25. Геометрическая задача на доказательство
Часть 1. ФИПИ

1. В треугольнике ABC с тупым углом ACB проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что треугольники A_1B_1C и ABC подобны.

2. В треугольнике ABC с тупым углом ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Докажите, что треугольники A_1BC_1 и ABC подобны.

3. В треугольнике ABC с тупым углом BAC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что треугольники AB_1C_1 и ABC подобны.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что углы AA_1B_1 и ABB_1 равны.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Докажите, что углы AA_1C_1 и ACC_1 равны.

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что углы BB_1C_1 и BCC_1 равны.

7. Биссектрисы углов A и B параллелограмма ABCD пересекаются в точке M, лежащей на стороне AD. Докажите, что M – середина AD.

8. Биссектрисы углов C и D параллелограмма ABCD пересекаются в точке L, лежащей на стороне AB. Докажите, что L – середина AB.

9. Биссектрисы углов B и C параллелограмма ABCD пересекаются в точке M, лежащей на стороне AD. Докажите, что M – середина AD.

10. Внутри параллелограмма ABCD выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади параллелограмма.

11. Внутри параллелограмма ABCD выбрали произвольную точку F. Докажите, что сумма площадей треугольников BFC и AFD равна половине площади параллелограмма.

12. Сторона AD параллелограмма ABCD вдвое больше стороны CD. Точка M – середина стороны AD. Докажите, что CM – биссектриса угла BCD.

13. Сторона AB параллелограмма ABCD вдвое больше стороны BC. Точка L – середина стороны AB. Докажите, что CL – биссектриса угла BCD.

14. Сторона CD параллелограмма ABCD вдвое больше стороны AD. Точка N – середина стороны CD. Докажите, что AN – биссектриса угла BAD.

15. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма ABCD проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Докажите, что отрезки AE и CF равны.

16. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма ABCD проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках L и N соответственно. Докажите, что отрезки CL и AN равны.

17. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма ABCD проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках K и M соответственно. Докажите, что отрезки BK и DM равны.

18. Биссектрисы углов A и D трапеции ABCD пересекаются в точке M, лежащей на стороне BC. Докажите, что точка M равноудалена от прямых AB, AD и CD.

19. Биссектрисы углов A и B трапеции ABCD пересекаются в точке K, лежащей на стороне CD. Докажите, что точка K равноудалена от прямых AB, BC и AD.

20. Биссектрисы углов C и D трапеции ABCD пересекаются в точке P, лежащей на стороне AB. Докажите, что точка P равноудалена от прямых BC, CD и AD.

21. В трапеции ABCD с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

22. В трапеции ABCD с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке P. Докажите, что площади треугольников APB и CPD равны.

23. На средней линии трапеции ABCD с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади трапеции.

24. На средней линии трапеции ABCD с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку K. Докажите, что сумма площадей треугольников BKC и AKD равна половине площади трапеции.

25. На средней линии трапеции ABCD с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку F. Докажите, что сумма площадей треугольников BFC и AFD равна половине площади трапеции.

26. Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 4,5 и 18, $BD = 9$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

27. Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 4 и 64, $BD = 16$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

28. Основания BC и AD трапеции ABCD равны соответственно 7 и 28, $BD = 14$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

29. Точка E – середина боковой стороны AB трапеции ABCD. Докажите, что площадь треугольника ECD равна половине площади трапеции.

30. Точка K – середина боковой стороны CD трапеции ABCD. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.

31. В выпуклом четырёхугольнике ABCD углы DAC и DBC равны. Докажите, что углы CDB и CAB также равны.

32. В выпуклом четырёхугольнике ABCD углы BCA и BDA равны. Докажите, что углы ABD и ACD также равны.

33. В выпуклом четырёхугольнике ABCD углы CDB и CAB равны. Докажите, что углы BCA и BDA также равны.

34. Окружности с центрами в точках E и F пересекаются в точках C и D, причём точки E и F лежат по одну сторону от прямой CD. Докажите, что CD и EF перпендикулярны.

35. Окружности с центрами в точках M и N пересекаются в точках S и T, причём точки M и N лежат по одну сторону от прямой ST. Докажите, что прямые MN и ST перпендикулярны.

36. Окружности с центрами в точках P и Q пересекаются в точках K и L, причём точки P и Q лежат по одну сторону от прямой KL. Докажите, что прямые PQ и KL перпендикулярны.

37. Окружности с центрами в точках I и J не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении m:n. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как m:n.

38. Окружности с центрами в точках P и Q не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении a:b. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как a:b.

25. Геометрическая задача на доказательство
Часть 2. ФИПИ. Расширенная версия

1. В параллелограмме ABCD диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Докажите, что площадь параллелограмма ABCD в четыре раза больше площади треугольника AOB.

2. В параллелограмме ABCD диагонали AC и BD пересекаются в точке K. Докажите, что площадь параллелограмма ABCD в четыре раза больше площади треугольника AKD.

3. В параллелограмме ABCD диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Докажите, что площадь параллелограмма ABCD в четыре раза больше площади треугольника BOC.

4. В параллелограмме ABCD точка E – середина стороны CD. Известно, что $EA = EB$. Докажите, что данный параллелограмм – прямоугольник.

5. В параллелограмме ABCD точка K – середина стороны AB. Известно, что $KC = KD$. Докажите, что данный параллелограмм – прямоугольник.

6. В параллелограмме KLMN точка B – середина стороны LM. Известно, что $BK = BN$. Докажите, что данный параллелограмм – прямоугольник.

7. На стороне AC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что отрезки AD и CE равны. Оказалось, что отрезки BD и BE тоже равны. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

8. На стороне AC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что отрезки AD и CE равны. Оказалось, что углы AEB и BDC тоже равны. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

9. Дан правильный восьмиугольник. Докажите, что если его вершины последовательно соединить отрезками через одну, то получится квадрат.

10. Дан правильный восьмиугольник. Докажите, что если последовательно соединить отрезками середины его сторон, то получится правильный восьмиугольник.

11. Дан правильный шестиугольник. Докажите, что если его вершины последовательно соединить отрезками через одну, то получится равносторонний треугольник.

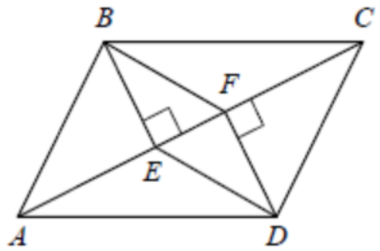
12. Дан правильный шестиугольник. Докажите, что если последовательно соединить отрезками середины его сторон, то получится правильный шестиугольник.

13. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ точки M, N, K – середины сторон AB, BC, CA соответственно. Докажите, что треугольник MNK – равнобедренный.

14. В равностороннем треугольнике ABC точки M, N, K – середины сторон AB, BC, CA соответственно. Докажите, что MNK – равносторонний.

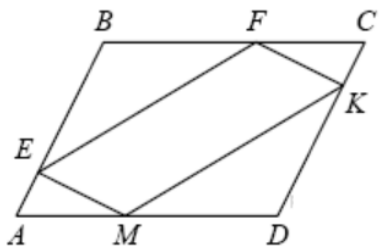
15. В равностороннем треугольнике ABC точки M, N, K – середины сторон AB, BC, CA соответственно. Докажите, что BMKN – ромб.

16. Сторона CD параллелограмма ABCD вдвое больше стороны BC. Точка F – середина стороны CD. Докажите, что BF – биссектриса угла ABC.



17. В параллелограмме ABCD проведены перпендикуляры BE и DF к диагонали AC (см. рис.). Докажите, что BFDE – параллелограмм.

18. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке E. Докажите, что углы AA_1B_1 и ABB_1 равны.



19. В параллелограмме ABCD точки E, F, K и M лежат на его сторонах, как показано на рисунке, причём $CF = AM$, $BE = DK$. Докажите, что EFKM – параллелограмм.

20. В параллелограмме ABCD точки E, F, K и M лежат на его сторонах, как показано на рисунке, причём $AE = CK$, $BF = DM$. Докажите, что EFKM – параллелограмм.

21. Известно, что около четырёхугольника ABCD можно описать окружность и что продолжения сторон AD и BC четырёхугольника пересекаются в точке K. Докажите, что треугольники KAB и KCD подобны.

22. Известно, что около четырёхугольника ABCD можно описать окружность и что продолжения сторон AB и CD четырёхугольника пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.

23. В остроугольном треугольнике ABC точки A, C, центр описанной окружности O и центр вписанной окружности I лежат на одной окружности. Докажите, что угол ABC равен 60°.

24. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60°. Докажите, что точки A, C, центр описанной окружности треугольника ABC и точка пересечения высот треугольника ABC лежат на одной окружности.