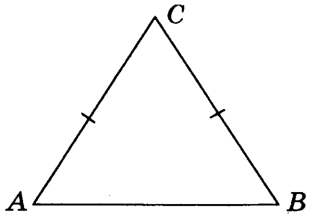
☐ 4

5. Найдите корень уравнения $\log_7 (9 + x) = \log_7 2$.

☐ 5

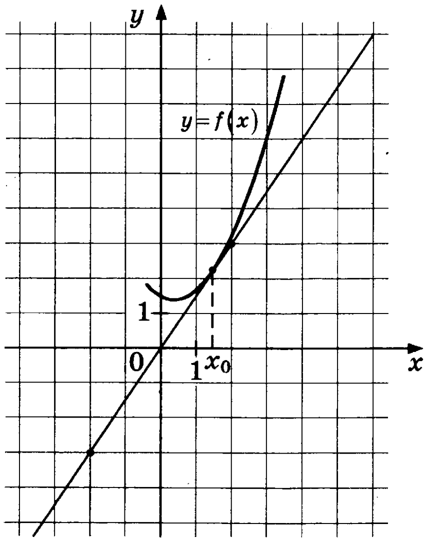
6. В треугольнике ABC угол C равен 66°, стороны AC и BC равны. Найдите угол A. Ответ дайте в градусах.

☐ 6



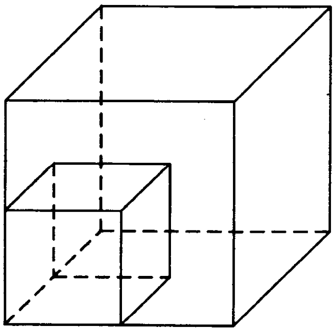
7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

☐ 7



8. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его рёбра увеличить в 7 раз?

☐ 8



Часть 2

9. Найдите значение выражения $-32\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(-600^\circ)$.

10. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб. за ед.) задаётся формулой $q = 110 - 5p$. Выручка предприятия r (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 600 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб. за ед.

11. Девять одинаковых рубашек дешевле куртки на 7%. На сколько процентов двенадцать таких же рубашек дороже куртки?

12. Найдите точку минимума функции $y = (25 - x)e^{25 - x}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\frac{(x+3)^2}{5} + \frac{20}{(x+3)^2} = 8\left(\frac{x+3}{5} - \frac{2}{x+3}\right) + 1$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-6; -4]$.

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 4, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 3$, а $C_1L = 1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1, а основание — сечение данной призмы плоскостью γ.

15. Решите неравенство $\log_{\sqrt[6]{4}}\left(\log_{\frac{1}{5}}(x+3)\right) \geq 3$.

16. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC. Диагональ AC разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и AB.

а) Докажите, что луч DB — биссектриса угла ADC.

б) Найдите AB, если известны длины диагоналей трапеции: $BD = 12$ и $AC = 7{,}5$.

17. 31 декабря 2016 года Виктор взял в банке 3 972 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Виктор переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Виктор выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}3x-2y+z=2x^2+y^2\\ -x+y+3z=a\end{cases}$$

имеет единственное решение.

19. На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 3.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 11, если сначала по одному разу были написаны числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и 11?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 24, если сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 100 до 151 включительно?

в) Известно, что на доске осталось ровно два числа, а сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 100 до 151 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 22

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

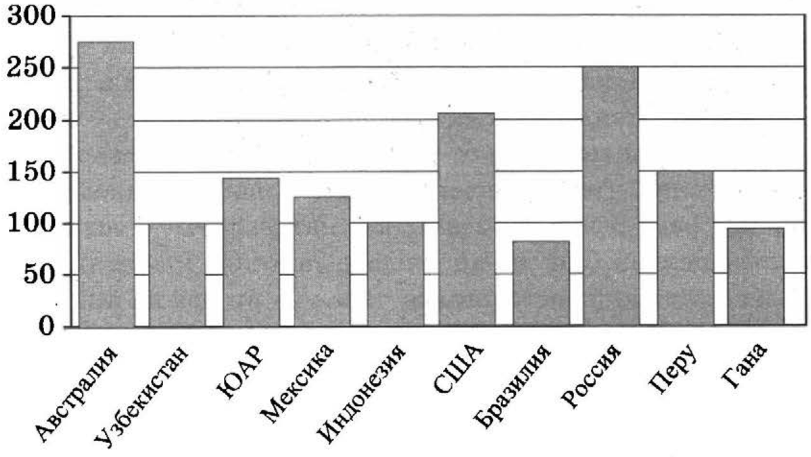
Часть 1

1

1. Показания счётчика электроэнергии 1 сентября составляли 54 209 кВт · ч, а 1 октября — 54 399 кВт · ч. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за сентябрь, если 1 кВт · ч электроэнергии стоит 1 рубль 10 копеек? Ответ дайте в рублях.

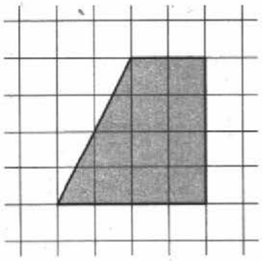
2

2. На диаграмме показано распределение выплавки золота в 10 странах мира (в тоннах) за 2016 год. Среди представленных стран первое место по выплавке золота занимала Австралия, десятое место — Бразилия. Какое место занимала ЮАР?



3

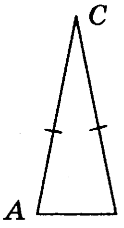
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



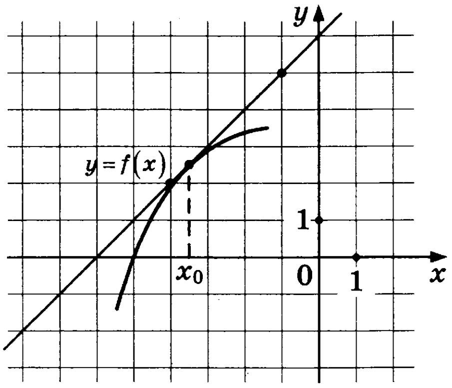
4. Девять детей встают в хоровод в случайном порядке. Среди них Дима и его сестра Катя. Какова вероятность того, что Дима и Катя не окажутся рядом?

5. Найдите корень уравнения $\log_5 (1 + x) = \log_5 4$.

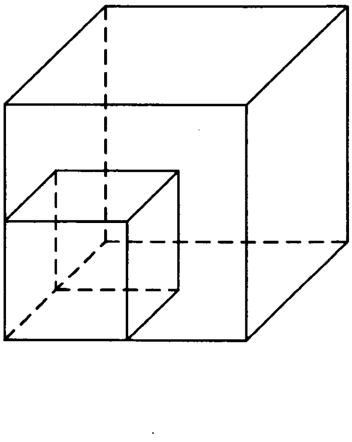
6. В треугольнике ABC угол C равен 20°, стороны AC и BC равны. Найдите угол A. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его рёбра увеличить в 11 раз?



Часть 2

9. Найдите значение выражения $-17\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(1050^\circ)$.

10. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб. за ед.) задаётся формулой $q = 75 - 5p$. Выручка предприятия r (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 270 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб. за ед.

11. Десять одинаковых рубашек дешевле куртки на 4%. На сколько процентов пятнадцать таких же рубашек дороже куртки?

12. Найдите точку минимума функции $y = (16 - x)e^{16 - x}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\dfrac{(x-1)^2}{8} + \dfrac{8}{(x-1)^2} = 7\left(\dfrac{x-1}{4} - \dfrac{2}{x-1}\right) - 1$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2; 3]$.

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{2}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 4$, а $C_1L = 1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1, а основание — сечение данной призмы плоскостью γ.

15. Решите неравенство $\log_{\sqrt[9]{8}}\left(\log_{\frac{1}{7}}(x+1)\right) \geq 3$.

16. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC. Диагональ AC разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и AB.

а) Докажите, что луч DB — биссектриса угла ADC.

б) Найдите AB, если известны длины диагоналей трапеции: $BD = 15$ и $AC = 8{,}5$.

17. 31 декабря 2016 года Александр взял в банке 3 276 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Александр переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Александр выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} -x-3y+2z=x^2+3y^2 \\ x-3y-4z=a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19. На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 3.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 13, если сначала по одному разу были написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 21, если сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 140 до 191 включительно?

в) Известно, что на доске осталось ровно два числа, а сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 140 до 191 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

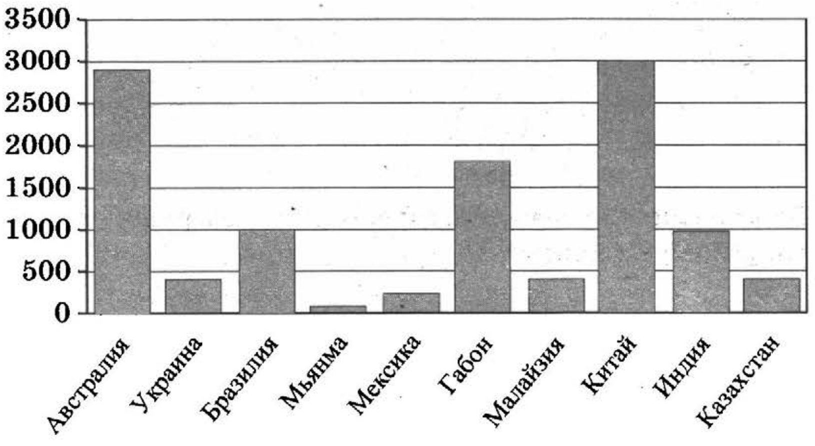
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 23

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

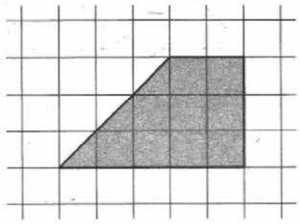
Часть 1

1. Показания счётчика электроэнергии 1 июля составляли 88 219 кВт · ч, а 1 августа — 88 369 кВт · ч. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за июль, если 1 кВт · ч электроэнергии стоит 3 рубля 50 копеек? Ответ дайте в рублях.

2. На диаграмме показано распределение добычи марганцевой руды в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2015 год. Среди представленных стран первое место по добыче марганцевой руды занимал Китай, десятое место — Мьянма. Какое место занимал Габон?



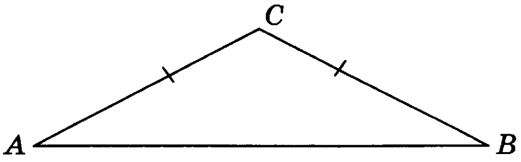
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



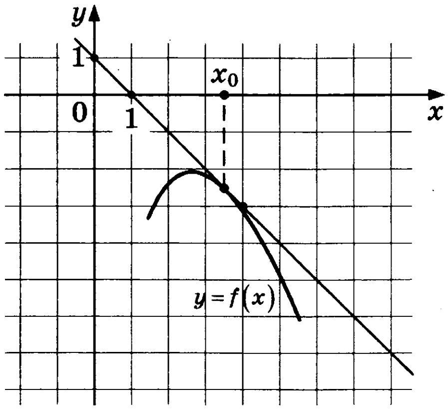
4. Одиннадцать детей встают в хоровод в случайном порядке. Среди них Максим и его сестра Вика. Какова вероятность того, что Максим и Вика не окажутся рядом?

5. Найдите корень уравнения $\log_2(16 + x) = \log_2 3$.

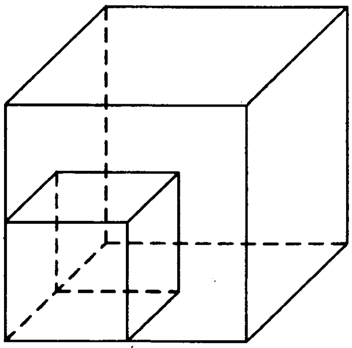
6. В треугольнике ABC угол C равен 146°, стороны AC и BC равны. Найдите угол A. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его рёбра увеличить в 15 раз?



Часть 2

9. Найдите значение выражения $-29\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(-60^\circ)$.

10. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб. за ед.) задаётся формулой $q = 95 - 5p$. Выручка предприятия r (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 440 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб. за ед.

11. Восемь одинаковых рубашек дешевле куртки на 2%. На сколько процентов двенадцать таких же рубашек дороже куртки?

12. Найдите точку минимума функции $y = (14 - x)e^{14-x}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2\left(\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{25}{(x-2)^2}\right)=\frac{x-2}{2}-\frac{5}{x-2}+16$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку [3; 8].

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{6}$. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 3$, а $C_1L = 2$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1, а основание — сечение данной призмы плоскостью γ.

15. Решите неравенство $\log_{\sqrt[4]{36}}\left(\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\right)\ge 2$.

16. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC. Диагональ AC разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и AB.

а) Докажите, что луч DB — биссектриса угла ADC.

б) Найдите AB, если известны длины диагоналей трапеции: $BD = 24$ и $AC = 12,5$.

17. 31 декабря 2016 года Сергей взял в банке 2 648 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2x-3y+2z=x^2+2y^2 \\ -2x+y+3z=a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19. На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 5.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 20, если сначала по одному разу были написаны числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 и 13?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 45, если сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 103 до 208 включительно?

в) Известно, что на доске осталось ровно два числа, а сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 103 до 208 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

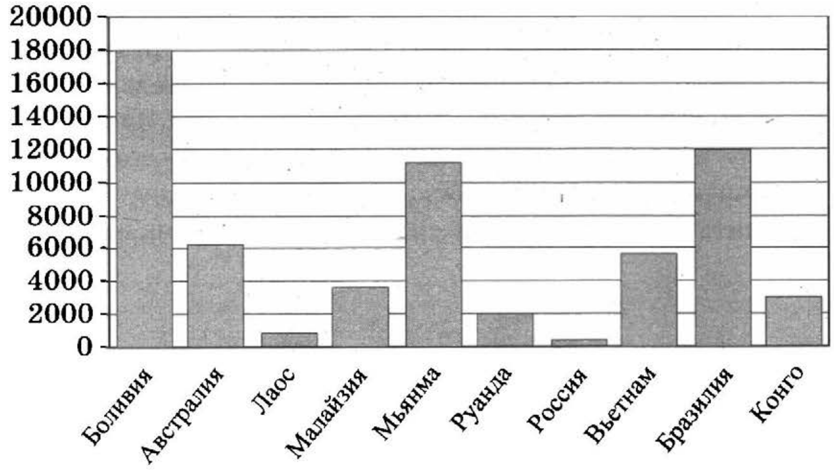
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 24

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

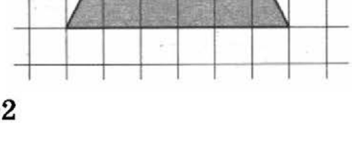
Часть 1

1. Показания счётчика электроэнергии 1 января составляли 14 836 кВт · ч, а 1 февраля — 15 036 кВт · ч. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за январь, если 1 кВт · ч электроэнергии стоит 4 рубля 50 копеек? Ответ дайте в рублях.

2. На диаграмме показано распределение выплавки олова в 10 странах мира (в тоннах) за 2016 год. Среди представленных стран первое место по выплавке олова занимала Боливия, десятое место — Россия. Какое место занимала Руанда?



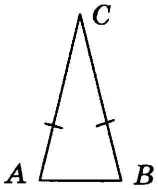
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



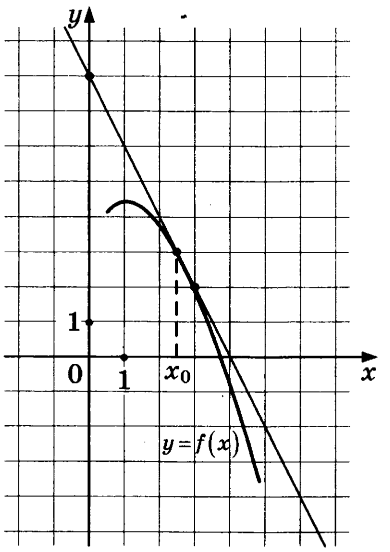
4. Семнадцать детей встают в хоровод в случайном порядке. Среди них Серёжа и его сестра Таня. Какова вероятность того, что Серёжа и Таня окажутся рядом?

5. Найдите корень уравнения $\log_2(12 + x) = \log_2 11$.

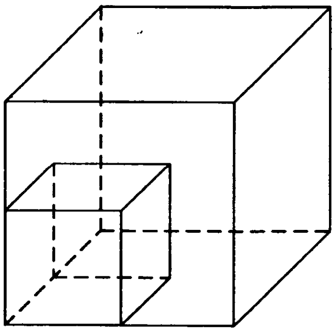
6. В треугольнике ABC угол C равен 26°, стороны AC и BC равны. Найдите угол A. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его рёбра увеличить в 17 раз?



Часть 2

9. Найдите значение выражения $13\sqrt{3}\,\mathrm{tg}(-930^\circ)$.

10. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб. за ед.) задаётся формулой $q = 180 - 10p$. Выручка предприятия r (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 450 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб. за ед.

11. Одиннадцать одинаковых рубашек дешевле куртки на 1%. На сколько процентов четырнадцать таких же рубашек дороже куртки?

12. Найдите точку минимума функции $y = (18 - x)e^{18 - x}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\dfrac{9}{(x+1)^2} + \dfrac{(x+1)^2}{16} = 3 \cdot \left(\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{x+1}{4}\right) - \dfrac{1}{2}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку [0; 2].

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона AB основания равна 8, а боковое ребро AA_1 равно 4. На рёбрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 5$, а $C_1L = 3$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая A_1C перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1, а основание — сечение данной призмы плоскостью γ.

15. Решите неравенство $\log_{\sqrt[8]{16}}\left(\log_{\frac{1}{4}}(x+2)\right) \geq 2$.

16. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC. Диагональ AC разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и AB.

а) Докажите, что луч DB — биссектриса угла ADC.

б) Найдите AB, если известны длины диагоналей трапеции: $BD = 16$ и $AC = 10$.

17. 31 декабря 2016 года Алексей взял в банке 2 184 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Алексей переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Алексей выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x+y+z=2x^2+3y^2 \\ -x+2y+3z=a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19. На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 5.

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 24, если сначала по одному разу были написаны числа 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 и 14?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 45, если сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 53 до 158 включительно?

в) Известно, что на доске осталось ровно два числа, а сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 53 до 158 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

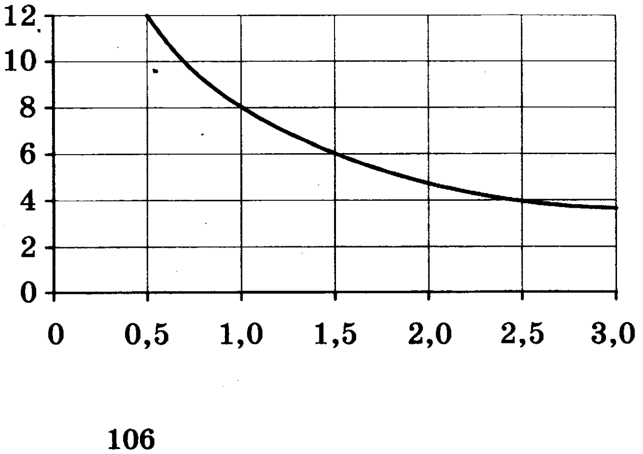
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 25

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

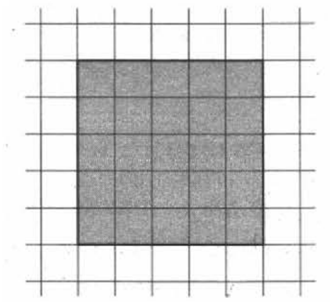
Часть 1

1. Шоколадка стоит 25 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три (одну — в подарок). Какое наибольшее количество шоколадок можно получить, потратив не более 480 рублей в воскресенье?

2. Мощность отопителя в автомобиле регулируется дополнительным сопротивлением, которое можно менять, поворачивая рукоятку в салоне машины. При этом меняется сила тока в электрической цепи электродвигателя — чем меньше сопротивление, тем больше сила тока и тем быстрее вращается мотор отопителя. На рисунке показана зависимость силы тока от величины сопротивления. На оси абсцисс откладывается сопротивление (в омах), на оси ординат — сила тока в амперах. Ток в цепи электродвигателя уменьшился с 12 до 6 ампер. На сколько омов при этом увеличилось сопротивление цепи?



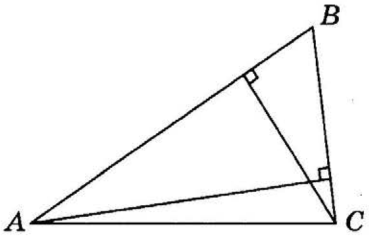
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён квадрат. Найдите радиус вписанной в него окружности.



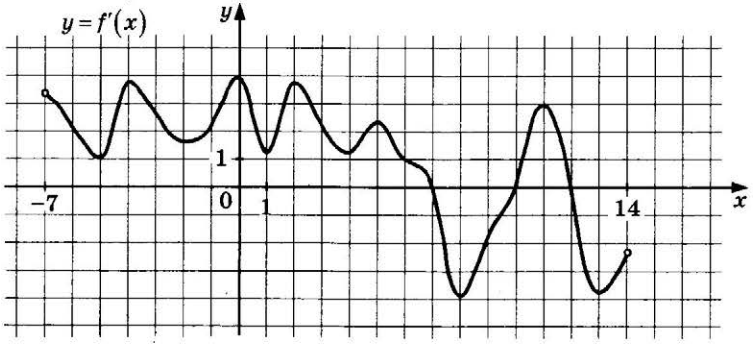
4. В небольшом магазине работают два продавца — Александр и Алексей. Каждый из них может быть занят с клиентом с вероятностью 0,5. При этом они могут быть заняты одновременно с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайно выбранный момент времени занят только Александр, а Алексей свободен.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{4x+25}{13}}=5$.

6. В треугольнике со сторонами 15 и 5 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой из этих сторон, равна 1. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?



7. На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 14)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6; 9]$.



8. Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 10. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{\log_7 81}{\log_7 3}$.

10. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m=m_0\cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 20 мг. Период его полураспада составляет 10 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 5 мг.

11. Первый и второй насосы наполняют бассейн за 10 минут, второй и третий — за 15 минут, а первый и третий — за 18 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

12. Найдите точку минимума функции $y=(3-2x)\cos x+2\sin x+4$, принадлежащую промежутку $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2-5\cos x-\cos 2x=0$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$.

14. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB=6$ и диагональю $BD=11$. Все боковые рёбра пирамиды равны 6. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E, а на ребре AS — точка F так, что $SF=BE=5$.

а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB.

б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q. Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC.

15. Решите неравенство $5^{x+2}+5^{x+1}-5^x<3^{\frac{x}{2}+1}-3^{\frac{x}{2}}-3^{\frac{x}{2}-1}$.

16. На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отложен отрезок AD, равный стороне AB. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD, пересекает сторону BC в точке M.

а) Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

б) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если площадь треугольника ABC равна 144 и известно отношение $AC : AB = 3 : 1$.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 20 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за первые 10 месяцев нужно выплатить банку 1 179 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax^2+2(a+2)x+(a+5)=0$$

имеет два корня, расстояние между которыми больше 1.

19. а) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого вторая цифра равна произведению двух других его цифр?

б) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого сумма всех цифр равна 5?

в) Найдите наименьшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 и 9. Ответ обоснуйте.

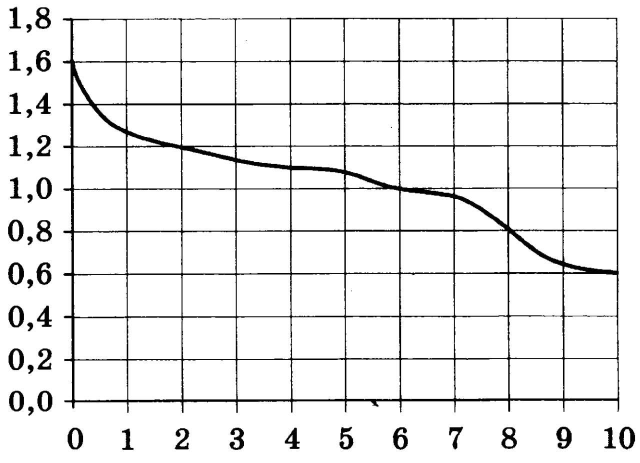
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 26

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

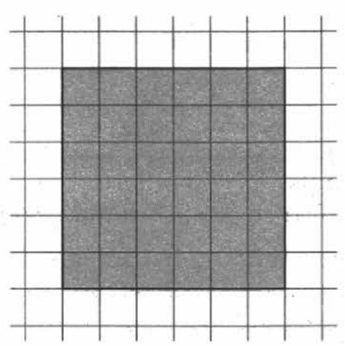
Часть 1

1. Шоколадка стоит 30 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три (одну — в подарок). Какое наибольшее количество шоколадок можно получить, потратив не более 500 рублей в воскресенье?

2. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается, и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, за сколько часов напряжение упадет с 1,2 вольт до 1 вольта.



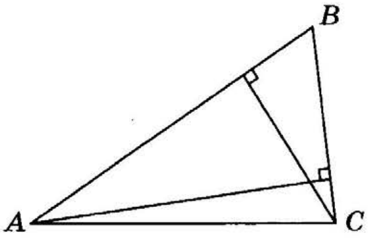
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён квадрат. Найдите радиус вписанной в него окружности.



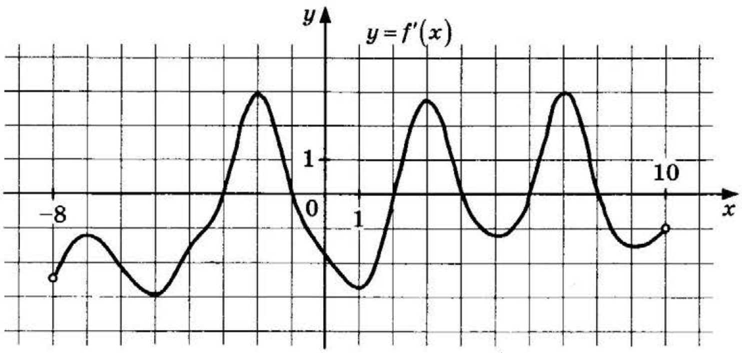
4. В небольшом магазине работают два продавца. Каждый из них может быть занят с клиентом с вероятностью 0,4. При этом они могут быть заняты одновременно с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайно выбранный момент времени оба продавца свободны.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{7x+41}{17}}=3$.

6. В треугольнике со сторонами 10 и 2 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой из этих сторон, равна 3. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?



7. На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале (−8; 10). Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку [−6; 7].



8. Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 32. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{\log_6 121}{\log_6 11}$.

10. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 80 мг. Период его полураспада составляет 15 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 10 мг.

11. Первый и второй насосы наполняют бассейн за 15 минут, второй и третий — за 21 минуту, а первый и третий — за 35 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

12. Найдите точку минимума функции $y = (4 - 5x)\cos x + 5\sin x + 17$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $3\cos 2x + 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi\right]$.

14. В основании пирамиды *SABCD* лежит прямоугольник *ABCD* со стороной $AB = 7$ и диагональю $BD = 10$. Все боковые рёбра пирамиды равны 7. На диагонали *BD* основания *ABCD* отмечена точка *E*, а на ребре *AS* — точка *F* так, что $SF = BE = 3$.

а) Докажите, что плоскость *CEF* параллельна ребру *SB*.

б) Плоскость *CEF* пересекает ребро *SD* в точке *Q*. Найдите расстояние от точки *Q* до плоскости *ABC*.

15. Решите неравенство $7^{x+2}-7^{x+1}-2\cdot 7^{x}>2^{\frac{x}{3}+1}+2^{\frac{x}{3}-1}$.

16. На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отложен отрезок AD, равный стороне AB. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD, пересекает сторону BC в точке M.

а) Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

б) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если площадь треугольника ABC равна 200 и известно отношение $AC : AB = 2 : 3$.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 18 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за первые 9 месяцев нужно выплатить банку 1 024 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax^{2}+2(a-1)x\mp(a-4)=0$$

имеет два корня, расстояние между которыми больше 3.

19. а) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого вторая цифра в 12 раз меньше произведения двух других его цифр?

б) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого сумма всех цифр равна 9?

в) Найдите наименьшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 и 9. Ответ обоснуйте.

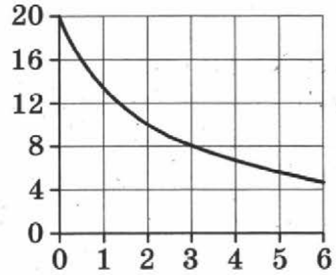
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 27

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

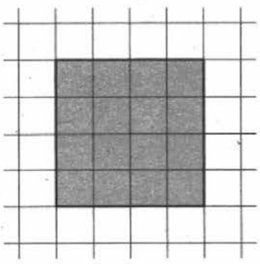
Часть 1

1. Шоколадка стоит 20 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за две шоколадки, покупатель получает три (одну — в подарок). Какое наибольшее количество шоколадок можно получить, потратив не более 210 рублей в воскресенье?

2. В ходе химической реакции количество исходного вещества (реагента), которое ещё не вступило в реакцию, со временем постепенно уменьшается. На рисунке эта зависимость представлена графиком. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента начала реакции, на оси ординат — масса оставшегося реагента, который ещё не вступил в реакцию (в граммах). Определите по графику, за сколько минут количество реагента уменьшилось с 20 граммов до 8 граммов.



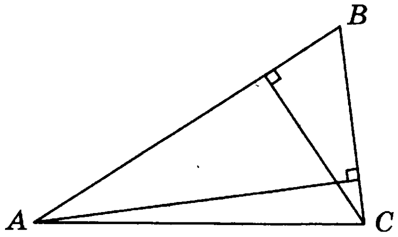
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён квадрат. Найдите радиус вписанной в него окружности.



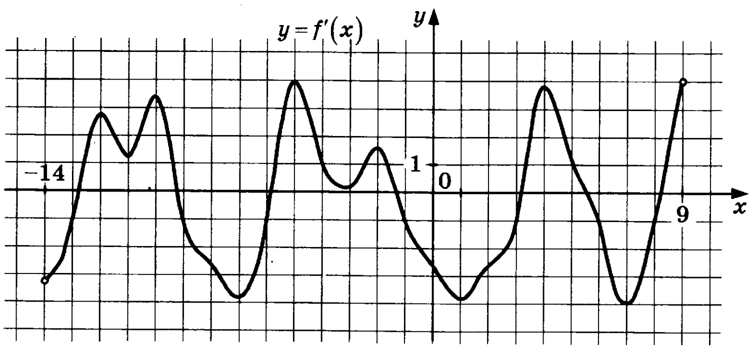
4. В небольшом магазине работают два продавца. Каждый из них может быть занят с клиентом с вероятностью 0,45. При этом они могут быть заняты одновременно с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайно выбранный момент времени оба продавца свободны.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{4x+27}{3}}=11$.

6. В треугольнике со сторонами 14 и 7 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой из этих сторон, равна 1. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?



7. На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале (−14; 9). Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку [−12; 7].



8. Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 52. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{\log_{13} 32}{\log_{13} 2}$.

10. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 156 мг. Период его полураспада составляет 8 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 39 мг.

11. Первый и второй насосы наполняют бассейн за 12 минут, второй и третий — за 15 минут, а первый и третий — за 20 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

12. Найдите точку минимума функции $y = (3 - 5x)\cos x + 5\sin x + 9$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2\sqrt{2}\cos x + 2 - \cos 2x = 0$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$.

14. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 5$ и диагональю $BD = 8$. Все боковые рёбра пирамиды равны 5. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E, а на ребре AS — точка F так, что $SF = BE = 3$.

а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB.

б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q. Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC.

15. Решите неравенство $3^{x+3} + 3^{x+2} - 3^x < 2^{\frac{x}{2}} + 2^{\frac{x}{2}-1} + 2^{\frac{x}{2}-2}$.

16. На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отложен отрезок AD, равный стороне AB. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD, пересекает сторону BC в точке M.

а) Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

б) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если площадь треугольника ABC равна 110 и известно отношение $AC : AB = 1 : 4$.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 16 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за первые 8 месяцев нужно выплатить банку 900 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax^2+2(a+1)x+(a-4)=0$$

имеет два корня, расстояние между которыми больше 2.

19. а) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого вторая цифра в 18 раз меньше произведения двух других его цифр?

б) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого сумма всех цифр равна 7?

в) Найдите наибольшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8 и 9. Ответ обоснуйте.

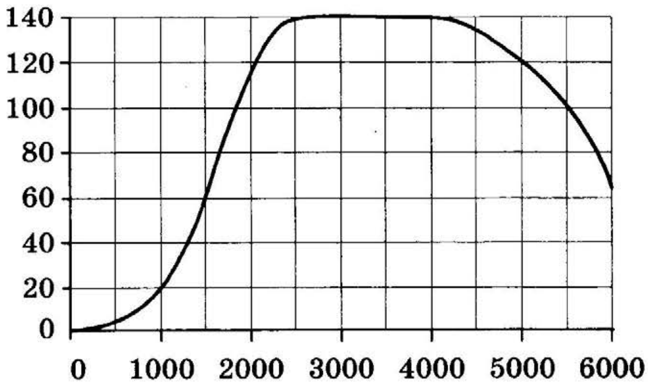
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 28

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

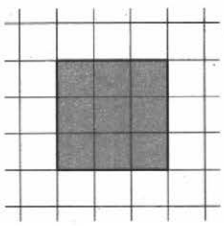
Часть 1

1. Шоколадка стоит 15 рублей. В воскресенье в супермаркете действует специальное предложение: заплатив за три шоколадки, покупатель получает четыре (одну — в подарок). Какое наибольшее количество шоколадок можно получить, потратив не более 110 рублей в воскресенье?

2. На графике изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа оборотов. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, на оси ординат — крутящий момент в Н · м. На сколько оборотов в минуту увеличилось число оборотов двигателя, если крутящий момент возрос с 20 до 60?



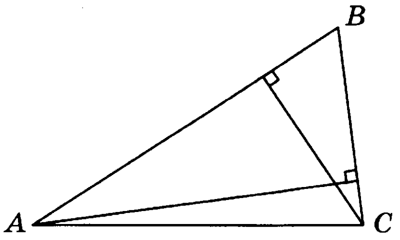
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён квадрат. Найдите радиус вписанной в него окружности.



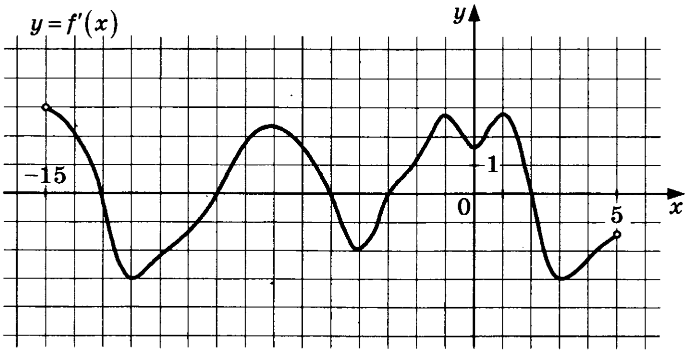
4. В небольшом магазине работают два продавца — Андрей и Иван. Каждый из них может быть занят с клиентом с вероятностью 0,45. При этом они могут быть заняты одновременно с вероятностью 0,3. Найдите вероятность того, что в случайно выбранный момент времени занят только Иван, а Андрей свободен.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{4x+40}{17}}=4$.

6. В треугольнике со сторонами 12 и 2 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой из этих сторон, равна 1. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?



7. На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале (−15; 5). Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку [−14; 4].



8. Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 38. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_{10} 64}{\log_{10} 2}$.

10. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 128 мг. Период его полураспада составляет 3 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 1 мг.

11. Первый и второй насосы наполняют бассейн за 21 минуту, второй и третий — за 28 минут, а первый и третий — за 36 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

12. Найдите точку минимума функции $y = (2-5x)\cos x + 5\sin x + 28$, принадлежащую промежутку $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2\cos 2x + 8\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - 3 = 0$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

14. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 7$ и диагональю $BD = 11$. Все боковые рёбра пирамиды равны 7. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E, а на ребре AS — точка F так, что $SF = BE = 4$.

а) Докажите, что плоскость CEF параллельна ребру SB.

б) Плоскость CEF пересекает ребро SD в точке Q. Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC.

15. Решите неравенство $5^{x+3}+5^{x+1}+2\cdot 5^{x}<2^{\frac{x}{4}+6}+2^{\frac{x}{4}+1}$.

16. На продолжении стороны AC за вершину A треугольника ABC отложен отрезок AD, равный стороне AB. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD, пересекает сторону BC в точке M.

а) Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

б) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если площадь треугольника ABC равна 224 и известно отношение $AC : AB = 4 : 3$.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 14 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за первые 7 месяцев нужно выплатить банку 1 080 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax^2+2(a-2)x+(a+3)=0$$

имеет два корня, расстояние между которыми больше 3.

19. а) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого вторая цифра в 21 раз меньше произведения двух других его цифр?

б) Существует ли такое кратное 11 трёхзначное число, у которого сумма всех цифр равна 5?

в) Найдите наименьшее кратное 11 восьмизначное число, среди цифр которого по одному разу встречаются цифры 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Ответ обоснуйте.

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 29

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1

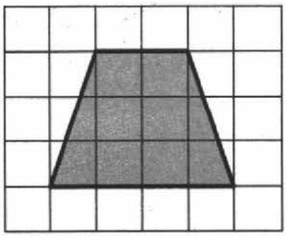
1. Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 11% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,32 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку весом 5 кг в течение суток?

2

2. На рисунке жирными точками показана средняя температура воздуха в Махачкале во все дни с 1 по 13 апреля 2014 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите, какого числа средняя температура в Махачкале была наименьшей за данный период.

3

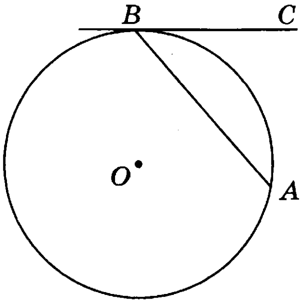
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



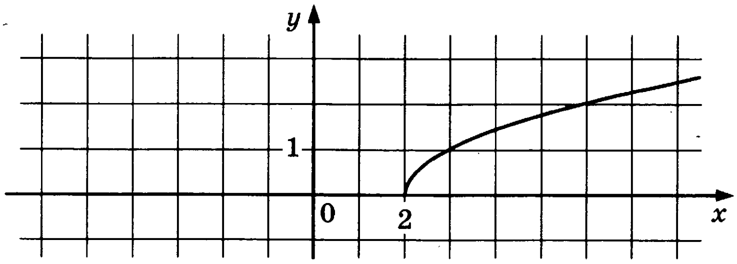
4. Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не попадет в неё. Вероятность попадания при каждом отдельном выстреле равна $p = 0{,}8$. Найдите вероятность того, что стрелку потребуется больше трёх попыток.

5. Найдите корень уравнения $2^{\log_{16}(9x+4)} = 5$.

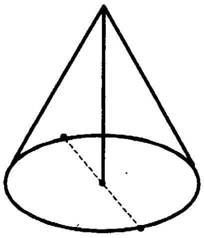
6. Хорда AB стягивает дугу окружности в 40°. Найдите угол ABC между этой хордой и касательной к окружности, проведённой через точку B. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через точку $(-6; -1)$, касается этого графика в точке с абсциссой 6. Найдите $f'(6)$.



8. Высота конуса равна 30, а длина образующей — 34. Найдите диаметр основания конуса.



Часть 2

9. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ и $\alpha \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

10. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность излучения P (в ваттах) нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, площадь поверхности S измеряется в квадратных метрах, а температура T — в кельвинах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{18} \cdot 10^{21}$ м^2, а излучаемая ею мощность P равна $4{,}104 \cdot 10^{27}$ Вт. Определите температуру этой звезды. Ответ дайте в кельвинах.

11. Первая труба наполняет бак объёмом 600 литров, а вторая труба — бак объёмом 900 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 3 л воды больше, чем другая. Трубы начали наполнять баки одновременно. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 5\cos x - 6x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};\ 0\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $6\sin^2 x + 7\cos x - 7 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi;\ -\pi]$.

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания $AB = 8\sqrt{3}$, а боковое ребро $AA_1 = 5$.

а) Найдите длину отрезка A_1K, где K — середина ребра BC.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями BCA_1 и BB_1C_1.

15. Решите неравенство $9^{x-2} - 37 \cdot 3^{x-3} + 30 \le 0$.

16. В параллелограмм вписана окружность.

а) Докажите, что этот параллелограмм — ромб.

б) Окружность, касающаяся стороны ромба, делит её на отрезки, равные 3 и 2. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами ромба.

17. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 21 квадратный метр и номера «люкс» площадью 49 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1099 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 4500 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\log_{0,5}\left(x^2\right)-a\right|-\left|\log_{0,5}x+2a\right|=\left(\log_{0,5}x\right)^2$ имеет хотя бы одно решение, меньшее 2.

19. Известно, что a, b, c и d — попарно различные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{7}{19}$?

б) Может ли дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$, если $a>3b$ и $c>6d$?

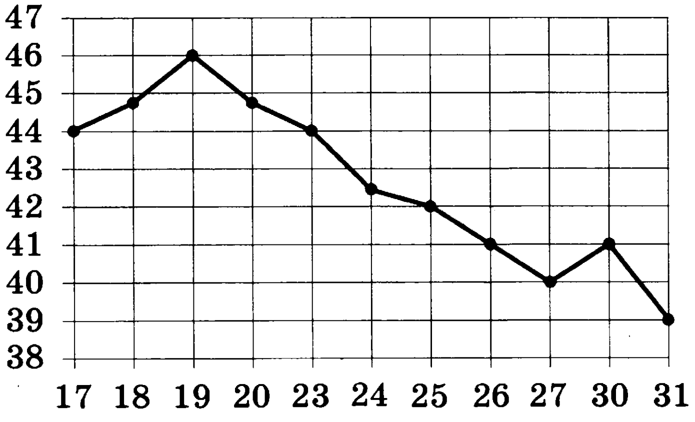
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 30

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Летом килограмм черешни стоит 80 рублей. Мама купила 1 кг 800 г черешни. Сколько рублей сдачи она должна получить с 500 рублей?

2. На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 17 по 31 августа 2004 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода цена нефти на момент закрытия торгов была меньше 43 долларов США за баррель.

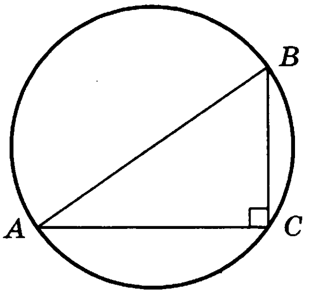


3. Найдите площадь квадрата, вершины которого имеют координаты (2; 5), (−2; 9), (−6; 5), (−2; 1).

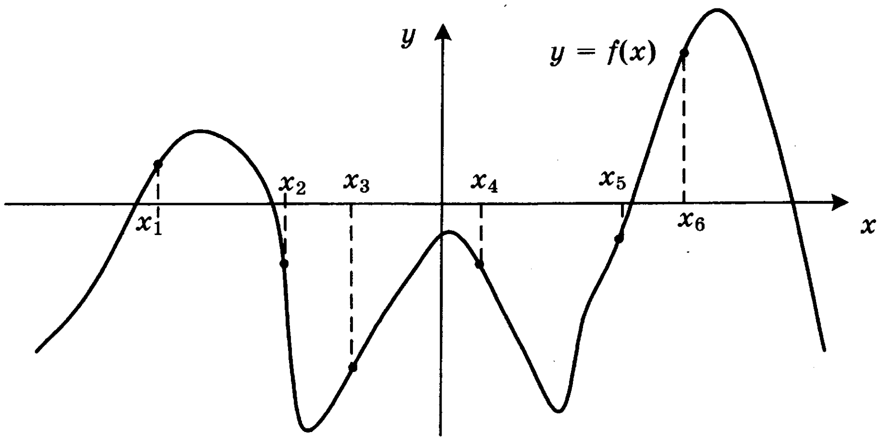
4. Двое играют в кости — они по разу бросают игральный кубик. Выигрывает тот, у кого больше очков. Если выпадает поровну, то наступает ничья. Первый бросил кубик, и у него выпало 4 очка. Найдите вероятность того, что он выиграет.

5. Найдите корень уравнения $(x + 11)^2 = 44x$.

6. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 4. Найдите гипотенузу этого треугольника.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите среди точек x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6 те точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответ запишите количество найденных точек.



8. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, D, A_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 5$, $AD = 6$, $AA_1 = 2$.

Часть 2

9. Найдите $\dfrac{5\sin 4\alpha}{3\cos 2\alpha}$, если $\sin 2\alpha = 0,6$.

10. Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полёта составит 3,2 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 16$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

11. Города А, В и С соединены прямолинейным шоссе, причём город В расположен между городами А и С. Из города А в сторону города С выехал легковой автомобиль, и одновременно с ним из города В в сторону города С выехал грузовик. Через сколько часов после выезда легковой автомобиль догонит грузовик, если скорость легкового автомобиля на 28 км/ч больше скорости грузовика, а расстояние между городами А и В равно 112 км?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = (21 - x)e^{x-20}$ на отрезке $[19;\ 21]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $5\cos^2 x - 12\cos x + 4 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$.

14. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребёр $AA_1 = 15$, $AB = 12$, $AD = 8$. Точка K — середина ребра C_1D_1, а точка L делит ребро BB_1 в отношении 4 : 1, считая от вершины B_1.

а) Найдите отношение, в котором плоскость LKA_1 делит ребро CC_1, считая от вершины C_1.

б) Найдите косинус угла между плоскостями LKA_1 и $A_1B_1C_1$.

15. Решите неравенство $\sqrt{x+4,2} + \dfrac{1}{\sqrt{x+4,2}} \geq \dfrac{5}{2}$.

16. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 4 и 1.

17. 31 декабря 2014 года Евгений взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Евгений переводит очередной транш. Евгений выплатил кредит за два транша, переведя в первый раз 540 тыс. рублей, во второй 649,6 тыс. рублей. Найдите a.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\log_5\left(x^2\right)-a\right|-\left|\log_5 x+2a\right|=\left(\log_5 x\right)^2$$

имеет ровно четыре решения.

19. В результате опроса выяснилось, что примерно 58% опрошенных предпочитают искусственную ёлку натуральной (число 58 получено с помощью округления до целого числа). Из этого же опроса последовало, что примерно 42% респондентов никогда не отмечали Новый год не дома.

а) Могло ли в опросе участвовать ровно 40 человек?

б) Могло ли в опросе участвовать ровно 48 человек?

в) Какое наименьшее количество человек могло участвовать в этом опросе?

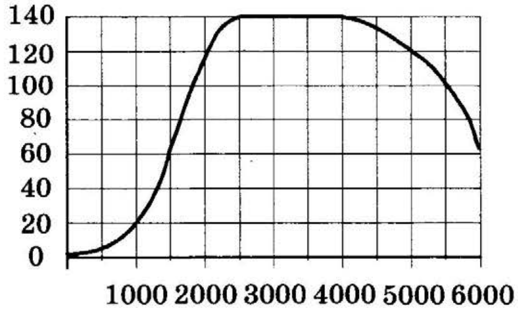
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 31

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

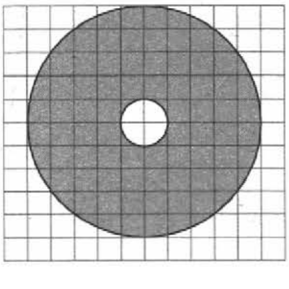
Часть 1

1. Установка двух счётчиков воды (холодной и горячей) стоит 3700 рублей. До установки счётчиков за воду платили 900 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата воды стала составлять 400 рублей. Через какое наименьшее количество месяцев экономия по оплате воды превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?

2. На графике изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, на оси ординат — крутящий момент в Н · м. На сколько Н · м увеличится крутящий момент при увеличении числа оборотов с 1500 об/мин до 2500 об/мин?



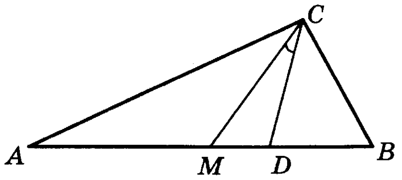
3. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 12. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



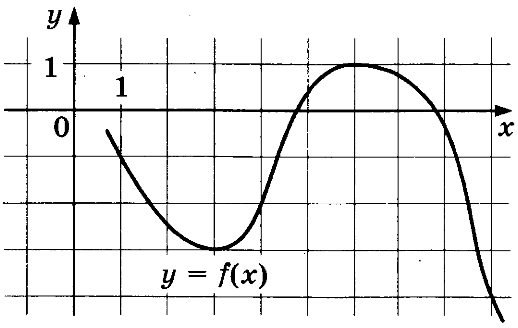
4. В группе туристов 10 человек. С помощью жребия они выбирают двух человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист А., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

5. Найдите корень уравнения $\log_3(-5-x)=1$.

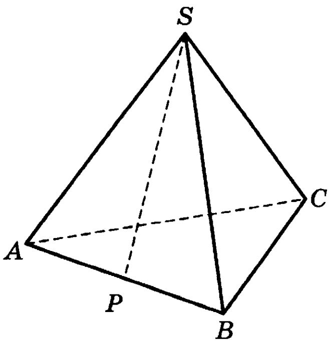
6. Острые углы прямоугольного треугольника равны 63° и 27°. Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Найдите наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке [1; 9].



8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка P — середина ребра AB, S — вершина. Известно, что $SP = 4$, а площадь боковой поверхности равна 24. Найдите длину отрезка BC.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $-50\,\mathrm{tg}\,27^\circ \cdot \mathrm{tg}\,117^\circ$.

10. К источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 155\,\text{В}$ и внутренним сопротивлением $r = 0{,}5$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, даётся формулой $U = \dfrac{\mathcal{E}R}{R+r}$. При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет 150 В? Ответ дайте в омах.

11. Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 16 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолете со скоростью 496 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{4}{3}x\sqrt{x} - 6x + 15$ на отрезке $[7;\ 33]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x}{\cos\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right)} = 1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\ -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

14. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Докажите, что прямая B_1D перпендикулярна плоскости A_1BC_1.

б) Найдите угол между плоскостями AB_1C_1 и A_1B_1C.

15. Решите неравенство $\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \le 0$.

16. Отрезок, соединяющий середины M и N оснований BC и AD соответственно трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 10. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB, основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 15 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что восьмая выплата составила 108 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

18. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x-2a+3)^2+(y-a)^2=2,25;\\(x+3)^2+(y-a)^2=a^2+2a+1\end{cases}$$

имеет единственное решение.

19. Красный карандаш стоит 18 рублей, синий — 14 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 499 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше, чем на шесть.

а) Можно ли купить 30 карандашей?

б) Можно ли купить 33 карандаша?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить?

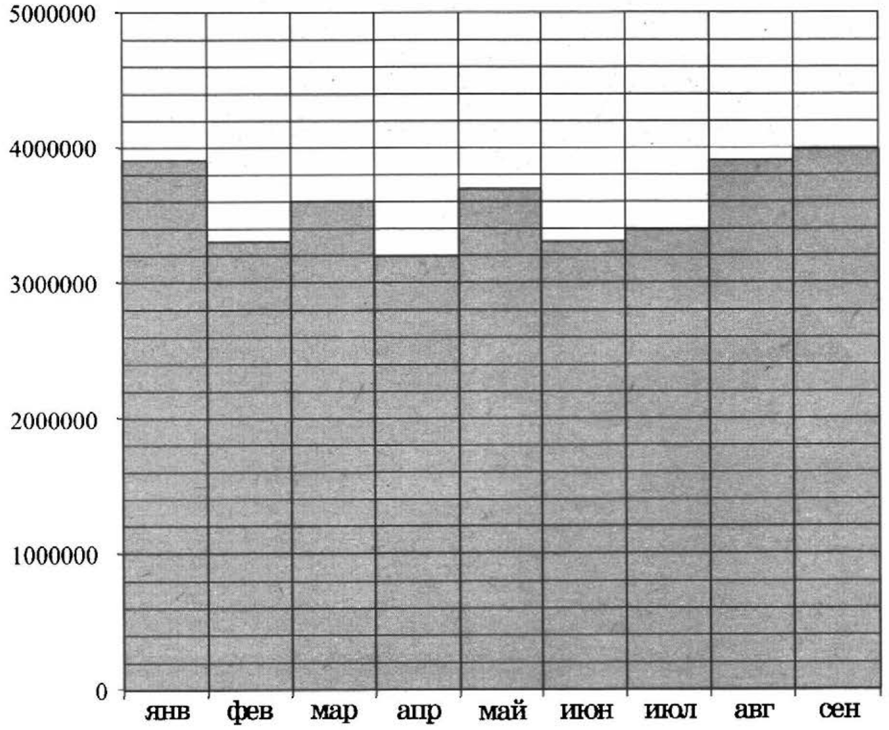
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 32

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

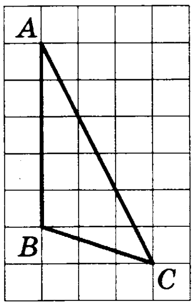
Часть 1

1. В туристический поход отправляется группа из 18 человек. В походе на одного человека приходится 60 граммов гречки на прием пищи. Планируется 7 раз готовить гречку. Сколько килограммовых пачек необходимо купить, чтобы гречки хватило?

2. На диаграмме показано число запросов со словом КИНО, сделанных на некотором поисковом сайте во все месяцы с января по сентябрь 2010 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — число запросов за данный месяц. Определите по диаграмме наибольшее месячное число запросов со словом КИНО в указанный период.



3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его высоты, опущенной на сторону AB.

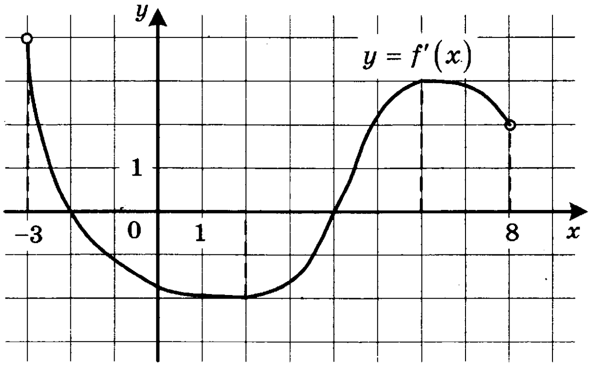


4. Перед началом матча по футболу судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первая владеть мячом. Команда «Белые» по очереди играет с командами «Красные», «Синие» и «Зелёные». Найдите вероятность того, что ровно в двух матчах из трёх право первой владеть мячом получит команда «Белые».

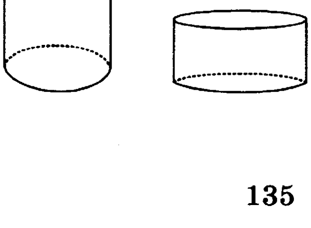
5. Найдите корень уравнения $\frac{1}{4x+9}=\frac{1}{6x+12}$.

6. В треугольнике ABC AD — биссектриса, угол C равен 21°, угол CAD равен 30°. Найдите угол B. Ответ дайте в градусах.

7. На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3;8)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.



8. Одна цилиндрическая кружка вдвое выше второй, зато вторая втрое шире. Найдите отношение объёма второй кружки к объёму первой.



Часть 2

9. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{29}}{29}$ и $\alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

10. Наблюдатель находится на высоте h, выраженной в метрах. Расстояние от наблюдателя до наблюдаемой им линии горизонта, выраженное в километрах, вычисляется по формуле $l = \sqrt{\dfrac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. На какой высоте находится наблюдатель, если он видит линию горизонта на расстоянии 24 километра? Ответ дайте в метрах.

11. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 14% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 7 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 8x^2 + 16x + 23$ на отрезке $[-13; -3]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $7\sin^2 x + 8\cos x - 8 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

14. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 10$, $AC = 16$. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P — середина ребра BB_1.

а) Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1B_1C_1$ и ACP.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости PAC.

15. Решите неравенство

$$\log_7 \frac{3}{x} + \log_7\left(x^2 - 7x + 11\right) \le \log_7\left(x^2 - 7x + \frac{3}{x} + 10\right).$$

16. Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M. Продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q, причём точка P лежит между точками D и Q. Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM.

а) Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$.

б) Известно, что $CM = 17$ и $CD = 25$. Найдите сторону AD.

16

17. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 300 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 1 кг никеля.

Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

17

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|2^{1-x} - a\right| - \left|\frac{1}{2^x} + 2a\right| = 4^{-x}$$

имеет единственное решение.

18

19. В турнире по шахматам принимают участие мальчики и девочки. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. По правилам турнира каждый участник играет с каждым другим дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если в турнире принимают участие три мальчика и две девочки?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если всего участников десять?

в) Сколько девочек могло принимать участие в турнире, если известно, что их в 7 раз меньше, чем мальчиков, и что мальчики набрали в сумме ровно в три раза больше очков, чем девочки?

19

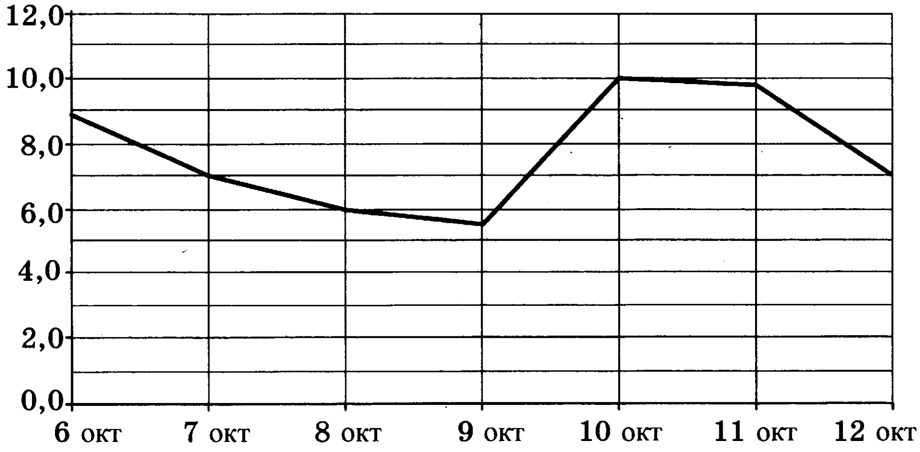
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 33

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

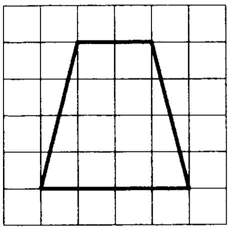
Часть 1

1. Поезд Москва—Ижевск отправляется в 17:41, а прибывает в 10:41 на следующий день (время московское). Сколько часов поезд находится в пути?

2. На рисунке изображён график среднесуточной температуры в г. Саратове в период с 6 по 12 октября 1969 г. На оси абсцисс откладываются числа, на оси ординат — температура в градусах Цельсия. Определите по графику, какая была средняя температура 8 октября. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



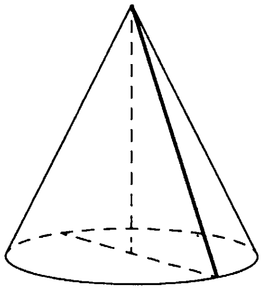
4. В каждой пятой банке кофе согласно условиям акции есть приз. Призы распределены по банкам случайно. Галя покупает банку кофе в надежде выиграть приз. Найдите вероятность того, что Галя не найдёт приз в своей банке.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{5}{7x-49}}=\frac{1}{7}$.

6. В прямоугольном треугольнике высота, проведённая к гипотенузе, делит прямой угол на два угла, один из которых равен 56°. Найдите меньший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах.

7. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=t^2+3t+23$, где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 9$ с.

8. Высота конуса равна 30, а диаметр основания равен 32. Найдите образующую конуса.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{4\sin 17^\circ \cos 17^\circ}{\cos 56^\circ}$.

10. Для одного из предприятий-монополистов зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задаётся формулой: $q = 100 - 10p$. Определите наименьшую цену p (в тыс. руб.), при которой выручка предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит 210 тыс. руб.

11. Заказ на 140 деталей первый рабочий выполняет на 4 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 4 детали больше?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 6e^{x} + 7$ на отрезке [0; 2].

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\dfrac{3\operatorname{ctg}^2 x + 4\operatorname{ctg} x}{5\cos^2 x - 4\cos x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2}; 5\pi\right]$.

14. В пирамиде $SABC$ известны длины рёбер $AB = AC = SB = SC = 10$, $BC = SA = 12$. Точка K — середина ребра BC.

а) Докажите, что плоскость SAK перпендикулярна плоскости ABC.

б) Найдите расстояние между прямыми SA и BC.

15. Решите неравенство $\log^2_{|x|}(x^2) + \log_2(x^2) \le 8$.

16. На отрезке BD взята точка C. Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD.

а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.

б) Известно, что $\cos\angle ABC = \dfrac{1}{6}$. В каком отношении прямая DL делит сторону AB?

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение второго года кредитования нужно вернуть банку 958,5 тыс. рублей. Какую сумму нужно выплатить банку за первые 12 месяцев?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$27x^6+(a-2x)^3+9x^2+3a=6x$$

не имеет корней.

19. Пусть q — наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $7x=16y-73$.

а) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 204?

б) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$.

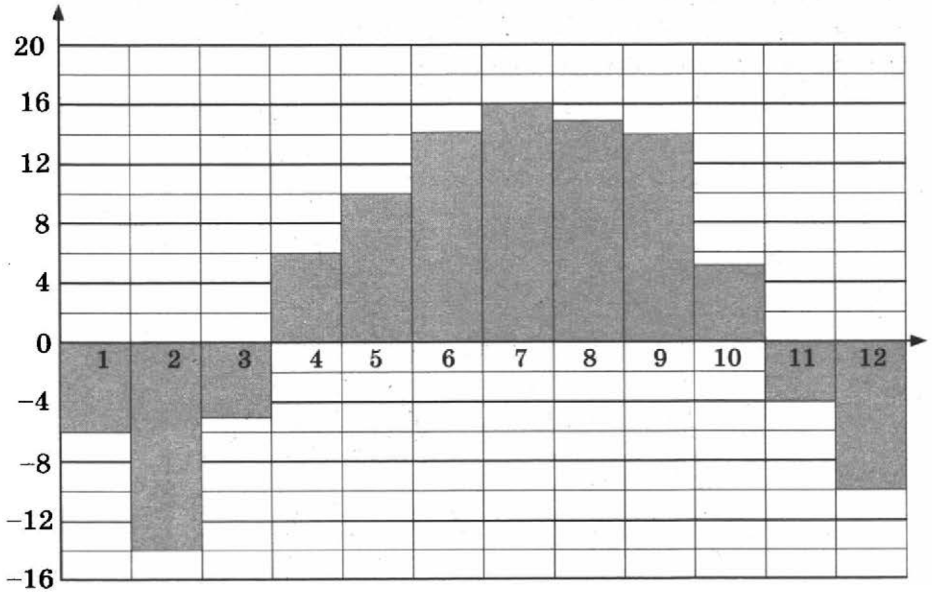
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 34

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

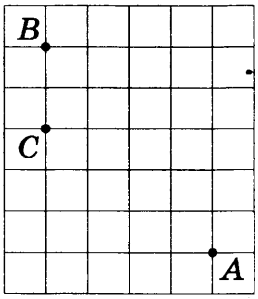
Часть 1

1. Стоимость полугодовой подписки на журнал составляет 590 рублей, а стоимость одного номера журнала — 26 рублей. За полгода Аня купила 25 номеров журнала. На сколько рублей меньше она бы потратила, если бы подписалась на журнал?

2. На диаграмме показана средняя температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются номера месяцев, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной средней температурой в 1994 году в Нижнем Новгороде.



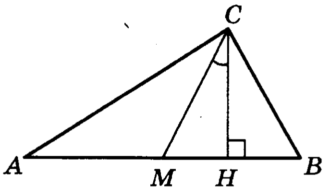
3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены точки A, B и C. Найдите расстояние от точки A до прямой BC.



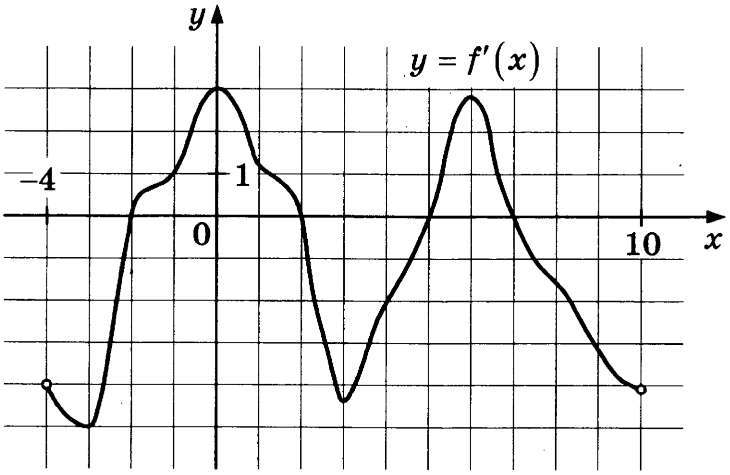
4. В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно три раза.

5. Найдите корень уравнения $\log_3(2-x)=2$.

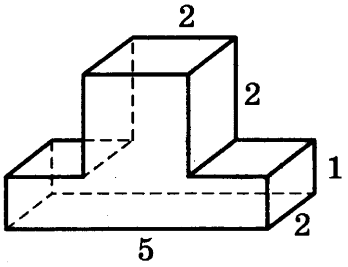
6. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 28°. Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4;\ 10)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x + 16$ или совпадает с ней.



8. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{4\cos 146^\circ}{\cos 34^\circ}$.

10. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где P — мощность излучения звезды (в ваттах), $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T — температура (в кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $S = \frac{1}{256} \cdot 10^{21}\ \text{м}^2$, а мощность её излучения равна $5{,}7 \cdot 10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в кельвинах.

11. Игорь и Паша могут покрасить забор за 30 часов. Паша и Володя могут покрасить этот же забор за 36 часов, а Володя и Игорь — за 45 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроём?

12. Найдите точку минимума функции $y = x^2 - 14x + 20\ln x - 6$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $2\sin^4 x + 3\cos 2x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$.

14. Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144.

а) Докажите, что угол между плоскостью SAC и плоскостью, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания, равен $45°$.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью SAC.

15. Решите неравенство $7^{\ln\left(x^2-2x\right)} \le (2-x)^{\ln 7}$.

16. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков MA, MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

17. 1 января 2015 года Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Александр Сергеевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс. рублей?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$$

имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу (4; 19).

19. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

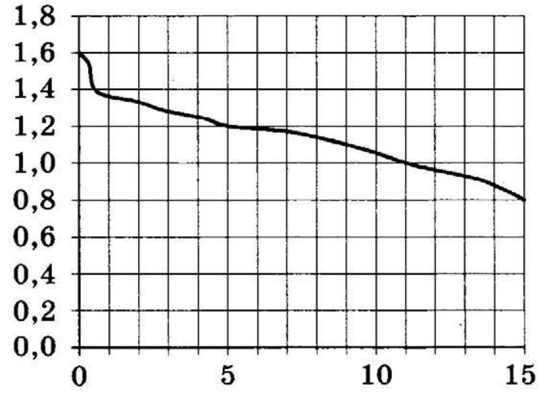
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 35

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

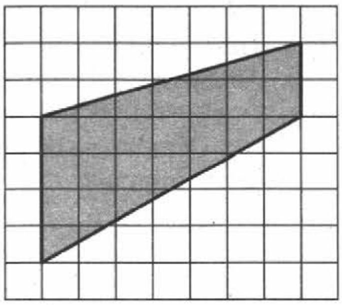
Часть 1

1. **Флакон шампуня стоит 190 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35%?**

2. **При работе фонарика батарейка постепенно разряжается, и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечается время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, какое напряжение будет в цепи через 5 часов работы фонарика. Ответ дайте в вольтах.**



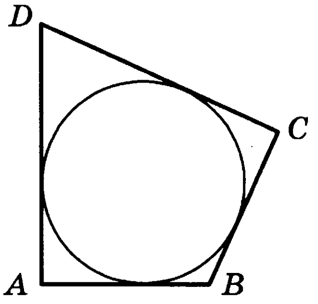
3. **На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите её площадь.**



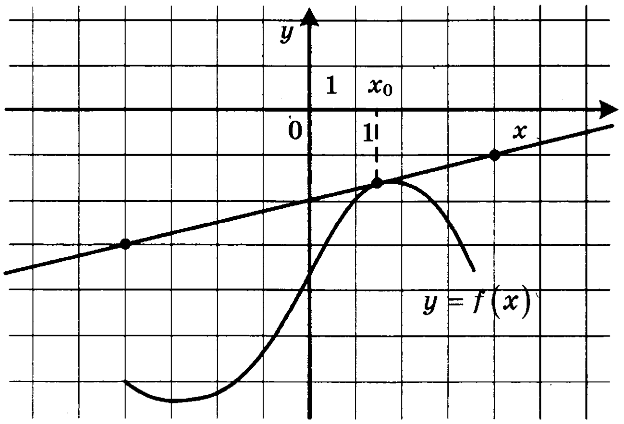
4. В корабельной артиллерии применяется система управления огнём. Орудие делает выстрел по цели. Если цель не поражена, делается ещё один выстрел. Третий выстрел не делается. Известно, что вероятность поражения цели каждым отдельным выстрелом равна 0,8. Найдите вероятность того, что цель будет поражена.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{1-6x}=7$.

6. В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 6$, $BC = 4$ и $CD = 16$. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.



7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 78. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Часть 2

9. Найдите значение выражения $\frac{6\cos 207^\circ}{\cos 27^\circ}$.

10. Независимое агентство намерено ввести рейтинг новостных интернет-изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op, объективности Tr публикаций, а также качества Q сайта. Каждый отдельный показатель — целое число от -2 до 2.

Составители рейтинга считают, что объективность ценится вдвое, а информативность публикаций — втрое дороже, чем оперативность и качество сайта. Таким образом, формула приняла вид

$$R = \frac{3In + Op + 2Tr + Q}{A}.$$

Найдите, каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило бы рейтинг 1.

11. Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 44 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, на 21 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 6x^2 + 19$ на отрезке $[-6; -2]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\left(16^{\sin x}\right)^{\cos x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{3}\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

14. Площадь основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 64, а площадь сечения пирамиды плоскостью SAC равна $32\sqrt{3}$.

а) Докажите, что угол между плоскостью основания пирамиды и боковым ребром равен 60°.

б) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

15. Решите неравенство $\frac{3}{\left(2^{2-x^2}-1\right)^2}-\frac{4}{2^{2-x^2}-1}+1\geq 0$.

16. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков MA, MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.

17. 31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14,5%), затем Дмитрий переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x-a^2+4a-2|+|x-a^2+2a+3|=2a-5$$

имеет хотя бы один корень на отрезке [5; 23].

19. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

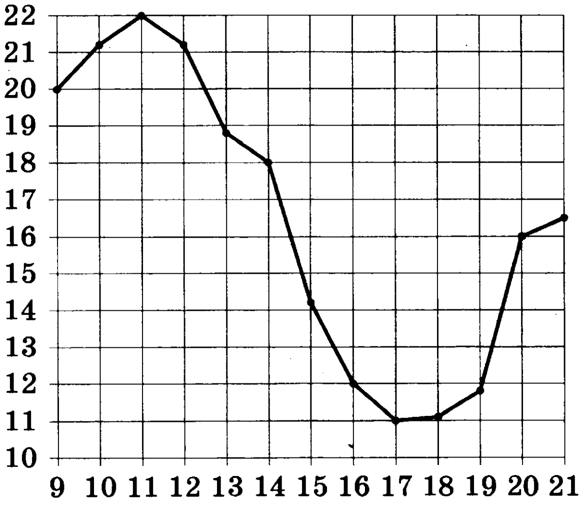
ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 36

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

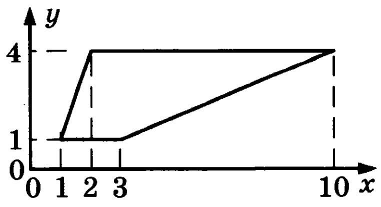
Часть 1

1. Для ремонта квартиры купили 42 рулона обоев. Какое наименьшее количество пачек обойного клея нужно купить, если одна пачка клея рассчитана на 8 рулонов?

2. На рисунке жирными точками показана средняя температура воздуха в Кемерове во все дни с 9 по 21 августа 2012 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — средняя температура в градусах Цельсия. Для наглядности точки на рисунке соединены линией. Определите, какого числа средняя температура в Кемерове была наименьшей за данный период.



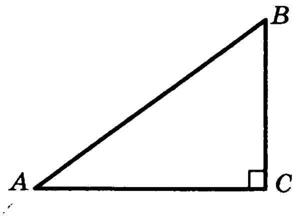
3. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (1; 1), (2; 4), (10; 4), (3; 1).



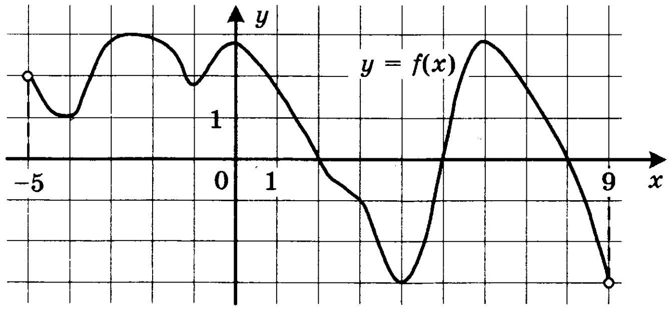
4. В случайном эксперименте бросают две игральные кости (кубика). Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

5. Найдите корень уравнения $32^{x-3} = \frac{1}{2}$.

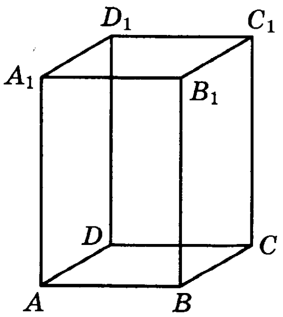
6. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $\cos A = \frac{4}{5}$. Найдите $\sin B$.



7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 9)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



8. Диагональ правильной четырёхугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 30°. Боковое ребро равно 6. Найдите диагональ призмы.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{5}$.

10. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 3\cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 5\cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 9$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC\log_2\frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1{,}1\ \frac{\text{с}}{\text{Ом}\cdot\text{Ф}}$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 33 секунды. Ответ дайте в кВ (киловольтах).

11. Первая труба наполняет бак объёмом 600 литров, а вторая труба — бак объёмом 900 литров. Известно, что одна из труб пропускает в минуту на 3 л воды больше, чем другая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если баки были наполнены за одно и то же время?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 5e^{x} - 2$ на отрезке $[-2;1]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\frac{2\cos x-\sqrt{3}}{\sqrt{7\sin x}} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.

14. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Расстояние между этими хордами равно $\sqrt{730}$.

а) Докажите, что центры оснований цилиндра лежат по разные стороны от этой плоскости.

б) Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

15. Решите неравенство $2^x + 3 \cdot 2^{-x} \le 4$.

16. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина гипотенузы AB, H — точка пересечения прямых CM и DK.

а) Докажите, что прямые CM и DK перпендикулярны.

б) Найдите MH, если известно, что катеты треугольника ABC равны 30 и 40.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на сумму 2,4 млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму нужно выплатить банку за первые 12 месяцев?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 + 7|x + 1| + 5\sqrt{x^2 + 2x + 5} = 2a + 3|x - 4a + 1|$$

имеет хотя бы один корень.

19. Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел −1, 2, 4, −6, 7, −8, −10, 12. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел −1, 2, 4, −6, 7, −8, −10, 12. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

ГЛАВА II. ЗАДАНИЯ ЧАСТИ 2

УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ

1. Рациональные уравнения и неравенства

Решите уравнения

1.1. $x^2 = 9$.

1.2. $(x^2 - 2x + 1)^2 = 1$.

1.3. $(x+1)^2 = (2x+5)^2$.

1.4. $2x^2 - 7x + 5 = 0$.

1.5. $3x^2 - 7x + 5 = 0$.

1.6. $x^2 - 2011x + 2010 = 0$.

1.7. $x^2 - 2010x - 2011 = 0$.

1.8. $2x^4 - 7x^2 + 5 = 0$.

1.9. $x^4 + x^2 - 12 = 0$.

1.10. $3x^6 + 7x^3 - 6 = 0$.

1.11. $(x-1)^4 - 8(x-1)^2 - 9 = 0$.

1.12. $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 0$.

1.13. $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + x - 6} = 0$

1.14. $\frac{x^2 + x}{2x^2 + 2x} = \frac{x^2 + x}{x^2 + 3x}$.

1.15. $\frac{2x^2 + x + 2}{4x^2 + 5x - 14} = \frac{2x^2 + x + 6}{4x^2 + 5x - 10}$.

1.16. $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) = 24$.

1.17. $(x+4)(x+5)(x+6)(x+7) = 1680$.

1.18. $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{48}{(x-1)^2} = 10\left(\frac{x-1}{3} - \frac{4}{x-1}\right)$.

Решите неравенства

1.19. $2x^2 - 7x + 5 \le 0$.

1.20. $3x^2 + 7x - 6 > 0$.

1.21. $x^2 - 2011x + 2010 < 0$.

1.22. $x^2 + 2012x + 2011 \ge 0$.

1.23. $2x^2 - 6x + 5 \ge 0$.

1.24. $3x^2 - 9x + 7 \le 0$.

1.25. $4x^2 - 12x + 9 \le 0$.

1.26. $2x^4 - 7x^2 + 5 < 0$.

1.27. $x^4 + x^2 - 12 \le 0$.

1.28. $3x^6 + 7x^3 - 6 > 0$.

1.29. $\frac{5x + 4}{3x - 1} < 0$.

1.30. $\frac{2x + 3}{3x + 5} > 0$.

1.31. $(x-1)(3-x)(x-2)^2 > 0$.

1.32. $\frac{(x-2)(x+1)^2}{-x} < 0$.

1.33. $\frac{x}{x^2 + 3x - 4} < 0$.

1.34. $\frac{(x+1)x^2}{5x - x^2} \ge 0$.

1.35. $\dfrac{x^2+1}{x-1-x^2}<0$.

1.36. $\dfrac{x^2-8x+15}{x^2+x+1}\ge 0$.

1.37. $\dfrac{3x^2+1}{x^2+5x+6}\ge 0$.

1.38. $\dfrac{2x^2+21x+40}{x^2+3}\ge 0$.

1.39. $\dfrac{x^2+14x+49}{2x^2-x-1}>0$.

1.40. $\dfrac{x^4-3x^3+2x^2}{x^2-x-30}>0$.

1.41. $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-5x-6}<0$.

1.42. $\dfrac{x^2-10x+25}{5-4x-x^2}\ge 0$.

1.43. $\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-6x+9}\ge 0$.

1.44. $\dfrac{(2-(x+1)^2)(x-4)^2}{x(x^2-x-6)}\ge 0$.

1.45. $\dfrac{1}{2-x}\le 2$.

1.46. $\dfrac{x-1}{x+3}>2$.

1.47. $\dfrac{5x+1}{x^2+3}>-1$.

1.48. $\dfrac{1}{x+2}<\dfrac{3}{x-3}$.

1.49. $\dfrac{1-x}{(x+1)^2}<1$.

1.50. $x+\dfrac{60}{x}\ge 17$.

1.51. $\dfrac{x^2+1}{x}<\dfrac{1}{x}+1$.

1.52. $\dfrac{x-1}{x+1}<x$.

1.53. $x\ge\dfrac{6}{x+5}$.

1.54. $\dfrac{x+6}{x-6}+\dfrac{3x-2}{2}\ge 0$.

1.55. $2+\dfrac{3}{x}>\dfrac{2}{x-1}$.

1.56. $\dfrac{4x}{x+3}>x+1$.

1.57. $\dfrac{2x^2+3x-459}{x^2+1}>1$.

1.58. $\dfrac{3}{2-x^2}\le 1$.

1.59. $\dfrac{1}{x}<\dfrac{x^2+1}{x}+1$.

1.60. $\dfrac{12}{x^2}+\dfrac{7}{x}+1<0$.

1.61. $\dfrac{9}{(x+2)^2}\ge 1$.

1.62. $(x-1)^4-15(x-1)^2-16>0$.

1.63. $\dfrac{x^2+3x+24}{x^2+3x+3}<4$.

1.64. $-2<\dfrac{x^2+2}{1-x^2}$.

1.65. $\dfrac{3x-2}{x^2+6x}>\dfrac{1}{2}$.

1.66. $\dfrac{5+2x}{3x^2+2x-16}<1$.

1.67. $\dfrac{1}{x^2+5x+6}\ge\dfrac{1}{2}$.

1.68. $\dfrac{1}{x^2-8x-9}\ge\dfrac{1}{3x^2+5x+2}$.

1.69. $\frac{19+33x}{7x^2+11x+4} > 2$.

1.70. $\frac{4}{x}+\frac{2}{2-x} < 1$.

1.71. $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x} > \frac{1}{x+1}$.

1.72. $\frac{7}{x(x+1)}+\frac{9}{x}+1 < 0$.

1.73. $\frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(x-1)(x-2)(x-3)} > 1$.

1.74. $(x^2-3x+1)(x^2-3x-3) \geq 5$.

1.75. $(x^2+2x)(2x+2)-9\cdot\frac{2x+2}{x^2-2} \geq 0$.

1.76. $\frac{1}{x+9}+\frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{x}$.

1.77. $\frac{7}{x^2+5x+6}-\frac{9}{x+3}+1 \leq 0$.

1.78. $\frac{\frac{1}{x}-1}{1-\frac{1}{x-6}} \geq 0$.

1.79. $-2 < \frac{x^2+2}{1-x^2}\,\frac{3}{x-1} < 1$.

1.80. $\left(\frac{x}{2}+\frac{5}{8}-\frac{15}{88+32x}\right)^2 \geq 1$.

2. Иррациональные уравнения и неравенства

Решите уравнения

2.1. $(x^2-1)\sqrt{5x-1}=0$.

2.2. $\sqrt{8-3x^2}=1$.

2.3. $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x+4}=0$.

2.4. $\sqrt{x^2-9}=\sqrt{x-3}$.

2.5. $\sqrt{12-x}=x$.

2.6. $x-\sqrt{x-1}=3$.

2.7. $\sqrt{7+x}+x+1=0$.

2.8. $\sqrt{4+4x+x^2}+x=4$.

2.9. $\sqrt{2x^2+21x+4}=2+11x$.

2.10. $\sqrt{3x^2+25x+51}=7+2x$.

2.11. $\frac{\sqrt{2x+1}+1}{x}=1$.

2.12. $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-6=0$.

2.13. $\sqrt{3-x}+\frac{4}{\sqrt{3-x}+3}=2$.

2.14. $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{3}{2}$.

2.15. $2x^2-3x-\sqrt{2x^2-3x+9}+3=0$.

2.16. $\sqrt{1-3x}-\sqrt{4-x}=1$.

2.17. $\sqrt{4+x}-\sqrt{5-x}=3$.

2.18. $\sqrt{13-4x}=\sqrt{12-3x}-\sqrt{1-x}$.

2.19. $\sqrt{x^4+2x-5}=1+x$.

2.20. $\sqrt{13-x}-\sqrt{x-3}=\sqrt{x}$.

2.21. $\sqrt{x}-1=\sqrt{x-\sqrt{x+7}-1}$.

2.22. $\sqrt{x-1}+\sqrt{(x-1)(x+1)}-\sqrt{x^3}=0$.

2.23. $\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}=x-7$.

2.24. $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x+33}-\sqrt{x+6}$.

2.25. $\sqrt{3x^2-5x+8}-\sqrt{3x^2-5x+1}=1$.

2.26. $\sqrt{1-x\sqrt{x^2-24}}+x+1=0$.

2.27. $\sqrt[3]{1-x}=1-\sqrt{x}$.

2.28. $6\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x-1}=5\sqrt[6]{(x-2)(x-1)}$.

2.29. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

2.30. $(5x+2)\sqrt{1-x}+(5x-7)\sqrt{x}=0$.

Решите неравенства

2.31. $x\cdot\sqrt{x^2-x-2}\geq 0$.

2.32. $\sqrt{\dfrac{x-3}{3-2x}}>-1$.

2.33. $\sqrt{3x-4}>\sqrt{4-x}$.

2.34. $\sqrt{x^2-2x-3}<1$.

2.35. $\sqrt{x^2}+x<1$.

2.36. $0<x+\sqrt{2-x}$.

2.37. $0<x+\sqrt{x+2}$.

2.38. $x<\sqrt{x+30}$.

2.39. $\sqrt{2x-1}<x-2$.

2.40. $\sqrt{2x^2-3x-5}<x-1$.

2.41. $3+x>3\sqrt{1-x^2}$.

2.42. $\sqrt{(x+1)(x-10)}>x$.

2.43. $\sqrt{(x+5)(3x+4)}>4(x-1)$.

2.44. $\dfrac{3}{\sqrt{2+x}}<\sqrt{2+x}+2$.

2.45. $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}-\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}<\dfrac{3}{2}$.

2.46. $3\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}>1$.

2.47. $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}<0$.

2.48. $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}>\sqrt{x-1}$.

2.49. $\sqrt{7x-6}-\sqrt{3x-16}>\sqrt{5x-22}$.

2.50. $\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{x^2+x+1}<1$.

2.51. $\sqrt{1+x}\leq\sqrt[4]{5-x}$.

2.52. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\geq 2$.

2.53. $\sqrt{2-\sqrt{x}}<\sqrt{x+1}$.

2.54. $x+4+\dfrac{x^2}{(1+\sqrt{x-1})^2}>0$.

2.55. $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}>\dfrac{35}{12}$.

2.56. $\dfrac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}>2$.

2.57. $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2-7x}>3$.

2.58. $x^2\geq x\cdot(2+\sqrt{12-2x-x^2})$.

2.59. $\sqrt{x+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x^2}}>\dfrac{2}{x}$.

2.60. $\sqrt{x+3}-\sqrt{-x-1}<1+\sqrt{(x+3)(-x-1)}$.

3. Уравнения и неравенства с модулем

Решите уравнения

3.1. $|x+2|=x+2$.

3.2. $|x-2|=2(3+x)$.

3.3. $|3x+2|=x+11$.

3.4. $|1-x^2|=15$.

3.5. $|2x-5|=5-2x$.

3.6. $x^2+|x|-6=0$.

3.7. $(x-5)^2-|x-5|=30$.

3.8. $x^2+6x+8+|x+4|=0$.

3.9. $3|x+2|+x^2+6x+2=0$.

3.10. $|1-5x^2|=4$.

3.11. $|x-4|=|5-2x|$.

3.12. $|x^2+13x+35|=|35-x^2|$.

3.13. $|2x-8|-|x+5|=12$.

3.14. $|x|-|x+2|=2$.

3.15. $|5x+3|+|2x+1|=|7x+4|$.

3.16. $|x|-2|x-1|+3|x-2|=0$.

3.17. $2|x-6|-|x|+|x+6|=18$.

3.18. $||||x+1|+2|-1|+1|=2$.

3.19. $|2x+15|=22-|2x-7|$.

3.20. $|x^2+2x-1|=\dfrac{1-5x}{3}$.

Решите неравенства

3.21. $|2x+5|<1$.

3.22. $\left|3x+\dfrac{5}{2}\right|\geq 2$.

3.23. $|x^2+5x|<6$.

3.24. $2|x-1|\leq 4-x$.

3.25. $|x+1|>\dfrac{1-x}{2}$.

3.26. $|x+2|\leq|4-x|$.

3.27. $|x-1|-|x+4|>7$.

3.28. $|x-2|+x+\dfrac{3}{2}<|x+1|$.

3.29. $x^2-6|x|+8<0$.

3.30. $x^2-|x|-6\leq 0$.

3.31. $|x^2+2x|+x\leq 0$.

3.32. $|x+4|>x^2+7x+12$.

3.33. $x^2+5x+9\leq|x+6|$.

3.34. $3x^2+9x+2\geq|x+3|$.

3.35. $|x+6|>|x^2+5x+9|$.

3.36. $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{|x|}\geq 2$.

3.37. $\dfrac{3}{|x+1|}\geq 5-2x$.

3.38. $\dfrac{|x-3|-1}{4-2|x-4|}\geq -1$.

3.39. $\frac{|2+x|+x}{|x+3|-1} \le 2$.

3.40. $\frac{|1-x|+10}{4|x-1|+3} > 2$.

3.41. $\frac{1}{|x+1|-1} \ge \frac{2}{|x+1|-2}$.

3.42. $|2x+4|-|3x-9|>|x+1|-6$.

3.43. $||x+1|-|x-1||<1$.

3.44. $|x^2+2x-3|+3x+3<0$.

3.45. $x^2-|5x+3|+x<2$.

3.46. $x^2+4 \ge |3x-2|+7x$.

3.47. $(|x+1|-3)(|x-2|-5)<0$.

3.48. $|x^2-x-2|+|x-4| \le x^2-2x+6$.

3.49. $|x^2+2x-8|+2x>0$.

3.50. $x^2-x-10<2|x+2|$.

3.51. $2x > \frac{5x+3}{|x+2|}$.

3.52. $\frac{|x-1|+|x+2|}{199-x}<1$.

3.53. $\frac{|x+2|}{|x+1|-1} \ge 1$.

3.54. $\frac{3}{|x-3|-1} \ge |x-2|$.

3.55. $\left|\frac{x^2+3x-1}{x^2-x+1}\right|<3$.

3.56. $\frac{x^2-7|x|+10}{x^2+6x+9}<0$.

3.57. $\frac{|x+3|}{x^2+5x+6} \ge 2$.

3.58. $\frac{x^2-|x|-12}{x+3} \le 2x$.

3.59. $|x^3+1| \ge 1+x$.

3.60. $\left|\frac{x^2+5x+4}{x^2-4}\right| \le 1$.

4. Тригонометрические уравнения и неравенства

Решите уравнения

4.1. $\sqrt{3}\sin x = 2.$

4.2. $\sin x = \frac{\pi}{6}.$

4.3. $\sqrt{2}\cos^2 5x = \cos 5x.$

4.4. $(2\sin 2x - \cos 2x)(1+\cos 2x) = \sin^2 2x.$

4.5. $\sqrt{3}\sin x - \mathrm{tg}x + \mathrm{tg}x \cdot \sin x = \sqrt{3}.$

4.6. $2\cos 4x + \cos 2x = 1.$

4.7. $3\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = 2\cos^2 x.$

4.8. $\frac{4\sin x - 2\cos 2x - 1}{\cos 2x + \sqrt{3}\cos x - 2} = 0.$

4.9. $\frac{6\sin x - 2\cos 2x - 4\cos^2 x - 3}{\sqrt{7}\sin x - 3\cos x} = 0.$

4.10. $4\sin^4 \frac{x}{2} + 12\cos^2 \frac{x}{2} = 7.$

4.11. $3\mathrm{tg}^2 x + 7 = \frac{2}{\sin^2 x}.$

4.12. $\sin 3x + \sin x = \sin 2x.$

4.13. $\sin 2x + \sin 3x + \cos 5x = 1.$

4.14. $3\cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = 0.$

4.15. $4\sin x \cdot \cos x - 3\sin^2 x = 1.$

4.16. $\cos x - \sin x - 2\sin x \cdot \cos x = 1.$

4.17. $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x.$

4.18. $6(\sin x + \cos x) - 2\sin x \cdot \cos x + 6 = 0.$

4.19. $\left(\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x\right)^2 = 5 + \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right).$

4.20. $\cos 3x - \sin(9x - 2) = 0.$

4.21. $4\cos x - 3\sin x = 5.$

4.22. $\sin x - \operatorname{tg}\frac{\pi}{10} \cdot \cos x = 1.$

4.23. $2\cos 3x = \sqrt{3}\cos x + \sin x.$

4.24. $\operatorname{tg}3x = \operatorname{tg}x.$

4.25. $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi/4) - \operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}(\pi/4) \cdot \operatorname{tg} x} = 2.$

4.26. $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} x.$

4.27. $\dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = (\sin x - \cos x)^2.$

4.28. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 7 - 5\operatorname{tg} 2x.$

4.29. $\sin^4 \frac{2x}{3} + \cos\frac{2x}{3} = \frac{5}{8}.$

4.30. $\sin^2 x - \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{1}{2}.$

4.31. $\dfrac{2\sin^4 x - 1}{\cos^4 x} = 2.$

4.32. $\cos 2x \cdot (2\cos^2 2x - 1) = \frac{1}{4}.$

4.33. $2\sin^3 x - \sin^2 x + 2\sin x\cos^2 x - \cos^3 x = 0.$

4.34. $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x.$

4.35. $2\sin^8 x - 2\cos^8 x = \cos^2 2x - \cos 2x.$

4.36. $(3 - \operatorname{ctg}^2 x)\sin 2x = 2(1 + \cos 2x).$

4.37. $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x + 4\cos^2 x = 0.$

4.38. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \cdot \cos x\right) + \operatorname{ctg}(\pi \sin x) = 0.$

4.39. $\operatorname{tg} 3x = \left(2 + \sqrt{3}\right)\operatorname{tg} x.$

4.40. $\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 7x = 1.$

4.41. $\operatorname{tg} 14x + 3\operatorname{ctg} 7x + \sin 3x - 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -2.$

4.42. $2\cos x - \sqrt{2}\sin 28x = 3\sqrt{2} - 2\cos 28x \cdot \sin x.$

4.43. $2\sin^2 x + \sin(x^2) = 1.$

4.44. $\sin(\pi\cos x) = \cos(\pi\sin x).$

4.45. $\operatorname{tg}(\pi\operatorname{tg} x) = \operatorname{ctg}(\pi\operatorname{ctg}).$

4.46. $1 + \arcsin x = 0.$

4.47. $2\arccos^2 x - 3\arccos x - 2 = 0.$

4.48. $\arcsin x = \arccos x.$

4.49. $\arcsin(x^2 - x + \frac{1}{\sqrt{2}}) = \arccos(x^2 - x + \frac{1}{\sqrt{2}}).$

4.50. $\arcsin 2x = \arccos |x|.$

Решите неравенства

4.51. $\sin x > \frac{1}{2}$.

4.52. $\cos x \le -\frac{1}{2}$.

4.53. $\mathrm{tg} x < 1$.

4.54. $20\sin^2 x + 9\cos x < 21$.

4.55. $\mathrm{tg}\frac{1}{1+x^2} \ge 1$.

4.56. $2\cos^2 2x - (2+\sqrt{2})\cos 2x + \sqrt{2} > 0$.

4.57. $6\sin x \cdot \cos x > \sin x + \cos x + 1$.

4.58. $\sin(\sin x) + \sin x \cdot \cos(\sin x) > 0$.

4.59. $2\cos(\arcsin x) - \sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right) \le 0$.

4.60. $\arcsin(\sin x) + 3\arccos(\cos x) \ge 3x - 18$.

5. Показательные уравнения и неравенства

Решите уравнения

5.1. $5^{x^2+6x+8} = 1$.

5.2. $(2/5)^{6x-7} = (5/2)^{14x-3}$.

5.3. $0{,}125 \cdot 2^{-4x-16} = \left(\frac{0{,}25}{\sqrt{2}}\right)^x$.

5.4. $2^{3+2x} = 4^{1-x^2-3x}$.

5.5. $\left(\frac{2}{3}\right)^{4\sqrt{x}} = (2{,}25)^{2\sqrt{x}-4}$.

5.6. $5\sqrt{5}(0{,}2)^{x+0{,}5} = (0{,}04)^x$.

5.7. $\frac{2^{2x-1} \cdot 4^{x+1}}{64} = 8^{x-1}$.

5.8. $32^{(x+8)/(x-4)} = 0{,}25 \cdot 128^{(x+20)/x}$.

5.9. $5^{x+1} = 5^{x-1} + 24$.

5.10. $7^{x+1} - \frac{1}{7}7^x + 2 \cdot 7^{x-1} - 14 \cdot 7^{x-2} = 48$.

5.11. $3^{2x-1} - 9^x + 27^{(2x+2)/3} = 675$.

5.12. $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$.

5.13. $4^{-2/x} - 5 \cdot 2^{-2/x} + 4 = 0$.

5.14. $2^{2+x} + 2^{2-x} = 17$.

5.15. $2^{x+1} \cdot 5^x = 10^{x+1} \cdot 5^{x+2}$.

5.16. $2^x \cdot 5^{x-1} = 200$.

5.17. $2^{(x^2-6)} \cdot 3^{(x^2-6)} = \frac{(6^{-x-1})^4}{6^5}$.

5.18. $(\log_3 8) \cdot (4/9)^x \cdot (27/8)^{x-1} = \log_3 4$.

5.19. $7^{x+1} + 3 \cdot 7^x = 3^{x+2} + 3^x$.

5.20. $9^x - 5^x - 3^{2x} \cdot 15 + 5^{x+1} \cdot 3 = 0$.

5.21. $25^x - 7^x - 7 \cdot 5^{2x+1} + 5 \cdot 7^{x+1} = 0$.

5.22. $9^x + 6^x - 2 \cdot 4^x = 0$.

5.23. $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 9^x$.

5.24. $4^x = 2 \cdot 10^x + 3 \cdot 25^x$.

5.25. $64 \cdot 9^{-x} - 84 \cdot 12^{-x} + 27 \cdot 16^{-x} = 0$.

5.26. $4^{1/x} + 6^{1/x} - 9^{1/x} = 0$.

5.27. $8^x + 8 = 3 \cdot 4^x + 3 \cdot 2^{x+1}$.

5.28. $3^{-12x-1} - 9^{-6x-1} - 27^{-4x-1} + 81^{1-3x} = 2192$.

5.29. $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = 4$.

5.30. $\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x = 14$.

Решите неравенства

5.31. $2^{5+10x} > 1$.

5.32. $4^{2x} > 0,125$.

5.33. $2^{-x} > \dfrac{1}{128}$.

5.34. $\sqrt{27} \cdot 3^{x+1} < 9^{4x^2}$.

5.35. $3^{x-3} < 3 \cdot 27^{-\frac{1}{x}}$.

5.36. $5^{-2-x^2/3} < 5^{2+2x}\left(\sqrt[3]{5}\right)^{x^2} + 24$.

5.37. $(0,2)^{(2x-1)/x} > 5$.

5.38. $(0,1)^{(1-2x)/(x+1)} > 10^3$.

5.39. $(0,25)^{4x^2+2x-2} < 4^{2x+3}$.

5.40. $(0,3)^{2x^2+3x+6} < 0,00243$.

5.41. $\sqrt{16^{(2x+2)/x}} < \sqrt[3]{8^{3x-7}}$.

5.42. $2^{-x+2} - 2^{-x+1} + 2^{-x-1} - 2^{-x-2} \le 9$.

5.43. $2^{x+1} + 2^{-x} - 3 < 0$.

5.44. $5^{1-2x} > 5^{-x} + 4$.

5.45. $25^x - 5^{x+1} \ge 50$.

5.46. $4^{-x-0,5} - 7 \cdot 2^{-x-1} - 4 < 0$.

5.47. $4^{x+1} - 16^x < 2 \cdot \log_9 27$.

5.48. $2^{x-0,5} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} > 1 + 2^{-x}$.

5.49. $4^{3x^2-x} - 8 < 2 \cdot 8^{x^2-x/3}$.

5.50. $\dfrac{4^x + 2x - 4}{x-1} \le 2$.

5.51. $\dfrac{2^{x-1} - 1}{2^{x+1} + 1} < \dfrac{1}{2}$.

5.52. $\dfrac{2^{1+x} - 2^{-x} + 1}{2^{-x} - 1} \le 0$.

5.53. $8 \cdot \dfrac{3^{x-2} - 1}{3^x - 2^x} < 1 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$.

5.54. $\dfrac{33 \cdot 3^{x-1} - 93}{12 \cdot 9^x - 11 \cdot 3^x - 15} \ge 5$.

5.55. $2^{2-x} - 2^{3-x} - 2^{4-x} > 5^{2-x} - 5^{-x}$.

5.56. $5^{x-2} + 5^{x-3} + 5^{x-4} > 7^{\frac{x}{2}+1} + 7^{\frac{x}{2}} + 7^{\frac{x}{2}-1}$.

5.57. $2^{2x} - 2 \cdot 25^x - 10^x > 0$.

5.58. $2 \cdot 4^x - 25 \cdot 5^{2x} - 5 \cdot 10^x > 0$.

5.59. $9 \cdot 4^{1/x} + 5 \cdot 6^{1/x} < 4 \cdot 9^{1/x}$.

5.60. $5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 15^x \cdot 10^x$.

6. Логарифмические уравнения и неравенства

Решите уравнения

6.1. $2\log_8 2^{4x} = 2^{\log_{\sqrt{2}} 2}$.

6.2. $10^{\lg(\lg\sqrt{x})} - \lg x + \lg x^2 - 3 = 0$.

6.3. $\log_5\left(\dfrac{x+1}{10}\right) = \log_5\left(\dfrac{2}{x}\right)$.

6.4. $\log_3(x-1) + \log_3(x+1) = 1$.

6.5. $\dfrac{\log_2 5}{\log_2 10} + \lg(x+10) = 1 + \lg(21x-20) - \lg(2x-1)$.

6.6. $2\log_4(4+x) = 4 - \log_2(x-2)$.

6.7. $\log_3((x+2)(x-2)) = 4\log_9(2x+3) - \log_{\sqrt{5}} 5$.

6.8. $2\log_8(2x) + \log_8(x^2+1-2x) = \dfrac{4}{3}$.

6.9. $\dfrac{1}{2}\lg\left(x+\dfrac{1}{8}\right) - \lg\left(x+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\lg\left(x-\dfrac{1}{2}\right) - \lg x$.

6.10. $\log_{1/2}(-x-1) + \log_{1/2}(1-x) - \log_{1/\sqrt{2}}(7+x) = 1$.

6.11. $x^{\log_{\sqrt{x}}(x^2+1)} = 25$.

6.12. $\log_{x+1} 2 = 3$.

6.13. $\log_{1-x}(x^2+3x+1) = 1$.

6.14. $\log_{1-x}(x^2-x-6)^2 = 4$.

6.15. $(\lg x)^2 - 6\lg x = \lg x^2 - 5$.

6.16. $(\log_2 x)^2 - 2\log_2\sqrt{x} = 2$.

6.17. $\lg^{-1} x + 4\lg x^2 + 9 = 0$.

6.18. $\log_2 \dfrac{x}{8} = \dfrac{15}{\log_2 \dfrac{x}{16} - 1}$.

6.19. $\dfrac{\log_{27} \dfrac{27}{x^2}}{\log_{27}^2 x} = 3$.

6.20. $\log_2 x - 4\log_{x^2} 4 = 3$.

6.21. $\log_{\sqrt{x}} 2 + 8\log_{16} x^2 + 9 = 0$.

6.22. $3 + 2\log_{x-1} 3 = 2\log_3(x-1)$.

6.23. $1 + 2\log_{(x+5)} 5 = \log_5(x+5)$.

6.24. $\dfrac{1}{8}(\log_2(x-2)^4)^2 = \dfrac{\lg(2-x)}{\lg 2} \cdot 2^{2\log_2\sqrt{3}}$.

6.25. $\log_x 9x^2 \cdot \log_9^2 x = 1$.

6.26. $\log_2\sqrt{x+1} + 3\log_2\sqrt{1-x} = \log_2\sqrt{1-x^2}$.

6.27. $\dfrac{3}{2}\log_{1/4}(x-2)^2 - 3 = \log_{1/4}(x+4)^3 + \log_{1/4}(6-x)^3$.

6.28. $\log_4 x - \log_{1/2}(13-x) = \log_2(10-x)^2 - 2\log_{1/4}(8-x)$.

6.29. $\log_4\left(\log_2 x\right) + 3\log_{1/8}\left(\log_2\left(2\sqrt{2}x\right)\right) = 1$.

6.30. $\log_4(2\log_3(1+\log_2(1+3\log_3(x-1)))) = \dfrac{1}{2}$.

Решите неравенства

6.31. $\log_{11}(3x-1) > 1$.

6.32. $\log_{1/3}(7x-1) > 0$.

6.33. $\lg(x^2+5x+7) < 0$.

6.34. $\log_{0,5}(x^2+5x+6) > -1$.

6.35. $\log_8(x^2+4x+3) \le 1$.

6.36. $\log_{\sqrt{2}}\left(\dfrac{1-2x}{x}\right) \le 0$.

6.37. $2\log_{1/9}\left(\dfrac{2-3x}{x}\right) \ge -1$.

6.38. $\log_{1/5}(3x-4) > \log_{1/5}(x-2)$.

6.39. $\log_{0,1}(x^2 - x - 2) > \log_{0,1}(3 - x)$.

6.40. $1 + \log_2(2 - x) > \log_2(x^2 + 3x + 2)$.

6.41. $\log_{0,1}(4 - x) \geq \log_{0,1} 10 - \log_{0,1}(x - 1)$.

6.42. $\lg(x + 4) \geq -2\lg\dfrac{1}{2 - x}$.

6.43. $\log_{1/5}(x^2 + 6x + 18) + 2\log_5(-x - 4) < 0$.

6.44. $2\log_2 x - \log_2(2x - 2) > 1$.

6.45. $2\log_3(-x) - \log_{1/3}(4 + x) \leq \log_3(x + 1)^2 + 2\log_9(10 + x)$.

6.46. $\log^2{}_{0,5} x - \log_{0,5} x \leq 2$.

6.47. $\log_3 x \leq \dfrac{2}{\log_3 x - 1}$.

6.48. $\dfrac{1}{1 + \log_2 x} + \dfrac{1}{1 - \log_2 x} > 2$.

6.49. $\dfrac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} \leq 1$.

6.50. $5 + 2\log_{1/3} x > 2\log_x 3$.

6.51. $\log_x\left(\dfrac{6 - 5x}{4x + 5}\right) > 1$.

6.52. $\log_{(x^{-2})}(x + 2) > -1$.

6.53. $\log_{\left(\frac{16}{25-x^2}\right)}\left(\dfrac{14}{24 - 2x - x^2}\right) > 1$.

6.54. $\log_{(x/2)} 8 + \log_{(x/4)} 8 < \dfrac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}$.

6.55. $\log_5 x + \log_x \dfrac{x}{3} < \dfrac{2 - \log_3 x}{\log_3 x}\log_5 x$.

6.56. $\log_2 \sqrt{3x + 4} \cdot \log_x 2 > 1$.

6.57. $\log_5 \sqrt{3x + 1} \cdot \log_{x-1} 5 > 1$.

6.58. $\log_{1/2}(x + 1) \cdot \log_2 x > \log_{(x+1)} x$.

6.59. $\log_2 x - \log_2(x + 2) + \log_{(x+2)/x} 2 > 0$

6.60. $1 + \log_{1/4}(\log_3(x + 4)) > 0$.

6.61. $\log_{\sqrt[4]{9}}(\log_{1/3}(x + 1)) \geq 2$.

6.62. $\log_{1/2} \log_2(x^2 - 2) > 0$.

6.63. $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_8 \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}\right) < 0$.

6.64. $\log_{1/2} x^2 + \log_3 x^2 > 1$.

6.65. $\log_2\left(\log_3\left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)\right) < \log_{1/8}\left(\log_{1/9}\left(\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}\right)\right)$.

7. Комбинированные уравнения и неравенства

Решите уравнения и неравенства

7.1. $(4\,|\,x + 1\,| + 1/2)^2 = 11(x + 1)^2 + 5/4$.

7.2. $\sqrt{|\,x - 1\,| - 1} \geq \sqrt{|\,x - 1\,| - 2011}$.

7.3. $\dfrac{x^3 - 8 + 6x(2 - x)}{|\,3 - 4x\,|} \leq \sqrt{4x - 3}$.

7.4. $\sqrt{x^2 - x + 4} \leq 2x + |\,3x + 2\,|$.

7.5. $5^{72} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{x} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{x}} > 1.$

7.6. $2^{|x-2|} - |2^{1-x} - 1| = 2^{1-x} + 1.$

7.7. $2^{x} + 2^{|x|} \geq 2\sqrt{2}.$

7.8. $\frac{3^{x} - 2}{x^{2} - 6x + 5} \leq 0.$

7.9. $\frac{\log_2(1 - x)}{x + 1} < 0.$

7.10. $\frac{1 - \log_{0,5} x}{\sqrt{6x + 2}} < 0.$

7.11. $\frac{(x + 0,5)(x + 3)}{\log_2 |x + 1|} < 0.$

7.12. $9^{\log_3(1+2x)} = 5x^{2} - 5.$

7.13. $\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_7(x^{2}-1)} > 1.$

7.14. $2^{\log_5(2/(x+2))} < 1.$

7.15. $(0,3)^{\log_5(\log_{1/5}(x^{2}-\frac{4}{5}))} < 1.$

7.16. $\log_{0,1}(101 - 5^{x}) + 2 < 0.$

7.17. $\log_2 \frac{1}{|x + 1| - 1} = 1.$

7.18. $\log_2 \left|1 - \frac{12}{x^{2}}\right| < 1.$

7.19. $|\log_3(2 - x)| > 2.$

7.20. $2 < |\log_{1/2}(x + 1) - 4| \leq 3.$

7.21. $\sqrt{\log_{\mathrm{tg}(3\pi/16)}(x - 1)} \geq 1.$

7.22. $\sqrt{\log_2\left(\frac{2x + 3}{x + 1}\right)} < 1.$

7.23. $x^{2\lg x} = 10x^{2}.$

7.24. $x \cdot x^{\lg x} = 10 \cdot x.$

7.25. $x^{\lg^{2} x - 3\lg x + 1} > 1000.$

7.26. $x^{(\lg 10x)-2} < 100.$

7.27. $\left(\frac{x + 1}{10}\right)^{\lg(x+1)-2} < 100.$

7.28. $\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} \geq 2.$

7.29. $3^{(\log_3 x)^{2}/4} \leq \frac{x^{(\log_3 x)/3}}{3}.$

7.30. $5^{\log_x 49} - 7^{\log_x 5} - 2 \geq 0.$

7.31. $3\sqrt{\lg x} + 2\lg\sqrt{x^{-1}} = 2.$

7.32. $\log_{1/3} x - 3 \cdot \sqrt{\log_{1/3} x} + 2 = 0.$

7.33. $\log_{4/3}(\sqrt{x + 3} - \sqrt{x}) + \log_{4/25}(2/5) \geq 0.$

7.34. $\log_5(5^{x} - 20) = x - 1.$

7.35. $\log_{1/9}(2^{x+2} - 4^{x}) \geq -1.$

7.36. $\log_3(2^{-x} - 3) + \log_3(2^{-x} - 1) = 1.$

7.37. $2(\lg 2 - 1) + \lg\left(5^{\sqrt{x}} + 1\right) = \lg\left(5^{1-\sqrt{x}} + 5\right).$

7.38. $2\log_{\sqrt{3}} 3 + \log_{\sqrt{3}}\left(3^{x^{2}-3} - 1/9\right) < \log_{\sqrt{3}} 26.$

7.39. $\lg 2^{x+3} - \lg(5^{x} - 2) = x.$

7.40. $\frac{x + 1}{3 - \log_3(9 - 3^{-x})} \leq 1.$

7.41. $\log_{(x^{2}-2x-3)} \frac{|x| - |x - 4|}{x + 1} > 0.$

7.42. $\log_3(\log_{1/8}((3/2)^{-x} - 1/2)) \leq -1.$

7.43. $\log_{-x}(\log_9((3^{-x}-9))<1$.

7.44. $\log_2(2^x-1)\cdot\log_{1/2}(2^{x+1}-2)>-2$.

7.45. $\log_4\left(\sqrt{3}^x-1\right)\cdot\log_{1/4}\left(\frac{\sqrt{3}^x-1}{16}\right)\le\frac{3}{4}$.

7.46. $\log_{|x|}\left(\sqrt{9-x^2}+x-1\right)\ge 1$.

7.47. $\log_{2x}4x\le\sqrt{\log_{2x}(16x^3)}$.

7.48. $\sqrt{(\log_{1/2}2x)^2+4\log_2\sqrt{2x}}<\sqrt{2}(4-\log_{16}16x^4)$.

7.49. $\left(x+\frac{8}{x}\right)\cdot|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)|\ge 9\cdot|\log_{\frac{2x-3}{2}}(x^2-4x+4)|$.

7.50. $|4\cos^2x-1|+|4\cos^2x-3|=2$.

7.51. $\left|2\sin x+2\cos x+\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x+\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\right|\le 2$.

7.52. $81^{(\sin 2x-1)\cos 3x}-9^{(\sin x-\cos x)^2}=0$.

7.53. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{\sin x}+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{\sin x}=\frac{10}{3}$.

7.54. $\log_{\frac{6x-x^2}{11}}(-\cos 3x-\cos x)=\log_{\frac{6x-x^2}{11}}(-\cos 2x)$.

7.55. $\sqrt{\sin x}+\cos x=0$.

7.56. $\sqrt{\operatorname{tg}x+\sin x}+\sqrt{\operatorname{tg}x-\sin x}=2\sqrt{\operatorname{tg}x}\cos x$.

7.57. $\sqrt{\cos 3x+\sqrt{3}\sin 3x-3\cos^2x+\cos x+\frac{13}{4}}=\sqrt{3}\sin x+\frac{1}{2}$.

7.58. $\sqrt{5-2\sin x}\ge 6\sin x-1$.

7.59. $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}>1$.

7.60. $\sqrt{2-\sin x-\sqrt{3}\cos x}>1$.

7.61. $2^{\frac{5}{2}+2\cos 2x}-\left(2^{\frac{3}{2}}-1\right)4^{\cos^2x}=-\left(2\sin^2x\right)^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}\sin x}\left(\sqrt{2}-1\right)}$.

7.62. $\log_{\operatorname{tg}x}\sqrt{\sin^2x-\frac{5}{12}}<-1$.

7.63. $\log_{(\sin x-\cos x)}(\sin x-5\cos x)\ge 1$.

7.64. $\sqrt{4\sin^2x-1}\cdot\log_{\sin x}\frac{x-5}{2x-1}\ge 0$.

7.65. $\sqrt{\arcsin x}+\sqrt{\arccos x}>\sqrt{\frac{7\pi}{12}}$.

* * *

7.66. Сколько различных корней имеет уравнение $\sqrt{6}x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = -2x$?

7.67. Сколько различных решений имеет неравенство $\sqrt{6}(x^2 + 2) + 2\sqrt{5}x \le \sqrt[4]{35}(x^2 - 2) + 2\sqrt{7}x$?

7.68. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\cos\left(\pi x^2\right) = \cos\left(\pi\left(x^2 + 2x + 1\right)\right)$.

7.69. Найдите все корни уравнения $\sqrt{1 - \sin 2x} - \sqrt{2}\cos 3x = 0$ на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$.

7.70. Найдите все корни уравнения $\cos x + \sqrt{\frac{1 - \sin x}{2}} = 0$ на промежутке $[3\pi; 4\pi]$.

8. Системы

Решите системы

8.1. $\begin{cases} 4x + 7y = 5, \\ 2x + 3y = -6. \end{cases}$

8.2. $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ |x - y| = 2. \end{cases}$

8.3. $\begin{cases} |x - 1| + |y - 5| = 1, \\ y = 5 - |x - 1|. \end{cases}$

8.4. $\begin{cases} y + |x + 1| = 1, \\ |y - x| = 5. \end{cases}$

8.5. $\begin{cases} \dfrac{2}{2x - y} + \dfrac{3}{x - 2y} = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2}{2x - y} - \dfrac{1}{x - 2y} = \dfrac{1}{18}. \end{cases}$

8.6. $\begin{cases} 3x + 4\sin y = -11, \\ -2x + 5\sin y = \dfrac{7}{2}. \end{cases}$

8.7. $\begin{cases} \sqrt{12}\operatorname{ctg} x + \sqrt{2}y = 4, \\ -\sqrt{27}\operatorname{ctg} x + \sqrt{8}y = 1. \end{cases}$

8.8. $\begin{cases} 6\cos x + 7\log_y 3 = -10, \\ -5\cos x + 2\log_y 3 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

8.9. $\begin{cases} 7 \cdot 2^x + 6y = 2, \\ 3 \cdot 2^{x+1} - 5y = 93. \end{cases}$

8.10. $\begin{cases} \dfrac{6}{2^{1-x}} + 2 \cdot 3^{y+1} = 21, \\ 5 \cdot 2^{x+2} - \dfrac{18}{3^{2-y}} = 56. \end{cases}$

8.11. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \dfrac{1}{9}, \\ y - 2x = 4. \end{cases}$

8.12. $\begin{cases} 2\log_x 8 + 3y = 24, \\ 2\log^3{}_x 0,5 + y = 8. \end{cases}$

8.13. $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$

8.14. $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 5 - 2\sqrt{6}. \end{cases}$

8.15. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y}+x=-1, \\ \dfrac{x}{x+y}=-2. \end{cases}$

8.16. $\begin{cases} 6^x-2\cdot 3^y=2, \\ 6^x\cdot 3^y=12. \end{cases}$

8.17. $\begin{cases} \log_2(x^2+y^2)=5, \\ 2\log_4 x+\log_2 y=4. \end{cases}$

8.18. $\begin{cases} \log_2(2x^2-y^2)=2, \\ 6\log_8(-x)+\log_2(y^2)=4. \end{cases}$

8.19. $\begin{cases} 2\cdot 5^{1-y}=\log_3 x^{-2}, \\ 5^y+\log_3 x=4. \end{cases}$

8.20. $\begin{cases} \log_3 x-2^y+y=3, \\ y\cdot 2^y+2^y\cdot\log_3 x=4. \end{cases}$

8.21. $\begin{cases} x+2y=6, \\ 3x^2-xy+4y^2=48. \end{cases}$

8.22. $\begin{cases} 3x+y-z=4, \\ x-2y+3z=0, \\ x^2+2y+z^2=6x. \end{cases}$

8.23. $\begin{cases} x+2y=y^2-x^2+3, \\ 2^{3x+y}=512. \end{cases}$

8.24. $\begin{cases} 3\cdot 2^x+y=13, \\ 2^{2x+1}+3y=35. \end{cases}$

8.25. $\begin{cases} 2^x+2y=1, \\ 3y-6y^2=2^{x-1}. \end{cases}$

8.26. $\begin{cases} y^2=4^x+8, \\ 2^{x+1}+y+1=0. \end{cases}$

8.27. $\begin{cases} x^3-\sqrt{y}=1, \\ 5x^6+8x^3\sqrt{y}+y=1. \end{cases}$

8.28. $\begin{cases} 2^{y/x+3x/y}=16, \\ \sqrt{y}-\sqrt{2x}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-1}. \end{cases}$

8.29. $\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=30, \\ x^2+y^2=325. \end{cases}$

8.30. $\begin{cases} 3^{\log_2(2x-y)}=1, \\ 4^{x+y}-2^{x+y}=12. \end{cases}$

8.31. $\begin{cases} 3\log_5 x+\log_{\sqrt[3]{5}} y=3, \\ \log_5(y-x-2)+\log_{125}(y-x-2)^3=\log_5 12. \end{cases}$

8.32. $\begin{cases} x-y+\sqrt{x^2-4y^2}=2, \\ x^5\sqrt{x^2-4y^2}=0. \end{cases}$

8.33. $\begin{cases} x^3\sqrt{x-y}=0, \\ 2y^2+y=21+2xy. \end{cases}$

8.34. $\begin{cases} \sqrt{x+y-1}=1, \\ \sqrt{x-y+2}=2y+2. \end{cases}$

8.35. $\begin{cases} 5(\log_y x+\log_x y)=26, \\ xy=64, \\ y<x. \end{cases}$

8.36. $\begin{cases} y^x=3y, \\ 2\log_3 y+\log_y 3=3x. \end{cases}$

8.37. $\begin{cases} \sqrt{\sin x}\cos^2 y=0, \\ 2\sin^2 x-\cos 2y-2=0. \end{cases}$

8.38. $\begin{cases} 4\sin y-6\sqrt{2}\cos x=5+4\cos^2 y, \\ \cos 2x=0. \end{cases}$

8.39. $\begin{cases} 2\sin 3x+2\cos 4x=1+\sqrt{2}, \\ 2\sin 7x-2\sin x=\sqrt{2}, \\ 0\le x\le \pi. \end{cases}$

8.40. $\begin{cases} \sin^2 x+\cos^2 y=\dfrac{3}{4}, \\ \cos x\cdot\sin y=\dfrac{\sqrt{6}}{4}, \\ \cos x\ge 0. \end{cases}$

8.41. $\begin{cases} \sin x \cos y = -\dfrac{1}{2}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = 1. \end{cases}$

8.42. $\begin{cases} \sin^2(-2x) - (3 - \sqrt{2})\operatorname{tg} 5y = \dfrac{3\sqrt{2} - 1}{2}, \\ \operatorname{tg}^2 5y + (3 - \sqrt{2}) \sin(-2x) = \dfrac{3\sqrt{2} - 1}{2}. \end{cases}$

8.43. $\begin{cases} 3 \sin x + \cos y = 0, \\ 6 \cos x - 2 \sin y = 7. \end{cases}$

8.44. $\begin{cases} y - x = 5, \\ xz = (z - 4)y + 30, \\ 2xz = (2z - 4)y. \end{cases}$

8.45. $\begin{cases} x + 3^y = 2, \\ x^3 + 27^y = 26. \end{cases}$

8.46. $\begin{cases} \dfrac{xy}{2} + \dfrac{5}{2x + y - xy} = 5, \\ 2x + y + \dfrac{10}{xy} = 4 + xy. \end{cases}$

8.47. $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 3, \\ 4{,}5x^2 + 3y^2 - 3x + 8y = 7. \end{cases}$

8.48. $\begin{cases} 3x^2 + 2xy - 9x - 4y + 6 = 0, \\ 5x^2 + 2xy - 12x - 4y + 4 = 0. \end{cases}$

8.49. $\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 3, \\ y^2 - 3xy = 2. \end{cases}$

8.50. $\begin{cases} 2x^4 + y^2 = 10, \\ x^2 + 2y^4 = 10. \end{cases}$

8.51. $\begin{cases} \sqrt{x}(x + 3y) = 36, \\ \sqrt{y}(3x + y) = 28. \end{cases}$

8.52. $\begin{cases} 4^x + 5 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^y = 2, \\ 2 \cdot 9^y + 2^x + 2 \cdot 3^y = 1. \end{cases}$

8.53. $\begin{cases} (1/4)^{-3x/2} + \log^3{}_3 y = 504, \\ 4^x - 2^{x-1} \log_{\sqrt{3}} y + \log^2{}_3 y = 84. \end{cases}$

8.54. $\begin{cases} \left(1 + 2\log_{|xy|} 2\right) \log_{x+y} |xy| = 1, \\ x - y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$

8.55. $\begin{cases} x + \log_2 y = y \log_2 3 + \log_2 x, \\ x \log_2 72 + \log_2 x = 2y + \log_2 y. \end{cases}$

8.56. $\begin{cases} \log_2(10 - 3y) + \log_{1/2}(2y - 5x) = 0, \\ \sqrt{x + 2y + 1} - \sqrt{11 - 3y} = \sqrt{2x + 4y - 12}. \end{cases}$

8.57. $\begin{cases} xy + 3y^2 - x + 4y - 7 = 0, \\ 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0. \end{cases}$

8.58. $\begin{cases} \dfrac{xy}{x + y} = 1, \\ \dfrac{xz}{x + z} = 2, \\ \dfrac{yz}{y + z} = 3. \end{cases}$

8.59. $\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0, \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0, \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0. \end{cases}$

8.60. $\begin{cases} y + 2 = (3 - x)^3, \\ (2z - y)(y + 2) = 9 + 4y, \\ x^2 + z^2 = 4x, \\ z \ge 0. \end{cases}$

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ

9. Планиметрические задачи

9.1. Найдите площадь правильного треугольника, сторона которого равна стороне ромба с диагоналями 10 и 12.

9.2. Найдите периметр правильного треугольника, если центр описанной около него окружности удален от хорды, равной 2, на расстояние 3.

9.3. В треугольнике ABC основание D высоты $CD=\sqrt{3}$ лежит на стороне AB. Найдите AC, если $AB=3$, $AD=BC$.

9.4. Найдите площадь прямоугольного треугольника, один из катетов которого равен 13, а высота, опущенная на гипотенузу, равна 12.

9.5. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведена медиана CM и высота CH, причём точка H лежит между A и M. Найдите отношение $AH:AM$, если $CM:CH=5:4$.

9.6. Один из углов треугольника равен разности двух других, наименьшая сторона треугольника равна 1, а сумма площадей квадратов, построенных на двух других сторонах, вдвое больше площади описанного около треугольника круга. Найдите наибольшую сторону треугольника.

9.7. Окружность радиуса $\sqrt{3}$, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с углом $\angle A=30^\circ$, касается катета AC в точке K. Найдите BK.

9.8. Окружность радиуса 3, центр O которой лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника, касается катетов. Найдите площадь треугольника, если $OA=5$.

9.9. Окружность, центр которой лежит на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC, касается катетов AC и BC в точках E и D соответственно. Найдите $\angle B$, если $AE=1$, $BD=3$.

9.10. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD прямого угла. Из точки D опущен перпендикуляр $DM=\sqrt{3}$ на сторону AC. Найдите BC, если $AD=2\sqrt{3}$.

9.11. На стороне AB треугольника ABC с углами $\angle A=30^\circ$ и $\angle B=130^\circ$ как на диаметре построен круг. Найдите площадь части этого круга, лежащей внутри треугольника.

9.12. Две равных хорды окружности образуют вписанный угол величиной 30°. Найдите отношение площади части круга, лежащей внутри угла, к площади всего круга.

9.13. Точка пересечения двух общих касательных к двум непересекающимся окружностям, меньшая из которых имеет радиус r, лежит на линии их центров на расстоянии $6r$ от центра большей окружности и делит отрезок касательной между точками касания в отношении $1:3$. Найдите площадь фигуры, состоящей из двух частей, ограниченных касательными и большими дугами окружностей.

9.14. Найдите площадь выпуклого четырёхугольника с диагоналями 3 и 4, если отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника, равны.

9.15. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно. Найдите $AM : CM$, если площадь треугольника MCN вдвое больше площади трапеции $AMNB$.

9.16. Прямая, параллельная стороне $AB = 5$ треугольника ABC и проходящая через центр вписанной в него окружности, пересекает стороны BC и AC в точках M и N соответственно. Найдите периметр четырёхугольника $ABMN$, если $MN = 3$.

9.17. В треугольнике ABC на сторонах AB и AC взяты точки M и N соответственно так, что $AM : MB = 3 : 2$ и $AN : NC = 4 : 5$. В каком отношении прямая, проходящая через точку M параллельно BC, делит отрезок BN?

9.18. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям и пересекающая боковые стороны в точках E и F, причём $EF = 8$. Найдите основания трапеции, если их отношение равно 4.

9.19. Найдите высоту, опущенную на гипотенузу прямоугольного треугольника с острым углом α и радиусом описанной окружности R.

9.20. Найдите отношение высот треугольника ABC, опущенных из вершин A и B соответственно, если $\cos A = \frac{1}{5}$, $\sin B = \frac{1}{2}$.

9.21. Найдите углы треугольника со сторонами 10, 24 и 26.

9.22. В четырёхугольнике $ABCD$ углы A и B прямые, $AB = BC = 3$ и $BD = 5$. На сторонах AD и CD взяты такие точки E и F соответственно, что $AE = 1$ и $CF = 2$. Найдите площадь пятиугольника $ABCEF$.

9.23. Одно из оснований равнобедренной трапеции равно 4. Найдите расстояние между точками касания с её боковыми сторонами вписанной в трапецию окружности радиуса 4.

9.24. В параллелограмме $ABCD$ со сторонами $AB = 2$ и $AD = 5$ биссектриса угла A пересекает биссектрисы углов B и D в точках K и L соответственно, а биссектриса угла C пересекает те же биссектрисы в точках N и M соответственно. Найдите отношение площади четырёхугольника $KLMN$ к площади параллелограмма $ABCD$.

9.25. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если центр вписанной в него окружности делит биссектрису прямого угла в отношении $\sqrt{3} : \sqrt{2}$, считая от вершины.

9.26. Найдите высоту, биссектрису и медиану, проведённые из вершины одного угла треугольника, если они делят этот угол на четыре равные части, а радиус описанной около треугольника окружности равен R.

9.27. Найдите площадь треугольника со стороной a, противолежащим углом α и углом β.

9.28. Найдите биссектрису прямого угла треугольника с гипотенузой c и острым углом α.

9.29. В окружность радиусом R вписан равнобедренный треугольник с острым углом α при основании. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.

9.30. В окружность диаметром 25 вписан равнобедренный треугольник с боковой стороной 20. Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.

9.31. Около треугольника ABC описана окружность с диаметром $AD = 2$. Найдите BC, если $AB = 1$ и $\angle BAD : \angle CAD = 4 : 3$.

9.32. Окружность радиуса 5 с центром O, лежащим на стороне AB треугольника ABC, касается сторон AC и BC. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AO = 13$ и $BO = 7$.

9.33. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята такая точка D, что $CD = 2$ и биссектриса CL перпендикулярна прямой DL. Найдите AL.

9.34. Две окружности радиусов 2 и 8 касаются друг друга внешним образом в точке A. Общая касательная к ним, проведённая через точку A, пересекает другую общую касательную в точке B. Найдите AB.

9.35. Окружности радиусов 2 и 3 касаются друг друга внешним образом в точке A. Общая касательная к ним в точке A пересекает в точке B другую общую касательную, касающуюся в точке C меньшей окружности с центром O. Найдите радиус окружности, вписанной в четырёхугольник $OABC$.

9.36. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон AB, BC и AC в точках K, L и M соответственно. Найдите KL, если $AM = 2, MC = 3$ и $\angle C = \frac{\pi}{3}$.

9.37. Вписанная в треугольник ABC окружность касается сторон $AB = 4$ и $AC = 3$ в точках M и N соответственно. Найдите площадь треугольника AMN, если $BC = 2$.

9.38. Вписанная в треугольник ABC окружность с центром O касается стороны BC в точке K. Найдите площадь треугольника BOK, если $AC = a, \angle ABC = \alpha$, а периметр треугольника ABC равен $2p$.

9.39. Прямая, касающаяся окружности в точке K, параллельна хорде $AB = 6$. Найдите радиус окружности, если $AK = 5$.

9.40. Диагонали вписанной в окружность трапеции взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если её периметр равен 18, а основания относятся, как 1 : 7.

9.41. Трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = a$ и $AD = b$ вписана в окружность. Найдите радиус окружности, если $\angle CAD = \alpha$.

9.42. Окружность, проходящая через вершины C и D параллелограмма $ABCD$, касается прямой AD и пересекает прямую AB в точках B и E. Найдите AE, если $AD = 4$ и $CE = 5$.

9.43. Через точку K диаметра AB окружности проведена хорда MN. Найдите AB, если $\angle ABM = 30°, \angle BMK = 15°$ и $MK = 3$.

9.44. Медианы BM и CN треугольника ABC взаимно перпендикулярны. Найдите площадь треугольника ABM, если $BC = a$ и $AC = b$.

9.45. Медианы BM и CN треугольника ABC пересекаются в точке K. Найдите расстояние от точки K до прямой BC, если $BC = a, \angle B = \beta$ и $\angle C = \gamma$.

9.46. В треугольнике ABC проведена высота BH и медиана BM. Найдите угол $\angle MBH$, если $AB = 1, BC = 2$ и $AM = BM$.

9.47. Найдите углы треугольника ABC, если его медиана BM равна половине стороны AC, а один из углов, образованных биссектрисой BL и стороной AC, равен 55°.

9.48. В равнобедренном треугольнике высоты, опущенные на основание и на боковую сторону, равны m и n соответственно. Найдите стороны треугольника.

9.49. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH и CK. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $HK = 2\sqrt{2}$, а площади треугольников ABC и BHK равны 18 и 2 соответственно.

9.50. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH и CK. Найдите площадь круга, описанного около треугольника KBH, если $AC = 1$ и $\angle KCH = \alpha$.

9.51. Отрезок, соединяющий основания высот, проведённых к сторонам AB и AC остроугольного треугольника ABC с углом $\angle A = \alpha$, равен l. Найдите BC.

9.52. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AL. Найдите AL, если $BL = b$ и $CL = c$.

9.53. В равнобедренной трапеции с боковой стороной 5, основание высоты, проведённой из вершины верхнего основания, делит нижнее основание на отрезки 12 и 3. Найдите верхнее основание трапеции, её площадь, высоту и диагональ.

9.54. Найдите площадь треугольника со сторонами a, b и c, его высоту, медиану и биссектрису, проведённые к стороне c, а также радиусы вписанной и описанной окружностей.

9.55. В треугольник со сторонами a, b и c вписана окружность. Найдите расстояние от противолежащей стороне c вершины треугольника до ближайшей точки касания.

9.56. Зная медианы треугольника, найдите его площадь.

9.57. Зная высоты треугольника, найдите его площадь.

9.58. Стороны треугольника равны a, b, c. В каком отношении центр вписанной окружности делит биссектрису, проведённую к стороне a?

9.59. Углы треугольника равны α, β, γ. В каком отношении точка пересечения высот делит высоту, проведённую из вершины угла α?

9.60. Даны две непараллельные стороны a и b параллелограмма. Найдите его диагональ d_1 по известной другой диагонали d_2.

9.61. Какова площадь треугольника со сторонами: а) 5, 9, 12; б) 2, 3, 6; в) $\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{13}$?

9.62. Найдите углы треугольника площадью 3, если две его стороны равны 3 и 4.

9.63. В треугольнике ABC со стороной $AB = 5$ и высотой $BD = 3$ найдите $\angle BAC$.

9.64. Две стороны треугольника равны 1 и 2, а синус угла между ними равен $\frac{1}{2}$. Найдите третью сторону и два других угла треугольника.

9.65. Существует ли треугольник с углами $\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{7}, \arcsin\frac{\pi}{4}$?

10. Стереометрические задачи

10.1. В правильную шестиугольную пирамиду с высотой H вписан один конус, а около неё описан другой конус с радиусом основания R. Найдите разность объёмов этих конусов.

10.2. Конус вписан в правильную четырёхугольную пирамиду. Их общая высота равна 9/4, а радиус вписанной в конус сферы равен 1. Найдите разность объёмов пирамиды и конуса.

10.3. Через вершину S конуса проходит плоское сечение SAB площадью 42. Точки A и B делят длину окружности основания конуса в отношении 1:5 . Найдите объём конуса, если $\angle SAB = \arccos\frac{3}{\sqrt{58}}$.

10.4. Найдите объём прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна d и образует с двумя смежными гранями углы α и β соответственно.

10.5. Найдите сторону основания правильной треугольной призмы объёмом V, если угол между диагоналями двух её боковых граней, проведёнными из одной вершины, равен α.

10.6. Найдите сторону основания правильной треугольной пирамиды объёмом 36, если её высота вдвое больше радиуса окружности, описанной около основания.

10.7. Найдите радиус сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды со стороной основания, равной a, и углом φ между боковыми рёбрами.

10.8. Найдите двугранный угол при ребре основания правильной треугольной пирамиды, если угол между её боковыми рёбрами равен φ.

10.9. В правильной пирамиде $SABC$ с рёбрами $AB = 1$ и $AS = 2$ проведены биссектриса AL боковой грани SAB и медиана BM основания ABC. Найдите LM.

10.10. На высоте правильной треугольной пирамиды взята точка, удаленная от бокового ребра пирамиды на расстояние $4/\sqrt{13}$ и делящая высоту в отношении $1:2$, считая от вершины. Найдите объём пирамиды, если её боковые грани наклонены к основанию под углом $\pi/6$.

10.11. Найдите высоту пирамиды, основанием которой служит треугольник со сторонами 7, 8 и 9, если её боковые рёбра наклонены к основанию под углом 60°.

10.12. Найдите объём пирамиды, если её основанием служит прямоугольный треугольник с гипотенузой 3 и углом 30°, а боковые рёбра наклонены к основанию под углом 60°.

10.13. Основанием пирамиды $SABC$ с высотой SH служит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, а двугранные углы при рёбрах основания равны по $\arcsin\frac{5}{13}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если $AH = 1$ и $BH = 3\sqrt{2}$.

10.14. Найдите радиус сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды объёмом $9\sqrt{3}$ и высотой 3.

10.15. Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, если радиус описанной около неё сферы равен 2, а боковое ребро в $\sqrt{2}$ раз больше ребра основания.

10.16. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды вдвое больше её высоты. Найдите отношение радиуса вписанной в пирамиду сферы к апофеме пирамиды.

10.17. В правильной пирамиде $SABC$ с высотой SH и ребром основания $AB = a$ угол между боковым ребром и плоскостью основания равен φ. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку H параллельно рёбрам SA и BC.

10.18. Плоскость, параллельная боковому ребру $AS = a\sqrt{2}$ и ребру $BC = a$ основания ABC правильной пирамиды $SABC$, проходит на расстоянии d от ребра AS. Найдите площадь сечения пирамиды этой плоскостью.

10.19. Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды с высотой H и двугранным углом α при боковом ребре.

10.20. В правильной пирамиде $SABCD$ с вершиной S боковое ребро равно a, а двугранный угол при этом ребре равен φ. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки B, D и середину ребра SC.

10.21. Все рёбра правильной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны по 2. Плоскость, параллельная прямым AC и SB, пересекает рёбра AB и BC в точках M и N. Найдите периметр сечения пирамиды этой плоскостью, если $MN = \sqrt{2}$.

10.22. В правильной пирамиде $SABCD$ с высотой 4 сторона основания $SABC$ равна 6. Точки M и N — середины ребер BC и CD. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду $SMNC$.

10.23. На воздушном шаре, двигавшемся относительно Земли вдоль заданной параллели на постоянной высоте, было совершено кругосветное путешествие. На какой широте совершалось путешествие, если разность расстояний, пройденных верхней и нижней точками шара, оказалась равной удвоенному диаметру шара?

10.24. Какими должны быть радиусы четырёх одинаковых шаров, чтобы их можно было разместить внутри данной сферы радиуса R и при этом каждый шар касался сферы и трёх других шаров?

10.25. Два шара радиуса r касаются друг друга и боковой поверхности конуса, а также его основания — в точках, симметричных относительно центра. Найдите объём конуса, если его высота в 4/3 раза больше радиуса основания.

10.26. Площадь сечения правильной четырёхугольной пирамиды плоскостью, проходящей через вершину её основания перпендикулярно противоположному ребру, вдвое меньше площади основания пирамиды. Найдите отношение высоты пирамиды к боковому ребру.

10.27. Три параллельные прямые касаются в точках A, B и C сферы с центром O и радиусом 4. Найдите $\angle ABC$, если площадь треугольника AOC равна 4, а площадь треугольника ABC больше 16.

10.28. Вне правильного тетраэдра $ABCD$ взята такая точка M, что $MA = MB = MC = \sqrt{97}$ и $MD = \sqrt{2}$. Найдите объём тетраэдра.

10.29. Стороны $AB = 6$ и CD основания $ABCD$ пирамиды $SABCD$ параллельны, $AD = 4$, $AS = 2\sqrt{14}$ и $\angle BAD = 120°$. Найдите объём пирамиды, если через каждую из прямых AB и CD можно провести по плоскости, которые не содержат основание пирамиды и пересекают её по равным четырёхугольникам.

10.30. Основанием прямой призмы служит ромб $ABCD$ с $\angle A = 120°$. На боковых рёбрах AA', BB' и CC' взяты такие точки K, L и M соответственно, что угол между прямыми KL и AB равен $45°$, а между прямыми LM и BC — $30°$. Найдите угол между плоскостями KLM и ABC.

10.31. Площадь сечения правильной треугольной пирамиды, проходящего через её боковое ребро, равное $\sqrt{13}$, и высоту, вдвое больше площади её основания. Найдите площадь её боковой грани.

10.32. На ребре AS правильной пирамиды $SABC$ объёмом V взята такая точка D, что $SD : DA = m : n$. Расстояние от центра основания ABC до плоскости BCD равно d. Найдите площадь треугольника BCD.

10.33. На боковых рёбрах AA' и BB' треугольной призмы $ABCA'B'C'$ объёмом V взяты такие точки D и E соответственно, что $AD = DA'$ и $BE : BE' = 1 : 2$. Найдите объём призмы, заключённой между плоскостями ABC и DEC.

10.34. Найдите площадь поверхности параллелепипеда объёмом 8, вписанного в сферу радиуса $\sqrt{3}$.

10.35. На каком расстоянии от ребра SA правильной пирамиды $SABC$ с вершиной S должна проходить плоскость, параллельная рёбрам $BC = a$ и $AS = b$, чтобы площадь сечения пирамиды этой плоскостью была максимальной?

10.36. Основанием пирамиды $SABCD$ служит квадрат $ABCD$ со стороной 15, а радиус вписанного в пирамиду шара равен 3. Найдите высоту пирамиды, если она совпадает с ребром SA.

10.37. Хорды AA', $BB' = 18$ и CC' сферы радиуса 11 взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке M, находящейся на расстоянии $\sqrt{59}$ от центра сферы. Найдите AA', если $CM : MC' = (8 + \sqrt{2}) : (8 - \sqrt{2})$.

10.38. На рёбрах AB, BC и CD правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром 1 взяты такие точки K, L и M соответственно, что $AK = 1/2$ и $BL = CM = 1/3$. Плоскость KLM пересекает прямую AD в точке N. Найдите угол между прямыми NK и NL.

10.39. Точка M равноудалена от вершин A и D правильного тетраэдра $ABCD$, а от каждой из вершин B и C находится на расстоянии $\sqrt{3/2}$. Прямая MC перпендикулярна высоте DH треугольника ACD. Найдите объём тетраэдра.

10.40. В правильную пирамиду $SABCD$ вписана сфера радиуса 2. Этой сферы, граней BSC, CSD и основания $ABCD$ пирамиды касается, другая сфера радиуса 1. Найдите объём пирамиды и двугранный угол при боковом ребре.

10.41. Найдите ребро основания правильной призмы $ABCA'B'C'$ с боковым ребром $AA' = 2$, если угол между скрещивающимися прямыми AC' и $A'B$ равен $\alpha < 60°$.

10.42. На ребре BD тетраэдра $ABCD$ взята такая точка E, что $DE : BE = 3 : 5$. Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через точки A и D параллельно медиане BM треугольника ABC, делит объём тетраэдра.

10.43. На рёбрах AD и BD тетраэдра $ABCD$ взяты такие точки E и F соответственно, что $DE : AE = SF : BF = 1 : 2$. Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через точки E и F параллельно ребру CB, делит объём тетраэдра.

10.44. Двугранный угол при ребре AB тетраэдра $ABCD$ равен $\pi/4$. Найдите $\angle DAC$, если $\angle DAB = \pi/2$ и $\angle BAC = 3\pi/4$.

10.45. Двугранный угол при ребре AC тетраэдра $ABCD$ равен $\pi/4$. Найдите BD, если $AB = 2$, $AD = \sqrt{2}$, $\angle BAC = \pi/6$ и $\angle CAD = \pi/2$.

10.46. Найдите радиус сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$, если $AB = BC = 2, AC = 1$, а ребро $CD = 4$ перпендикулярно рёбрам AB и AC.

10.47. Найдите радиус сферы, описанной около правильного тетраэдра, две вершины которого лежат на диагонали куба с ребром 2, а две другие вершины – на диагонали грани этого куба.

10.48. Пусть $ABCD$ — прямоугольник, а точка E не лежит в его плоскости. Найдите угол между двумя прямыми, по которым пересекаются две пары плоскостей ABE, CDE и BCE, ADE.

10.49. Дан тетраэдр $ABCD$ с углом $\angle ABC = \beta \leq 90°$. Найдите угол между двумя прямыми, проходящими через две пары точек: середины ребер AC, BC и середины ребер BD, CD.

10.50. Точка A находится на расстоянии a от данной плоскости и на расстоянии b от прямой L, лежащей в этой плоскости. Найдите расстояние от проекции точки A на плоскость до прямой L.

10.51. Найдите угол между боковым ребром a правильной треугольной пирамиды и плоскостью её основания со стороной b.

10.52. В одной из граней двугранного угла величины α взята точка A на расстоянии d от ребра двугранного угла. Найдите расстояние от точки A до плоскости второй грани.

10.53. Пусть A' — проекция точки A на данную плоскость, $AA' = a$. Через точку A проходит другая плоскость, образующая с данной плоскостью угол α и пересекающая её по прямой L. Найдите расстояние от точки A' до прямой L.

10.54. В пирамиде $SABC$ с $\angle ABC = \alpha$ точка B — проекция точки S на плоскость ABC. Найдите величину угла между гранями SAB и SBC.

10.55. На ребре $BC = 4$ куба $ABCDA'B'C'D'$ взята середина M, а на ребре $A'D'$ — такая точка N, что $A'N = 1$. Найдите длину кратчайшего пути из точки M в точку N по поверхности куба.

10.56. Найдите объём куба $ABCDA'B'C'D'$, если сфера радиуса $\sqrt{41}$ проходит через точки A, B, C и середину ребра $A'D'$.

10.57. Расстояния от концов отрезка до некоторой плоскости равны 1 и 3. Чему может быть равно расстояние от середины этого отрезка до той же плоскости?

10.58. Боковые грани пирамиды $SABC$ одинаково наклонены к основанию ABC, $AC = 3$, $BC = 4$, $SC = \sqrt{38}$ и $\angle ACB = 90°$. В пирамиду вписан цилиндр площадью боковой поверхности $8\pi/3$; нижнее его основание лежит в плоскости ABC, а верхнее имеет по одной общей точке с каждой боковой гранью. Каким может быть радиус основания этого цилиндра?

10.59. Чему может быть равна сумма углов, образуемых произвольной прямой с данной плоскостью и с перпендикуляром к ней?

10.60. Какие значения может принимать величина угла, получаемого в сечении произвольной плоскостью фиксированного двугранного угла величины α?

11. Задачи на доказательство

11.1. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

а) треугольник — правильный;

б) все медианы треугольника равны;

в) все высоты треугольника равны;

г) все биссектрисы треугольника равны.

11.2. Докажите, что из медиан любого треугольника можно сложить треугольник. Верно ли аналогичное утверждение для высот треугольника?

11.3. Докажите, что угол между секущими, выходящими из точки вне круга, измеряется полуразностью двух дуг окружности, расположенных внутри угла.

11.4. Докажите, что вертикальные углы между пересекающимися хордами измеряются полусуммой двух дуг окружности, на которые они опираются.

11.5. Докажите, что угол между касательной к окружности и хордой, выходящей из точки касания, измеряется половиной дуги, заключённой между ними.

11.6. Хорды AB и CD окружности с центром в точке O радиуса R пересекаются в точке E. Докажите, что $AE \cdot BE = CE \cdot DE = R^2 - OE^2$.

11.7. Через точку A, лежащую вне окружности с центром в точке O радиуса R, проведена секущая и касательная. Секущая пересекает окружность в точках B и C, а касательная касается окружности в точке D. Докажите, что $AD^2 = AB \cdot AC = AO^2 - R^2$.

11.8. Пусть AD — биссектриса внутреннего или внешнего (в этом случае точка D лежит на продолжении BC) угла треугольника ABC. Докажите, что $BD : CD = AB : AC$.

11.9. Докажите, что в выпуклый четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB + CD = AD + BC$.

11.10. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$.

11.11. Докажите, что если точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, то плоскость, проходящая через середины отрезков AD, BD, CD, параллельна:

а) прямой AB;

б) плоскости ABC.

11.12. Докажите, что в пространстве для любых четырёх различных точек A, B, C, D середины K, L, M, N отрезков AB, BC, CD, DA соответственно служат вершинами параллелограмма $KLMN$.

11.13. Докажите, что если три прямые в пространстве не проходят через одну точку и попарно пересекаются, то они лежат в одной плоскости.

11.14. Три прямые проходят через точку A. Точки B, B' — точки одной прямой, C, C' — точки другой прямой, D, D' — точки третьей прямой. Докажите, что отношение объёмов пирамид $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равно $(AB \cdot AC \cdot AD) : (AB' \cdot AC' \cdot AD')$.

11.15. Докажите, что отношение площади многоугольника, расположенного в одной плоскости, к площади его проекции на другую плоскость равно $1 : \cos\varphi$, где φ — угол между плоскостями.

11.16. Докажите, что если S и P — площади двух граней тетраэдра, a — их общее ребро, а α — двугранный угол между ними, то объём этого тетраэдра равен $\dfrac{2SP\sin\alpha}{3a}$.

11.17. Докажите, что если a и b — противоположные рёбра тетраэдра, d — расстояние между ними, а α — угол между ними, то объём этого тетраэдра равен $\dfrac{abd\sin\alpha}{6}$.

11.18. Докажите, что плоскость, делящая пополам двугранный угол при ребре тетраэдра, делит противоположное ребро на части, пропорциональные площадям граней, заключающих этот угол.

* * *

11.19. Найдите геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от двух разных точек этой плоскости.

11.20. Найдите геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от двух разных прямых этой плоскости.

11.21. Найдите геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от трёх попарно пересекающихся прямых этой плоскости.

11.22. Даны две разные точки A и B плоскости и число $\alpha \in [0; \pi]$. Найдите геометрическое место точек $M \neq A, B$ плоскости, для которых $\angle AMB = \alpha$.

11.23. Пусть A — фиксированная точка, не лежащая в данной плоскости, а M — произвольная точка этой плоскости. Найдите геометрическое место середин отрезков AM.

11.24. Найдите геометрическое место середин отрезков, концы которых лежат в двух параллельных плоскостях.

11.25. Даны две разные точки A и B пространства. Найдите геометрическое место точек $M \neq A, B$ пространства, для которых $\angle AMB = 90^\circ$.

НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ

12. Подготовительные упражнения

Для каждого значения a решите уравнение или неравенство (относительно x).

12.1. $a \cdot x = 1$.

12.2. $a \cdot x < 1$.

12.3. $(a^2 - 1)x = a - 1$.

12.4. $\dfrac{x-a}{x-1} = 0$.

12.5. $\dfrac{x^2-1}{x-a} = 0$.

12.6. $\dfrac{x-1}{x^2 - a^2} = 0$.

12.7. $\dfrac{a(x-1)}{x-a} = 0$.

12.8. $x^2 = a$.

12.9. $x^2 > a$.

12.10. $x^2 < a$.

12.11. $|x| = a$.

12.12. $|a| = x$.

12.13. $|x| < a$.

12.14. $|x| > a$.

12.15. $\sqrt{x} = a$.

12.16. $a\sqrt{x} = 0$.

12.17. $\sqrt{x} > a$.

12.18. $\sqrt{x} < a$.

12.19. $2^x < a$.

12.20. $2^x > a$.

12.21. $\left(\sqrt{a}\right)^x = 1$.

12.22. $\log_a x < 1$.

12.23. $\log_x a \le 0$.

12.24. $\cos x = a$.

12.25. $\sin x = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{1}{a}\right)$.

* * *

12.26. Докажите, что если p — простое число, большее 3, то число $p^2 - 1$ делится нацело на 24.

12.27. Докажите, что если p и q — простые числа, большие 3, то число $p^2 - q^2$ делится нацело на 24.

12.28. Докажите, что число $2^{10} + 5^{12}$ — составное.

12.29. Докажите, что число $222^{333} + 333^{222}$ — составное.

12.30. Докажите, что число $2010^{2010} - 1$ делится на 2009.

12.31. Докажите, что если сумма цифр десятичной записи числа n равна сумме цифр десятичной записи числа $2n$, то число n делится на 9. Верно ли обратное утверждение?

12.32. Найдите все числа вида $\overline{34x5y}$, кратные 36.

12.33. Докажите, что для любого натурального n число n^2+n чётное.

12.34. Докажите, что для любого целого n число n^3+2n делится на 3.

12.35. Докажите, что для любого целого n число n^3+5n делится на 6.

12.36. Докажите, что для любого целого n число n^5-n делится на 30.

12.37. Докажите, что в последовательности 11, 111, 1111, 11111,... нет числа, являющегося квадратом натурального.

12.38. Докажите, что все числа вида 16, 1156, 111556, 11115556,... являются полными квадратами.

12.39. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 54 и 72.

12.40. Докажите, что при любом натуральном значении n числа $3n+5$ и $5n+8$ взаимно просты.

12.41. Докажите, что для любого натурального n наибольший общий делитель чисел $n^2+10n+21$ и $n^2+9n+18$ равен $n+3$.

12.42. Докажите, что для любого натурального n наименьшее общее кратное чисел n^2+6n+9 и $n+4$ равно $n^3+10n^2+33n+36$.

12.43. Докажите, что ни при каком целом n число $n^2+5n+16$ не делится на 169.

12.44. Запишите число 0,11(7) в виде обыкновенной дроби.

12.45. Докажите, что числа $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ — иррациональные.

12.46. Докажите, что числа $\log_2 3$ и $\log_4 6$ — иррациональные.

12.47. Решите уравнение $3x-4y=1$ в целых числах.

12.48. Докажите, что уравнение $x^2+1=3y$ не имеет решений в целых числах.

12.49. Решите уравнение $xy+x+y=0$ в целых числах.

12.50. Докажите, что если хотя бы одно из рациональных чисел p и q отлично от -2, то ни один из корней уравнения $x^2+px+q=0$ не равен $1+\sqrt{3}$.

13. Задачи на сложные проценты

13.1. 31 декабря 2013 г. Сергей взял в банке 9 930 000 руб. в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

13.2. Вклад в целое число миллионов рублей планируется открыть на 4 года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале 3-го и 4-го годов вклад ежегодно пополняется на 1 млн руб. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором через 4 года вклад будет больше 10 млн руб.

13.3. Клиент 31 декабря взял в банке кредит в размере S руб. под фиксированный процент (годовых). Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк увеличивает имеющийся на этот момент долг на $p\%$, затем клиент переводит в банк фиксированную сумму в a руб. в качестве частичного (или полного) погашения долга. В итоге клиент ровно за 2 года выплатил долг полностью. Если бы он платил каждый год не по a руб., а по b руб., то выплатил бы долг ровно за 4 года. Зная произвольные две из трех величин a, b и p, найдите третью, а также величину S.

13.4. В конце года Петр взял в банке 100 000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: в конце каждого следующего года банк увеличивает оставшуюся сумму долга на определенное количество процентов, затем Игорь переводит очередной транш. Игорь выплатил кредит за 2 транша, переведя сначала 51 000 руб., а потом — 66 600 руб. Под какой процент банк выдал кредит Петру?

13.5. В банк помещена сумма 3900 тыс. руб. под 50% годовых. В конце каждого из первых 4 лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял к вкладу?

13.6. Фермер взял кредит в банке 1,1 млн руб. 1 января 2015 г. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк увеличивает оставшуюся к этому моменту сумму долга на 2%, затем фермер переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев фермер может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 220 тыс. руб.?

13.7. Вновь созданное акционерное общество продало населению 1000 своих акций, установив скидку 10% на каждую пятую продаваемую акцию и 25% на каждую тринадцатую продаваемую акцию. В случае, если на одну акцию выпадают обе скидки, то применяется большая из них. Найдите сумму, вырученную от продажи всех акций, если цена акции (без скидок) составляла 1000 рублей.

13.8. 31 декабря 2015 г. «Садовое товарищество» взяло в банке 6 902 000 руб. в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся к этому моменту сумму долга (долг увеличивается на 12,5%), затем «Садовое товарищество» переводит в банк S руб. Какой должна быть сумма S, чтобы «Садовое товарищество» выплатило долг четырьмя равными платежами?

13.9. В банк кладется некоторая сумма денег. В каком случае на счету окажется больше денег: если банк начисляет 6% от имеющейся суммы один раз в год или если вклад через каждые три месяца увеличивается на 1,5?

13.10. Банк планирует вложить на один год 40% имеющихся у него средств клиентов в проект А, а остальные 60% — в проект Б. Проект А может принести прибыль от 19% до 24%, а Б — от 29% до 34%. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им проценты по заранее установленной ставке. Укажите все значения уровня этой ставки, при которых чистая прибыль банка будет заключена в пределах от 10% до 15% от имеющихся у него средств.

13.11. За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5% в месяц, затем 12%, $11\frac{1}{9}$ % и, наконец, 12,5% в месяц. Под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на $104\frac{1}{6}$%. Сколько месяцев вклад хранился в банке?

13.12. Два брокера купили акции одного достоинства на сумму 3640 руб. Когда цена на эти акции возросла, они продали часть акций на сумму 3927 руб. Первый брокер продал 75% своих акций, а второй — 80% своих. При этом сумма от продажи акций, полученная вторым брокером, на 140% превысила сумму, полученную первым брокером. На сколько процентов возросла цена одной акции?

13.13. Вкладчик в начале первого квартала кладет на счет в банке некоторую сумму. В конце квартала на нее начисляется x%, после чего он снимает половину исходной суммы. На оставшуюся часть счета в конце второго квартала начисляется y%, где $x + y = 150$. При каком значении x счет вкладчика в конце второго квартала окажется максимально возможным?

13.14. По вкладу А в конце каждого года банк увеличивает сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, на 10% в течение 3 лет, а по вкладу Б — на 11%, но только в течение первых 2 лет. Найдите наименьшее целое число процентов за 3-й год по вкладу Б, при котором за все 3 года этот вклад все еще останется выгоднее вклада А.

13.15. Наталья хочет взять в кредит 1 000 000 руб. под 10% годовых. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. На какое минимальное количество лет может Наталья взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 240 000 рублей?

14. Задачи с параметрами

14.1. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x + ay = 1, \\ ax + y = 2a \end{cases}$ имеет решения.

14.2. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} (a+1)x - y = a + 1, \\ x + (a-1)y = 2 \end{cases}$ имеет решения.

14.3. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} ax + y = 1, \\ 4x - 2y = a \end{cases}$ имеет бесконечно много решений.

14.4. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} ax + y = a^2, \\ x + ay = 1 \end{cases}$ не имеет решений.

14.5. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} ax + y = a^3, \\ x + ay = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение.

14.6. Для каждого значения a решите систему $\begin{cases} (a-4)x + 2y = 4, \\ (a-4)^3 x + 4ay = 16. \end{cases}$

14.7. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x + y = a, \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ имеет решения и всякое решение удовлетворяет неравенству $x > y$.

14.8. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} 3x - y = a, \\ 6x - ay = 4, \\ x > 0 > y \end{cases}$ имеет решение.

14.9. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$ имеет ровно два различных корня.

14.10. Найдите наименьшее целое значение a, при котором уравнение $x^2 - 2(a+2)x + 12 + a^2 = 0$ имеет ровно два различных корня.

14.11. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(a-2)x^2 + 2(a-2)x + 2 = 0$ не имеет корней.

14.12. Найдите все целые значения a, при каждом из которых уравнение $(a-2)x^2 + 2(a-2)x + 2 = 0$ не имеет корней.

14.13. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $ax^2 + 2(a+1)x + (a+3) = 0$ имеет два корня, расстояние между которыми больше 1.

14.14. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$ имеет два корня, сумма которых равна нулю.

14.15. Найдите все значения a, при каждом из которых один корень уравнения $x^2 + (2a-1)x + a^2 + 2 = 0$ вдвое больше другого.

14.16. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма квадратов чисел, составляющих решение системы $\begin{cases} 3x - y = 2 - a, \\ x + 2y = a + 1, \end{cases}$ будет наименьшей.

14.17. Найдите все значения a, при каждом из которых сумма квадратов корней квадратного трёхчлена $f(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 - 6a + 8$ принимает наименьшее значение.

14.18. Для каждого значения a решите уравнение $4^x - 2a(a+1)2^{x-1} + a^3 = 0$.

14.19. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2\cos 2x - 4a\cos x + a^2 + 2 = 0$ не имеет корней.

14.20. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\log_{a-6,5}(x^2+1) = \log_{a-6,5}((a-5)x)$ имеет ровно два различных корня.

14.21. Для каждого значения a решите уравнение $\log_{\sqrt{2-x}}\sqrt{2x+a} = 2$.

14.22. Для каждого значения a решите неравенство $3(2x-a) + 5a\sqrt{2x-a} - 2a^2 > 0$.

14.23. Найдите все значения a, при каждом из которых множество значений функции $f(x) = \dfrac{x^2 + 2ax - 4}{x^2 - 2x + 3}$ содержится в интервале $(-3; 2)$.

14.24. Известно, что $x = 1$, $y = -1$ — одно из решений системы $\begin{cases} 3ax + by = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\dfrac{1111\pi}{6}, \\ ax^2 + by^2 = 2. \end{cases}$ Найдите остальные решения системы.

14.25. Найдите все значения a, при каждом из которых множество решений неравенства $\dfrac{a + 2 - 2^{x-2}}{a+3} \geq \dfrac{5a+5}{2(2^x + 3a + 3)}$ содержит какой-нибудь луч на числовой прямой.

14.26. Для каждого значения a решите уравнение $|x+3| - a|x-1| = 4$.

14.27. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2|x-2| + a + x = 4$ имеет хотя бы один корень, причём все его корни лежат на отрезке $[0; 4]$.

14.28. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(x^2 - (a+1)x + 3(a-2))\log_{a-x}(2a - x - 1) = 0$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[-1; 2]$, а вне этого отрезка корней не имеет.

14.29. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x - a^2 \log_3 y = 1, \\ x + 3a \log_3 y = 1 \end{cases}$ имеет решения и всякое решение удовлетворяет неравенству $y > 1 - x$.

14.30. Найдите все значения a, при каждом из которых для любого b найдётся c такое, что система $\begin{cases} 2x + by = ac^2 + c, \\ bx + 2y = c - 1 \end{cases}$ имеет решения.

14.31. Найдите все значения a, при каждом из которых для любого b система $\begin{cases} x - by + az^2 = 0, \\ 2bx + (b-6)y - 8z = 8 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

14.32. Найдите все тройки (a, b, c), при которых уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет единственный корень $x = -1$, причём $a + b + c = 1$.

14.33. Известно, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней, и $a + b + c < 0$. Найдите знак c.

14.34. Числа $a < 0$ и b таковы, что $x = 7$ является корнем уравнения $ax^2 + bx + 2 = 0$. Решите неравенство $ax^4 + bx^2 + 2 > 0$.

14.35. Найдите все значения a, при каждом из которых графики функций $y = \dfrac{3x+1}{x}$ и $y = \dfrac{4x + 3a - 7}{ax - 1}$ разбивают координатную плоскость ровно на пять частей.

14.36. Для каждого значения a решите уравнение $\log_a(x^2 - 3a) = \log_a(ax^2 - 3x)$.

14.37. Найдите все значения a, при каждом из которых все корни уравнения $3ax^2 + (3a^3 - 12a^2 - 1)x - a(a-4) = 0$ удовлетворяют неравенству $|x| < 1$.

14.38. Для данных чисел $a = \log_y x$ и $b = \log_z x$ найдите $\log_{\sqrt[3]{xyz}} \left(\dfrac{yz}{x^3} \right)^2$.

14.39. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $\log_{\frac{2a-15}{5}} \left(\dfrac{\sin x + \sqrt{3} \cos x + a - 5}{5} \right) > 0$ выполняется для всех x.

14.40. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} a(x-4) = 3(y+2), \\ y + \sqrt{x} = 0 \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

14.41. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} 8xy - 25 = 0, \\ x^2 = y + 2x, \\ x^2 + y^2 \le a \end{cases}$ имеет единственное решение.

14.42. Для каждого значения a определите, сколько решений имеет система $\begin{cases} |x|+|y|=a, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

14.43. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} y-x^2=\left|x^2-\frac{3}{2}x-1\right|, \\ y+4x=a \end{cases}$ имеет единственное решение.

14.44. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $(x^2-x+a^2+2)^2=4a^2(2x^2-x+2)$ имеет ровно три различных корня.

14.45. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x)=a(2\sin x+\cos^2 x+1)$ не принимает значений, больших 3.

14.46. Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x)=\log_{25-a^2}(\cos x+\sqrt{8}\sin x-a)$ определена при всех x.

14.47. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $|3\sin^2 x+2a\sin x\cos x+\cos^2 x+a|\leq 3$ выполняется при всех x.

14.48. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $5\cos x+\sin x+\cos(x-b)=a$ имеет решение:

а) хотя бы при одном b;

б) при любом b.

14.49. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2\cos^2\left(2^{2x-x^2}\right)=a+\sqrt{3}\sin\left(2^{2x-x^2+1}\right)$ имеет хотя бы один корень.

14.50. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2+2ax+4a^2-5a+3\leq 4\sin y-3\cos y, \\ 0\leq y\leq 2\pi \end{cases}$ имеет единственное решение.

14.51. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x+y+z=x^2+4y^2, \\ x+2y+3z=a \end{cases}$ имеет единственное решение.

14.52. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} |x^2-5x+4|-9x^2-5x+4+10x|x|=0, \\ x^2-2(a-1)x+a(a-2)=0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

14.53. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} 4x=a+3-y^2+2y, \\ x^2+y^2=2y \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

14.54. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2+(5a+2)x+4a^2+2a<0, \\ x^2+a^2=4 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

14.55. Найдите все натуральные n, при каждом из которых арифметическая прогрессия не восстанавливается однозначно по её семнадцатому члену и сумме первых n членов.

15. Задачи с целыми числами

15.1. Первый член геометрической прогрессии с целочисленным знаменателем, равным 5, а разность между утроенным вторым членом и половиной третьего – больше 20. Найдите знаменатель прогрессии.

15.2. После деления двузначного числа на сумму его десятичных цифр в частном получилось 7, а в остатке 6. После деления того же числа на произведение его цифр в частном получилось 3, а в остатке 11. Найдите это число.

15.3. Ученик перемножил два данных натуральных числа и допустил ошибку, увеличив произведение на 372. Поделив для проверки полученный результат на меньшее из данных чисел, ученик правильно получил в частном 90 и в остатке 29. Найдите данные числа.

15.4. Мастер делает в час целое число деталей, большее 5, а каждый из его учеников – на 2 детали меньше. Один мастер выполняет заказ за целое число часов, а два ученика вместе на 1 ч быстрее. Из какого числа деталей состоит заказ?

15.5. На факультет подано от немедалистов на 600 заявлений больше, чем от медалистов. Девушек среди немедалистов больше, чем среди медалистов, в 5 раз, а юношей среди немедалистов больше, чем среди медалистов, в n раз, где n — натуральное число, и $6 \le n \le 13$. Найдите общее число заявлений, если среди медалистов юношей на 20 больше, чем девушек.

15.6. Имеется два проекта застройки микрорайона. По первому проекту предполагается построить несколько одинаковых домов, содержащих в общей сложности 12 096 квартир. По второму проекту предполагается построить на 8 домов больше, причём домов также одинаковых, но с большим числом квартир в каждом и содержащих в общей сложности 23 625 квартир. Сколько домов предполагается построить по первому проекту?

15.7. Авиалинию, связывающую два города, обслуживают самолёты только трёх типов. Каждый самолёт первого, второго и третьего типа может принять на борт соответственно 230, 110 и 40 пассажиров, а также 27, 12 и 5 контейнеров. Все самолёты линии могут принять на борт одновременно 760 пассажиров и 88 контейнеров. Найдите число действующих на линии самолётов каждого типа, если их общее число не превосходит 8.

15.8. На клетчатой бумаге выделен прямоугольник размером $m \times n$ клеток, причём числа m и n взаимно простые и $m < n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 его клеток. Найдите все возможные значения m и n при данных условиях.

15.9. А, И, Б сидели на трубе в указанном порядке. К ним стали подсаживаться другие буквы так, что порядковый номер очередной буквы в русском алфавите равнялся сумме цифр порядковых номеров двух предыдущих букв. С некоторого момента буквы стали циклически повторяться.

1) Какая буква в циклически повторяющемся наборе встречалась наиболее часто?

2) Может ли циклически повторяющийся набор при каких-либо других начальных буквах состоять из одной буквы? Если да, то из какой?

15.10. Найдите все целочисленные решения системы $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0, \\ x + 2y < 15/2. \end{cases}$

15.11. Найдите все целочисленные решения системы $\begin{cases} 7875x^2 = 567y^3, \\ |\, x \,| \le 25. \end{cases}$

15.12. Найдите все целочисленные решения уравнения $3(x-3)^2 + 6y^2 + 2z^2 + 3y^2z^2 = 33$.

15.13. Найдите все целочисленные решения уравнения $3x = 5y^2 + 4y - 1$ и докажите, что для любого такого решения (x, y) число $x^3 + y^3$ — нечётное.

15.14. Найдите наименьшее нечётное натуральное число, кратное 9 и дающее остаток 7 при делении на 13.

15.15. Первая бригада изготовила деталей на 15% больше, чем вторая. Все детали уложили в два ящика: в первый ящик – менее 1000 деталей, а во второй – более 1000. Сколько деталей положили в первый ящик, если в нем оказалось 2/3 деталей, изготовленных первой бригадой, и 1/7, изготовленных второй?

15.16. Найдите число студентов, сдавших экзамен, если шестая их часть получила оценку «удовлетворительно», 56% — «хорошо», а 14 человек — «отлично», причём отличники составили более 4%, но менее 9% от общего числа экзаменовавшихся студентов.

15.17. Экзаменующиеся сдавали экзамены в два потока в нескольких аудиториях. В каждом потоке число экзаменующихся в каждой аудитории, было равно числу аудиторий. Если бы экзамены проводились в другом корпусе, то их пришлось бы провести в три потока, причём в каждом потоке в каждой аудитории экзаменующихся удалось бы рассадить по рядам так, что число рядов, а также число людей в ряду было бы равным числу аудиторий. Какое наименьшее число экзаменующихся могло быть проэкзаменовано при этих условиях?

15.18. В двух коробках лежали карандаши: в первой – красные, во второй – синие, причём красных было меньше, чем синих. Сначала 40% карандашей из первой коробки переложили во вторую. Затем 20% карандашей, оказавшихся во второй коробке, переложили в первую, причём половину из переложенных карандашей составляли синие. В итоге красных карандашей в первой коробке оказалось на 46 больше, чем во второй. Найдите общее количество синих карандашей.

15.19. Найдите все пары целых чисел a и b, для каждой из которых уравнение $\arcsin\dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} - a \cdot 2^{\sin \pi a x} - \left| \arcsin\dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} + a \cdot 2^{\sin \pi a x} \right| = 2ab$ имеет не менее 10 различных корней.

15.20. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $a^3 \mid y \mid \le \sqrt{2}(a^2 - x^2)$ имеет наименьшее количество целочисленных решений.

15.21. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $x^2 - 3x + 3 \mid x + a \mid + a \le 0$ имеет наибольшее количество целочисленных решений.

15.22. Найдите все целочисленные решения неравенства $\sqrt{x^3 - 5x - 3} \le 6 - x$.

15.23. Найдите все целочисленные решения уравнения $(x^2 + y^2)(x + y - 3) = 2xy$.

15.24. Найдите все пары натуральных чисел x, y, удовлетворяющие системе
$$\begin{cases} 2x + 47 < 22y - 2y^2, \\ 7x + 14 \le 4y. \end{cases}$$

15.25. Найдите все целочисленные решения системы $\begin{cases} x^2 + y^2 < 16x - 22y - 171, \\ 30x - y^2 > 252 + x^2 + 14y. \end{cases}$

15.26. Найдите все целые a, при каждом из которых графики функций $y = \log_{1/\sqrt{2}}(x - 2a)$ и $y = \log_2(x - 2a^3 - 3a^2)$ пересекаются в точке с целочисленными координатами.

15.27. Найдите все a, при каждом из которых уравнение
$$\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x + \left(\frac{3}{2}\right)^{a-x} - \frac{3}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^a - \frac{5}{8}\right)\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-2} + \left(\frac{3}{2}\right)^{2a-2x-3} - 4\left(\frac{3}{2}\right)^{2a-5} + 2\right) = 0$$
имеет хотя бы один корень, и все его корни – целочисленные.

15.28. Первые 80 км пути из одного пункта в другой автобус идёт по шоссе, а оставшиеся 120 км – по грунтовой дороге, на два часа дольше. Совершив более четырёх рейсов по маршруту туда и обратно, он затратил менее 168 ч, включая стоянки в конечных пунктах. Найдите скорости движения автобуса по шоссе и по грунтовой дороге, если за время, которое автобус провел в движении, он со скоростью, равной среднему арифметическому этих двух скоростей, проехал бы 2100 км.

15.29. Когда груз разложили в вагоны по 80 т, один вагон оказался недогружен. Если бы груз разложили в вагоны по 60 т, то понадобилось на 8 вагонов больше, причём один вагон опять оказался недогруженным. Если груз разложили в вагоны по 50 т, то понадобилось еще на 5 вагонов больше, причём все вагоны оказались полными. Найдите вес груза.

15.30. В саду было подготовлено чётное число ям для посадки деревьев. После посадки яблонь, груш и слив оказалось, что использовано менее трети ям, груш посажено на 6 больше, чем яблонь, а свободных ям оказалось втрое больше, чем посажено слив. Если бы яблонь посадили втрое больше, то свободных осталось бы 59 ям. Сколько ям для посадки было подготовлено?

15.31. Какое наибольшее число членов может содержать конечная арифметическая прогрессия с разностью 4 при условии, что квадрат её первого члена в сумме с остальными членами не превосходит 100?

15.32. В двух ящиках содержится в общей сложности более 29 деталей. Число деталей, содержащихся в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем втрое превышает число деталей, содержащихся во втором ящике. Утроенное число деталей, содержащихся в первом ящике, превышает удвоенное число деталей, содержащихся во втором ящике, но менее чем на 60. Сколько деталей содержится в каждом ящике?

15.33. Три мальчика хотели вместе купить две одинаковые игрушки. Сложив все имеющиеся у них деньги, они не смогли купить даже одну игрушку. Если бы у первого мальчика было вдвое больше денег, то им на покупку двух игрушек не хватило бы 34 коп. Когда третьему мальчику добавили вдвое больше денег, чем у него было, после покупки двух игрушек у них еще осталось 6 коп. Сколько стоили игрушки, если первоначально у второго мальчика было на 9 коп. больше, чем у первого?

15.34. Число двухкомнатных квартир в доме вчетверо больше числа однокомнатных, а число трёхкомнатных квартир кратно числу однокомнатных. Если число трёхкомнатных квартир увеличить впятеро, то их станет на 22 больше, чем двухкомнатных. Сколько всего квартир в доме, если их не меньше 100?

15.35. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$9x^2y^2 + 9xy^2 + 6x^2y + x^2 + 2y^2 + 18xy + 5x + 7y + 6 = 0.$$

15.36. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$14x^4 - 5y^4 - 3x^2y^2 - 125x^2 + 82y^2 + 51 = 0.$$

15.37. Найдите все целочисленные корни уравнения $\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}\right)\right) = 1$.

15.38. Найдите все целочисленные решения системы $\begin{cases} 4^{x^2+2xy+1} = 7^{|y|-1}(z+2), \\ \sin\dfrac{3\pi z}{2} = 1. \end{cases}$

15.39. Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} 12x^2 - 4x - 2xy + 3y - 9 = 0, \\ axy + ayz + azx > xyz \end{cases}$

имеет ровно пять различных решений в натуральных числах.

15.40. Решите уравнение $\cos\left(\pi\left(x + 7\sqrt{x}\right)\right)\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}(4x + \sqrt{x}\right)\right) = 1$.

15.41. Найдите все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие равенству

$$\sqrt{3x^2 - 2z^2 + 2y^2 + 2z - 6y + \frac{\sqrt{2}}{4}x - 41} + \sqrt{2x^2 - 4\sqrt{2}(\cos\pi y + \cos\pi z)} = 0.$$

15.42. Найдите все целочисленные решения уравнения $x^2 + 1953^{100}xy - 1995^{100}y^2 = 0$.

15.43. В ящике находится 13 черных шаров и 17 белых. Разрешается:

а) увеличить на 1 число черных шаров и одновременно увеличить на 4 число белых;

б) увеличить на 2 число черных шаров и одновременно уменьшить на 1 число белых;

в) уменьшить на 4 число черных шаров и одновременно увеличить на 5 число белых;

г) уменьшить на 5 число черных шаров и одновременно уменьшить на 2 число белых.

Можно ли, совершая в каком-либо порядке и количестве описанные действия, добиться, чтобы в ящике оказалось 37 черных шаров и 43 белых?

15.44. Две бригады землекопов одинаковой производительности каждый вырыли по одинаковому котловану. Вторая бригада работала на полчаса больше первой. Если бы в первой бригаде было на 5 человек больше, то она закончила бы работу на 2 ч раньше. Найдите число землекопов в каждой бригаде.

15.45. Рота солдат прибыла на парад прямоугольным строем по 24 человека в ряд, однако не все прибывшие солдаты смогли участвовать в параде. Оставшийся для парада состав перестроили так, что число рядов уменьшилось на 2, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Если бы все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы построить в виде квадрата. Сколько солдат было в роте?

15.46. Три фермера привели баранов для продажи на ярмарке: первый — 10, второй — 16, третий — 26. В первый день они установили одинаковую цену (в целое число рублей), и каждый продал не менее одного барана, но не всех. Во второй день они продали остальных баранов, опять же по одинаковой, но более низкой цене. По какой цене продавались бараны в первый и во второй день, если каждый фермер выручил от продажи по 3500 руб.?

15.47. За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала по 5%, затем по $11\frac{1}{9}\%$, по $7\frac{1}{7}\%$ и, наконец, по 12%. Под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на 180%. Определите срок хранения вклада.

15.48. Пусть $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, где m и n — натуральные числа. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3n-m}{5n+2m}$, если известно, что она сократима?

15.49. В школьной газете сообщается, что процент учеников некоторого класса, повысивших во втором полугодии успеваемость, заключён в пределах от 2,9% до 3,1%. Каково наименьшее число учеников в классе?

15.50. Из строительных деталей двух видов можно собирать дома трёх типов. Для сборки 12-квартирного дома необходимо 70 деталей первого вида и 100 второго, для сборки 16-квартирного дома — 110 деталей первого типа и 150 второго, а для сборки 21-квартирного дома — 150 деталей первого типа и 200 второго. Всего имеется 900 деталей первого вида и 1300 второго. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим?

15.51. С завода на стройку нужно перевезти 24 больших и 510 маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомашинами, каждая из которых вмещает 44 маленьких блока и имеет грузоподъёмность 19 т. Масса маленького блока 0,2 т, большого — 3,6 т, большой блок занимает место 14 маленьких. Найдите наименьшее число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков.

15.52. Найдите наибольшее целочисленное решение неравенства $4 \cdot 3^{2x+1} + 3^x < 1$.

15.53. В магазине продаются гвоздики и розы. Гвоздика стоит 1,5 у.е., роза — 2 у.е. На покупку гвоздик и роз можно затратить не более 30,5 у.е. При этом число гвоздик не должно отличаться от числа роз более чем на 6. Необходимо купить максимально возможное суммарное количество цветов, при этом гвоздик нужно купить как можно меньше. Сколько гвоздик и сколько роз можно купить при указанных условиях?

15.54. Множество состоит из более семи различных натуральных чисел, наименьшее общее кратное которых равно 210, а произведение — делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа, причём наибольший общий делитель любых двух из них больше единицы. Найдите все числа, составляющие это множество.

15.55. Сколько точек с целочисленными координатами находится строго внутри криволинейной трапеции, образованной осью абсцисс, прямыми $x = \frac{3}{2}$, $x = 129$ и графиком функции $y = \log_2 x$?

15.56. Найдите все целые значения n, для каждого из которых число $\log_{2n-1}(n^2+2)$ является рациональным.

15.57. Сократите дробь $\dfrac{1234567\overbrace{88\ldots87}^{2000}7654321}{12345678\underbrace{99\ldots9}_{1999}87654321}$ до несократимой.

15.58. Сколькими способами можно разбить на две команды группу из 7 мальчиков и 8 девочек так, чтобы в одной из команд было ровно 4 мальчика и 3 девочки?

15.59. Билеты имеют номера от 000001 до 999999. Билет считается «счастливым», если первые три его цифры нечётны и различны, а вторые – чётны, причём цифры 7 и 8 не стоят рядом. Сколько существует различных номеров «счастливых» билетов?

15.60. Имеются 12 карандашей попарно различной длины. Сколькими способами можно уложить их в коробку в два слоя по шесть карандашей так, чтобы в каждом слое карандаши были упорядочены по возрастанию длины (слева направо), а каждый карандаш верхнего слоя лежал строго над карандашом нижнего слоя и был короче карандаша?

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ.
ГЛАВА I. ЧАСТЬ 2

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 1

Часть 2

13. а) Решите уравнение $\left(3^x-6\right)^2-16\left|3^x-6\right|=15-2\cdot 3^{x+1}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[1;\ 2]$.

Решение.

Преобразуем уравнение:

$$\left(3^x-6\right)^2-16\left|3^x-6\right|+6\left(3^x-6\right)+21=0.$$

Пусть $3^x-6=t$.

а) При $t\geqslant 0$ получаем $t^2-10t+21=0$, откуда $t=3$ или $t=7$, следовательно, $x=2$ или $x=\log_3 13$.

При $t<0$ получаем $t^2+22t+21=0$, откуда $t=-1$ или $t=-21$, следовательно, $x=\log_3 5$.

б) Поскольку $1=\log_3 3<\log_3 5<\log_3 9=2<\log_3 13$, отрезку $[1;\ 2]$ принадлежат только корни $\log_3 5$, 2.

Ответ: а) $\log_3 5$, 2, $\log_3 13$; **б)** $\log_3 5$, 2.

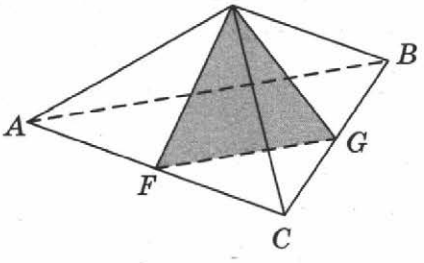
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14. Основанием правильной треугольной пирамиды $MABC$ служит правильный треугольник ABC со стороной 6. Ребро MA перпендикулярно грани MBC. Через вершину пирамиды M и середины рёбер AC и BC проведена плоскость α.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью α является равносторонним треугольником.

б) Найдите расстояние от вершины C до плоскости α.

Решение.



а) Обозначим F и G середины сторон AC и BC соответственно (см. рисунок).

Из условия следует, что треугольник AMC прямоугольный с прямым углом при вершине M. Поскольку пирамида правильная, все боковые грани — прямоугольные равнобедренные треугольники. Отрезок

MF — медиана прямоугольного треугольника AMC, проведённая к гипотенузе, поэтому $MF = \frac{6}{2} = 3$. Аналогично, $MG = 3$. Кроме того, $FG = 3$, поскольку FG — средняя линия равностороннего треугольника ABC со стороной 6. Таким образом, все стороны треугольника FMG равны.

б) Искомое расстояние r найдём как высоту треугольной пирамиды $CMFG$, считая основанием сечение MFG. Объём этой пирамиды равен четверти объёма пирамиды $MABC$:

$$V_{CMFG} = \frac{1}{4}V_{MABC} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot AM\cdot BM\cdot CM = \frac{1}{24}\left(\frac{6\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

С другой стороны, $V_{CMFG} = \frac{1}{3}S_{MFG}\cdot r = \frac{1}{3}\cdot\frac{3^2\sqrt{3}}{4}\cdot r = \frac{3r\sqrt{3}}{4}$.

Получаем: $\frac{3r\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$, откуда $r = \sqrt{6}$.

Ответ: б) $\sqrt{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15. Решите неравенство $\frac{1}{\log_{(x-1)}\frac{x}{6}} \geqslant -1$.

Решение.

Перейдём к десятичным логарифмам:

$$\frac{1}{\log_{(x-1)}\frac{x}{6}} \geqslant -1; \quad \begin{cases} \dfrac{\lg(x-1)+\lg\frac{x}{6}}{\lg\frac{x}{6}} \geqslant 0, \\ x \neq 2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \dfrac{\lg(x-1)\frac{x}{6}}{\lg\frac{x}{6}} \geqslant 0, \\ x \neq 2 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{(x-1)\frac{x}{6}-1}{\frac{x}{6}-1} \geqslant 0, \\ x \neq 2, \\ x > 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{(x-1)x-6}{x-6} \geqslant 0, \\ x \neq 2, \\ x > 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-x-6}{x-6} \geqslant 0, \\ x \neq 2, \\ x > 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{(x+2)(x+3)}{x-6} \geqslant 0, \\ x \neq 2, \\ x > 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dfrac{x-3}{x-6} \geqslant 0, \\ x \neq 2, \\ x > 1 \end{cases}; \quad \left[\begin{array}{l} 1 < x < 2; \\ 2 < x \leqslant 3; \\ x > 6. \end{array} \right.$$

Ответ: (1; 2), (2; 3], (6; +∞).

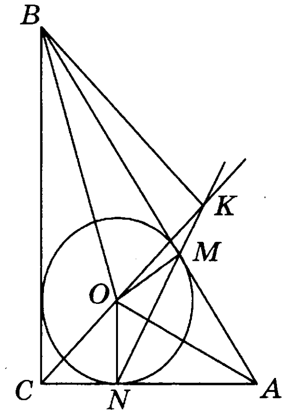
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16. Окружность с центром O, вписанная в прямоугольный треугольник ABC, касается гипотенузы AB в точке M, а катета AC — в точке N, $AC < BC$. Прямые MN и CO пересекаются в точке K.

а) Докажите, что угол CKN в два раза меньше угла ABC.

б) Найдите BK, если $BC = 3\sqrt{2}$.

Решение.



а) Центр окружности, вписанной в треугольник, совпадает с точкой пересечения его биссектрис, поэтому лучи BO и CO — биссектрисы углов ABC и ACB.

Пусть $\angle ABC = 2\alpha$. Тогда $\angle BAC = 90° - 2\alpha$. Из равнобедренного треугольника AMN находим, что

$$\angle ANM = \frac{1}{2}(180° - \angle BAC) = \frac{1}{2}(180° - (90° - 2\alpha)) = 45° + \alpha.$$

По теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle CKN = \angle ANM - \angle NCK = 45° + \alpha - 45° = \alpha = \frac{1}{2}\angle ABC.$$

Что и требовалось доказать.

б) Пусть r — радиус вписанной окружности. Треугольник CKN подобен треугольнику CBO. Следовательно,

$$\frac{BC}{CK} = \frac{CO}{CN} = \frac{r\sqrt{2}}{r} = \sqrt{2}, \; CK = \frac{BC}{\sqrt{2}} = 3.$$

Из треугольника CBK по теореме косинусов находим

$$BK^2 = CB^2 + CK^2 - 2CB \cdot CK \cos\angle KCB = \left(3\sqrt{2}\right)^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos 45° = 3^2.$$

Ответ: 3.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17. По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 14% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 8% в первый год и на целое число n процентов за второй год. Найдите наименьшее значение n, при котором за два года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Решение.

Пусть на каждый тип вклада была внесена одинаковая сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 14%, то есть увеличивается в 1,14 раза. Поэтому через два года сумма на вкладе «А» будет равна

$$1{,}14^2S = 1{,}2996S.$$

Аналогично, сумма на вкладе «Б» будет равна

$$1{,}08\cdot\left(1+\frac{n}{100}\right)S,$$

где n — некоторое натуральное число процентов.

По условию требуется найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$1{,}08\cdot\left(1+\frac{n}{100}\right)S > 1{,}2996S;$$

$$\left(1+\frac{n}{100}\right) > \frac{1{,}2996}{10800} = 1{,}203\ldots.$$

При $n = 21$ неравенство

$$1{,}21 > 1{,}203\ \ldots$$

верно, а при $n = 20$ неравенство

$$1{,}20 > 1{,}203\ \ldots$$

неверно, как и при всех меньших n.

Ответ: 21.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sin\sqrt{ax - x^2 - \pi^2} + \cos 2\sqrt{ax - x^2 - \pi^2} = 0$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Сделаем замену $y = \sqrt{ax - x^2 - \pi^2}$. Получаем:

$$\sin y + \cos 2y = 0; \quad 2\sin^2 y - \sin y - 1 = 0,$$

откуда $\sin y = 1$ или $\sin y = -\frac{1}{2}$.

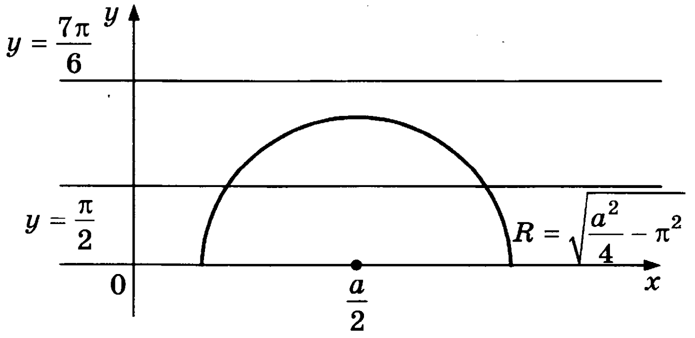
Тогда $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $y = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$ или $y = \frac{11\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

При $y \geqslant 0$ на координатной плоскости эти уравнения определяют множество горизонтальных прямых. Две самые близкие к оси абсцисс прямые имеют уравнения $y = \frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{7\pi}{6}$.

Уравнение $y = \sqrt{ax - x^2 - \pi^2}$ запишем в виде

$$y = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \pi^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}.$$

Получилось уравнение полуокружности радиусом $\sqrt{\frac{a^2}{4} - \pi^2}$ с центром, лежащим на оси абсцисс.



Данное уравнение имеет ровно два решения, если полуокружность пересекает прямую $y=\frac{\pi}{2}$, но не имеет общих точек с прямой $y=\frac{7\pi}{6}$. Запишем и решим неравенство:

$$\frac{\pi}{2}<\sqrt{\frac{a^2}{4}-\pi^2}<\frac{7\pi}{6};\ \frac{\pi^2}{4}<\frac{a^2}{4}-\pi^2<\frac{49\pi^2}{36};\ 5\pi^2<a^2<\frac{85\pi^2}{9},$$

откуда $-\frac{\sqrt{85}\pi}{3}<a<-\sqrt{5}\pi$ или $\sqrt{5}\pi<a<\frac{\sqrt{85}\pi}{3}$.

Ответ: $-\frac{\sqrt{85}\pi}{3}<a<-\sqrt{5}\pi$ или $\sqrt{5}\pi<a<\frac{\sqrt{85}\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19. У Бори нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух из которых есть вода. За один шаг Боря переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из вёдер запрещается.

а) Мог ли Боря через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 2 литра воды, если сначала у него были вёдра объёмами 4 литра и 7 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 8 литров?

б) Мог ли Боря через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех вёдрах, если сначала у него были вёдра объёмами 5 литров и 7 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом 10 литров?

в) Сначала у Бори были вёдра объёмами 3 литра и 6 литров, полные воды, а также пустое ведро объёмом n литров. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n, если известно, что, как бы ни старался Боря, он не сможет получить через несколько шагов ровно 4 литра воды в одном из вёдер?

Решение.

а) Пусть запись (k, l, m) означает, что в ведрах объёмами 4, 7 и 8 литров находится k, l и m литров воды соответственно. Тогда Боря мог действовать так, чтобы объёмы воды в вёдрах были последовательно (4, 7, 0), (0, 7, 4), (0, 3, 8), (3, 0, 8), (3, 7, 1), (4, 6, 1), (0, 6, 5) и (4, 2, 5). Во втором ведре после нескольких шагов оказалось 2 литра воды.

б) После каждого переливания либо одно из вёдер становится пустым, либо одно из вёдер становится полным. Если во всех вёдрах оказались равные объёмы воды, то в каждом из них по 4 литра. Значит, ни одно из вёдер не пусто и не полно. Пришли к противоречию.

в) Если $n\geqslant 9$, то объём третьего ведра не меньше, чем общий объём воды у Бори. В этом случае все возможные записи состояний объёмов воды в вёдрах это (3, 6, 0), (0, 6, 3), (3, 0, 6), (0, 3, 6), (3, 3, 3) и (0, 0, 9). Получить другое состояние невозможно, так как в вёдрах всегда оказываются объёмы воды в литрах, кратные 3.

Приведём пример последовательных состояний для подходящих под условие переливаний в случае $n = 8$: (3, 6, 0), (3, 0, 6), (1, 0, 8), (1, 6, 2), (3, 4, 2).

Этот пример показывает, что наибольшее натуральное значение может принимать n — это 8.

Ответ: а) Да. **б)** Нет. **в)** 8.

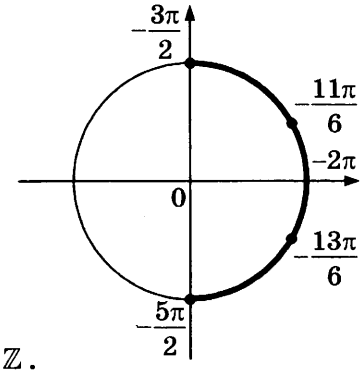
Содержание критерия	**Баллы**
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНАЯ РАБОТА 16

Часть 2

13. а) Решите уравнение $\left(49^{\sin x}\right)^{\cos x}=7^{\sqrt{3}\sin x}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{2}\right]$.



Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$7^{2\sin x\cdot\cos x}=7^{\sqrt{3}\sin x};$$

$$2\sin x\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0.$$

Из уравнения $\sin x = 0$ получаем $x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Из уравнения $2\sin x\left(\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$ получаем и $x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{2}\right]$. Получаем $x = -2\pi$, $x=-\frac{11\pi}{6}$ и $x=-\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $\pi k;\ \pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; **б)** $-2\pi; -\frac{11\pi}{6};\ -\frac{13\pi}{6}$.

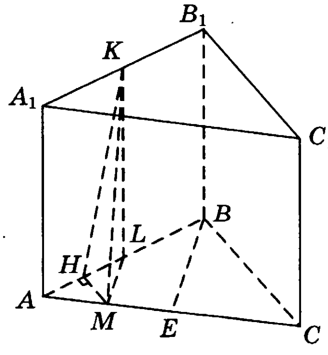
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB = 8$, $AC = 12$ и $AA_1 = 5$.

Решение.



а) Пусть L — середина ребра AB, E — середина ребра AC. Так как треугольник ABC — равнобедренный, отрезок BE перпендикулярен отрезку AC. Поскольку $AM : MC = 1 : 3$, имеем $AM = ME$. Значит, треугольник AML подобен треугольнику AEB. Следовательно, отрезок LM перпендикулярен отрезку AC. Поскольку отрезок KL перпендикулярен плоскости ABC, получаем, что отрезок AC перпендикулярен плоскости KLM, а значит, KM перпендикулярно AC.

б) Пусть MH — высота треугольника AML. Так как плоскости ABC и ABB_1 перпендикулярны, отрезок MH перпендикулярен плоскости ABB_1, и поэтому искомый угол равен углу HKM. Вычислим двумя способами площадь треугольника AML; получим $2S_{AML} = MH \cdot AL = MA \cdot ML$, откуда

$$MH = \frac{MA \cdot ML}{AL} = \frac{3\sqrt{4^2 - 3^2}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{4},$$

поэтому

$$\sin \angle HKM = \frac{HM}{KM} = \frac{HM}{\sqrt{5^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2}} = \frac{3\sqrt{7}}{16\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\arcsin \frac{3\sqrt{7}}{16\sqrt{2}}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15. Решите неравенство $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} > \sqrt{x-2}$.

Решение.

Перенесём один из радикалов в правую часть:

$$\sqrt{x+4} > \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}.$$

Легко видеть, что ОДЗ — это луч $x \geq 2$. Если x принадлежит ОДЗ, обе части неотрицательны, поэтому их можно возвести в квадрат с сохранением равносильности:

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ x+4 > x-1+x-2+2\sqrt{(x-1)(x-2)}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 2, \\ 7-x > 2\sqrt{x^2-3x+2}. \end{cases}$$

Правая часть неравенства заведомо неотрицательна, но, прежде чем возводить в квадрат, надо потребовать, чтобы и левая часть была неотрицательна:

$$\begin{cases} x \geq 2, \\ 7-x \geq 0, \\ x^2-14x+49 > 4\left(x^2-3x+2\right); \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 \leq x \leq 7, \\ 3x^2+2x-41 < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 \leq x \leq 7, \\ -\frac{1+2\sqrt{31}}{3} < x < \frac{2\sqrt{31}-1}{3}. \end{cases}$$

Понятно, что $-\frac{1+2\sqrt{31}}{3} < 0 < 2$. Сравнивая, находим, что $2 < \frac{2\sqrt{31}-1}{3} < 7$. Следовательно, решением неравенства является промежуток $2 \leq x < \frac{2\sqrt{31}-1}{3}$.

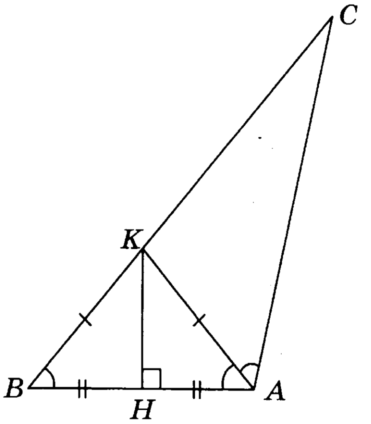
Ответ: $2 \leq x < \frac{2\sqrt{31}-1}{3}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16. Дан треугольник *ABC*. Серединный перпендикуляр к стороне *AB* пересекается с биссектрисой угла *BAC* в точке *K*, лежащей на стороне *BC*.

а) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник *AKC*, если $\sin B = 0{,}6$ и сторона $AC = 24$.



Решение.

а) Точка *K* лежит на серединном перпендикуляре к отрезку *AB*, значит, $\Delta AKH = \Delta BKH$ и $\angle ABC = \angle BAK = \angle CAK$. Треугольники *ABC* и *KAC* подобны по двум углам, поэтому $\frac{AC}{BC} = \frac{CK}{AC}$. Следовательно, $AC^2 = BC \cdot CK$.

б) Пусть $\angle KAB = \angle KBA = \beta$. Тогда

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-0{,}6} = 0{,}8.$$

По теореме синусов $\frac{CK}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin 2\beta}$, значит, $CK = \frac{AC}{2\cos\beta} = \frac{24}{2 \cdot 0{,}8} = 15$.

Используем равенство $AC^2 = BC \cdot CK$.

Поскольку $BC = BK + CK$ и $BK = AK$, получаем

$AC^2 = (AK + CK) \cdot CK$, значит, $AK = \frac{AC^2}{CK} - CK = \frac{24^2}{15} - 15 = 23{,}4$.

Пусть *r* — радиус окружности, вписанной в треугольник *AKB*. Тогда

$$r = \frac{2S_{ACK}}{AK + CK + AC} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot AK \cdot \sin\beta}{AK + CK + AC} = \frac{24 \cdot 23{,}4 \cdot 0{,}6}{23{,}4 + 15 + 24} = 5{,}4.$$

Ответ: 5,4.

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17. У фермера есть два поля, каждое площадью 20 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 450 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором — 400 ц/га.
Фермер может продавать картофель по цене 2000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 2500 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Решение.

Заметим, что на первом поле с одного гектара можно собрать либо 450 центнеров картофеля и получить 900 000 рублей, либо 250 центнеров свёклы и получить 625 000 рублей. Таким образом, нужно всё первое поле отдать под картофель. На втором поле с одного гектара можно собрать либо 300 центнеров картофеля и получить 600 000 рублей, либо 400 центнеров свёклы и получить 1 000 000 рублей. Поэтому второе поле нужно целиком отдать под свёклу.

В этом случае фермер сможет заработать

$$20 \cdot 900\,000 + 20 \cdot 1\,000\,000 = 38\,000\,000 \text{ рублей.}$$

Ответ: 38 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{a-3,5}\left(4x^2+8\right)=\log_{a-3,5}\left(4(a-3)x+9\right)$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Поскольку при всех x $4x^2 + 8 > 0$, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} a>3{,}5, \\ a-3{,}5\neq 1, \\ 4x^2+8=4(a-3)x+9; \end{cases} \qquad \begin{cases} a>3{,}5, \\ a\neq 4{,}5, \\ 4x^2-4(a-3)x+1=0. \end{cases}$$

Система имеет два различных корня, если квадратное уравнение имеет два различных корня и они удовлетворяют первым двум условиям. Для этого дискриминант квадратного уравнения должен быть положителен:

$$16(a-3)^2-16>0;\ a^2-6a+8>0;\ (a-2)(a-4)>0;\ a<2 \text{ или } a>4.$$

Учитывая первые два неравенства системы, получаем ответ: $4 < a < 4{,}5$ или $4 < a$.

Ответ: $4 < a < 4{,}5$; $4{,}5 < a$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19. Конечная последовательность a_1, a_2, ..., a_n состоит из $n \ge 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \le n-2$ выполнено равенство $a_{k+2}=2a_{k+1}-a_k+1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 5$.

б) Может ли в такой последовательности некоторое число встретиться три раза?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из двузначных чисел?

Решение.

а) Например, подходит последовательность 7, 5, 4, 4, 5.

б) При всех натуральных $k \le n-1$ положим $b_k=a_{k+1}-a_k$. Тогда равенство $a_{k+2}=2a_{k+1}-a_k+1$ равносильно равенству $b_{k+1}=b_k+1$. Следовательно, последовательность b_k при $1 \le k \le n-1$ образует арифметическую прогрессию с разностью 1.

Предположим, что некоторое натуральное число встретилось в последовательности a_k три раза. Значит, для некоторых индексов $p < q < r$ выполнены равенства $a_p = a_q = a_r$. Поэтому выполнены равенства $0=a_q-a_p=b_p+b_{p+1}+\ldots+b_{q-1}=(q-p)b_p+\frac{(q-p)(q-p-1)}{2}$ и, следовательно, равенство $b_p=-\frac{q-p-1}{2}$. Аналогично получаем $b_p=-\frac{r-p-1}{2}$. Приходим к противоречию, так как $q < r$.

в) Как доказано в решении пункта б, последовательность $b_k=a_{k+1}-a_k$ при $1 \le k \le n-1$ образует арифметическую прогрессию с разностью 1.

Если существует такое k, что $b_k = 0$, то разобьём последовательность $\{a_1;\ \ldots;\ a_n\}$ на две подпоследовательности $\{a_1;\ \ldots;\ a_k\}$ и $\{a_{k+1};\ \ldots;\ a_n\}$. Первая монотонно убывает, так как для каждого $i < k$ выполняется соотношение $a_{i+1}-a_i=b_i<0$. Аналогично вторая последовательность монотонно возрастает. Имеем

$$10 \le a_k=a_1+(b_1+b_2+\ldots+b_{k-1})=a_1-(1+2+\ldots+k-1)=a_1-\frac{k(k-1)}{2}\le 99-\frac{k(k-1)}{2};\ \frac{k(k-1)}{2}\le 89,$$

следовательно, $k \le 13$.

$$10 \le a_k=a_n-(b_{k+1}+b_{k+2}+\ldots+b_{n-1})=a_n-(1+2+\ldots+n-k-1)=a_n-\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}\le 99-\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$$

$$\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}\le 89,$$

следовательно, $n-k \le 13$. Значит, $n=(n-k)+k \le 26$.

Если же такого k, что $b_k = 0$, нет, то последовательность $\{a_1; \ldots; a_n\}$ либо монотонно возрастает, если все b_j положительны, либо монотонно убывает, если все b_j отрицательны.

В первом случае

$$10 \le a_1 = a_n - \left(b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}\right) \le a_n - \left(1 + 2 + \ldots + n - 1\right) = a_n - \frac{n(n-1)}{2} \le 99 - \frac{n(n-1)}{2}.$$

Во втором же

$$99 \ge a_1 = a_n - \left(b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}\right) \ge a_n - \left(-(n-1) - \ldots - 2 - 1\right) = a_n + \frac{n(n-1)}{2} \ge 10 + \frac{n(n-1)}{2}.$$

В обоих случаях $n \le 13$.

Пример последовательности $a_k = 88 + 13(1-k) + \frac{k(k-1)}{2}$ при $1 \le k \le 26$ показывает, что n может равняться 26. Действительно, тогда последовательность $b_k = a_{k+1} - a_k = k - 13$ при $1 \le k \le 25$ образует арифметическую прогрессию с разностью 1. Значит, при всех натуральных $k \le n-2$ выполнены равенства $b_{k+1} = b_k + 1$ и $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$. Кроме того, при $1 \le k \le 13$ выполнены неравенства $10 = a_{13} \le a_k \le a_1 = 88$, а при $14 \le k \le 26$ выполнены неравенства $10 = a_{14} \le a_k \le a_{26} = 88$ и, следовательно, все члены последовательности a_k являются двузначными числами.

Значит, $n = 26$.

Ответ: а) например, подходит последовательность 2, 4, 5, 5, 4; **б)** нет; **в)** при $n = 26$.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ОТВЕТЫ. ГЛАВА I

Тренировочная работа 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
28 500	23	1,5	3,5	31	27	6	20	−2	4	90	4

13	а) $\log_3 5$, 2, $\log_3 13$; б) $\log_3 5$, 2
14	б) $\sqrt{6}$
15	$(1;\ 2)$, $(2;\ 3]$, $(6;\ +\infty)$
16	3
17	21
18	$-\frac{\sqrt{85}\pi}{3} < a < -\sqrt{5}\pi$ или $\sqrt{5}\pi < a < \frac{\sqrt{85}\pi}{3}$
19	а) Да. б) Нет. в) 8

Тренировочная работа 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
37 500	144	3,5	2,1	3	30	5	4	1,25	2,5	72	8

13	а) 1; $\log_4 7$; $\log_4 10$; б) 1
14	б) $\sqrt{2}$
15	$(3;\ 4)$; $(4;\ 5]$; $(10;\ +\infty)$
16	5
17	26
18	$\left(-2;\ -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3};\ 2\right)$
19	а) Да. б) Нет. в) 5

Тренировочная работа 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
45 500	4	3	4	2	33	5	30	−0,75	9	75	81

13	а) 1; $\log_3 8$; 2; б) 1
14	б) $\sqrt{3}$
15	$(4;\ 5)$; $(5;\ 6]$; $(12;\ +\infty)$
16	6
17	2
18	$-\frac{7}{3} < a < -1;\ 1 < a < \frac{7}{3}$
19	а) Да. б) Нет. в) 14

Тренировочная работа 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
29 000	28,1	2,5	4,5	64	57	5	52	2,5	2	84	625

13	а) 1; $\log_5 8$; $\log_5 9$; б) 1; $\log_5 8$; $\log_5 9$
14	б) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$
15	$(1;\ 2);\ (2;\ 5];\ (20;\ +\infty)$
16	10
17	уменьшить на 30%
18	$-\frac{\sqrt{13}\pi}{3} < a < \frac{\sqrt{13}\pi}{3}$
19	а) Да. б) Нет. в) 11

Тренировочная работа 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
34 500	29,6	2	3,5	15	60	6	2	−0,5	8	60	9

13	а) 1; $\log_4 5$; $\log_4 9$; $\log_4 20$; б) $\log_4 20$
14	б) $\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$
15	$(2;\ 3);\ (3;\ 4];\ (8;\ +\infty)$
16	2
17	уменьшить на 10%
18	$-\frac{2}{3} < a < 0;\ \ 0 < a < \frac{2}{3}$
19	а) Да. б) Нет. в) 17

Тренировочная работа 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2420	4500	20	0,032	8	3	0,25	84	20	400	120	9

13	а) $2\pi n,\ \pm\arccos\frac{1}{6}+2\pi m,\ n,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-2\pi-\arccos\frac{1}{6},\ -2\pi+\arccos\frac{1}{6}$
14	б) $\frac{10}{7}$
15	$(-\infty;\ -2];\ 0;\ [1;\ 5]$
16	289
17	119
18	$-\frac{9}{4} < a \le -2$
19	а) Например, последовательность $1, 28, 46, 58$; б) нет; в) 2

Тренировочная работа 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
318,6	14	2,5	0,4	6	60	2	343	6	9,8	40	0,5

13	а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{35\pi}{6}$
14	б) 1 : 2
15	$[\log_2 7; 6]$
16	$\frac{11-2\sqrt{10}}{3}$
17	300 000 рублей
18	$x = 0$ при $a = 4$
19	а) Да, например, числа 7, 10 и 13; б) нет; в) $\frac{35}{24}$

Тренировочная работа 8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
27	0,8	10,5	0,25	−20	71	6	4	12	1000	40	−18

13	а) −4; 0; б) 0
14	б) $\frac{21}{16}$
15	$(-6; -4], [4; +\infty)$
16	13
17	90 кг
18	$0 \le k < \frac{4\sqrt{2}-2}{21}$ или $\frac{4\sqrt{2}-2}{21} < k \le \frac{1}{3}$
19	а) Да, например, числа 10, 11 и 15. б) Нет. в) $\frac{25}{17}$

Тренировочная работа 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6000	2	2,25	0,012	−3	99	2	20	9	8,39	30	9

13	а) $\frac{\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$
14	$\frac{\pi}{3}$
15	$(-\infty; -1], 0, [2; 6)$
16	$2\sqrt{7}$
17	86 000 рублей
18	$\left(\frac{1}{12}; +\infty\right)$
19	а) 36; б) 72; в) 1

Тренировочная работа 10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
11	5	39	0,26	−6	155	1	6	−22	8	15	7

13	а) $-\operatorname{arctg} 2+\pi n,\ -\operatorname{arctg} 3+\pi m,\ n,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-\pi-\operatorname{arctg} 2,\ -\pi-\operatorname{arctg} 3$
14	б) 1
15	$[-9;-2),(-2,-1),(-1,0),(0;7]$
16	1:15
17	6
18	$\left(-\infty;-\frac{9}{16}\right)$
19	а) например, подходит последовательность 2,4,5,5,4 ; б) нет; в) при $n=82$

Тренировочная работа 11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
41	11	1	0,95	−23	15	15	28	−6	12,8	8	10

13	а) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{43\pi}{6};\ \frac{47\pi}{6};\ \frac{49\pi}{6}$
14	б) $\arcsin\frac{1}{3}$
15	$(-\infty;-2);\ [-0,5;0);\ (0;2]$
16	$\frac{6\sqrt{13}}{5}$
17	1
18	$\sqrt[3]{2,25}\leqslant a\leqslant 4,\ a=0$
19	а) Да, например, 8, 4, 2, 3, 4, 5. б) Нет. в) 11

Тренировочная работа 12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
33	−5,5	2	0,91	−10	3	15	26	4	13,6	21	−5

13	а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$, где $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{4};\ \frac{11\pi}{4};\ \frac{13\pi}{4}$
14	б) 1
15	$(-\infty;-4);\ \left[-\frac{5}{3};-1\right]$
16	$\frac{12\sqrt{13}}{5}$
17	2
18	$0<a<\frac{4}{9};\ a>1$
19	а) Да, например, 12, 6, 3, 4, 2, 1, 2. б) Нет. в) 11

Тренировочная работа 13

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
44	0,5	3	0,87	−52	14	21	42	−4	7,2	28	1

13	а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$, где $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$
14	б) 4,5
15	$[-1{,}5;\ 0)$; $(0;\ 2]$; $(5;\ +\infty)$
16	$3\sqrt{13}$
17	1,5
18	$0 < a < \sqrt[3]{2{,}25}$; $a > 4$
19	а) Нет. б) Нет. в) Да, например, 2, 3, 4, 10 и 25

Тренировочная работа 14

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
58	4	4	0,97	−11	7	14	160	18	14,4	7	8

13	а) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{6}$
14	б) 4
15	$(-2;\ 0)$; $\left(0;\ \frac{2}{3}\right]$; $[1;\ +\infty)$
16	$6\sqrt{13}$
17	2,5
18	$\frac{4}{9} < a < 1$
19	а) Нет. б) Нет. в) Да, например, 1, 3, 9, 16, 5

Тренировочная работа 15

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
50	−13,5	5	0,94	−22	7	17,5	82	10	4	20	7

13	а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$, где $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{4}$; $\frac{15\pi}{4}$; $\frac{17\pi}{4}$
14	б) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
15	$(-\infty;\ -4]$; $[-3;\ 0)$; $(0;\ 2)$
16	$\frac{3\sqrt{13}}{5}$
17	3
18	$\sqrt[3]{2{,}25} < a < 4$
19	а) Нет. б) Нет. в) Да, например, 1, 5, 25, 2, 27

Тренировочная работа 16

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
11	9	6	0,0485	−1	28	6	1	5	55	50	−5

13	а) πk; $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-2\pi; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{13\pi}{6}$
14	$\arcsin\frac{3\sqrt{7}}{16\sqrt{2}}$
15	$2\le x<\frac{2\sqrt{31}-1}{3}$
16	5,4
17	38 млн рублей
18	$4 < a < 4{,}5$; $4{,}5 < a$
19	а) например, подходит последовательность 2, 4, 5, 5, 4; б) нет; в) при $n = 26$

Тренировочная работа 17

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
15	20	15	0,039	−5	34	1	2	81	33	80	3

13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $(-1)^k\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}$
14	$\arcsin\frac{12}{5\sqrt{73}}$
15	$2\le x<\frac{\sqrt{17}}{2}$
16	$3\sqrt{11}$
17	14,4 млн рублей
18	$-2 < a < -1{,}5$; $-1{,}5 < a$
19	а) например, подходит последовательность 5, 6, 6, 5, 3; б) нет; в) при $n = 20$

Тренировочная работа 18

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7	7	12	0,0476	4	51	5	7	49	37	50	9

13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3}; \frac{5\pi}{2}; \frac{8\pi}{3}$
14	$\arcsin\frac{12}{5\sqrt{65}}$
15	$1\le x<\frac{2\sqrt{13}-4}{3}$
16	$\frac{3\sqrt{5}}{2}$
17	15,6 млн рублей
18	$a < 1{,}5$; $1{,}5 < a < 2$
19	а) например, подходит последовательность 8, 5, 3, 2, 2; б) нет; в) при $n = 28$

Тренировочная работа 19

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	13	84	0,0294	1	62	8	4	9	45	60	11

13	а) πk; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б)-2π; $-\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$
14	$\arcsin\frac{12}{5\sqrt{34}}$
15	$2\le x<\frac{2\sqrt{31}-5}{3}$
16	$3\sqrt{7}$
17	9 млн рублей
18	$8 < a < 8{,}5$; $8{,}5 < a$
19	а) например, подходит последовательность 7, 7, 6, 4, 1; б) нет; в) при $n = 24$

Тренировочная работа 20

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
27	10	63	0,078	5	85	4	9	121	32	40	−15

13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б)$\frac{9\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{2}$
14	$\arcsin\frac{4\sqrt{11}}{7\sqrt{13}}$
15	$3\le x<\frac{\sqrt{89}-2}{2}$
16	4
17	17,88 млн рублей
18	$a < 5{,}5$; $5{,}5 < a < 6$
19	а) например, подходит последовательность 11, 7, 4, 2, 1; б) нет; в) при $n = 34$

Тренировочная работа 21

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
425	6	4,5	0,2	−7	57	1,5	49	96	12	24	26

13	а) -5; 2; $\frac{-1\pm\sqrt{65}}{2}$; б) -5; $-\frac{1+\sqrt{65}}{2}$
14	б) $\frac{28\sqrt{2}}{3}$
15	$-3<x\le-\frac{74}{25}$
16	9
17	1 597 200 рублей
18	$a=-\frac{33}{4}$
19	а) может; б) не может; в) 1,5

Тренировочная работа 22

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
209	5	3	0,75	3	80	1	121	17	9	44	17

13	а) -1; 5; $7\pm2\sqrt{11}$; б) -1; $7-2\sqrt{11}$
14	б) $\frac{55\sqrt{2}}{2}$
15	$-1<x\le-\frac{48}{49}$
16	8
17	1 555 200 рублей
18	$a=3{,}5$
19	а) может; б) не может; в) $\frac{191}{141}$

Тренировочная работа 23

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
525	3	3,5	0,8	−13	17	−1	225	87	11	47	15

13	а) -3; 4; $4\pm\sqrt{14}$; б) 4; $4+\sqrt{14}$
14	б) $\frac{25\sqrt{6}}{3}$
15	$-1<x\le-\frac{63}{64}$
16	7
17	1 064 800 рублей
18	$a=-\frac{107}{16}$
19	а) может; б) не может; в) $\frac{205}{103}$

Тренировочная работа 24

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
900	8	5	0,125	−1	77	−2	289	−13	15	26	19

13	а) -7; 1; $-5\pm2\sqrt{7}$; б) $-5+2\sqrt{7}$; 1
14	б) $\frac{208}{3}$
15	$-2<x\le-\frac{31}{16}$
16	12
17	1 036 800 рублей
18	$a=-\frac{25}{36}$
19	а) может; б) не может; в) $\frac{155}{53}$

Тренировочная работа 25

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
28	1	2,5	0,2	75	3	1	15	4	20	9	1,5

13	а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{3}$; $-\frac{5\pi}{3}$
14	б) $\frac{3\sqrt{23}}{11}$
15	$x<-\frac{\lg 3}{\lg 5-\lg\sqrt{3}}$. **Замечание.** Ответ может также быть представлен в другом виде.
16	84
17	1 800 000 рублей
18	$-2-2\sqrt{5}<a<0;\ \ 0<a<2\sqrt{5}-2$
19	а) да, например, 242; б) нет; в) 12 738 495

Тренировочная работа 26

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
24	4	3	0,5	16	15	2	48	2	45	14	0,8

13	а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; $\pm\arccos\frac{2}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{16\pi}{3}$; $-\frac{14\pi}{3}$; $-4\pi-\arccos\frac{2}{3}$
14	б) $\frac{7\sqrt{6}}{5}$
15	$x>-\frac{\lg 16}{\lg 7-\lg\sqrt[3]{2}}$. **Замечание.** Ответ может также быть представлен в другом виде.
16	420
17	1 600 000 рублей
18	$\frac{4-2\sqrt{13}}{9}<a<0; 0<a<\frac{2\sqrt{13}+4}{9}$
19	а) да, например, 869; б) нет; в) 12 375 869

Тренировочная работа 27

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
15	3	2	0,4	84	2	3	78	5	16	10	0,6

13	а) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{21\pi}{4}$
14	б) $\frac{15}{8}$
15	$x<-\frac{\lg 20}{\lg 3-\lg\sqrt{2}}$. **Замечание.** Ответ может также быть представлен в другом виде.
16	528
17	1 200 000 рублей
18	$3-\sqrt{10}<a<0; 0<a<\sqrt{10}+3$
19	а) да, например, 429; б) нет; в) 98 372 615

Тренировочная работа 28

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
9	500	1,5	0,15	58	6	3	57	6	21	18	0,4

13	а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{3}; \frac{13\pi}{3}$
14	б) $\frac{35\sqrt{3}}{22}$
15	$x<-\frac{\lg 2}{\lg 5-\lg\sqrt[4]{2}}$. **Замечание.** Ответ может также быть представлен в другом виде.
16	264
17	1 500 000 рублей
18	$-\frac{14+2\sqrt{13}}{9}<a<0; 0<a<\frac{2\sqrt{13}-14}{9}$
19	а) да, например, 627; б) нет; в) 13 475 869

Тренировочная работа 29

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	3	9	0,008	69	20	0,25	32	0,75	6000	9	9

13	а) $2\pi n,\ \pm\arccos\frac{1}{6}+2\pi m,\ n\ ,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-2\pi-\arccos\frac{1}{6},\ -2\pi+\arccos\frac{1}{6}$
14	а) 13; б) $\frac{12}{5}$
15	$[\log_3 30;\ 4]$
16	$\frac{24}{5}\sqrt{6}$
17	104 500 рублей
18	$-\frac{9}{4}\le a<2$
19	а) Да, например, если $a=10,\ b=20,\ c=11$ и $d=37$; б) нет; в) $\frac{79}{21}$

Тренировочная работа 30

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
356	6	32	0,5	11	8	2	10	2	90	4	1

13	а) $\pm\arccos\frac{2}{5}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-2\pi-\arccos\frac{2}{5},\ -2\pi+\arccos\frac{2}{5}$
14	а) 2 : 3; б) $\frac{4}{\sqrt{41}}$
15	$(-4,2;\ -3,95],\ [-0,2;\ +\infty)$
16	1,92
17	12
18	$-\frac{1}{12}<a<0$ или $0<a<\frac{1}{12}$
19	а) нет; б) да; в) 12

Тренировочная работа 31

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	80	288	0,2	−8	18	−4	4	50	15	31	−3

13	а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{3}$
14	$\frac{\pi}{3}$
15	$(-2;-1]\cup(1;2)$
16	$\frac{17-4\sqrt{13}}{3}$
17	1 620 000 рублей
18	$\frac{1}{6}$; 2,5
19	а) да; б) нет; в) 31

Тренировочная работа 32

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	4 000 000	3	0,375	−1,5	99	−2	4,5	0,4	45	63	23

13	а) $2\pi n,\ \pm\arccos\frac{1}{7}+2\pi m,\ n,\ m\in\mathbb{Z}$; б) 0, $\pm\arccos\frac{1}{7}$
14	а) 2; б) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$
15	$\left[2;\ \frac{7-\sqrt{5}}{2}\right);\ [5;+\infty)$
16	68
17	5400
18	$a=-\frac{9}{4},\ a=0,\ a=\frac{1}{12}$
19	а) 14; б) 90; в) 1

Тренировочная работа 33

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
17	6	3	0,8	42	34	21	34	2	7	10	−2

13	а) $x=\pi-\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $3\pi-\operatorname{arcctg}\frac{4}{3}$
14	$2\sqrt{7}$
15	$[-4;-1),(-1,0),(0,1),(1;4]$
16	9 : 7
17	1 066 500 рублей
18	$\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$
19	а) да; б) нет; в) 5

Тренировочная работа 34

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
60	5	4	0,25	−7	59	4	18	−4	4000	24	5

13	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$
14	б) 36
15	$[-1;0)$
16	$\frac{63}{2}$
17	5
18	$1{,}5\le a\le 3;\ a\ge 6$
19	а) 1, 2, 3; б) нет; в) 8

Тренировочная работа 35

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	1,2	21	0,96	−8	18	0,25	117	−6	14	56	51

13	а) $\pi k;\ \pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $2\pi;\ \frac{17\pi}{6};\ 3\pi;\ \frac{19\pi}{6}$
14	б) $64\sqrt{7}$
15	$(-\infty;-\sqrt{2});\ (-\sqrt{2};-1];\ 0;\ [1;\sqrt{2});\ (\sqrt{2};+\infty)$
16	$\frac{43}{2}$
17	2 622 050
18	$4\le a\le 7$
19	а) 2, 3; б) нет; в) 8

Тренировочная работа 36

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
6	17	15	0,17	2,8	0,8	6	12	−2	2,25	9	−8,25

13	а) $\frac{\pi}{6}+2\pi k,k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$
14	б) $\operatorname{arctg}\frac{21}{17}$
15	$[0;\log_2 3]$
16	49
17	1 866 000 рублей
18	$[7-\sqrt{39};\ 7+\sqrt{39}];\ [-5-\sqrt{15};\ -5+\sqrt{15}]$
19	а) нет; б) нет; в) 16

ОТВЕТЫ. ГЛАВА II.

Задания части 2

1.1. $x = \pm 3$.

1.2. $x = 0,\ x = 2$.

1.3. $x = -4,\ x = -2$.

1.4. $x = 1,\ x = \frac{5}{2}$.

1.5. решений нет.

1.6. $x = 1\ ,\ x = 2010$.

1.7. $x = -1,\ x = 2011$.

1.8. $x = \pm\frac{\sqrt{10}}{2},\ x = \pm 1$.

1.9. $x = \pm\sqrt{3}$.

1.10. $x = -\sqrt[3]{3}, x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

1.11. $x = -2\ ,\ x = 4$.

1.12. $x = -1$.

1.13. $x = 3$.

1.14. $x = 1$.

1.15. $x = -4\ ,\ x = 2$.

1.16. $x = 1,\ x = 6$.

1.17. $x = -12,\ x = 1$.

1.18. $x = -1,\ x = 7,\ x = 4 \pm \sqrt{21}$.

1.19. $1 \le x \le \frac{5}{2}$.

1.20. $x < -3,\ x > \frac{2}{3}$.

1.21. $1 < x < 2010$.

1.22. $x \le -2011,\ x \ge -1$.

1.23. x — любое.

1.24. решений нет.

1.25. $x = 3/2$.

1.26. $-\frac{\sqrt{10}}{2} < x < -1, \quad 1 < x < \frac{\sqrt{10}}{2}$.

1.27. $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$.

1.28. $x < -\sqrt[3]{3},\ x > \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

1.29. $-\frac{4}{5} < x < \frac{1}{3}$.

1.30. $x < -\frac{5}{3},\ x > -\frac{3}{2}$.

1.31. $(1;2) \cup (2;3)$.

1.32. $(-\infty;-1) \cup (-1;0) \cup (2;+\infty)$.

1.33. $x < -4, \quad 0 < x < 1$.

1.34. $(-\infty;-1] \cup (0;5)$.

1.35. x — любое.

1.36. $x \le 3,\ x \ge 5$.

1.37. $(-\infty;-3) \cup (-2;+\infty)$.

1.38. $x \le -8,\ x \ge -\frac{5}{2}$.

1.39. $(-\infty;-7) \cup (-7;-\frac{1}{2}) \cup (1;+\infty)$.

1.40. $(-\infty;-5) \cup (1;2) \cup (6;+\infty)$.

1.41. $-1 < x < 6$.

1.42. $(-5;1) \cup \{5\}$.

1.43. $[1;3) \cup (3;4]$.

1.44. $\left(-\infty;-1-\sqrt{2}\right] \cup (-2;0) \cup \left[\sqrt{2}-1;3\right) \cup \{4\}$

1.45. $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right] \cup (2;+\infty)$.

1.46. $-7 < x < -3$.

1.47. $(-\infty;-4) \cup (-1;+\infty)$.

1.48. $(-\frac{9}{2};-2) \cup (3;+\infty)$.

1.49. $(-\infty;-3)\cup(0;+\infty)$.

1.50. $0<x\le 5;\ x\ge 12$.

1.51. $x<0,\ 0<x<1$.

1.52. $-1<x$.

1.53. $-6\le x<-5,\ x\ge 1$.

1.54. $[2;4]\cup(6;+\infty)$.

1.55. $(-\infty;-1)\cup(0;1)\cup(\frac{3}{2};+\infty)$.

1.56. $x<-3$.

1.57. $(-\infty;-23)\cup(20;+\infty)$.

1.58. $x<-\sqrt{2},\ x>\sqrt{2}$.

1.59. $-1<x<0,\ x>0$.

1.60. $-4<x<-3$.

1.61. $-5\le x<-2,\ -2<x\le 1$.

1.62. $x<-3,\ x>5$.

1.63. $(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$.

1.64. $(-1;0)\cup(0;1)$.

1.65. $(-6;0)$.

1.66. $(-\infty;-\frac{8}{3})\cup(-\sqrt{7};2)\cup(\sqrt{7};+\infty)$.

1.67. $[-4;-3)\cup(-2;1]$.

1.68. $x\le-\frac{11}{2},\ -1<x<-\frac{2}{3},\ x>9$.

1.69. $(-1;-\frac{\sqrt{737}-11}{28})\cup(-\frac{4}{7};\frac{11+\sqrt{737}}{28})$.

1.70. $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

1.71. $(-1-\sqrt{2};-1)\cup(0;\sqrt{2}-1)\cup(1;+\infty)$.

1.72. $(-8;-2)\cup(-1;0)$.

1.73. $(1;2)\cup(3;+\infty)$.

1.74. $(-\infty;-1]\cup[1;2]\cup[4;+\infty)$.

1.75. $[-3;-2)\cup[-1;0)\cup[1;+\infty)$.

1.76. $-9<x\le-3,\ -1<x<0,\ x\ge 3$.

1.77. $-3<x<-2,\ -1\le x\le 5$.

1.78. $0<x\le 1,\ 6<x<7$.

1.79. $(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$.

1.80. $x\le-4,\ -3\le x<-\frac{11}{4},\ -\frac{11}{4}<x\le-2,\ x\ge 1$.

2.1. $x=\frac{1}{5},\ x=1$.

2.2. $x=-\sqrt{\frac{7}{3}},\ x=\sqrt{\frac{7}{3}}$.

2.3. $x=5$.

2.4. $x=3$.

2.5. $x=3$.

2.6. $x=5$.

2.7. $x=-3$.

2.8. $x=1$.

2.9. $x=0$.

2.10. $x=\frac{\sqrt{17}-3}{2}$.

2.11. $x=4$.

2.12. $x=-27,\ x=8$.

2.13. $x=2$.

2.14. $x=-\frac{5}{3}$.

2.15. $x=0,\ x=\frac{3}{2}$.

2.16. $x=-5$.

2.17. $x=5$.

2.18. $x=1$.

2.19. $x=\sqrt{3}$.

2.20. $x=4$.

2.21. $x=9$.

2.22. $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

2.23. $x=8$.

2.24. $x=3$.

2.25. $x=-1,\ x=\frac{8}{3}$.

2.26. $x=-7$.

2.27. $x = 0,\ x = 1,\ x = 9$.

2.28. $x = 2\frac{1}{63}, x = 2\frac{1}{728}$.

2.29. $5 \le x \le 10$.

2.30. $x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{5}, x = \frac{4}{5}$.

2.31. $x = -1, x \ge 2$.

2.32. $\frac{3}{2} < x \le 3$.

2.33. $2 < x \le 4$.

2.34. $1-\sqrt{5} < x \le -1,\ \ 3 \le x < 1+\sqrt{5}$.

2.35. $x < \frac{1}{2}$.

2.36. $-2 < x \le 2$.

2.37. $x > -1$.

2.38. $-30 \le x < 6$.

2.39. $5 < x$.

2.40. $\frac{5}{2} \le x < 3$.

2.41. $-1 \le x < -\frac{3}{5}, 0 < x \le 1$.

2.42. $x \le -1$.

2.43. $x \le -5, -\frac{4}{3} \le x < 4$.

2.44. $x > -1$.

2.45. $x < -\frac{5}{3}, x > 1$.

2.46. $3 < x$.

2.47. $-\frac{2\sqrt{3}}{3} \le x < -1$.

2.48. $1 \le x < \frac{3}{2}$.

2.49. $\frac{16}{3} \le x < 8$.

2.50. $-\frac{\sqrt{13}-1}{6} < x \le 1, x \ge 2$.

2.51. $-1 \le x \le 1$.

2.52. $1 \le x$.

2.53. $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x \le 4$.

2.54. $-8 < x \le 1$.

2.55. $1 < x < \frac{5}{4},\ \ \frac{5}{3} < x$.

2.56. $1 < x < 2,\ \ 2 < x < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

2.57. $-5 \le x \le 0$.

2.58. $-1-\sqrt{13} \le x \le 0,\ \ \ \frac{1+\sqrt{17}}{2} \le x \le \sqrt{13}-1$.

2.59. $x > \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$.

2.60. $-3 \le x < 2\sqrt{\sqrt{5}-2}-2$.

3.1. $x \ge -2$.

3.2. $x = -\frac{4}{3}$.

3.3. $x = -\frac{13}{4}, x = \frac{9}{2}$.

3.4. $x = -4, x = 4$.

3.5. $x \le \frac{5}{2}$.

3.6. $x = -2, x = 2$.

3.7. $x = -1, x = 11$.

3.8. $x = -3, x = -4$.

3.9. $x = -4, x = -1$.

3.10. $x = -1, x = 1$.

3.11. $x = 1, x = 3$.

3.12. $x = -\frac{70}{13}, x = -\frac{13}{2}, x = 0$.

3.13. $x = -3, x = 25$.

3.14. $x \le -2$.

3.15. $-\frac{4}{7} \le x$.

3.16. $x = 2$.

3.17. $-6 \le x \le 0, x = 12$.

3.18. $x = -1$.

3.19. $-\frac{15}{2} \le x \le \frac{7}{2}$.

3.20. $x = -4, x = -1$.

3.21. $-3 < x < -2$.

3.22. $x \le -\frac{3}{2}, x \ge -\frac{1}{6}$.

3.23. $-6 < x < -3, -2 < x < 1$.

3.24. $-2 \le x \le 2$.

3.25. $x < -3, x > -\frac{1}{3}$.

3.26. $x \le 1$.

3.27. $x \in \varnothing$.

3.28. $x < -\frac{9}{2}$.

3.29. $-4 < x < -2, \ 2 < x < 4$.

3.30. $-3 \le x \le 3$.

3.31. $-3 \le x \le -1$.

3.32. $-4 < x < -2$.

3.33. $-3 \le x \le -1$.

3.34. $x \le -\frac{4 + \sqrt{19}}{3}, x \ge \frac{\sqrt{19} - 4}{3}$.

3.35. $-3 < x < -1$.

3.36. $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x < 0, 0 < x < 1$.

3.37. $\frac{3 - \sqrt{73}}{4} \le x < -1, -1 < x \le -\frac{1}{2}, x \ge 2$.

3.38. $x < 2, 2 < x < 6, x \ge 8$.

3.39. $x < -4, x = -3, x > -2$.

3.40. $\frac{3}{7} < x < \frac{11}{7}$.

3.41. $-27 < x < -1, x = -1, 0 < x < 1$.

3.42. $0 < x < -9$.

3.43. $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

3.44. $-5 < x < -2$.

3.45. $-3 - 2\sqrt{2} < x < 5$.

3.46. $x \le 2 - \sqrt{2}, x \ge 5 + \sqrt{19}$.

3.47. $-4 < x < -3, 2 < x < 7$.

3.48. $x \le 0, 1 \le x \le 6$.

3.49. $x < -2 - 2\sqrt{3}, x > -2\sqrt{2}$.

3.50. $-3 < x < \frac{3 + \sqrt{65}}{2}$.

3.51. $-\frac{9 + \sqrt{57}}{4} < x < -2, -2 < x < -1, x > \frac{3}{2}$.

3.52. $-200 < x < 66, x > 199$.

3.53. $x < -2, x > 0$.

3.54. $2 - \sqrt{3} \le x < 2, \ 4 < x \le 5$.

3.55. $x < 1, x > 2$.

3.56. $-5 < x < -3, \ -3 < x < -2, \ 2 < x < 5$.

3.57. $-2 < x \le -\frac{3}{2}$.

3.58. $x > -3$.

3.59. $x \le 0, x \ge 1$.

3.60. $x \le -\frac{5}{2}, -\frac{8}{5} \le x \le 0$.

4.1. $x \in \varnothing$.

4.2. $x = (-1)^n \arcsin\frac{\pi}{6} + n\pi; n \in \mathbb{Z} \quad (\arcsin\frac{\pi}{6} \ne \frac{1}{2}!)$.

4.3. $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}, x = \pm\frac{\pi}{20} + \frac{2n\pi}{5}; k, n \in \mathbb{Z}.$

4.4. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}; k, n \in \mathbb{Z}.$

4.5. $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; x = -\frac{\pi}{3} + \pi n; k, n \in \mathbb{Z}.$

4.6. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{4} + n\pi; k, n \in$

4.7. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + n\pi; n \in \mathbb{Z}.$

4.8. $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

4.9. $x = \pi - \arcsin\frac{3}{4} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}.$

4.10. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$

4.11. $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$

4.12. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{n\pi}{2}; k, n \in \mathbb{Z}.$

4.13. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad x = \frac{2\pi}{5}n, \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}m, \quad k, n, m \in \mathbb{Z}.$

4.14. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = arctg 3 + \pi n; k, n \in \mathbb{Z}.$

4.15. $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

4.16. $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = 2n\pi; k, n \in \mathbb{Z}.$

4.17. $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{4} + m\pi; x = 2\pi n; k, n, m \in$

4.18. $x = (2k+1)\pi, x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi; k, n \in \mathbb{Z}.$

4.19. $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$

4.20. $x = \frac{1}{3} + \frac{4k+1}{12}\pi, x = \frac{1}{6} + \frac{2n+1}{24}; k, n \in \mathbb{Z}.$

4.21. $x = -\arccos\frac{4}{5} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

4.22. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{7\pi}{10} + 2n\pi; k, n \in \mathbb{Z}.$

4.23. $x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{12} + n\pi; k, n \in \mathbb{Z}.$

4.24. $x = k\pi; k \in \mathbb{Z}.$

4.25. $x = -\operatorname{arctg}(2 \pm \sqrt{3}) + k\pi = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}; k, n \in \mathbb{Z}.$

4.26. $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

4.27. $x = -\frac{3\pi}{4} + k\pi, x = n\pi; k, n \in \mathbb{Z}.$

4.28. $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi, x = -\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + n\pi; k, n \in \mathbb{Z}.$

4.29. $x = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}; k \in \mathbb{Z}.$

4.30. $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}; k, n \in \mathbb{Z}.$

4.31. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}.$

4.32. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi, x = \pm\frac{\pi}{10} + n\pi, x = \pm\frac{3\pi}{10} + m\pi; k, n, m \in \mathbb{Z}.$

4.33. $x = -arctg\frac{1}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

4.34. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

4.35. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k,\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n;\quad k, n \in \mathbb{Z}.$

4.36. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ x = -arctg\frac{1}{3} + m\pi;\ k, n, m \in \mathbb{Z}.$

4.37. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi,\ x = -\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2};\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.38. $x = -2\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

4.39. $x = k\pi,\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{3};\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.40. $x = \frac{2n+1}{18}\pi;\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq 9k + 4,\ k \in \mathbb{Z}.$

4.41. $x = \frac{4\pi}{3} + 4k\pi,\ x = \frac{\pi}{3} + 4n\pi;\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.42. $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

4.43. $x = \pm 1 \pm \sqrt{1 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi};\ k = 0, 1, 2, \ldots$

4.44. $x = \pm\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

4.45. $x = \operatorname{arctg}\frac{2k + 1 \pm \sqrt{4k^2 + 4k - 15}}{4} + n\pi,\quad x = \pm\operatorname{arctg} 2 + m\pi;\ k = 3, \pm 4, \pm 5, \ldots,\ n,\ m \in \mathbb{Z}.$

4.46. $x = -\sin 1.$

4.47. $x = \cos 2.$

4.48. $x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

4.49. $x = 1,\ x = 0.$

4.50. $x = \frac{1}{\sqrt{5}}.$

4.51. $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

4.52. $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \frac{4\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

4.53. $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

4.54. $-\arccos\frac{1}{4} + 2k\pi < x < \arccos\frac{1}{4} + 2k\pi,\quad \arccos\frac{1}{5} + 2n\pi < x < -\arccos\frac{1}{5} + 2(n+1)\pi;\ k, n \in \mathbb{Z}.$

4.55. $-\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} \le x \le \sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}.$

4.56. $\frac{\pi}{8} + k\pi < x < -\frac{\pi}{8} + \frac{(2k+1)\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}.$

4.57. $(2k+1)\pi x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\quad \arccos(\frac{2}{3} + \sqrt{2}) + 2n\pi < x < \arccos(\frac{2}{3} - \sqrt{2}) + 2n\pi;\ k,\ n \in \mathbb{Z}.$

4.58. $2k\pi < x < (2k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

4.59. $-1 \le x \le -\frac{7}{8},\ x = 1.$

4.60. $x \le \frac{4\pi + 18}{5},\quad 8\pi - 18 \le x \le 18 - 3\pi.$

5.1. $x = -4,\ x = -2.$

5.2. $x = \frac{1}{2}.$

5.3. $x = -\frac{38}{3}.$

5.4. $x = -2 \pm \sqrt{7/2}.$

5.5. $x = 1.$

5.6. $x = -1.$

5.7. $x = 2.$

5.8. $x = 7.$

5.9. $x = 1.$

5.10. $x = 1.$

5.11. $x = 2.$

5.12. $x = 2.$

5.13. $x = -1.$

5.14. $x = -2,\ x = 2.$

5.15. $x = -3$.

5.16. $x = 3$.

5.17. $x = -3, x = -1$.

5.18. $x = 2$.

5.19. $x = 0$.

5.20. $x = 0$.

5.21. $x = 0$.

5.22. $x = 0$.

5.23. $x = -2$.

5.24. $x = \log_{2/5} 3$.

5.25. $x = -2, x = -1$.

5.26. $x = \log_{(\sqrt{5}-1)/2}(2/3)$.

5.27. $x = 0, x = 2$.

5.28. $x = -\frac{1}{4}$.

5.29. $x = -1, x = 1$.

5.30. $x = -2, x = 2$.

5.31. $-\frac{1}{2} < x$.

5.32. $x > -\frac{3}{4}$.

5.33. $x < 7$.

5.34. $x < -\frac{1}{2}, x > \frac{5}{8}$.

5.35. $x < 0,1 < x < 3$.

5.36. $x < -3 - \sqrt{3}, x > -3 + \sqrt{3}$.

5.37. $-\frac{1}{3} < x < 0$.

5.38. $-4 < x < -1$.

5.39. $x \neq -\frac{1}{2}$.

5.40. $x < -1, x > -\frac{1}{2}$.

5.41. $-\frac{1}{3} < x < 0, x > 4$.

5.42. $x \geq -2$.

5.43. $-1 < x < 0$.

5.44. $x < 0$.

5.45. $x \geq -\log_5 10$.

5.46. $x > -3$.

5.47. $x < 0, x > \log_4 3$.

5.48. $x > \frac{1}{2}$.

5.49. $-\frac{2}{3} < x < 1$.

5.50. $\frac{1}{2} \leq x < 1$.

5.51. $x \in \mathbb{R}$.

5.52. $x \leq -1, x > 0$.

5.53. $0 < x < \log_{2/3}(1/3)$.

5.54. $x \leq \log_3(1/2), \log_3(3/5) \leq x < \log_3(5/3)$.

5.55. $x < 0$.

5.56. $x > 4 + \frac{\lg 14}{\lg 5 - \lg \sqrt{7}}$.

5.57. $x < \log_{0,4} 2$.

5.58. $x < \log_{2/5} 5$.

5.59. $0 < x < \frac{1}{2}$.

5.60. $\frac{1}{2}\log_5 6 < x < \log_6 5$.

6.1. $x = 2$.

6.2. $x = 100$.

6.3. $x = 4$.

6.4. $x = 2$.

6.5. $x = \frac{3}{2}, x = 10$.

6.6. $x = 4$.

6.7. $x = \dfrac{6 + 3\sqrt{29}}{5}$.

6.8. $x = 2$.

6.9. $x = 1$.

6.10. $x = -3$.

6.11. $x = 2$.

6.12. $x = \sqrt[3]{2} - 1$.

6.13. $x = -4$.

6.14. $x = -1$.

6.15. $x = 10,\ x = 100\,000$.

6.16. $x = \dfrac{1}{2},\ x = 4$.

6.17. $x = 10^{-1},\ x = 10^{-1/8}$.

6.18. $x = 1,\ x = 256$.

6.19. $x = \dfrac{1}{27},\ x = 3$.

6.20. $x = \dfrac{1}{2},\ x = 16$.

6.21. $x = 2^{-2},\ x = 2^{-1/4}$.

6.22. $x = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{3},\ x = 10$.

6.23. $x = -\dfrac{24}{5},\ x = 20$.

6.24. $x = 1,\ x = 2 - 2\sqrt{2}$.

6.25. $x = \dfrac{1}{9},\ x = 3$.

6.26. $x = 0$.

6.27. $x = -2,\ x = \sqrt{33} - 1$.

6.28. $x = 4$.

6.29. $x = 8$.

6.30. $x = 4$.

6.31. $x > 4$.

6.32. $\dfrac{1}{7} < x < \dfrac{2}{7}$.

6.33. $-3 < x < -2$.

6.34. $-4 < x < -3,\ -2 < x < -1$.

6.35. $-5 \le x < -3,\ -1 < x \le 1$.

6.36. $\dfrac{1}{3} \le x < \dfrac{1}{2}$.

6.37. $\dfrac{1}{3} \le x < \dfrac{2}{3}$.

6.38. $x \in \varnothing$.

6.39. $-\sqrt{5} < x < -1,\ 2 < x < \sqrt{5}$.

6.40. $\dfrac{-5 - \sqrt{33}}{2} < x < -2,\ -1 < x < \dfrac{-5 + \sqrt{33}}{2}$.

6.41. $1 < x < 4$.

6.42. $0 \le x < 2$.

6.43. $x < -4$.

6.44. $1 < x < 2,\ x > 2$.

6.45. $-4 < x \le -2,\ -\dfrac{5}{8} \le x < 0$.

6.46. $\dfrac{1}{4} \le x \le 2$.

6.47. $0 < x \le \dfrac{1}{3},\ 3 < x \le 9$.

6.48. $\dfrac{1}{2} < x < 1,\ 1 < x < 2$.

6.49. $0 < x < 10,\ x = 100$.

6.50. $0 < x < 1,\ \sqrt{3} < x < 9$.

6.51. $\dfrac{1}{2} \le x < 1$.

6.52. $-2 < x < -1,\ -1 < x < 0,\ 0 < x < 1,\ x > 2$.

6.53. $-3 < x < 1,\ 3 < x < 4$.

6.54. $0 < x < 2,\ x > 4$.

6.55. $0 < x < \dfrac{2}{\sqrt{5}},\ 1 < x < 3$.

6.56. $1 < x < 4$.

6.57. $2 < x < 5$.

6.58. $0 < x < 1$.

6.59. $x > 2$.

6.60. $-3 < x < 77$.

6.61. $-1 < x \le -\frac{26}{27}$.

6.62. $-2 < x < -\sqrt{3},\ \sqrt{3} < x < 2$.

6.63. $4 < x < 5,\ x > 7$.

6.64. $-10^{(\lg 0{,}5 \cdot \lg 3)/\lg 1{,}5} < x < 0,\ 0 < x < 10^{(\lg 0{,}5 \cdot \lg 3)/\lg 1{,}5}$.

6.65. $x > 2$.

7.1. $x = -\frac{4}{5},\ x = -\frac{6}{5}$.

7.2. $x \le -2010,\ x \ge 2011$.

7.3. $\frac{3}{4} < x \le 7$.

7.4. $x \le -\frac{7}{8},\ x \ge 0$.

7.5. $0 \le x < 64$.

7.6. $x \le 1,\ x = 3$.

7.7. $x \le \log_2(\sqrt{2} - 1),\ x > \frac{1}{2}$.

7.8. $x \le \log_3 2, 1 < x < 5$.

7.9. $x < -1,\ 0 < x < 1$.

7.10. $0 < x < \frac{1}{2}$.

7.11. $-3 < x < -2,\ -\frac{1}{2} < x < 0$.

7.12. $x = 2 + \sqrt{10}$.

7.13. $-\sqrt{2} < x < -1,\ 1 < x < \sqrt{2}$.

7.14. $x > 0$.

7.15. $-1 < x < -\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}} < x < 1$.

7.16. $x < 0$.

7.17. $x = -\frac{5}{2},\ x = \frac{1}{2}$.

7.18. $x < -3,\ x > 3$.

7.19. $x < -7,\ \frac{17}{9} < x < 2$.

7.20. $-\frac{127}{128} \le x < -\frac{63}{64},\ -\frac{3}{4} < x \le -\frac{1}{2}$.

7.21. $1 < x \le 1 + \mathrm{tg}(3\pi/16)$.

7.22. $x < -2$.

7.23. $x = \sqrt{10^{1-\sqrt{3}}},\ x = \sqrt{10^{1+\sqrt{3}}}$.

7.24. $x = \frac{1}{10},\ x = 10$.

7.25. $x > 1000$.

7.26. $\frac{1}{10} < x < 100$.

7.27. $0 < x < 999$.

7.28. $0 < x \le \frac{1}{4},\ x \ge 4$.

7.29. $0 < x \le 3^{-2\sqrt{3}},\ x \ge 3^{2\sqrt{3}}$.

7.30. $1 < x \le 5^{\log_2 7} = 7^{\log_2 5}$.

7.31. $x = 10,\ x = 10^4$.

7.32. $x = \frac{1}{81},\ x = \frac{1}{3}$.

7.33. $0 \le x \le \frac{27}{16}$.

7.34. $x = 2$.

7.35. $x < 2$.

7.36. $x = -2$.

7.37. $x = 9$.

7.38. $-2 < x < -1,\ 1 < x < 2$.

7.39. $x = \log_5 4$.

7.40. $-2 < x \le -\log_3 \frac{9}{10}$.

7.41. $-5 < x < 1-\sqrt{5},\ 3 < x < \sqrt{5}+1.$

7.42. $-1 < x \le 0\,.$

7.43. $x < -\log_3 10\,.$

7.44. $\log_2(5/4) < x < \log_2 3\,.$

7.45. $0 < x < 2,\ x \ge 4\,.$

7.46. $\dfrac{1-\sqrt{41}}{5} \le x < -1,\ 1 < x \le 2\sqrt{2}\,.$

7.47. $0 < x \le \dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}},\ x > 1\,.$

7.48. $0 < x \le \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{2} \le x < 2\,.$

7.49. $x = 3,\ x \ge 8\,.$

7.50. $\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}.$

7.51. $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

7.52. $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ x = \pm\dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{2n\pi}{3};\ k, n \in \mathbb{Z}.$

7.53. $x = \pm\arcsin\dfrac{\lg 3}{\lg(\sqrt{2}+\sqrt{3})} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

7.54. $x = \dfrac{\pi}{3},\ x = \dfrac{5\pi}{3}.$

7.55. $x = \pi - \arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

7.56. $x = k\pi,\ x = \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi;\ k, n \in \mathbb{Z}.$

7.57. $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ x = \dfrac{3\pi}{4} + 2n\pi,\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2m\pi;\ k, n, m \in \mathbb{Z}.$

7.58. $\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \le x \le \dfrac{\pi}{6} + 2(k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

7.59. $2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

7.60. $-\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

7.61. $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

7.62. $\dfrac{\pi}{4} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{3} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}.$

7.63. $\operatorname{arctg} 5 + 2k\pi < x < (2k+1)\pi,\ x \ne \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi;\ k, n \in \mathbb{Z}.$

7.64. $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \le x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\quad \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi < x \le \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi,\quad k, n \in \mathbb{Z},$

$-\dfrac{11\pi}{6} \le x < -\dfrac{3\pi}{2},\ -\dfrac{3\pi}{2} < x \le -4,\ x = -\dfrac{7\pi}{6}.$

7.65. $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}(1-\dfrac{\sqrt{35}}{6})\right) < x < \sin\left(\dfrac{\pi}{4}(1-\dfrac{\sqrt{35}}{6})\right).$

7.66. 2.

7.67. 1 .

7.68. $x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}.$

7.69. $x = -\dfrac{21\pi}{16},\ x = -\dfrac{11\pi}{8}.$

7.70. $x = \dfrac{19\pi}{6}.$

8.1. $x = -\dfrac{57}{2},\ y = 17.$

8.2. $x = 3,\ y = 1;\ x = \dfrac{5}{3},\ y = \dfrac{11}{3}.$

8.3. $x = \dfrac{1}{2},\ y = \dfrac{9}{2};\ x = \dfrac{3}{2},\ y = \dfrac{9}{2}.$

8.4. $x = \dfrac{5}{2},\ y = -\dfrac{5}{2}.$

8.5. $x = 5,\ y = -2.$

8.6. $x = -3,\ y = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

8.7. $x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ y = \sqrt{2},\ n \in \mathbb{Z}.$

8.8. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ y = \frac{1}{3},\ n \in \mathbb{Z}.$

8.9. $x = 3,\ y = -9.$

8.10. $x = \log_2 3,\ y = \log_3 2.$

8.11. $x = -2,\ y = 0.$

8.12. $x = 2,\ y = 6;\ x = \frac{1}{2},\ y = 10.$

8.13. $x = \pi n,\ y = \frac{\pi}{4} - \pi n;\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ y = -\pi k,\ n, k \in \mathbb{Z}.$

8.14. $x = \frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{12} + \pi n,\ y = \frac{\pi}{8} \mp \frac{\pi}{12} - \pi n;\ n \in \mathbb{Z}.$

8.15. $x = 1,\ y = -\frac{3}{2};\ x = -2,\ y = 3.$

8.16. $x = 1,\ y = \log_3 2.$

8.17. $x = 4,\ y = 4.$

8.18. $x = -2,\ y = -2;\ x = -2,\ y = 2.$

8.19. $x = \frac{1}{3},\ y = 1.$

8.20. $x = 81,\ y = 0.$

8.21. $x = 4,\ y = 1;\ x = -\frac{2}{3},\ y = \frac{10}{3}.$

8.22. $x = 1,\ y = 2;\ x = 1,\ x = \frac{44}{25},\ y = -\frac{28}{5},\ z = -\frac{108}{25}.$

8.23. $x = 2,\ y = 3;\ x = \frac{33}{8},\ y = -\frac{27}{8}.$

8.24. $x = 2,\ y = 1;\ x = -1,\ y = \frac{23}{2}.$

8.25. $x = 1 - \log_2 3,\ y = \frac{1}{6}.$

8.26. $x = 0,\ y = -3.$

8.27. $x = \sqrt[3]{3},\ y = 4.$

8.28. $x = 1,\ y = 3.$

8.29. $x = 10,\ y = 15;\ x = 15,\ y = 10.$

8.30. $x = 1,\ y = 1.$

8.31. $x = 1,\ y = 5.$

8.32. $x = 4,\ y = 2;\quad x = 4/3,\ y = -2/3.$

8.33. $x = 0,\ y = -7/2;\quad x = y = 21.$

8.34. $x = 1/2,\ y = 3/2.$

8.35. $x = 32,\ y = 2.$

8.36. $x = -1,\ y = \frac{1}{\sqrt{3}};\ x = \frac{3}{2},\ y = 9.$

8.37. $x = \left(-1\right)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,\ \ y = \frac{\pi}{2} + \pi k;\quad n, k \in \mathbb{Z}.$

8.38. $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ y = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k;\ n, k \in \mathbb{Z}.$

8.39. $x = \frac{\pi}{12},\ y = \frac{11\pi}{12}.$

8.40. $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ y = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k;\ \ x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi m,\ y = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi l;\ n, m, k, l \in \mathbb{Z}.$

8.41. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n + \frac{\pi}{2}k,\ \ y = -\frac{\pi}{4} + \pi n - \frac{\pi}{2}k,\quad n, k \in \mathbb{Z}.$

8.42. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ y = -\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi k}{5};\ n, k \in \mathbb{Z}.$

8.43. $x = \arccos\frac{27}{28} + 2\pi k, y = \pi + \arcsin\frac{17}{28} + 2\pi n;\quad x = -\arccos\frac{27}{28} + 2\pi k,$

$y = -\arcsin\frac{17}{28} + 2\pi n,\quad k, n \in \mathbb{Z}.$

8.44. $x = 10, y = 15, z = 6.$

8.45. $x = -1, y = 1.$

8.46. $x = 1, y = 5; x = \frac{5}{2}, y = 2.$

8.47. $x = 2, y = -1; x = \frac{12}{7}, y = -\frac{1}{7}.$

8.48. $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{9}{4}; x = 2, y \in \mathbb{R}.$

8.49. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}.$

8.50. $x = \sqrt{2}, y = \pm\sqrt{2}; x = -\sqrt{2}, y = \pm\sqrt{2}.$

8.51. $x = 9, y = 1.$

8.52. $x = \log_2(\sqrt{6} - 2), y = \log_3\frac{\sqrt{6} - 2}{2}.$

8.53. $x = 3, y = \frac{1}{9}.$

8.54. $x = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2}, y = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{2}.$

8.55. $x = \frac{1}{2\log_2 3 - 1}, y = \frac{2}{2\log_2 3 - 1}.$

8.56. $x = 1, y = 3.$

8.57. $x = 2, y = -3; x \in \mathbb{R}, y = 1.$

8.58. $x = \frac{12}{7}, y = \frac{12}{5}, z = -12.$

8.59. $x = 3, y = 3, z = 3.$

8.60. $x = 4, y = -3, z = 0;\quad x = 2, y = -1, z = 2.$

9.1. $\frac{61\sqrt{3}}{4}.$

9.2. $3\sqrt{30}.$

9.3. $\sqrt{7}.$

9.4. 202,8.

9.5. 2 : 5.

9.6. $\sqrt{\frac{2}{4 - \pi}}.$

9.7. $\sqrt{15 + 6\sqrt{3}}.$

9.8. $\frac{147}{8}.$

9.9. $\frac{\pi}{6}.$

9.10. $\sqrt{3} + 1.$

9.11. $\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}.$

9.12. $\frac{\pi + 3}{6\pi}.$

9.13. $10r^2(\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}).$

9.14. 6.

9.15. $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$

9.16. 11.

9.17. 18 : 7.

9.18. 5, 20.

9.19. $R\sin 2\alpha.$

9.20. $\frac{4\sqrt{6}}{5}.$

9.21. $\frac{\pi}{2}$, $\arcsin\frac{5}{13}$, $\arcsin\frac{12}{13}.$

9.22. $\frac{9}{\sqrt{10}} + 6.$

9.23. $\frac{32}{5}$.

9.24. $9:20$.

9.25. $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$.

9.26. $\frac{R\sqrt{2}}{2}, \frac{R\sqrt{2}}{2\cos(\pi/8)}, R$.

9.27. $\frac{a^2 \sin\beta \sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha}$.

9.28. $\frac{c\sin 2\alpha}{2\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})}$.

9.29. $R \cdot \sin 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

9.30. 6.

9.31. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

9.32. $\frac{91}{6+\sqrt{6}}$.

9.33. 1.

9.34. 4.

9.35. $6-2\sqrt{6}$.

9.36. $\frac{5\sqrt{21}}{7}$.

9.37. $\frac{25\sqrt{15}}{64}$.

9.38. $\frac{(p-a)^2}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

9.39. $\frac{25}{8}$.

9.40. 16.

9.41. $\frac{\sqrt{(b-a)^2+(b+a)^2\operatorname{tg}^2\alpha}}{4\sin\alpha}$.

9.42. $\frac{16}{5}$.

9.43. $2\sqrt{6}$.

9.44. $\frac{\sqrt{\left(4a^2-b^2\right)\left(b^2-a^2\right)}}{4}$.

9.45. $\frac{a\sin\beta\sin\gamma}{3\sin(\beta+\gamma)}$.

9.46. $\arccos\frac{4}{5}$.

9.47. 90°, 10°, 80°.

9.48. $\frac{2m^2}{\sqrt{4m^2-n^2}}, \frac{2m^2}{\sqrt{4m^2-n^2}}, \frac{2mn}{\sqrt{4m^2-}}$

9.49. $\frac{9}{2}$.

9.50. $\pi\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}$.

9.51. $\frac{l}{\cos\alpha}$.

9.52. $\frac{c\sqrt{2b^2+bc}}{b}$.

9.53. $9, 48, 4$ и $4\sqrt{10}$.

9.54. $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p=\frac{a+b+c}{2}$,

$$h_c=\frac{2S}{c},\ m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2},\ l_c=\sqrt{ab(1-\frac{c^2}{(a+b)^2})},$$

$$r=\frac{S}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},\ R=\frac{abc}{4S}.$$

9.55. $\frac{a+b-c}{2}$.

9.56. $S=\frac{4}{3}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}$, где $m=\frac{m_a+m_b+m_c}{2}$.

9.57. $S=\left(4\sqrt{H(H-h_a^{-1})(H-h_b^{-1})(H-h_c^{-1})}\right)^{-1}$, где $H=\dfrac{h_a^{-1}+h_b^{-1}+h_c^{-1}}{2}$.

9.58. $\dfrac{b+c}{a}$.

9.59. $\dfrac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha}$.

9.60. $d_1^2=2(a^2+b^2)-d_2^2$, если $a-b<d_2<a+b$ (иначе параллелограмма нет).

9.61. а) $4\sqrt{26}$, б) такого треугольника нет, в) $\dfrac{7}{2}$.

9.62. 30°, 75°, 75° или 150°, 15°, 15°.

9.63. $\arcsin\dfrac{3}{5}$ или $\pi-\arcsin\dfrac{3}{5}$.

9.64. $\sqrt{5-2\sqrt3}$, $\arcsin\dfrac{1}{2\sqrt{5-2\sqrt3}}$, $\pi-\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5-2\sqrt3}}$

или $\sqrt{5+2\sqrt3}$, $\arcsin\dfrac{1}{2\sqrt{5+2\sqrt3}}$, $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5+2\sqrt3}}$.

9.65. нет, т.к. $\arcsin\dfrac{\pi}{4}>\dfrac{\pi}{4}>\dfrac{5\pi}{21}$, откуда $\dfrac{7\pi}{21}+\dfrac{9\pi}{21}+\arcsin\dfrac{\pi}{4}>\pi$.

10.1. $\dfrac{\pi HR^2}{12}$.

10.2. $\dfrac{27(4-\pi)}{4}$.

10.3. $48\pi\sqrt{11}$.

10.4. $d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$.

10.5. $\sqrt[3]{8V\sin\dfrac{\alpha}{2}\Big/\sqrt{3(2\cos\alpha-1)}}$.

10.6. 6.

10.7. $\dfrac{a}{\left(4\sin\dfrac{\varphi}{2}\sqrt{1-\dfrac{4}{3}\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}\right)}$.

10.8. $\arccos\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\sqrt3}$.

10.9. $\dfrac{\sqrt{31}}{6}$.

10.10. 216.

10.11. $\dfrac{21\sqrt{15}}{10}$.

10.12. $\dfrac{27}{16}$.

10.13. $\dfrac{91}{25}$.

10.14. $\dfrac{7}{2}$.

10.15. 6.

10.16. $\dfrac{\sqrt6(5-\sqrt{15})}{10}$.

10.17. $\dfrac{2a^2}{9\sqrt{3\cos\varphi}}$.

10.18. $\dfrac{4\sqrt5ad-8\sqrt2d^2}{5}$.

10.19. $\dfrac{2H^3}{3}\left(\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}-1\right)$.

10.20. $\dfrac{a^2}{2}\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)}$.

10.21. $2+\sqrt2+\sqrt3$.

10.22. $\dfrac{12}{13+\sqrt{41}}$.

10.23. $\left(\dfrac{180}{\pi}\arccos\dfrac{1}{\pi}\right)^{\circ}$.

10.24. $\dfrac{\sqrt2R}{\sqrt2+\sqrt3}$.

10.25. $12\pi r^3$.

10.26. $\left(1+\sqrt{33}\right):8$.

10.27. $\frac{5\pi}{12}$.

10.28. $\frac{125\sqrt{6}}{4}$.

10.29. $28\sqrt{3}$.

10.30. $\arccos\left(\frac{9}{\sqrt{150\pm 24\sqrt{3}}}\right)$.

10.31. $\frac{7\sqrt{3}}{4}$.

10.32. $\frac{n}{n+m}\cdot\frac{V}{d}$.

10.33. $\frac{5V}{18}$.

10.34. 24.

10.35. $\frac{a\sqrt{3b^2-a^2}}{4b}$.

10.36. 8.

10.37. 20.

10.38. $\arccos\left(46/\sqrt{2641}\right)$.

10.39. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

10.40. $1024/9$, $2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{34}/4\right)$.

10.41. $\frac{3\sqrt{41}}{2}$.

10.42. $9:95$.

10.43. $7:20$.

10.44. $\pi/3$.

10.45. 2.

10.46. $\frac{2\sqrt{19}}{\sqrt{15}}$.

10.47. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

10.48. 90°.

10.49. β.

10.50. $\sqrt{b^2-a^2}$.

10.51. $\arccos\frac{b}{a\sqrt{3}}$.

10.52. $d\sin\alpha$.

10.53. $a\operatorname{ctg}\alpha$.

10.54. α.

10.55. $\sqrt{61}$.

10.56. 512.

10.57. 2 или 1.

10.58. $\frac{1}{3},\frac{2}{3}$.

10.59. 90°.

10.60. Все: от 0° до 180° (не включительно).

11.2. Неверно.

11.19. Это — серединный перпендикуляр к отрезку с концами в этих точках.

11.20. Если данные прямые параллельны, то это — прямая, параллельная им и проходящая между ними на равном расстоянии от них; если же данные прямые пересекаются, образуя две пары вертикальных углов, то это — две прямые, служащие биссектрисами этих углов.

11.21. Это — четыре точки: одна из них есть центр окружности, вписанной в треугольник, образованный данными прямыми, а остальные — центры вневписанных окружностей.

11.22. 1. Если $\alpha = 0$, то это — два луча прямой AB;
2. Если $\alpha = \pi$, то это — интервал AB;
3. Если $0 < \alpha < \pi$, то это — две дуги AB, симметричные относительно прямой AB, каждая — мерой $2\pi - 2\alpha$.

11.23. Это плоскость, проходящая через середину одного из отрезков AM параллельно данной плоскости.

11.24. Это плоскость, проходящая через середину одного из указанных отрезков параллельно данным прямым.

11.25. Это — сфера (с выколотыми точками A и B), построенная на отрезке AB, как на диаметре.

12.1. $a = 0, x \in \varnothing; a \neq 0, x = \frac{1}{a}$.

12.2. $a = 0, x \in \mathbb{R}; a > 0, x < \frac{1}{a}; a < 0, x > \frac{1}{a}$.

12.3. $a = 1, x \in \mathbb{R};\ a = -1, x \in \varnothing;\ a \neq \pm 1, x = \frac{1}{a+1}$.

12.4. $a = 1, x \in \varnothing; a \neq 1, x = a$.

12.5. $a = 1, x = -1;\ a = -1, x = 1;\ a \neq \pm 1, x = \pm 1$.

12.6. $a = \pm 1, x \in \varnothing;\ a \neq \pm 1, x = 1$.

12.7. $a = 0, x \neq 0;\ a = 1, x \in \varnothing;\ a \neq 0, 1, x = 1$.

12.8. $a < 0, x \in \varnothing;\ a \geq 0, x = \pm\sqrt{a}$.

12.9. $a < 0, x \in \mathbb{R};\ a \geq 0, x > \sqrt{a}, x < -\sqrt{a}$.

12.10. $a \leq 0, x \in \varnothing;\ a > 0, -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$.

12.11. $a < 0, x \in \varnothing;\ a \geq 0, x = \pm a$.

12.12. $x = |a|$.

12.13. $a \leq 0, x \in \varnothing;\ a > 0, -a < x < a$.

12.14. $a < 0, x \in \mathbb{R};\ a \geq 0, \left[\begin{array}{l} x > a, \\ x < -a \end{array}\right.$.

12.15. $a < 0, x \in \varnothing; a \geq 0, x = a^2$.

12.16. $a = 0, x \geq 0;\ a \neq 0, x = 0$.

12.17. $a < 0, x \geq 0;\ a \geq 0, x > a^2$.

12.18. $a \leq 0, x \in \varnothing;\ a > 0, 0 \leq x < a^2$.

12.19. $a \leq 0, x \in \varnothing;\ a > 0, x < \log_2 a$.

12.20. $a \leq 0, x \in \mathbb{R};\ a > 0, x > \log_2 a$.

12.21. $a \leq 0, x \in \varnothing;\ 0 < a \neq 1, x = 0;\ a = 1, x \in \mathbb{R}$.

12.22. $a > 1, 0 < x < a;\ 0 < a < 1, x > a;\ a \leq 0, a = 1, x \in \varnothing$.

12.23. $a \leq 0, x \in \varnothing;\ a = 1, 0 < x \neq 1;$
$0 < a < 1, x > 1;\ a > 1, 0 < x < 1$.

12.24. $|a| > 1, x \in \varnothing; |a| \leq 1, x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

12.25. $a = \pm 1, x = a\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;\ a \neq \pm 1, x \in \varnothing$.

12.26. $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ оба множителя чётные и один из них делится на 3.

12.27. $p^2 - q^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1)$.

12.28. $2^{10} + 5^{12} = \left(2^5 + 5^6\right)^2 - \left(2^3 \cdot 5^3\right)^2$.

12.29. $222^{333} + 333^{222} = (222^{111})^3 + (333^{74})^3$.

12.30. $\frac{2010^{2010} - 1}{2010 - 1} = 1 + 2010 + 2010^2 + \ldots + 2010^{2009}$.

12.31. Нет: например, $n = 333$.

12.32. 34452, 34056, 34956.

12.33. $n^2 + n = n(n+1)$ — один из множителей чётный.

12.34. Рассмотреть остатки от деления числа n на 3: $n = 3k + r, r = 0, 1, 2 (r = -1, 0, 1)$.

12.35. $n^3 + 5n = 6n + (n-1)n(n+1)$.

12.36. $n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2+1)$.

12.37. Каждое число, начиная с третьего, имеет вид: $n = 100k + 11 = 4(25k+2) + 3$.

12.38. $\overbrace{111\ldots1}^{n}\overbrace{555\ldots5}^{n-1}6 = (\overbrace{333\ldots3}^{n-1}4)^2$.

12.39. 18, 216.

12.40. Любой общий делитель этих чисел является делителем числа $5(3n+5) - 3(5n+8) = 1$.

12.41. $n^2 + 10n + 21 = (n+3)(n+7)$,

$n^2 + 9n + 18 = (n+3)(n+6)$, $n+6$ и $n+7$ — взаимно простые.

12.42. $n^2 + 6n + 9 = (n+3)^2$, $n+3$ и $n+4$ — взаимно простые.

12.43. $n^2 + 5n + 16 = (n+9)(n-4) + 13 \cdot 4$, $(n+9) - (n-4) = 13$.

12.44. $\frac{53}{450}$.

12.47. $x = 4n - 1, y = 3n - 1, n \in \mathbb{Z}$.

12.48. Рассмотреть остатки от деления левой и правой части на 3.

12.49. $(x+1)(y+1) = 1$.

13.1. 3 993 000 руб.

13.2. 6 000 000.

13.3. $(a-b)(100+p)^2 = 10\,000b$, $S = \frac{100a\,(200+p)}{(100+p)^2}$.

13.4. 11.

13.5. 210 тыс. руб.

13.6. 6.

13.7. 962 500 руб.

13.8. 2 296 350.

13.9. во втором.

13.10. 15%.

13.11. 7.

13.12. 37,5.

13.13. 100.

13.14. 9.

13.15. 6.

14.1. $a \ne \pm 1$.

14.2. $a \ne 0$.

14.3. $a = -2$.

14.4. $a = -1$.

14.5. $a \ne \pm 1$.

14.6. $a \ne 2, a \ne 4, a \ne 8 \quad x = -\frac{8}{(a-4)(a-8)}, y = \frac{2(a-6)}{a-8}$;

$a = 2 \quad x \in \mathbb{R}, y = x + 2$; $a = 4, a = 8$ решений нет.

14.7. $a < 6$.

14.8. $a = 2$.

14.9. $a \ne 1$.

14.10. $a = 3$.

14.11. $2 \le a < 4$.

14.12. $a = 2$; $a = 3$.

14.13. $-2 - 2\sqrt{2} < a < 0; 0 < a < -2 + 2\sqrt{2}$.

14.14. $a = 0$.

14.15. $a = -4$.
14.16. $a = \frac{1}{17}$.
14.17. $a = 2$.
14.18. $a < 0$ $x = \log_2 a^2$; $a > 0$ $x = \log_2 a^2, x = \log_2 a$; $a = 0$ — решений нет.
14.19. $a < -2, a > 2$.
14.20. $7 < a \neq 7,5$.
14.21. $-4 < a \neq -1$ $x = 3 - \sqrt{a+5}$; при остальных a корней нет.
14.22. $a < 0$ $x > \frac{4a^2 + a}{2}$; $a \geq 0$ $x > \frac{a^2 + 9a}{2}$.
14.23. $3 - 2\sqrt{5} < a < \sqrt{10} - 2$.
14.24. $x = -\frac{1}{4}, y = \frac{5}{4}$.
14.25. $a < -3, a = -1, a \geq 3$.
14.26. $|a| > 1, x = 1; a = -1, \; -3 \leq x \leq 1$; $|a| < 1, \; x = 1, \; x = \frac{a+7}{a-1}$; $a = 1, \; x \geq 1$.
14.27. $\frac{4}{3} \leq a \leq 2$.
14.28. $1 \leq a \leq 3, a = 4$.
14.29. $a \neq 3$.
14.30. $-1 \leq a < 0$.
14.31. $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{2}{3}$.
14.32. $a = c = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$; $a = 0, b = c = \frac{1}{2}$.
14.33. $c < 0$.
14.34. $-\sqrt{7} < x < \sqrt{7}$.
14.35. $0 \leq a \leq 1$.
14.36. $0 < a < 1, 1 < a \leq 3, x = -a - 3; a > 3, x = a, x = -a - 3$; при остальных a решений нет.
14.37. $a = 0, \; 2 + \sqrt{3} < a < 2 + \sqrt{5}$.
14.38. $6\frac{a + b - 3ab}{a + b + ab}$ при $a \neq 0$; 6 при $a = 0$.
14.39. $\frac{15}{2} < a < 8, a > 12$.
14.40. $-\frac{3}{2} \leq a < -\frac{3}{4}, -\frac{3}{4} < a < 0$.
14.41. $a \leq -\frac{5\sqrt{5}}{4}, a \geq \frac{5\sqrt{5}}{4}$.
14.42. при $a < 1$ и $a > \sqrt{2}$ решений нет; при $a = 1$ и $a = \sqrt{2}$ — четыре решения; при $1 < a < \sqrt{2}$ — восемь решений.
14.43. $a = -\frac{57}{32}, x = -\frac{5}{8}$.
14.44. $a = \pm\sqrt{2}, a = \pm\frac{\sqrt{15} + 1}{4}$.
14.45. $-3 \leq a \leq 1$.
14.46. $-5 < a < -\sqrt{24}, -\sqrt{24} < a < -3$.
14.47. $-\frac{12}{5} \leq a \leq 0$.
14.48. а) $-\sqrt{26} - 1 \leq a \leq \sqrt{26} - 1$; б) $-\sqrt{26} + 1 \leq a \leq \sqrt{26} - 1$.
14.49. $-1 \leq a < 2$.
14.50. $a = -\frac{1}{3}, \; a = 2$.
14.51. $a = -\frac{17}{48}$.
14.52. $a = -1, \; 1 < a < 3, \; 4 < a \leq 6$.

14.53. $-8 < a < 0$.

14.54. $-\sqrt{2} < a < -\frac{16}{17}, 0 < a < \sqrt{2}$.

14.55. $n = 33$.

15.1. 3.

15.2. 83.

15.3. 49, 83.

15.4. 24.

15.5. 832.

15.6. 27.

15.7. $2, 2, 2$.

15.8. $m = 2$, $n = 117$; $m = 3$, $n = 5$

15.9. 1) И; 2) Р.

15.10. $x = -7, y = 7; x = -6, y = 6$.

15.11. $x = y = 0; x = \pm 3, y = 5; x = \pm 24, y = 20$.

15.12. $x = 6, y = \pm 1, z = 0; x = 0, y = \pm 1, z = 0$.

15.13. $x = 15n^2 - 6n, y = 3n - 1; n \in \mathbb{Z}$.

15.14. 189.

15.15. 764.

15.16. 300.

15.17. 648.

15.18. 160.

15.19. $a = 4, 5, \ldots,\ b = -2;\ a = 3, 4, \ldots,\ b = -1$.

15.20. $\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 1, \sqrt{2} < a < 2$.

15.21. $a = -4, -\frac{5}{2} \le a \le -\frac{9}{4}$.

15.22. $x = -1, x = 3$.

15.23. $x = y = 0; x = y = 2; x = 0, y = 3; x = 3, y = 0$.

15.24. $x = 1, y = 6; x = 1, y = 7; x = 2, y = 7$.

15.25. $x = 11,\ y = -9$.

15.26. $a = -2, a = 0$.

15.27. $a = 1,\ a = \frac{5}{2}$.

15.28. 40, 30.

15.29. $1750m$.

15.30. 94.

15.31. 8.

15.32. 24, 7.

15.33. 70.

15.34. 132.

15.35. $x = -2, y = 0; x = 0, y = -2; x = -3, y = 0; x = -1, y = 2$.

15.36. $x = 2, y = \pm 3; x = -2, y = \pm 3$.

15.37. $x = -31,\ x = -7$.

15.38. $x = \pm 1, y = \mp 1, z = -1$.

15.39. $\frac{5}{11} < a \le \frac{6}{13}$.

15.40. $x = (4n - 3)^2, n = 1, 2, \ldots$

15.41. $(2\sqrt{2}, -4, -4); (2\sqrt{2}, -2, 2)$.

15.42. $x = y = 0$.

15.43. нет.

15.44. 6,25.

15.45. 144.

15.46. 375, 125.

15.47. 12 месяцев.

15.48. 11.

15.49. 33.

15.50. один 16-квартирный и одиннадцать 12-квартирных.

15.51. 20.

15.52. $x = -2$.

15.53. 11 гвоздик и 7 роз.

15.54. $A = \{6, 10, 14, 30, 42, 70, 105, 210\}$.

15.55. 642.

15.56. $n = 5$.

15.57. $\frac{11111111}{111111111}$.

15.58. 1960.

15.59. 7200.

15.60. 132.

Справочное издание

Ященко И. В., Волчкевич М. А., Высоцкий И. Р., Гордин Р. К., Семёнов П. В., Косухин О. Н., Фёдоровых Д. А., Суздальцев А. И., Рязановский А. Р., Сергеев И. Н., Смирнов В. А., Трепалин А. С., Хачатурян А. В., Шестаков С. А., Шноль Д. Э.

ЕГЭ
МАТЕМАТИКА
ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ
ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU.АД44.Н02841 от 30.06.2017 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо*
Редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректоры *Т. И. Шитикова, О. Ю. Казанаева*
Дизайн обложки *Л. В. Демьянова*
Компьютерная верстка *К. А. Реутова, Е. Ю. Лысова*

Россия, 107045, Москва, Луков пер., д. 8. www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 8 (495) 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО «ИПК Парето-Принт», Россия, г. Тверь, www.pareto-print.ru

По вопросам реализации обращаться по тел.: 8 (495) 641-00-30 (многоканальный).