

23. Функции и их свойства. Графики функций

Часть 1. ФИПИ

I) Линейная функция

1. Постройте график функции $y = \begin{cases} x-2,5, & \text{если } x < 2, \\ -x+1,5, & \text{если } 2 \leq x \leq 3, \\ x-4,5, & \text{если } x > 3. \end{cases}$ Определите, при

каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две общие точки.

2. Постройте график функции $y = \begin{cases} 4x-1,5, & \text{если } x < 1, \\ -2,5x+5, & \text{если } 1 \leq x \leq 4, \\ x-9, & \text{если } x > 4. \end{cases}$ Определите, при

каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две общие точки.

3. Постройте график функции $y = \begin{cases} 3x-3,5, & \text{если } x < 2, \\ -3x+8,5, & \text{если } 2 \leq x < 3, \\ 3,5x-11, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$ Определите, при

каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две общие точки.

4. Постройте график функции $y = \begin{cases} 2x-2, & \text{если } x < 3, \\ -3x+13, & \text{если } 3 \leq x \leq 4, \\ 1,5x-5, & \text{если } x > 4. \end{cases}$ Определите, при

каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две общие точки.

II) Квадратичная функция (парабола). Модуль

5. Постройте график функции $y = \begin{cases} -x^2-2x+3, & \text{если } x \geq -2, \\ -x+1, & \text{если } x < -2. \end{cases}$ Определите, при

каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две общие точки.

6. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2-10x+25, & \text{если } x \geq 4, \\ x-3, & \text{если } x < 4. \end{cases}$ Определите, при

каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две общие точки.

7. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2-6x+11, & \text{если } x \geq 2, \\ x+1, & \text{если } x < 2. \end{cases}$ Определите, при

каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две общие точки.

8. Постройте график функции $y = \begin{cases} -x^2-4x+1, & \text{если } x \geq -3, \\ -x+1, & \text{если } x < -3. \end{cases}$ Определите, при

каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две общие точки.

9. Постройте график функции $y = |x^2-16|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

- 10.** Постройте график функции $y = |x^2 - 9|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?
- 11.** Постройте график функции $y = |x^2 + x - 2|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?
- 12.** Постройте график функции $y = |x^2 + 5x + 6|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?
- 13.** Постройте график функции $y = |x^2 - 4x + 3|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?
- 14.** Постройте график функции $y = |x|x - |x| - 6x$. Определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две общие точки.
- 15.** Постройте график функции $y = |x|x + 3|x| - 5x$. Определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две общие точки.
- 16.** Постройте график функции $y = |x|x - |x| - 3x$. Определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две общие точки.
- 17.** Постройте график функции $y = |x|(x + 2) - 3x$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две общие точки.
- 18.** Постройте график функции $y = |x|(x - 1) - 5x$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две общие точки.
- 19.** Постройте график функции $y = |x|(x + 1) - 6x$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две общие точки.
- 20.** Постройте график функции $y = x^2 - |4x + 7|$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно три общие точки.
- 21.** Постройте график функции $y = x^2 - |6x + 5|$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно три общие точки.
- 22.** Постройте график функции $y = x^2 - |8x + 3|$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно три общие точки.
- 23.** Постройте график функции $y = x^2 - |6x + 1|$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно три общие точки.

- 24.** Постройте график функции $y = x^2 - 11x - 2|x - 5| + 30$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно три общие точки.
- 25.** Постройте график функции $y = x^2 + 3x - 3|x + 2| + 2$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно три общие точки.
- 26.** Постройте график функции $y = x^2 - 8x - 4|x - 3| + 15$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно три общие точки.
- 27.** Постройте график функции $y = 5|x - 2| - x^2 + 5x - 6$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно три общие точки.
- 28.** Постройте график функции $y = 3|x + 8| - x^2 - 14x - 48$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно три общие точки.
- 29.** Постройте график функции $y = 2|x - 4| - x^2 + 9x - 20$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно три общие точки.
- 30.** Постройте график функции $y = \frac{(0,5x^2 - x)|x|}{x - 2}$. Определите, при каких значениях t прямая $y = t$ не имеет с графиком ни одной общей точки.
- 31.** Постройте график функции $y = \frac{(0,25x^2 + 0,5x)|x|}{x + 2}$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ не имеет с графиком ни одной общей точки.
- 32.** Постройте график функции $y = \frac{(0,5x^2 + 2x)|x|}{x + 4}$. Определите, при каких значениях t прямая $y = t$ не имеет с графиком ни одной общей точки.
- 33.** Постройте график функции $y = \frac{(0,75x^2 + 1,5x)|x|}{x + 2}$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ не имеет с графиком ни одной общей точки.
- 34.** Постройте график функции $y = \frac{(0,25x^2 - x)|x|}{x - 4}$. Определите, при каких значениях t прямая $y = t$ не имеет с графиком ни одной общей точки.
- 35.** Постройте график функции $y = \frac{(x^2 + 2,25)(x - 1)}{1 - x}$. Определите, при каких значениях параметра k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.
- 36.** Постройте график функции $y = \frac{(x^2 + 1)(x - 2)}{2 - x}$. Определите, при каких значениях параметра k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

37. Постройте график функции $y = \frac{(x^2 + 0,25)(x+1)}{-1-x}$. Определите, при каких значениях параметра k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

38. Постройте график функции $y = \frac{(x^2 + 6,25)(x+1)}{-1-x}$. Определите, при каких значениях параметра k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

III) Обратная пропорциональность (гипербола).

39. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2. \end{cases}$ Определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком одну или две общие точки.

40. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 + 6x + 9, & \text{если } x \geq -5, \\ -\frac{20}{x}, & \text{если } x < -5. \end{cases}$ Определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком одну или две общие точки.

41. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & \text{если } x \geq -4, \\ -\frac{36}{x}, & \text{если } x < -4. \end{cases}$ Определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком одну или две общие точки.

42. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 + 4x + 4, & \text{если } x \geq -5, \\ -\frac{45}{x}, & \text{если } x < -5. \end{cases}$ Определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком одну или две общие точки.

43. Постройте график функции $y = 3 - \frac{x+2}{x^2+2x}$. Определите, при каких значениях t прямая $y = t$ не имеет с графиком общих точек.

44. Постройте график функции $y = 2 - \frac{x-5}{x^2-5x}$. Определите, при каких значениях t прямая $y = t$ не имеет с графиком общих точек.

45. Постройте график функции $y = -2 - \frac{x+4}{x^2+4x}$. Определите, при каких значениях t прямая $y = t$ не имеет с графиком общих точек.

- 46.** Постройте график функции $y = -5 - \frac{x-2}{x^2-2x}$. Определите, при каких значениях t прямая $y = t$ не имеет с графиком общих точек.
- 47.** Постройте график функции $y = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{x}{3} - \frac{3}{x} \right| + \frac{x}{3} + \frac{3}{x} \right)$. Определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно одну общую точку.
- 48.** Постройте график функции $y = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{x}{6} - \frac{6}{x} \right| + \frac{x}{6} + \frac{6}{x} \right)$. Определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно одну общую точку.
- 49.** Постройте график функции $y = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{x}{1,5} - \frac{1,5}{x} \right| + \frac{x}{1,5} + \frac{1,5}{x} \right)$. Определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно одну общую точку.
- 50.** Постройте график функции $y = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{x}{3,5} - \frac{3,5}{x} \right| + \frac{x}{3,5} + \frac{3,5}{x} \right)$. Определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно одну общую точку.
- 51.** Постройте график функции $y = \frac{5x-8}{5x^2-8x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.
- 52.** Постройте график функции $y = \frac{9x+1}{9x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.
- 53.** Постройте график функции $y = \frac{6x-7}{6x^2-7x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.
- 54.** Постройте график функции $y = \frac{7x+5}{7x^2+5x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.
- 55.** Постройте график функции $y = \frac{|x|-1}{|x|-x^2}$. Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки.
- 56.** Постройте график функции $y = \frac{2,5|x|-1}{|x|-2,5x^2}$. Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

57. Постройте график функции $y = \frac{3|x|-1}{|x|-3x^2}$. Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

58. Постройте график функции $y = \frac{3,5|x|-1}{|x|-3,5x^2}$. Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

23. Функции и их свойства. Графики функций

Часть 2. ФИПИ. Расширенная версия

1) Квадратичная функция (парабола). Модуль

1. Постройте график функции $y = \begin{cases} -\frac{5}{x}, & \text{если } x \leq -1, \\ x^2 - 4x, & \text{если } x > -1, \end{cases}$ и определите, при

каких значениях t прямая $y = t$ будет пересекать построенный график в трёх точках.

2. Постройте график функции $y = \begin{cases} \frac{5}{x}, & \text{если } x \geq 1, \\ x^2 + 4x, & \text{если } x < 1, \end{cases}$ и определите, при

каких значениях t прямая $y = t$ будет пересекать построенный график в трёх точках.

3. При каком значении k прямая $y = kx$ имеет с параболой $y = x^2 - 3x$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки и построьте данные графики в одной системе координат.

4. При каком значении k прямая $y = kx - 4$ имеет с параболой $y = x^2 + 2x$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки и построьте данные графики в одной системе координат.

5. Найдите все значения k , при каждом из которых прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = x^2 + 4$ ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.

6. При каком значении p прямая $y = x + p$ имеет с параболой $y = x^2 - 3x$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки. Постройте в одной системе координат данную параболу и прямую при найденном значении p .

7. При каком значении p прямая $y = -2x + p$ имеет с параболой $y = x^2 + 2x$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки. Постройте в одной системе координат данную параболу и прямую при найденном значении p .

8. Известно, что графики функций $y = -x^2 + p$ и $y = -4x + 5$ имеют ровно одну общую точку. Определите координаты этой точки. Постройте графики заданных функций в одной системе координат.

9. При каком значении p графики функций $y = x^2 + p$ и $y = -2x - 2$ имеют ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки. Постройте графики заданных функций в одной системе координат.

- 10.** Известно, что графики функций $y = x^2 + p$ и $y = 2x - 5$ имеют ровно одну общую точку. Определите координаты этой точки. Постройте графики заданных функций в одной системе координат.
- 11.** Найдите p и построьте график функции $y = x^2 + p$, если известно, что прямая $y = 4x$ имеет с графиком ровно одну общую точку.
- 12.** Найдите p и построьте график функции $y = x^2 + p$, если известно, что прямая $y = -2x$ имеет с графиком ровно одну общую точку.
- 13.** Постройте график функции $y = x^2 - 4|x| + 2x$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком три общие точки.
- 14.** Постройте график функции $y = x^2 - 6|x| + 2x$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком три общие точки.
- 15.** Постройте график функции $y = x^2 - 5|x| - x$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком три общие точки.
- 16.** Постройте график функции $y = -x^2 + 3|x| + x$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно три общие точки.
- 17.** Постройте график функции $y = -2x + 4|x| - x^2$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно три общие точки.
- 18.** Постройте график функции $y = 2x + 6|x| - x^2$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c$ имеет с графиком ровно три общие точки.
- 19.** Постройте график функции $y = x^2 - 5|x| + 4$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?
- 20.** Постройте график функции $y = x^2 - 6|x| + 8$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?
- 21.** Постройте график функции $y = x^2 - 5|x| + 6$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?
- 22.** Постройте график функции $y = \frac{(x^2 + 7x + 12)(x^2 - x - 2)}{x^2 + 5x + 4}$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

23. Постройте график функции $y = \frac{(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x + 2)}{x^2 - x - 2}$ и определите, при каких значениях параметра m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

24. Постройте график функции $y = -2 - \frac{x^4 - x^3}{x^2 - x}$ и определите, при каких значениях параметра m прямая $y = m$ имеет ровно две общие точки с графиком.

25. Постройте график функции $y = 5 - \frac{x^4 - x^3}{x^2 - x}$ и определите, при каких значениях параметра m прямая $y = m$ имеет ровно две общие точки с графиком.

26. Парабола проходит через точки $A(0; 6)$, $B(6; -6)$, $C(1; 9)$. Найдите координаты её вершины.

27. Парабола проходит через точки $A(0; -6)$, $B(-5; -1)$, $C(1; -1)$. Найдите координаты её вершины.

28. Парабола проходит через точки $K(0; -5)$, $L(3; 10)$, $M(-3; -2)$. Найдите координаты её вершины.

29. Парабола проходит через точки $A(0; -4)$, $B(-1; -11)$, $C(4; 4)$. Найдите координаты её вершины.

30. При каких значениях p вершины парабол $y = x^2 + 4px - 1$ и $y = -x^2 + 6px - p$ расположены по разные стороны от оси x ?

31. При каких значениях p вершины парабол $y = -x^2 + 8px + 3$ и $y = x^2 - 6px + 3p$ расположены по разные стороны от оси x ?

32. При каких значениях m вершины парабол $y = -x^2 - 6mx + m$ и $y = x^2 - 4mx - 2$ расположены по одну сторону от оси x ?

33. При каких значениях m вершины парабол $y = -x^2 + 4mx - m$ и $y = x^2 + 2mx - 2$ расположены по одну сторону от оси x ?

II) Обратная пропорциональность (гипербола)

34. Постройте график функции $y = \frac{x - 2}{2x - x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

35. Постройте график функции $y = \frac{1-2x}{2x^2-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

36. Постройте график функции $y = -4 - \frac{x+1}{x^2+x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

37. Постройте график функции $y = -1 - \frac{x-4}{x^2-4x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

38. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } |x| \leq 1, \\ -\frac{1}{x}, & \text{если } |x| > 1, \end{cases}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

39. Постройте график функции $y = \begin{cases} -2x^2, & \text{если } |x| \leq 1, \\ \frac{2}{x}, & \text{если } |x| > 1, \end{cases}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = 4m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.