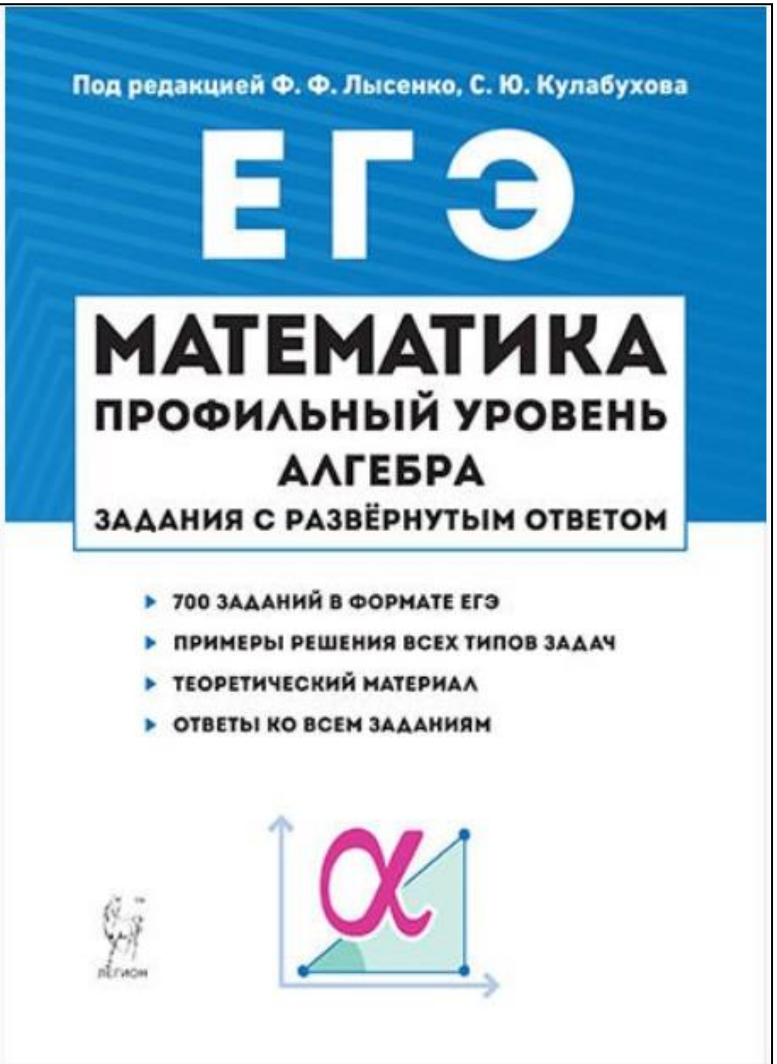
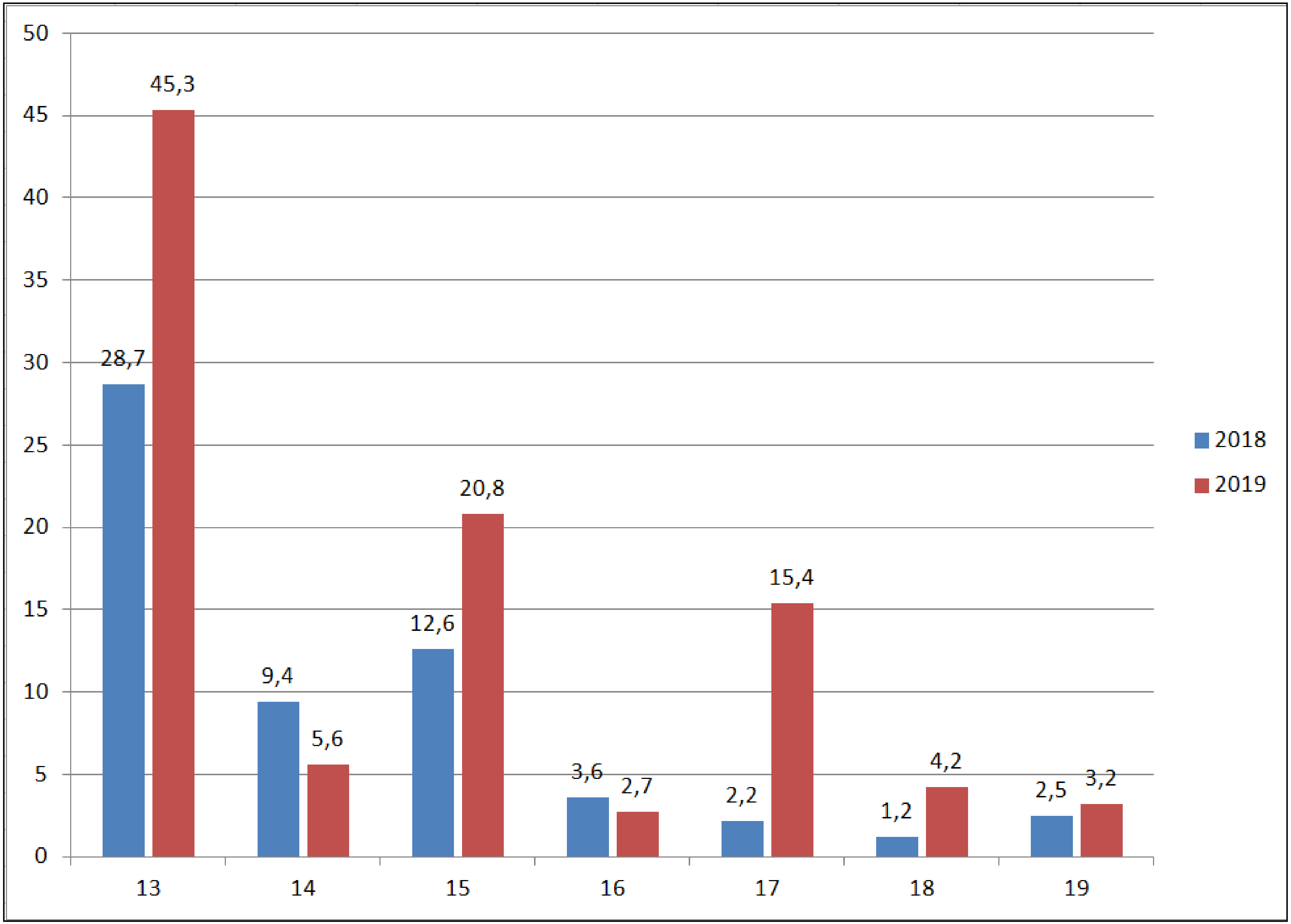


Задания с развёрнутым ответом в ЕГЭ

Кулабухов Сергей Юрьевич

Выполнение заданий с развернутым ответом на профильном ЕГЭ по математике (средний процент выполнения)



www.fipi.ru

13 а) Решите уравнение

$$2\log_2^2(2\cos x)-9\log_2(2\cos x)+4=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение

а) $2\log_2^2(2\cos x)-9\log_2(2\cos x)+4=0$

Замена $t=\log_2(2\cos x)$.

$2t^2-9t+4=0$

$$t_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{9^2-4\cdot2\cdot4}}{4}=\frac{9\pm7}{4}$$

$$t_1=\frac{9+7}{4}=4$$

$$t_2=\frac{9-7}{4}=\frac{1}{2}$$

$\log_2(2\cos x)=4$ или $\log_2(2\cos x)=\frac{1}{2}$

Решение (продолжение)

$\log_2(2\cos x) = 4$ или $\log_2(2\cos x) = \frac{1}{2}$

$2\cos x = 16$

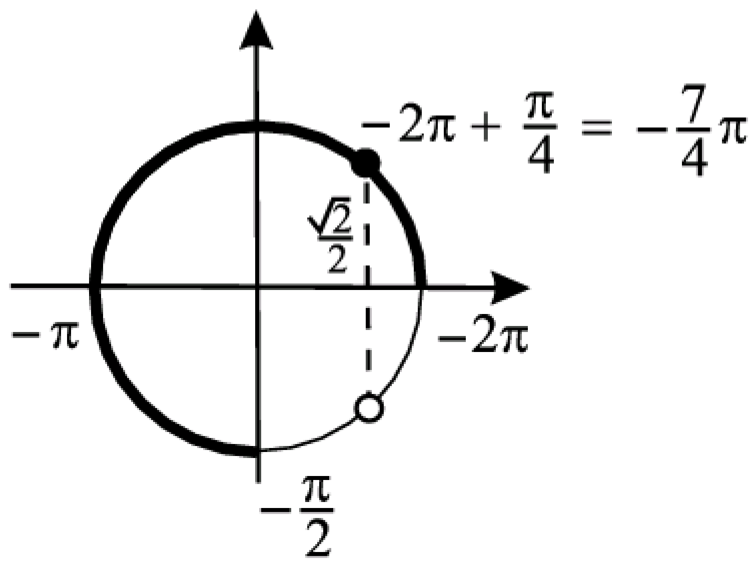
$\cos x = 8$ — нет решений

$2\cos x = \sqrt{2}$

$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$

б) Из рисунка видно, что единственный корень, принадлежащий отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ равен $-\frac{7}{4}\pi$.



Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$; б) $-\frac{7}{4}\pi$.

Решите уравнение $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$

Первый способ.

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

Оценим множество значений левой и правой частей уравнений.

Левая часть: $-2 \leqslant 2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) \leqslant 2.$

Правая часть: $\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} \geqslant 2$, при $\operatorname{tg} x > 0$;

$\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} \leqslant -2$, при $\operatorname{tg} x < 0$;

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = 2 \\ \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = 2 \\ \operatorname{tg} x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = -2 \\ \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = -2 \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \operatorname{tg} x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = -1 \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1\\ \operatorname{tg}x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1\\ \operatorname{tg}x=-1\end{cases}\end{array}\right.$$

1) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$$

$$\underline{x=\frac{\pi}{4}+2\pi n.}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)=1.$$

2) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$

$$x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$$

$$x=-\frac{3}{4}\pi+2\pi n.$$

Так как $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{3}{4}\pi+2\pi n\right)\neq -1$,

то вторая система не имеет решений.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z.$

Решите уравнение $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x.$

Второй способ.

$$2(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x)=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\frac{1}{\sin x\cos x}.$$

Замена $t=\sin x+\cos x.$

$$t^2=(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x;\ \ \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}.$$

$$\sqrt{2}\cdot t=\frac{2}{t^2-1}$$

$$\frac{\sqrt{2}\cdot t(t^2-1)-2}{t^2-1}=0$$

$$\sqrt{2}\cdot t^3-\sqrt{2}\cdot t-2=0,\quad t\neq\pm1.$$

$$\sqrt{2}\cdot t^3-\sqrt{2}\cdot t-2=0$$

Заметим, что $t=\sqrt{2}$ — корень уравнения.

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{2}\cdot t^3-\sqrt{2}\cdot t-2 & t-\sqrt{2} \\ \cline{2-2}
-\ \underline{\sqrt{2}\cdot t^3-2t^2} \qquad\qquad & \sqrt{2}\cdot t^2+2t+\sqrt{2} \\
2t^2-\sqrt{2}\cdot t \quad & \\
-\ \underline{2t^2-2\sqrt{2}\cdot t} \quad & \\
\sqrt{2}\cdot t-2 & \\
-\ \underline{\sqrt{2}\cdot t-2} & \\
0 &
\end{array}$$

Значит уравнение можно записать в виде
$(t-\sqrt{2})(\sqrt{2}\cdot t^2+2t+\sqrt{2})=0.$

Так как $\sqrt{2}\cdot t^2+2t+\sqrt{2}>0$, то $t=\sqrt{2}$ — единственный корень.

Итак, $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = 1$$

$$\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos x = 1$$

$$\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$

Решите уравнение $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x.$

Третий способ.

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sin x\cos x}$$

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin x\cos x=1$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin 2x=1$$

Так как $\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant 1$ и $|\sin 2x|\leqslant 1$, то возможны два случая.

Первый случай:

$$\begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\\ \sin 2x=1\end{cases}\quad \begin{cases}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z\\ 2x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z\end{cases}\quad \begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+2\pi n\\ x=\frac{\pi}{4}+\pi k\end{cases}$$

$$x=\frac{\pi}{4}+2\pi n.$$

Второй случай:

$$\begin{cases} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = -1 \\ \sin 2x = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3}{2}\pi + 2\pi n, n \in Z \\ 2x = \dfrac{3}{2}\pi + 2\pi k, k \in Z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{5}{4}\pi + 2\pi n \\ x = \dfrac{3}{4}\pi + \pi k \end{cases}$$

нет решений

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$

Решите уравнение $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x.$

Четвёртый способ.

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sin x\cos x}$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sin 2x}.$$

Оценим множество значений левой и правой частей уравнений.

Левая часть: $-1\leqslant\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1.$

Правая часть: $\frac{1}{\sin 2x}\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty).$

Первый случай:

$$\begin{cases}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\\ \sin 2x=1\end{cases}\quad\begin{cases}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z\\ 2x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z\end{cases}\quad\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+2\pi n\\ x=\frac{\pi}{4}+\pi k\end{cases}$$

$$x=\frac{\pi}{4}+2\pi n.$$

Второй случай:

$$\begin{cases} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = -1 \\ \sin 2x = -1 \end{cases} \begin{cases} x+\frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}\pi + 2\pi n, n \in Z \\ 2x = \frac{3}{2}\pi + 2\pi k, k \in Z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{5}{4}\pi + 2\pi n \\ x = \frac{3}{4}\pi + \pi k \end{cases}$$

нет решений

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$

Решите уравнение $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x.$

Пятый способ.

$$2\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x\right)=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\frac{1}{\sin x\cos x}.$$

$$(\sin x+\cos x)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sin x\cos x}\right)^2$$

$$1+2\sin x\cos x=\frac{1}{2\sin^2 x\cos^2 x}$$

$$1+\sin 2x=\frac{2}{\sin^2 2x}.$$

Замена $t=\sin 2x,\ -1\leqslant t\leqslant 1.$

$$1+t=\frac{2}{t^2}$$

$$t^3+t^2-2=0$$

$$t^3-t^2+2t^2-2=0$$

$$t^2(t-1)+2(t-1)(t+1)=0$$

$$(t-1)(t^2+2t+2)=0$$

$$t=1.$$

$\sin 2x = 1$

$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi n.$

Так как при возведении в квадрат возможно появление посторонних корней, то проведем проверку.

Проверка

1) При $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n.$

Левая часть: $2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$

Правая часть: $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) = 1 + 1 = 2.$

$\underline{x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z}$ — корни исходного уравнения.

2) При $x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n$.

Левая часть: $2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n + \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -2$.

Правая часть: $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n\right) + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n\right) = 1 + 1 = 2$.

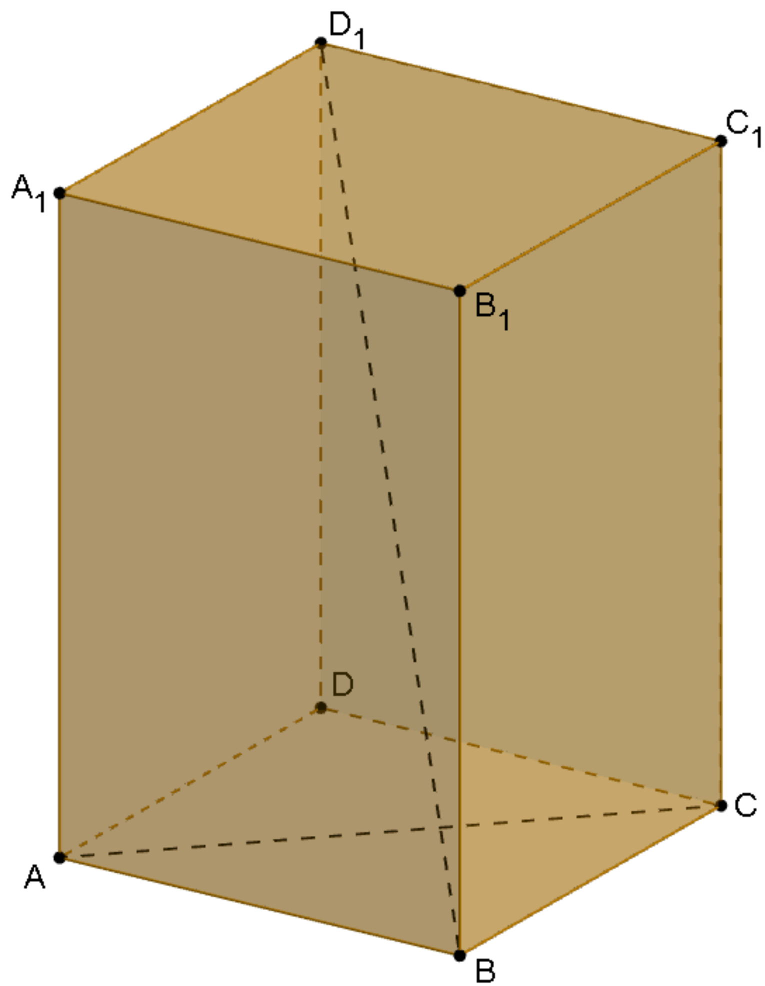
$x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n,\, n \in Z$ — посторонние корни.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n,\, n \in Z$.

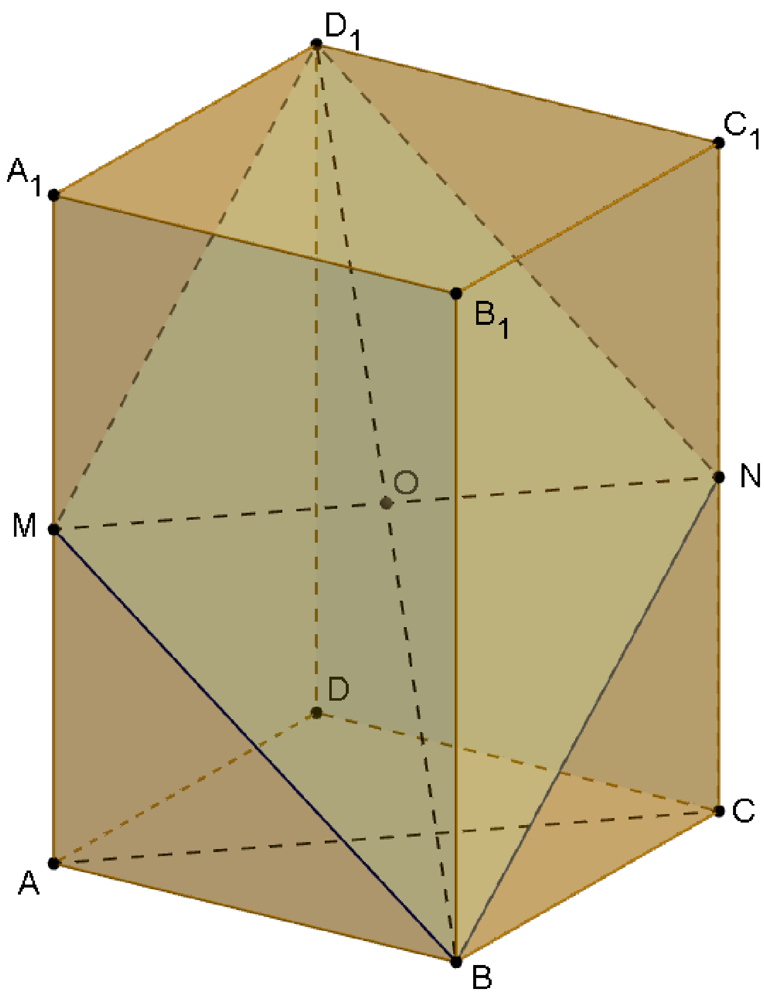
14 Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью γ содержащей прямую BD_1 и параллельно прямой AC, является ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD$ — квадрат.

б) Найдите угол между плоскостями γ и BCC_1, если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.

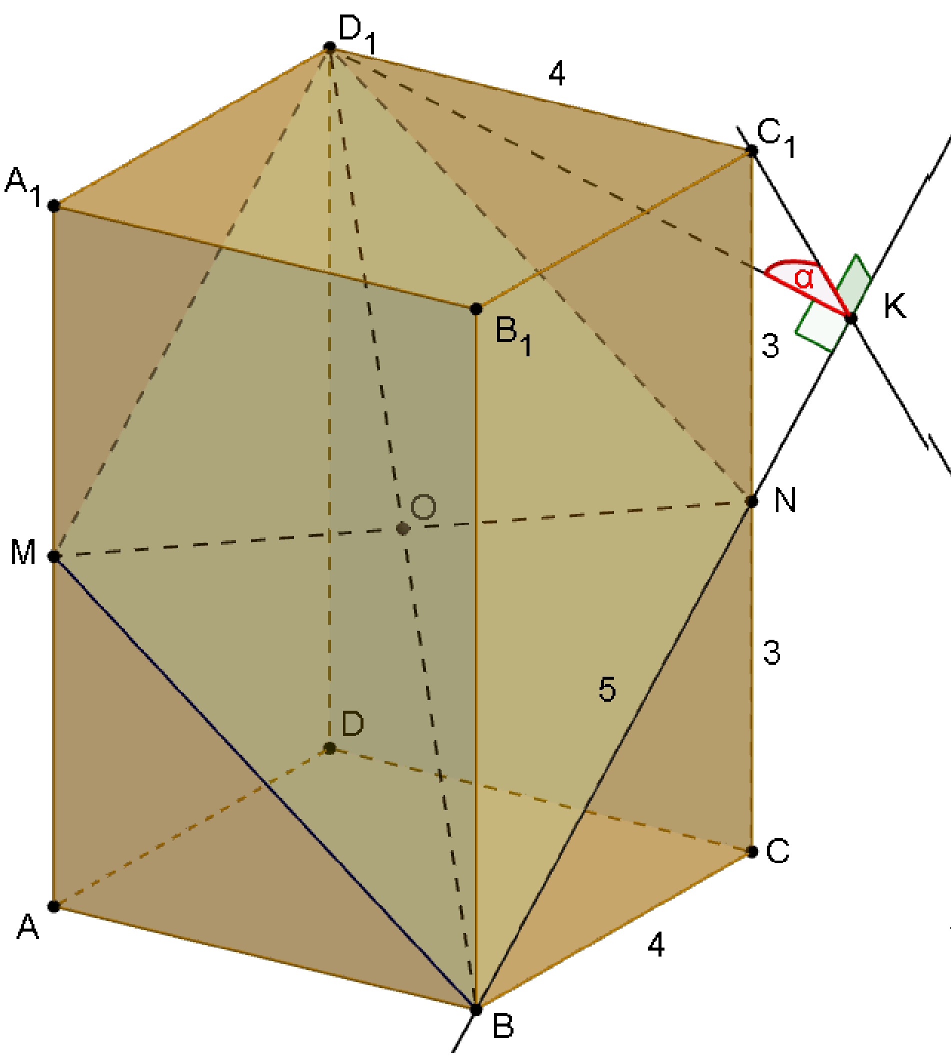


Решение №1



а) 1) Пусть O — середина диагонали BD_1. Проведём через точку O прямую MN параллельно AC. Тогда M и N — середины рёбер AA_1 и CC_1 соответственно. Тогда BMD_1N — сечение параллелепипеда плоскостью γ.

2) Так как BMD_1N является ромбом, то $BM = BN$. Кроме того, $AM = CN$. Значит, $\triangle AMB = \triangle CNB$ по катету и гипотенузе. Отсюда, $AB = BC$, то есть прямоугольник $ABCD$ — квадрат.



б) 1) Построим $C_1K \perp BN$. Заметим, что C_1K — проекция прямой D_1K на плоскость BCC_1. Тогда $D_1K \perp BN$ по теореме о трёх перпендикулярах. Значит, $\alpha = \angle C_1KD_1$ — искомый угол.

2) $\angle BNC = \angle C_1NK$ как вертикальные. Следовательно, $\Delta BNC \sim \Delta C_1NK$.

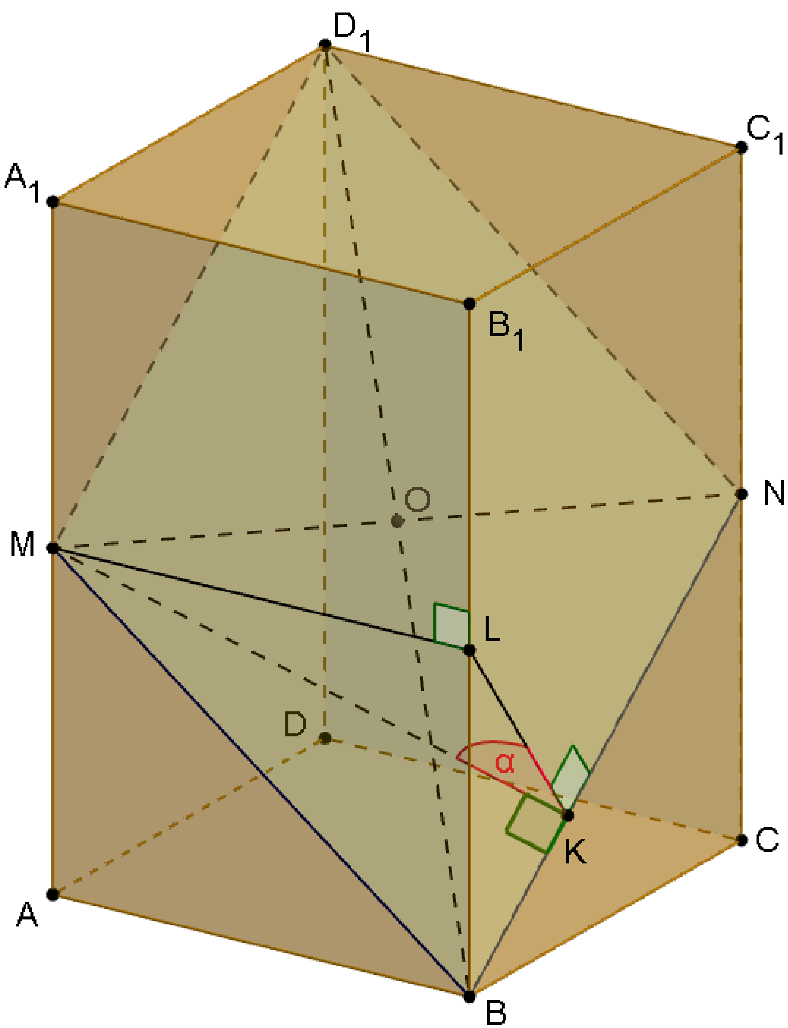
Отсюда, $\dfrac{C_1K}{C_1N} = \dfrac{BC}{BN}$;

$$C_1K = \frac{BC \cdot C_1N}{BN} = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5}.$$

3) Из прямоугольного ΔKC_1D_1 получим $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{C_1D_1}{C_1K} = \dfrac{4}{\frac{12}{5}} = \dfrac{5}{3}$. Значит, $\alpha = \operatorname{arctg} \dfrac{5}{3}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \dfrac{5}{3}$.

Другой способ построения угла α

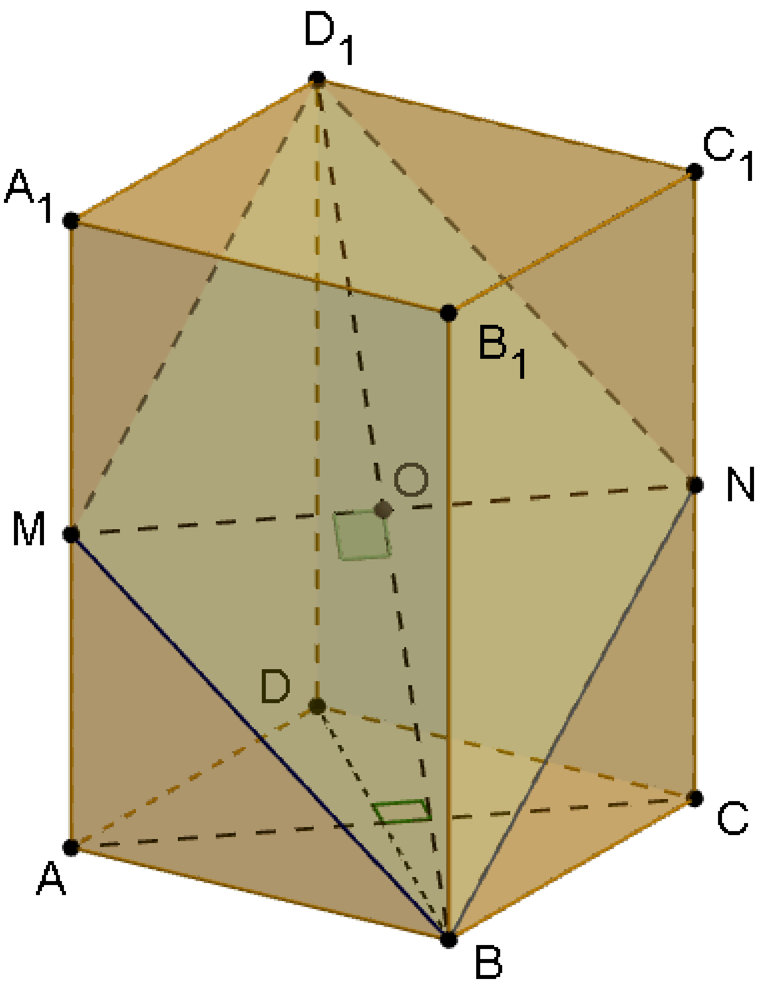


1) Построим $MK \perp BN$.

2) Построим точку L — проекцию точки M на плоскость BCC_1.

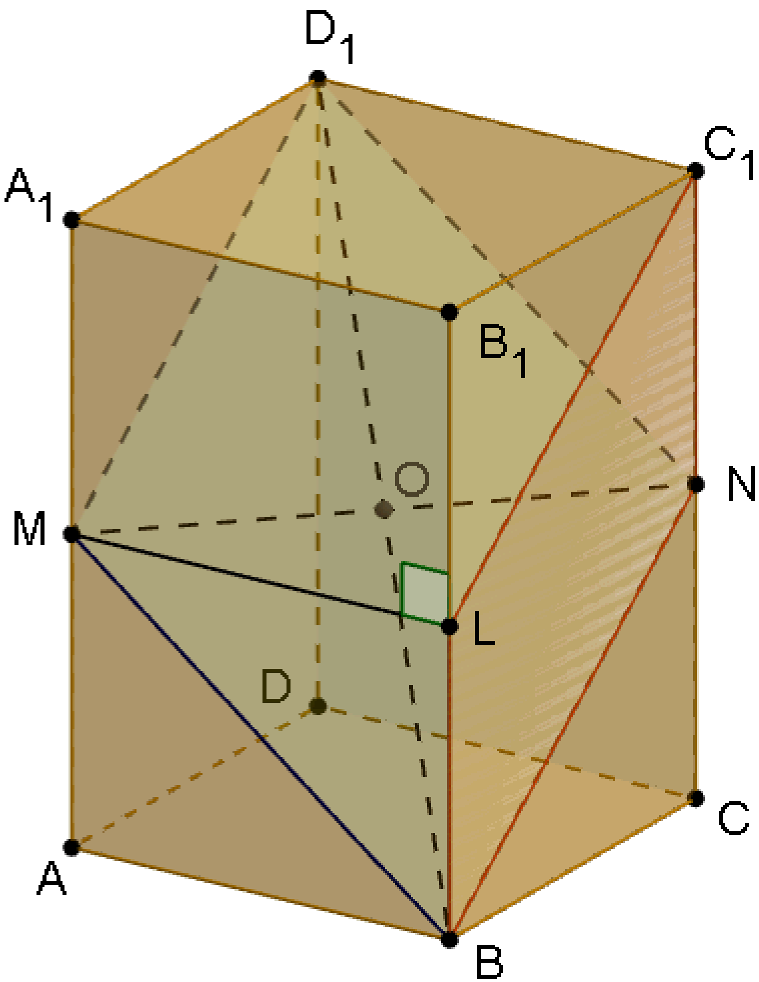
3) Тогда KL — проекция прямой MK на плоскость грани BCC_1. Значит, $KL \perp BN$ по теореме о трёх перпендикулярах. Значит, $\alpha = \angle MKL$ — искомый угол.

Решение №2



а) 1) Пусть O — середина диагонали BD_1. Проведём через точку O прямую MN параллельно AC. Тогда M и N — середины рёбер AA_1 и CC_1 соответственно. Тогда BMD_1N — сечение параллелепипеда плоскостью γ.

2) Так как $MN \parallel AC$ по построению и $MN \perp BD_1$ как диагонали ромба, то $BD_1 \perp AC$. Так как BD — проекция BD_1 на плоскость нижнего основания, то $BD \perp AC$ по теореме о трёх перпендикулярах. Так как в прямоугольнике $ABCD$ диагонали перпендикулярны, то он является квадратом.



б) 1) Построим точку L — проекцию точки M на плоскость BCC_1. Тогда проекцией ромба BMD_1N на плоскость боковой грани BCC_1 является четырёхугольник BLC_1N. Так как $BL = C_1N$ и $BL \parallel C_1N$, то BLC_1N — параллелограмм.

2) $S_{BLC_1N} = BL \cdot BC = 3 \cdot 4 = 12.$

3) $S_{BMD_1N} = \frac{1}{2} \cdot BD_1 \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot BD_1 \cdot AC =$

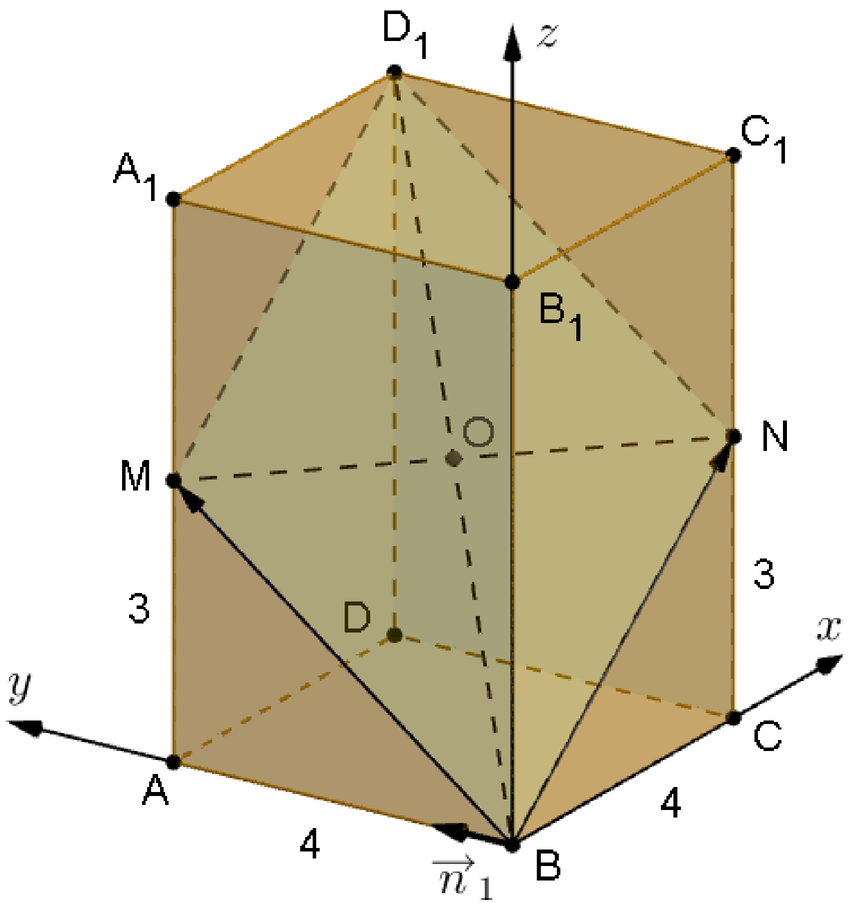
$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4^2 + 4^2 + 6^2} \cdot \sqrt{4^2 + 4^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{68} \cdot 4\sqrt{2} = 4\sqrt{34}.$

4) Так как $S_{BLC_1N} = S_{BMD_1N} \cdot \cos\alpha$, то $\cos\alpha = \frac{S_{BLC_1N}}{S_{BMD_1N}}$, где α — искомый угол.

Итак, $\cos\alpha = \frac{12}{4\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$. Тогда $\alpha = \arccos\frac{3}{\sqrt{34}}$.

Ответ: $\arccos\frac{3}{\sqrt{34}}$.

Решение №3



а) Аналогично решению №1.

б) 1) Введем систему координат как показано на рисунке. Координаты нужных точек: $B(0; 0; 0)$, $M(0; 4; 3)$, $N(4; 0; 3)$.

2) Искомый угол между плоскостями α равен углу между нормалями к ним. Нормаль к плоскости BCC_1 задаётся вектором $\overrightarrow{n_1}(0; 1; 0)$.

3) Найдём нормаль к плоскости сечения BMD_1N, которая задаётся вектором $\overrightarrow{n_2}(x; y; z)$. $\overrightarrow{BM}(0; 4; 3)$, $\overrightarrow{BN}(4; 0; 3)$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0, \\ \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4y + 3z = 0, \\ 4x + 3z = 0. \end{cases}$$

Пусть $x = 1$, тогда

$$\begin{cases} 4y + 3z = 0, \\ 4 + 3z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4y - 4 = 0, \\ 3z = -4; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1, \\ z = -\dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Значит, $\overrightarrow{n_2}\left(1; 1; -\dfrac{4}{3}\right)$.

$$4)\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{\left|0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\right|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2+\frac{16}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{34}}.$$

Значит $\alpha = \arccos\dfrac{3}{\sqrt{34}}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{3}{\sqrt{34}}$.

15 Решите неравенство $\dfrac{9^x+2\cdot 3^x-117}{3^x-27}\le 1.$

Решение

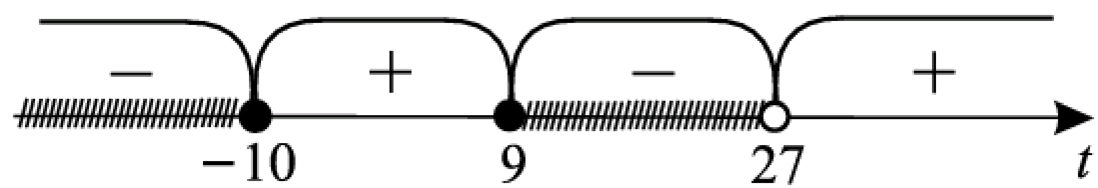
$$\frac{9^x+2\cdot 3^x-117}{3^x-27}-1\leqslant 0$$

Замена $t=3^x$.

$$\frac{t^2+2t-117-t+27}{t-27}\leqslant 0$$

$$\frac{t^2+t-90}{t-27}\leqslant 0$$

$$\frac{(t+10)(t-9)}{t-27}\leqslant 0$$



Из рисунка видно, что $\left[\begin{array}{l} t\leqslant -10 \\ 9\leqslant t<27 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 3^x\leqslant -10 \text{ — нет решений} \\ 9\leqslant 3^x<27 \end{array}\right.$

$3^2\leqslant 3^x<3^3$

$2\leqslant x<3$

Ответ: $[2;3)$.

15 Решите неравенство $(5x-13)\log_{2x-5}(x^2-6x+10) \geqslant 0$.

Решение

Первый способ.

ОДЗ. $\begin{cases} 2x-5>0 \\ 2x-5 \neq 1 \\ x^2-6x+10>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x > \dfrac{5}{2} \\ x \neq 3 \end{cases}$

Метод рационализации: $\boxed{\log_a b \vee 0 \overset{\text{ОДЗ}}{\Longleftrightarrow} (a-1)(b-1) \vee 0}$

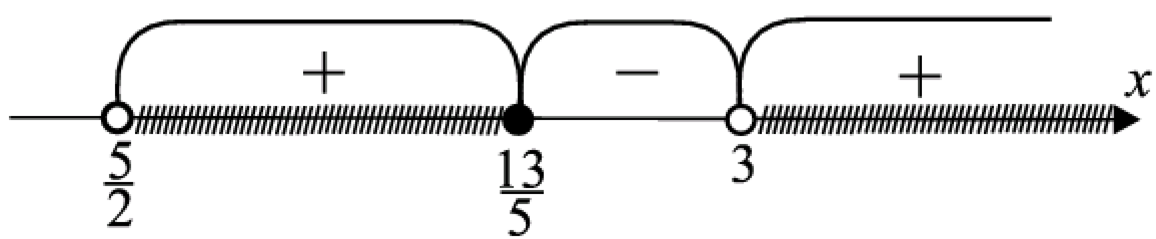
$(5x-13)(2x-5-1)(x^2-6x+10-1) \geqslant 0$

$(5x-13)(2x-6)(x^2-6x+9) \geqslant 0$

$(5x-13)(x-3)(x-3)^2 \geqslant 0$

$(5x-13)(x-3)^3 \geqslant 0$

Из рисунка следует ответ.



Ответ: $\left(\dfrac{5}{2}; \dfrac{13}{5}\right] \cup (3; +\infty)$.

$\boxed{\mathbf{15}}$ Решите неравенство $(5x-13)\log_{2x-5}(x^2-6x+10) \geqslant 0$.

Решение

Второй способ.

Заметим, что $x^2-6x+10=(x-3)^2+1>1$ при любом значении $x \neq 3$.

1) Если $2x-5>1$, то есть $x>3$.

Тогда $\log_{2x-5}(x^2-6x+10)>0$ и исходное неравенство равносильно неравенству $5x-13 \geqslant 0$, которое верно для любого $x>3$.

2) Если $0<2x-5<1$, то есть $\frac{5}{2}<x<3$.

Тогда $\log_{2x-5}(x^2-6x+10)<0$ и исходное неравенство равносильно неравенству $5x-13 \leqslant 0$, $x \leqslant \frac{13}{5}$. В этом случае $\frac{5}{2}<x \leqslant \frac{13}{5}$.

Ответ: $\left(\frac{5}{2}; \frac{13}{5}\right] \cup (3; +\infty)$.

$\boxed{15}$ Решите неравенство $(5x-13)\log_{2x-5}(x^2-6x+10) \geqslant 0.$

Решение

Третий способ.

ОДЗ. $\begin{cases} 2x-5>0 \\ 2x-5\neq 1 \\ x^2-6x+10>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>\dfrac{5}{2} \\ x\neq 3 \end{cases}$

Решим уравнение $(5x-13)\log_{2x-5}(x^2-6x+10)=0.$

$5x-13=0$ или $\log_{2x-5}(x^2-6x+10)=0;$

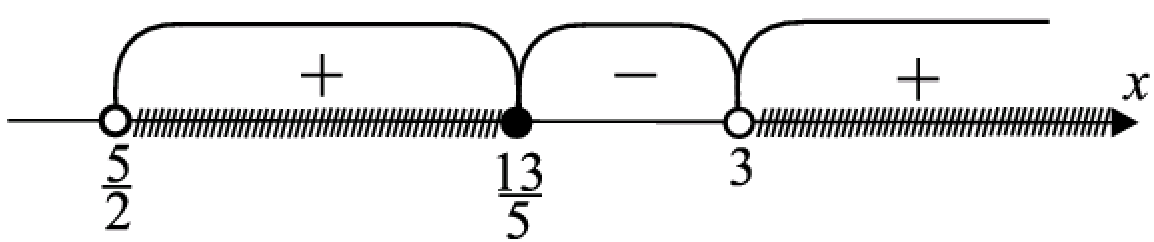
$x=\dfrac{13}{5}$ $\qquad x^2-6x+10=1;$

$x^2-6x+9=0;$

$(x-3)^2=0;$

$x=3$ (не удовлетворяет ОДЗ).

Из рисунка следует ответ.



Ответ: $\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{13}{5}\right]\cup(3;+\infty).$

15 Решите неравенство $\log_5(3x^2-2)-\log_5 x<\log_5\left(3x^2+\frac{1}{x}-3\right)$.

Решение

ОДЗ: $\begin{cases} 3x^2-2>0 \\ x>0 \\ 3x^2+\dfrac{1}{x}-3>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2>\dfrac{2}{3} \\ x>0 \\ 3x^2+\dfrac{1}{x}-3>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>\sqrt{\dfrac{2}{3}} \\ 3x^2+\dfrac{1}{x}-3>0 \end{cases}$

$\log_5\dfrac{3x^2-2}{x}<\log_5\left(3x^2+\dfrac{1}{x}-3\right)$

$\dfrac{3x^2-2}{x}<3x^2+\dfrac{1}{x}-3$ (*)

$3x^2-2<3x^3-3x+1$ (так как $x>\sqrt{\frac{2}{3}}>0$)

$x^3-x^2-x+1>0$

$x^2(x-1)-(x-1)>0$

$(x-1)(x^2-1)>0$

$(x-1)^2(x+1)>0$

$(x-1)^2>0$ (так как $x>\sqrt{\frac{2}{3}}>0$)

Таким образом, $x\in\left(\sqrt{\frac{2}{3}};1\right)\cup(1;+\infty)$.

Осталось учесть неравенство $3x^2+\dfrac{1}{x}-3>0$ из ОДЗ.

Докажем, что неравенство $3x^2+\dfrac{1}{x}-3>0$ выполняется для любого $x>\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Первый способ.

$$3x^2+\frac{1}{x}-3>0$$

$$\frac{3x^3-3x+1}{x}>0.$$

Рассмотрим функцию $y(x)=3x^3-3x+1$.

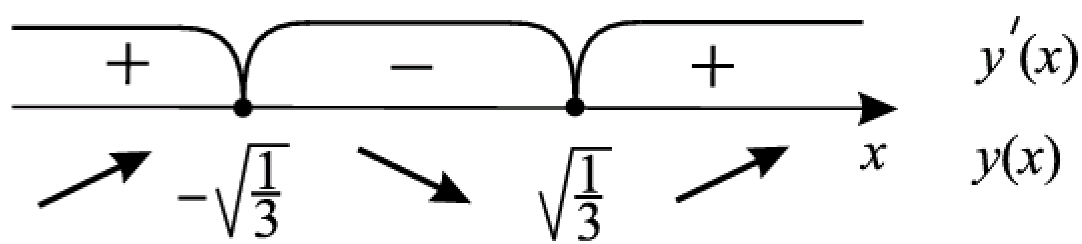
$y'(x)=9x^2-3.$

$9x^2-3=0$

$3x^2-1=0$

$x^2=\dfrac{1}{3}$

$x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{3}}$



Так как $y(x)$ возрастает при $x>\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ и

$$y\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=3\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3-3\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}+1=3\cdot\sqrt{\frac{8}{27}}-\sqrt{6}+1=\sqrt{\frac{8}{3}}+1-\sqrt{6}=\frac{2}{3}\sqrt{6}-\sqrt{6}+1=1-\frac{\sqrt{6}}{3}>0,$$

то $y(x)>0$ при $x>\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Таким образом, неравенство $\dfrac{3x^3-3x+1}{x}>0$ выполняется для любого $x>\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Докажем, что неравенство $3x^2 + \frac{1}{x} - 3 > 0$ выполняется для любого $x > \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Второй способ.

1) При $\sqrt{\frac{2}{3}} < x < 1$ выполняются неравенства $3x^2 - 2 > 0$ и $\frac{1}{x} - 1 > 0$.

Значит, $3x^2 - 2 + \frac{1}{x} - 1 > 0$, то есть $3x^2 + \frac{1}{x} - 3 > 0$.

2) При $x \geqslant 1$ выполняются неравенства $3x^2 - 3 \geqslant 0$ и $\frac{1}{x} > 0$.

Значит, $3x^2 + \frac{1}{x} - 3 > 0$.

Таким образом, неравенство $3x^2 + \frac{1}{x} - 3 > 0$

выполняется для любого $x > \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Докажем, что неравенство $3x^2 + \frac{1}{x} - 3 > 0$ выполняется для любого $x > \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Третий способ.

Очевидно, что при $x > \sqrt{\frac{2}{3}}$ выполняется неравенство $\frac{3x^2 - 2}{x} > 0.$

Ранее мы выяснили, что неравенство

$$\frac{3x^2 - 2}{x} < 3x^2 + \frac{1}{x} - 3 \qquad (*)$$

выполняется для любого $x > \sqrt{\frac{2}{3}}, x \neq 1.$

Неравенство $(*)$ можно переписать в виде $3x^2 + \frac{1}{x} - 3 > \frac{3x^2 - 2}{x} > 0.$

Так как при $x = 1$

$3x^2 + \frac{1}{x} - 3 = \frac{3x^2 - 2}{x} = 1 > 0$, то $3x^2 + \frac{1}{x} - 3 > 0$ при $x > \sqrt{\frac{2}{3}}.$

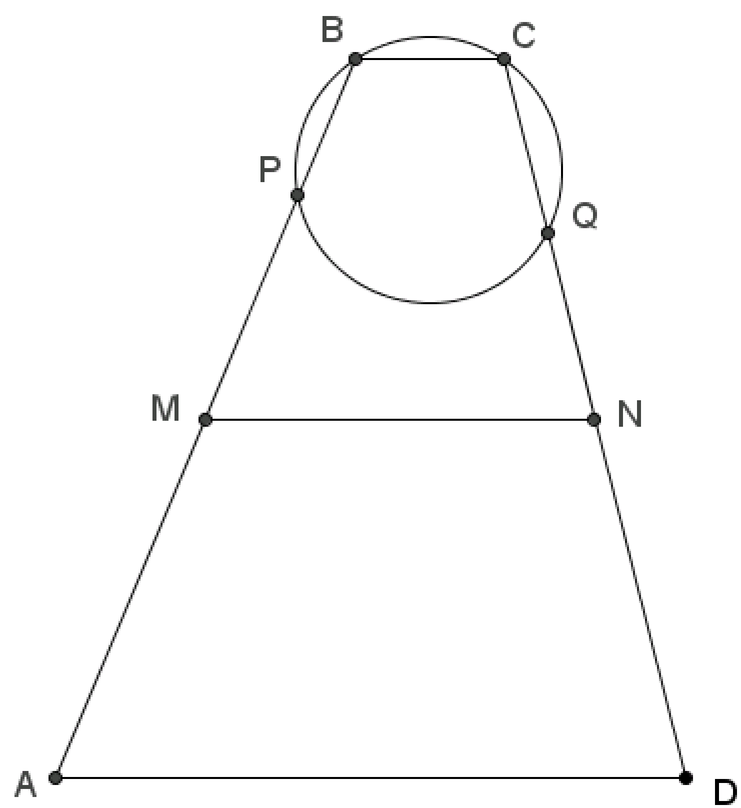
Итак, $x \in \left(\sqrt{\frac{2}{3}}; 1\right) \cup (1; +\infty)$ — решение исходного неравенства.

Ответ: $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}; 1\right) \cup (1; +\infty).$

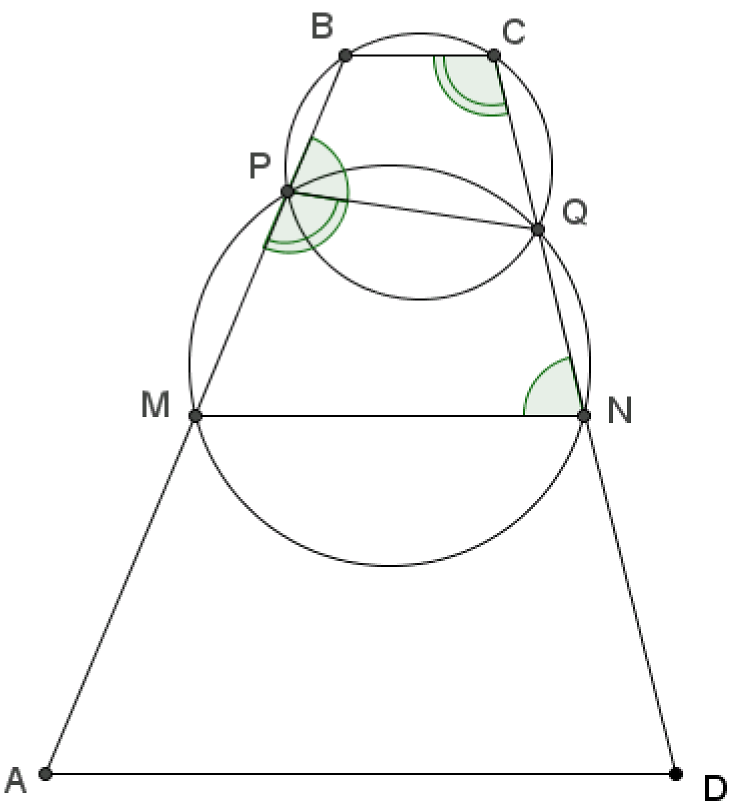
16 Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD. Точки M и N являются серединами сторон AB и CD соответственно. Окружность, проходящая через точки B и C, пересекает отрезки BM и CN в точках P и Q (отличных от концов отрезков) соответственно.

а) Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

б) Найдите QN, если отрезки DP и PC перпендикулярны, $AB=21$, $BC=4$, $CD=20$, $AD=17$.



Решение 1



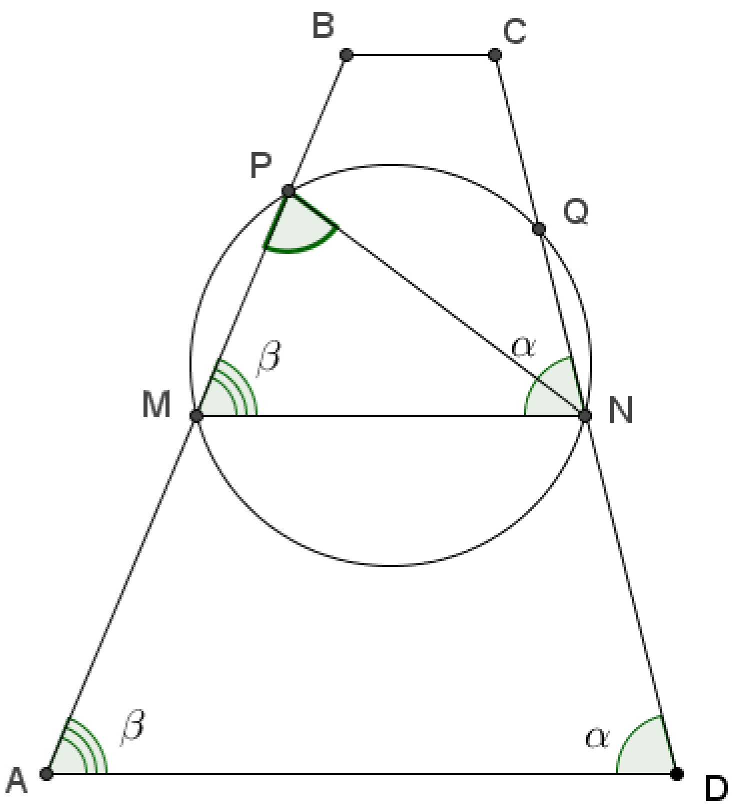
а) 1) Так как четырёхугольник $PBCQ$ вписан в окружность, то $\angle BPQ + \angle BCQ = 180°$.

Так как $\angle BPM$ развёрнутый, то $\angle BPQ + \angle QPM = 180°$. Следовательно, $\angle BCQ = \angle QPM$.

2) Так как MN — средняя линия трапеции $ABCD$, то $MN \parallel BC$ и $MBCN$ — тоже трапеция. Отсюда,
$\angle MNQ + \angle BCQ = 180°$.

3) Так как $\angle BCQ = \angle QPM$,
то $\angle MNQ + \angle QPM = 180°$.
Так как в четырёхугольнике $MPQN$ сумма противоположных углов равна $180°$, то вокруг $MPQN$ можно описать окружность.

Решение 1 (продолжение)



б) 1) Пусть h — высота трапеции $ABCD$.

Тогда $\sin\alpha = \dfrac{h}{CD} = \dfrac{h}{20}$, $\sin\beta = \dfrac{h}{AB} = \dfrac{h}{21}$.

Отсюда, $\sin\alpha = \dfrac{21}{20}\sin\beta$.

2) Так как PN — медиана прямоугольного $\triangle CPD$, проведённая из вершины прямого угла, то $PN = \dfrac{1}{2}CD = 10$.

$MN = \dfrac{BC + AD}{2} = \dfrac{4+17}{2} = 10{,}5$ (MN — средняя линия $ABCD$).

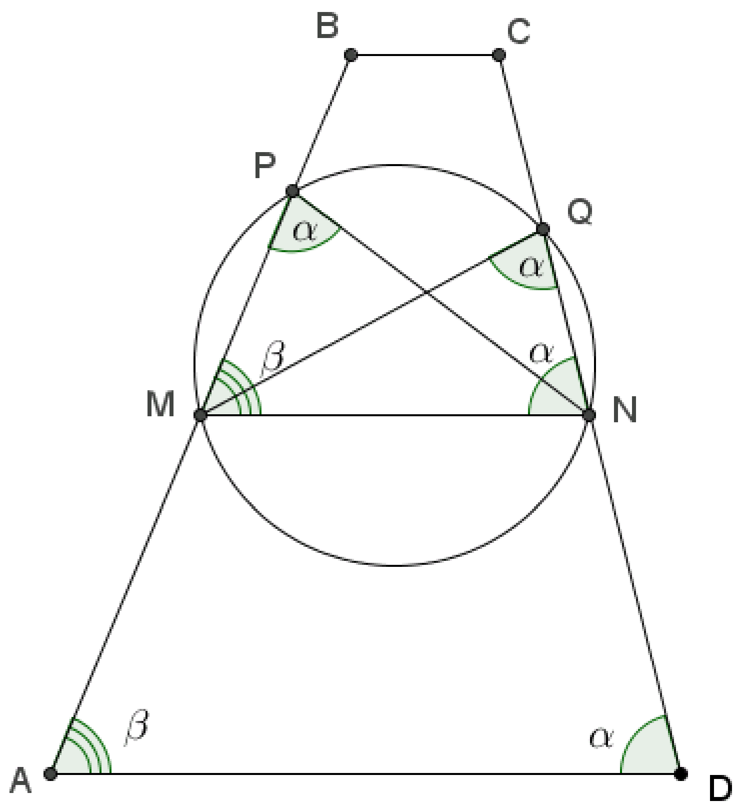
3) Так как $MN \parallel AD$, то $\angle MNC = \angle ADC = \alpha$ и $\angle BMN = \angle BAD = \beta$ как соответственные углы.

По теореме синусов для $\triangle MNP$:

$$\frac{MN}{\sin\angle MPN} = \frac{PN}{\sin\beta}.$$

Отсюда, $\sin\angle MPN = \dfrac{MN}{PN}\sin\beta = \dfrac{21}{20}\sin\beta$.

Решение 1 (продолжение)



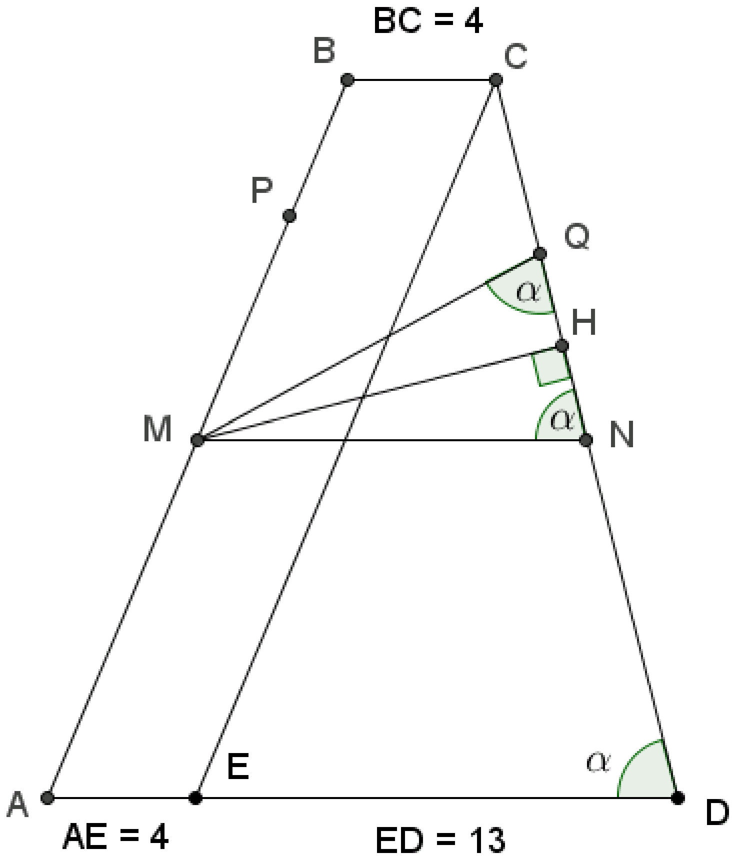
4) Из пунктов 1 и 3 следует, что $\sin\angle MPN = \sin\alpha$.
Значит, $\angle MPN = \alpha$ или $\alpha + \angle MPN = 180°$.

5) Предположим, что $\alpha + \angle MPN = 180°$. Тогда точки A, P, N и D лежат на одной окружности.
В пункте а) доказано, что точки M, P, Q и N лежат на одной окружности. Значит и точки A, P, Q и D тоже лежат на одной окружности, так как $MN \parallel AD$.
Отсюда следует, что точки Q и N совпадают, что противоречит условию.
Итак, $\angle MPN = \alpha$.

6) $\angle MPN = \angle MQN = \alpha$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Следовательно, ΔMQN равнобедренный.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН www.legionr.ru

Решение 1 (окончание)



7) Пусть $CE \parallel AB$. Тогда по теореме косинусов для $\triangle CED$:

$$CE^2 = CD^2 + ED^2 - 2 \cdot CD \cdot ED \cdot \cos\alpha;$$

$$21^2 = 20^2 + 13^2 - 2 \cdot 20 \cdot 13 \cdot \cos\alpha;$$

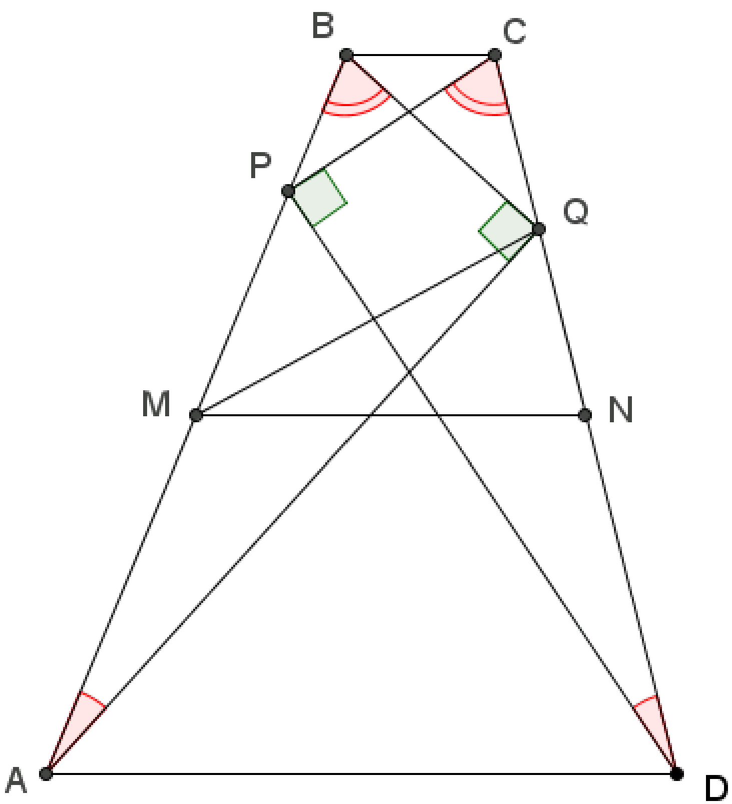
$$\cos\alpha = \frac{16}{65}.$$

8) Пусть MH — высота и медиана равнобедренного $\triangle MQN$. Тогда

$$QN = 2NH = 2 \cdot MN \cdot \cos\alpha = 2 \cdot 10{,}5 \cdot \frac{16}{65} = \frac{336}{65}.$$

Ответ: $\frac{336}{65}$.

Решение 2



а) См. решение 1.

б) 1) В пункте а) доказано, что точки M, P, Q и N лежат на одной окружности. Значит и точки A, P, Q и D тоже лежат на одной окружности, так как $MN \parallel AD$.

2) $\angle PBQ = \angle PCQ$ и $\angle PAQ = \angle PDQ$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу.

Так как в $\triangle ABQ$ сумма острых углов равна 90°, то этот треугольник прямоугольный.

3) Так как MQ — медиана прямоугольного $\triangle ABQ$, проведённая из вершины прямого угла, то $MQ = \frac{1}{2}AB = 10{,}5$.

$MN = \frac{BC + AD}{2} = \frac{4 + 17}{2} = 10{,}5$ (MN — средняя линия $ABCD$).

Таким образом, $\triangle MQN$ равнобедренный.

Далее аналогично пунктам 7 и 8 части б) решения 1.

Ответ: $\frac{336}{65}$.

17 В июле 2019 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}3S$	0

Найдите наименьшее S, при котором каждая из выплат будет больше 3 млн. руб.

Решение 1

Найдём все выплаты в соответствии с условием задачи. Для этого заполним следующую таблицу.

Год	**Январь**	**Июль**	**Выплаты**
2020	$1{,}3S$	$0{,}7S$	$1{,}3S - 0{,}7S = 0{,}6S$
2021	$1{,}3 \cdot 0{,}7S$	$0{,}3S$	$1{,}3 \cdot 0{,}7S - 0{,}3S = 0{,}61S$
2022	$1{,}3 \cdot 0{,}3S$	0	$1{,}3 \cdot 0{,}3S = 0{,}39S$

По условию каждая из выплат должна быть больше 3 млн рублей:

$$\begin{cases} 0{,}6S > 3 \\ 0{,}61S > 3 \\ 0{,}39S > 3 \end{cases}$$

Необходимо найти наименьшее целое число S, удовлетворяющее неравенству

$$0{,}39S > 3$$

$$S > \frac{3}{0{,}39} = \frac{300}{39} = \frac{100}{13} = 7\frac{9}{13}$$

Ответ: 8.

Решение 2

1) Чтобы каждая выплата была больше 3 млн. рублей достаточно, чтобы этому условию удовлетворяла наименьшая из всех выплат.

2) Каждая выплата состоит из двух частей:

а) проценты на оставшуюся часть долга;

б) часть основного долга на которую он уменьшается в соответствии с данной таблицей.

Месяц и год	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}3S$	0

Понятно, что последняя выплата будет самой маленькой, так как у неё самая маленькая часть а) и одна из самых маленьких часть б) выплаты.

3) Последняя выплата равна $\underbrace{0{,}3 \cdot 0{,}3S}_{\text{часть а)}} + \underbrace{0{,}3S}_{\text{часть б)}} = 0{,}39S$.

Необходимо найти наименьшее целое число S, удовлетворяющее неравенству $0{,}39S > 3$.

$$S > \frac{3}{0{,}39} = \frac{300}{39} = \frac{100}{13} = 7\frac{9}{13}$$

Ответ: 8.

Задача

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 18 млн рублей?

Решение

n — срок кредита (целое число лет).
Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$10,\ \frac{10(n-1)}{n}, \dots,\ \frac{10\cdot 2}{n},\ \frac{10}{n},\ 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 20%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$12,\ \frac{12(n-1)}{n}, \dots,\ \frac{12\cdot 2}{n},\ \frac{12}{n},\ 0.$$

Последовательность процентов на остаток долга

$$2,\ \frac{2(n-1)}{n},\ \dots\ \frac{2\cdot 2}{n},\ \frac{2\cdot 1}{n}$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$2+\frac{10}{n},\ \frac{2(n-1)+10}{n},\ldots,\ \frac{4+10}{n},\ \frac{2+10}{n}.$$

Всего следует выплатить

$$10+2\cdot\left(\frac{n+(n-1)+\ldots+2+1}{n}\right)=10+2\cdot\frac{n+1}{2}=n+11(\text{млн рублей}).$$

Общая сумма выплат равна 18 млн рублей, поэтому $n=7$.

Ответ: 7.

17. 15 декабря планируется взять кредит в банке на 26 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 25-й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

— к 15-му числу 26-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какой долг будет 15-го числа 25-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 2400 тысяч рублей?

Решение

Пусть 15-го числа 25-го месяца долг составит B тысяч рублей. По условию, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на 15-е число каждого месяца должен уменьшиться до нуля следующим образом:

$$B + 40 \cdot 25;\; B + 40 \cdot 24;\; B + 40 \cdot 23;\; \ldots;\; B + 40;\; B;\; 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 2%, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$1{,}02(B + 1000);\; 1{,}02(B + 960);\; \ldots;\; 1{,}02(B + 40);\; 1{,}02B.$$

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$0{,}02(B + 1000) + 40;\; 0{,}02(B + 960) + 40;\; \ldots;\; 0{,}02(B + 40) + 40;\; 1{,}02B.$$

Всего следует выплатить

$$25 \cdot 0{,}02 \cdot \frac{2B + 1040}{2} + 1000 + 1{,}02B = 1{,}52B + 1260 \text{ (тыс. рублей)},$$

откуда $1{,}52B + 1260 = 2400;\; 1{,}52B = 1140;\; B = 750.$

Значит, 15-го числа 25-го месяца долг составит 750 тыс. рублей.

Ответ: 750 тысяч рублей.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН www.legionr.ru

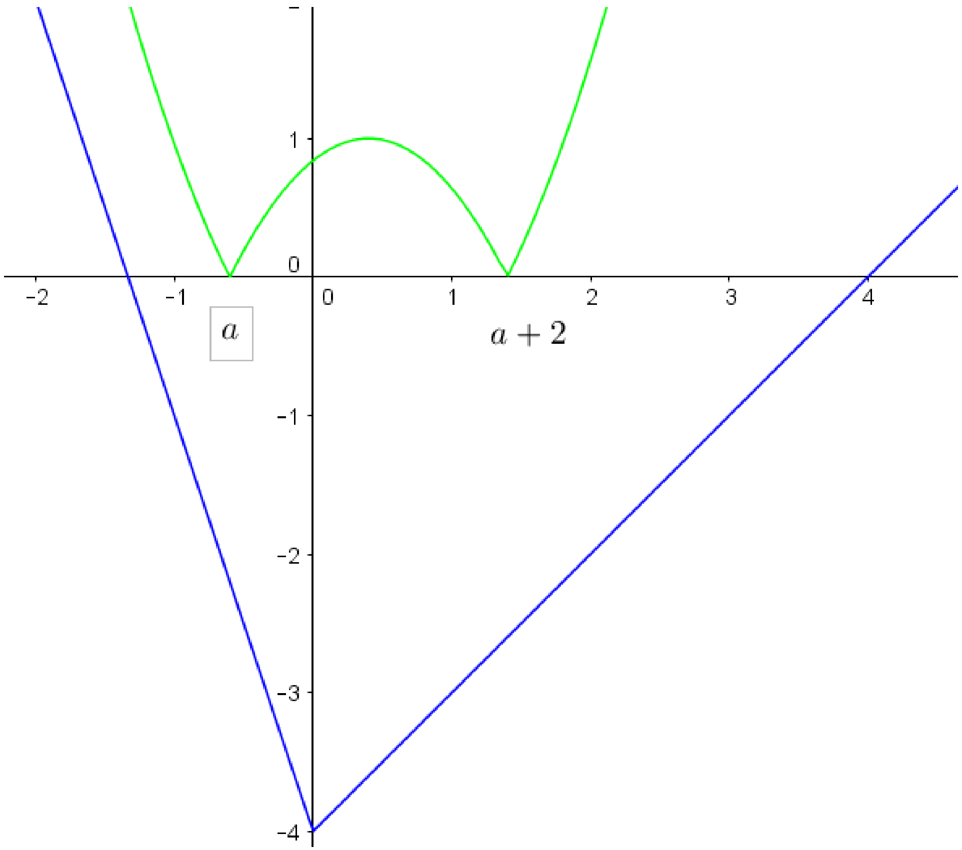
18 Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = x - 2|x| + \left|x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a\right|$$

больше -4?

Решение 1

Решим эквивалентную задачу:
найти все a при которых неравенство $f(x) > -4$ выполняется при любом значении x.



1) Запишем неравенство в виде
$|x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a| > 2|x| - x - 4$

Уравнение $x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a = 0$
имеет два корня
$x_1 = a, x_2 = a + 2.$
Координаты вершины параболы
$y = x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a$:
$x_0 = a + 1, y_0 = -1.$

$$2|x| - x - 4 = \begin{cases} x - 4, & x \geqslant 0 \\ -3x - 4, & x < 0 \end{cases}$$

Решение 1 (продолжение)

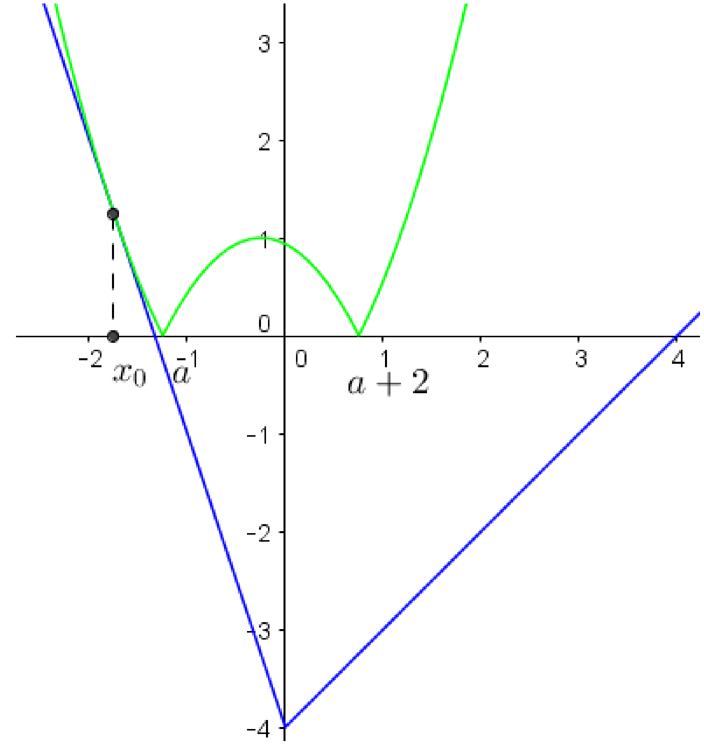
2) Найдём a при которых будет касание в точке $x = x_0, x_0 < 0$.

$$\begin{cases} 2x_0 - 2(a+1) = -3 \\ x_0^2 - 2(a+1)x_0 + a^2 + 2a = -3x_0 - 4 \end{cases}$$

Из первого уравнения $x_0 = a - \dfrac{1}{2}$.

Подставим во второе уравнение и решая его,

получим $a = -\dfrac{5}{4}$. При этом $x_0 = -\dfrac{7}{4}$.

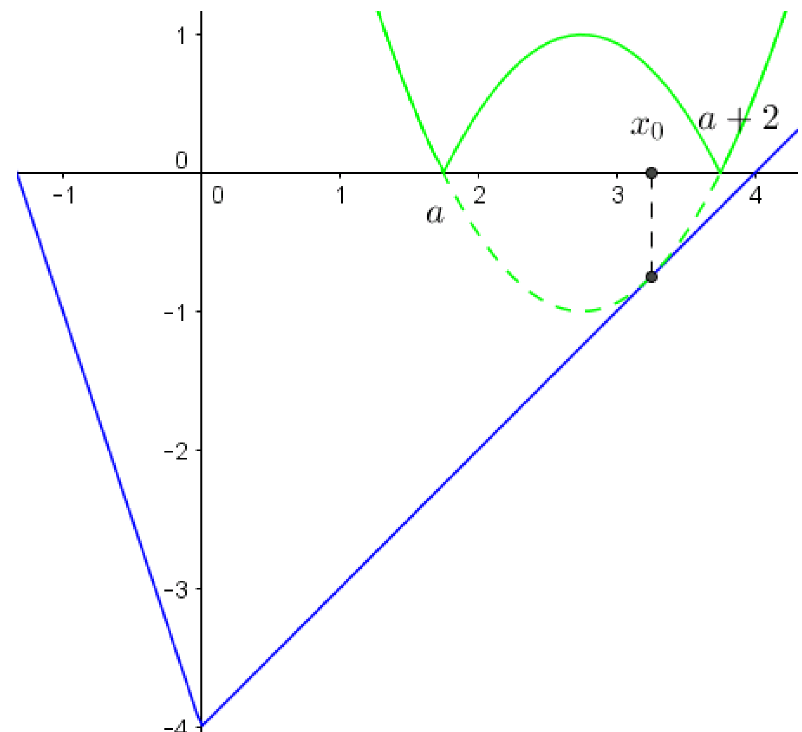


3) Найдём a при которых будет касание в точке $x = x_0, x_0 > 0$.

$$\begin{cases} 2x_0 - 2(a+1) = 1 \\ x_0^2 - 2(a+1)x_0 + a^2 + 2a = x_0 - 4 \end{cases}$$

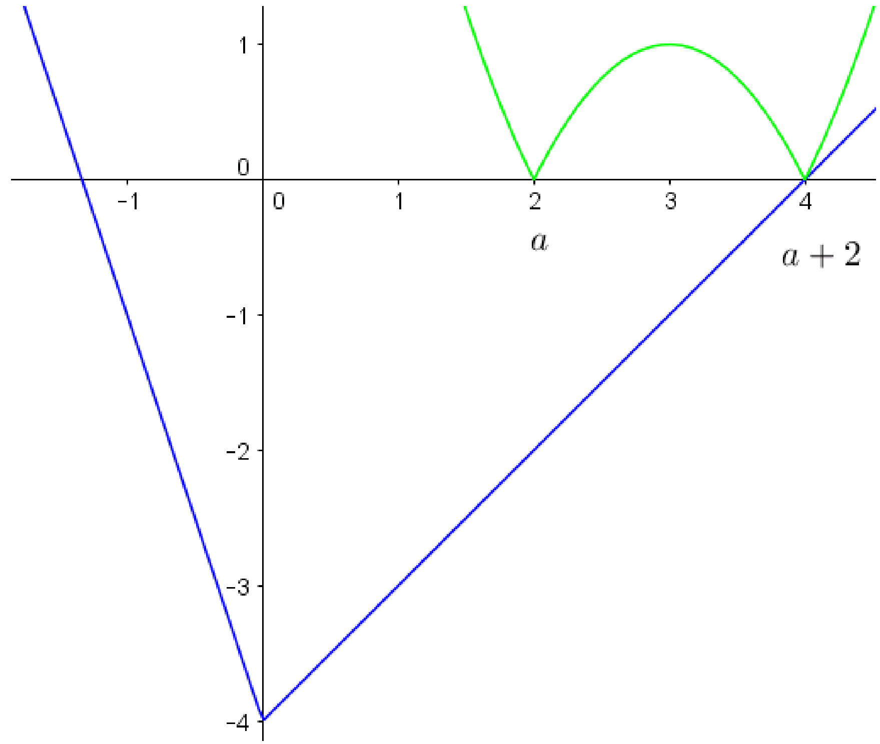
Из первого уравнения $x_0 = a + \dfrac{3}{2}$.

При этом x_0 находится между числами a и $a+2$. Касания графиков не будет.



Решение 1 (окончание)

4) Крайнее правое положение параболы при $a+2=4$, то есть при $a=2$.



5) Таким образом, $-\dfrac{5}{4} < a < 2$.

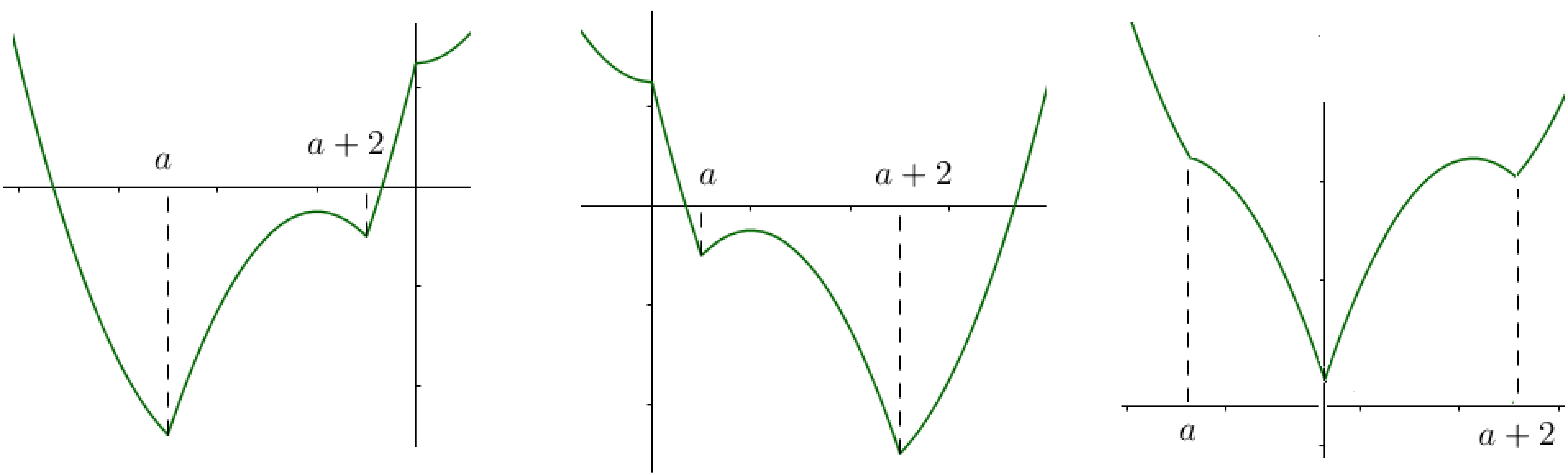
Ответ: $\left(-\dfrac{5}{4};\ 2\right)$.

Решение 2

Определим точки в которых может достигаться наименьшее значение функции $f(x) = x - 2|x| + |x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a|$.

В точках 0, a и $a+2$ меняется знак одного из подмодульных выражений. Они разбивают числовую ось на интервалы, в каждом из которых график $f(x)$ представляет собой часть параболы. При этом при переходе через точку 0 не меняется направление ветвей параболы.

1) При $a \leqslant x \leqslant a+2$ графиком функции $f(x) = x + 2|x| - x^2 + 2(a+1)x - a^2 - 2a$ будут ветви параболы (с возможным переломом в точке $x = 0$), которые направлены вниз. При этом наименьшее значение функции $f(x)$ может достигаться в точках a, $a+2$ или 0.



Решение 2 (продолжение)

2) При $x < a$ или $x > a+2$ графиком функции $f(x) = x - 2|x| + x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a$ будут ветви параболы (с возможным переломом в точке $x = 0$), которые направлены вверх. При этом наименьшее значение функции $f(x)$ может достигаться в вершине параболы.

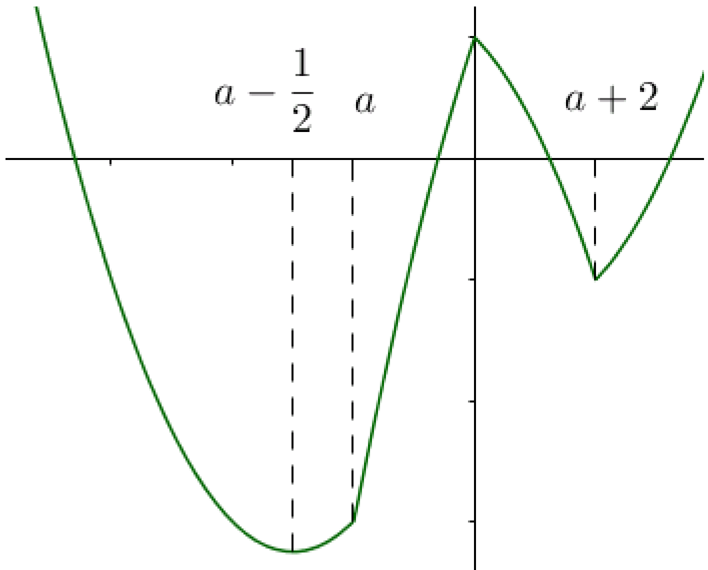
При $x \geqslant 0$, $f(x) = x - 2x + x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a = x^2 - (2a+3)x + a^2 + 2a$.

Абсцисса вершины параболы $x_0 = \dfrac{2a+3}{2} = a + \dfrac{3}{2}$.

Но так как $a < a + \dfrac{3}{2} < a + 2$, то в этой точке не может достигаться наименьшее значение (на этом интервале ветви параболы направлены вниз).

При $x < 0$, $f(x) = x + 2x + x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a = x^2 - (2a-1)x + a^2 + 2a$.

Наименьшее значение может достигаться в точке $x_0 = \dfrac{2a-1}{2} = a - \dfrac{1}{2}$.



Решение 2 (окончание)

3) Итак, наименьшее значение функции $f(x)$ может достигаться в одной из точек 0, $a-\dfrac{1}{2}$, a или $a+2$.

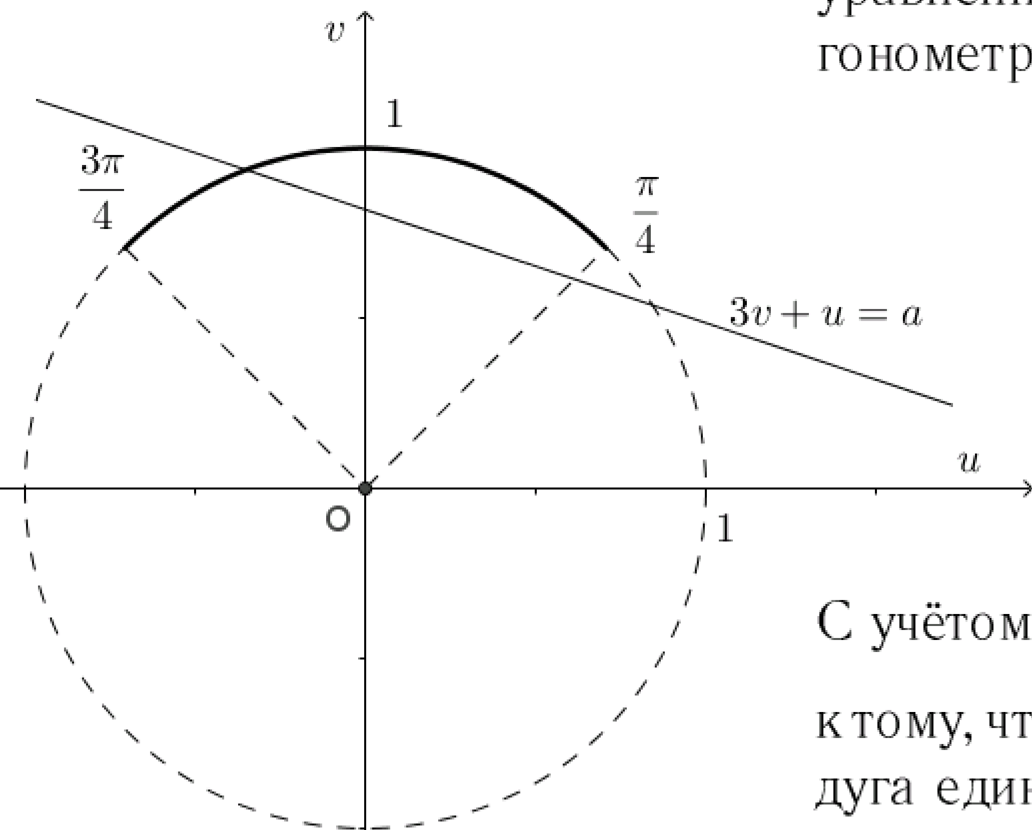
Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} f(0) > -4 \\ f(a) > -4 \\ f(a+2) > -4 \\ f\left(a-\dfrac{1}{2}\right) > -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} |a^2+2a| > -4 \\ a-2|a| > -4 \\ a+2-2|a+2| > -4 \\ a+\dfrac{3}{4}-2\left|a-\dfrac{1}{2}\right| > -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\dfrac{4}{3} < a < 4 \\ -\dfrac{10}{3} < a < 2 \\ -\dfrac{5}{4} < a < \dfrac{23}{4} \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\dfrac{5}{4};\, 2\right)$.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $3\sin x + \cos x = a$ имеет ровно один корень на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Решение 1

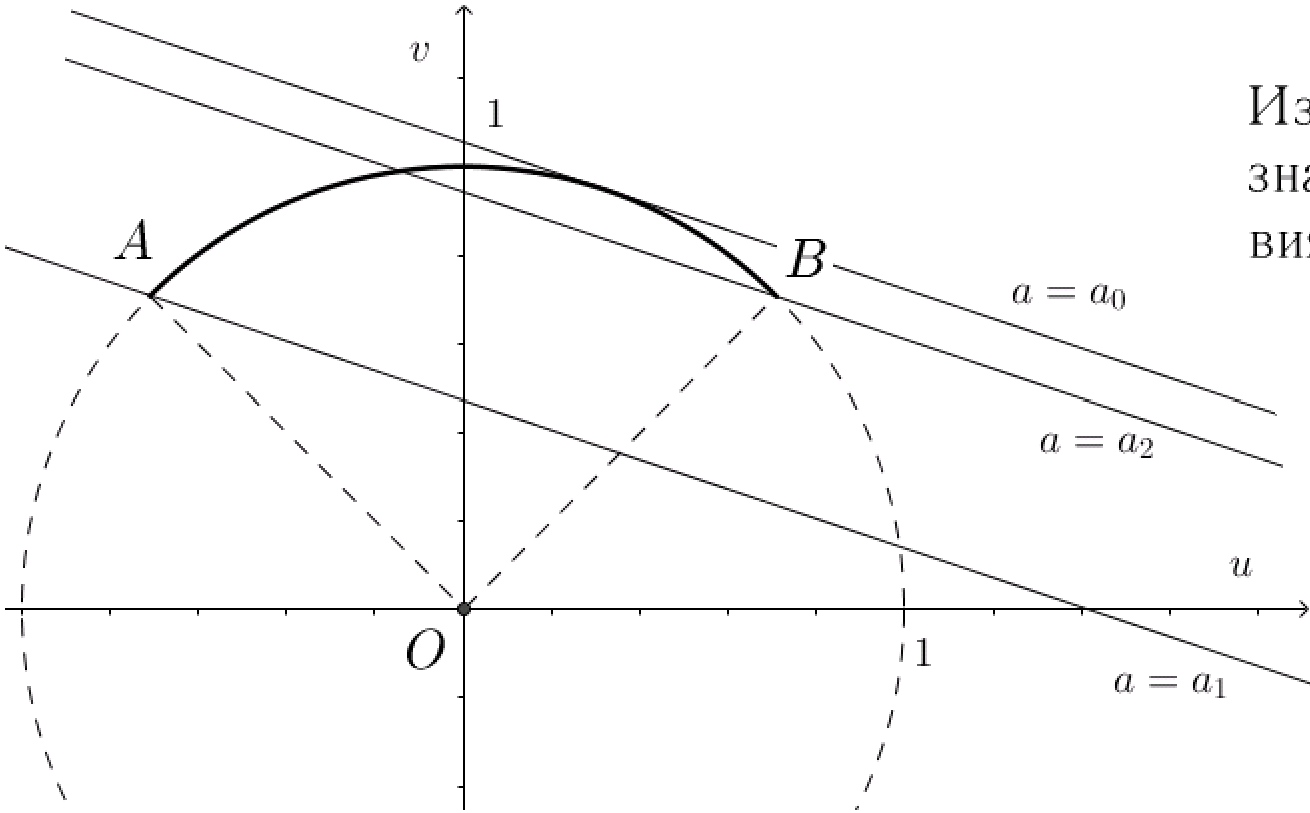


1. Замена $u = \cos x$, $v = \sin x$ приводит исходное уравнение к виду $3v + u = a$. Учитывая основное тригонометрическое тождество, получим систему

$$\begin{cases} 3v + u = a, \\ u^2 + v^2 = 1. \end{cases}$$

С учётом ограничения $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$, задача сводится к тому, что необходимо найти значения a при которых дуга единичной окружности $u^2 + v^2 = 1$ и прямая $3v + u = a$ имеют единственную общую точку (см. рис.).

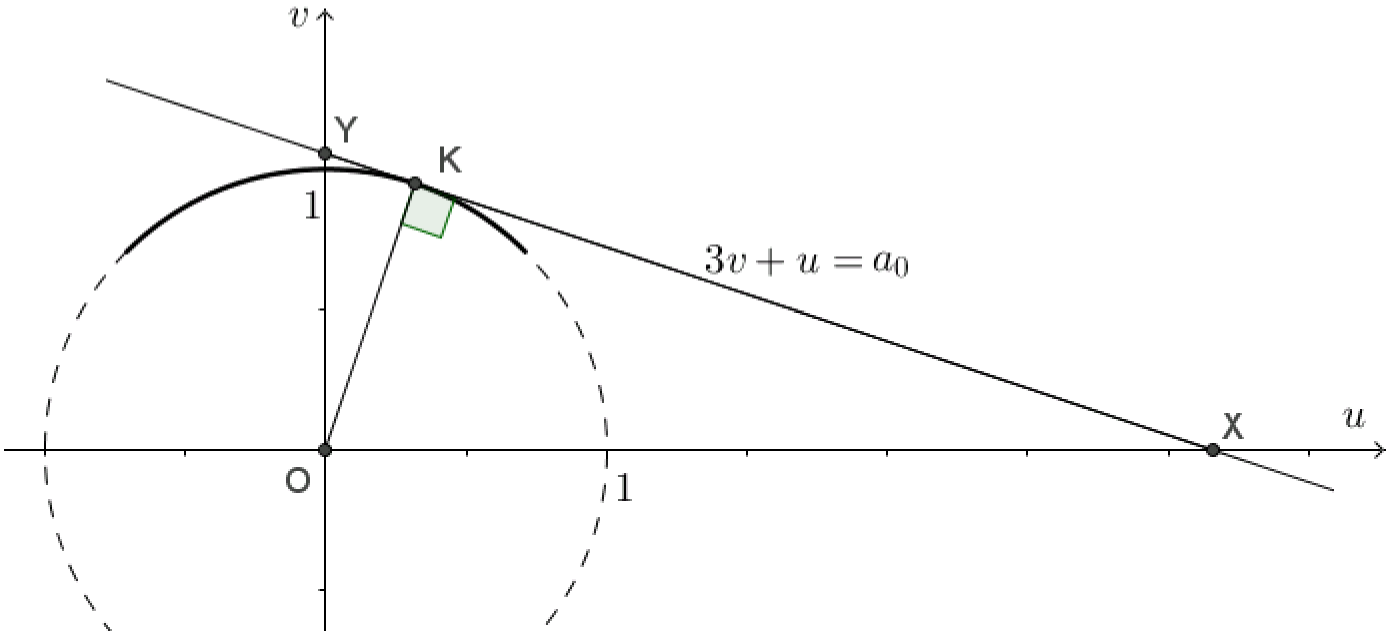
Прямые вида $3v + u = a$ при различных значениях a.



Из рисунка видно, что искомые значения a удовлетворяют условиям $a_1 \leqslant a < a_2$ или $a = a_0$.

2. Найдём a_1. Подставим координаты точки $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ в уравнение прямой $3v + u = a$: $3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = a_1$, $a_1 = \sqrt{2}$.

Найдём a_2. Подставим координаты точки $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ в уравнение прямой $3v + u = a$: $3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = a_2$, $a_2 = 2\sqrt{2}$.



3. Найдём a_0. В треугольнике XOY: $OX = a_0, OY = \dfrac{a_0}{3}$.

По теореме Пифагора $XY = \sqrt{OX^2 + OY^2} = \dfrac{a_0}{3}\sqrt{10}$.

Высота, проведённая из вершины прямого угла, $OK = \dfrac{OX \cdot OY}{XY}$.

Тогда $1 = \dfrac{a_0 \cdot \dfrac{a_0}{3}}{\dfrac{a_0}{3}\sqrt{10}}$. Отсюда $a_0 = \sqrt{10}$.

Ответ: $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \cup \{\sqrt{10}\}$.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $3\sin x + \cos x = a$ имеет ровно один корень на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Решение 2

1. Замена $u = \cos x$, $v = \sin x$ приводит исходное уравнение к виду $3v + u = a$. Учитывая основное тригонометрическое тождество и ограничение $x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$, получим систему

$$\begin{cases} 3v + u = a, \\ u^2 + v^2 = 1, \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant v \leqslant 1, \end{cases}$$

которая должна иметь единственное решение.

Выразив из первого уравнения системы $u = a - 3v$ и подставив во второе уравнение, получим квадратное уравнение:

$$(a - 3v)^2 + v^2 = 1,$$

$$10v^2 - 6av + a^2 - 1 = 0. \qquad (*)$$

Это уравнение должно иметь единственное решение на отрезке $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.

$$10v^2 - 6av + a^2 - 1 = 0. \qquad (*)$$

2. Если $D = 0$ и единственный корень уравнения $(*)$ принадлежит отрезку $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.

$D = (-6a)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (a^2 - 1) = 36a^2 - 40a^2 + 40 = -4a^2 + 40 = 0,$
$a^2 = 10, a = \pm\sqrt{10}.$

Тогда единственный корень уравнения $(*)$ равен $v = \dfrac{6a}{2 \cdot 10} = \dfrac{3}{10}a.$

При $a = \sqrt{10}, v = \dfrac{3}{10} \cdot \sqrt{10} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right].$

При $a = -\sqrt{10}, v = \dfrac{3}{10} \cdot (-\sqrt{10}) = -\dfrac{3}{\sqrt{10}} \notin \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right].$

Значит, $a = \sqrt{10}$ подходит.

$$10v^2 - 6av + a^2 - 1 = 0. \qquad (*)$$

3. Если $D > 0$ и один из корней уравнения $(*)$ принадлежит отрезку $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$, а второй нет.

$D = -4a^2 + 40 > 0, 4a^2 < 40, a^2 < 10, -\sqrt{10} < a < \sqrt{10}.$

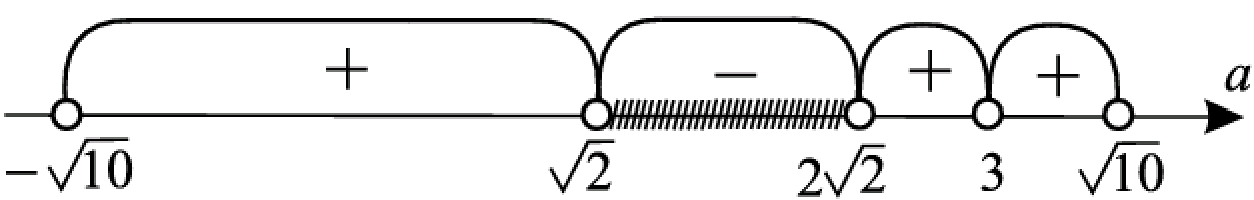
а) Рассмотрим функцию $f(v) = 10v^2 - 6av + a^2 - 1$. Условия того, что один из корней уравнения $(*)$ принадлежит *интервалу* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$, а второй нет, выражается системой

$$\begin{cases} f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot f(1) < 0, \\ -\sqrt{10} < a < \sqrt{10}. \end{cases} \qquad (**)$$

$\left(10 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 6a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + a^2 - 1\right)(10 - 6a + a^2 - 1) < 0,$

$(a^2 - 3a\sqrt{2} + 4)(a^2 - 6a + 9) < 0,$

$(a - 2\sqrt{2})(a - \sqrt{2})(a - 3)^2 < 0.$



Из рисунка видно, что $\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$ — решение системы $(**)$.

$$10v^2 - 6av + a^2 - 1 = 0. \qquad (*)$$

б) При $a = \sqrt{2}$ уравнение $(*)$ примет вид $10v^2 - 6\sqrt{2}\cdot v + 1 = 0$.

$$v_{1,2} = \frac{6\sqrt{2} \pm \sqrt{36\cdot 2 - 4\cdot 10}}{2\cdot 10} = \frac{6\sqrt{2} \pm 4\sqrt{2}}{20}.$$

$$v_1 = \frac{10\sqrt{2}}{20} = \frac{\sqrt{2}}{2} \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right], \quad v_2 = \frac{2\sqrt{2}}{20} = \frac{\sqrt{2}}{10} \notin \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right].$$

Значит, $a = \sqrt{2}$ подходит.

в) При $a = 2\sqrt{2}$ уравнение $(*)$ примет вид $10v^2 - 12\sqrt{2}\cdot v + 7 = 0$.

$$v_{1,2} = \frac{12\sqrt{2} \pm \sqrt{12^2\cdot 2 - 4\cdot 10\cdot 7}}{2\cdot 10} = \frac{12\sqrt{2} \pm 2\sqrt{2}}{20}.$$

$$v_1 = \frac{14\sqrt{2}}{20} = \frac{7\sqrt{2}}{10} \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right], \quad v_2 = \frac{10\sqrt{2}}{20} = \frac{\sqrt{2}}{2} \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right].$$

Значит, $a = 2\sqrt{2}$ не подходит.

Ответ: $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \cup \{\sqrt{10}\}$.

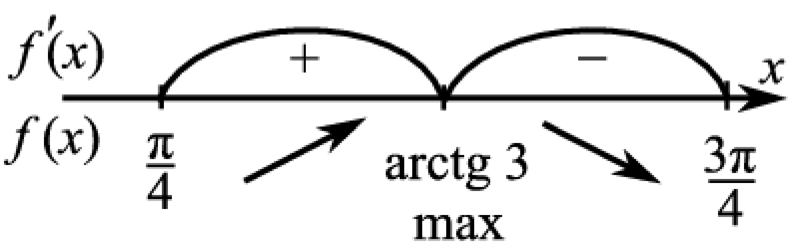
18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $3\sin x + \cos x = a$ имеет ровно один корень на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Решение 3

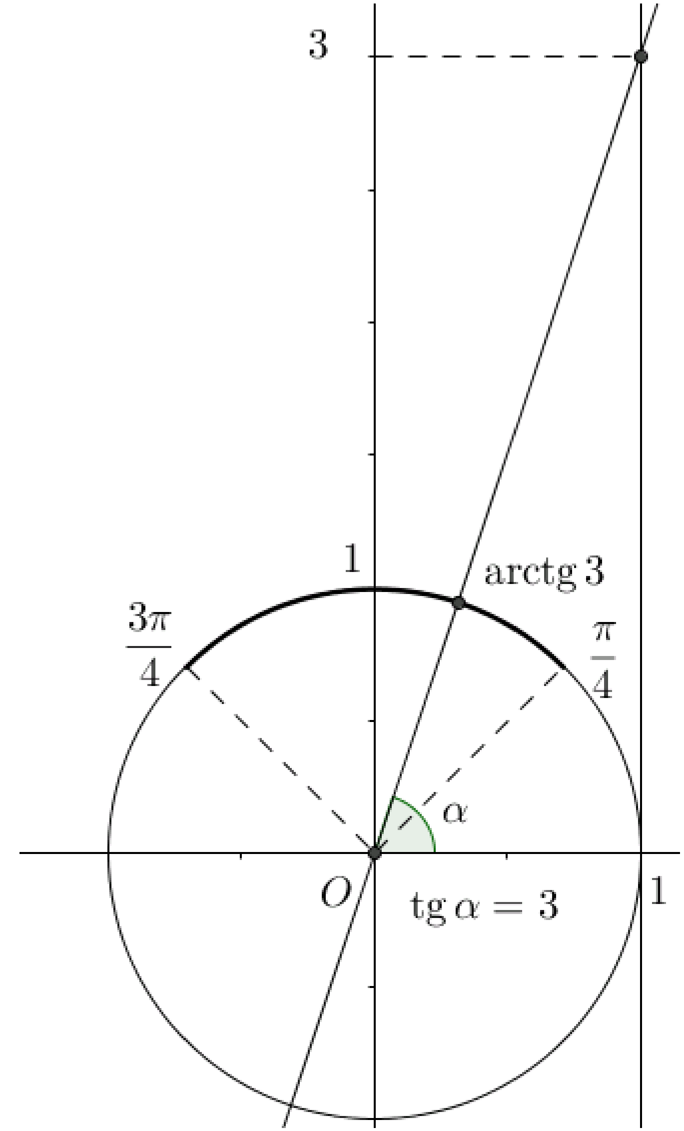
1. Рассмотрим функцию $f(x) = 3\sin x + \cos x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

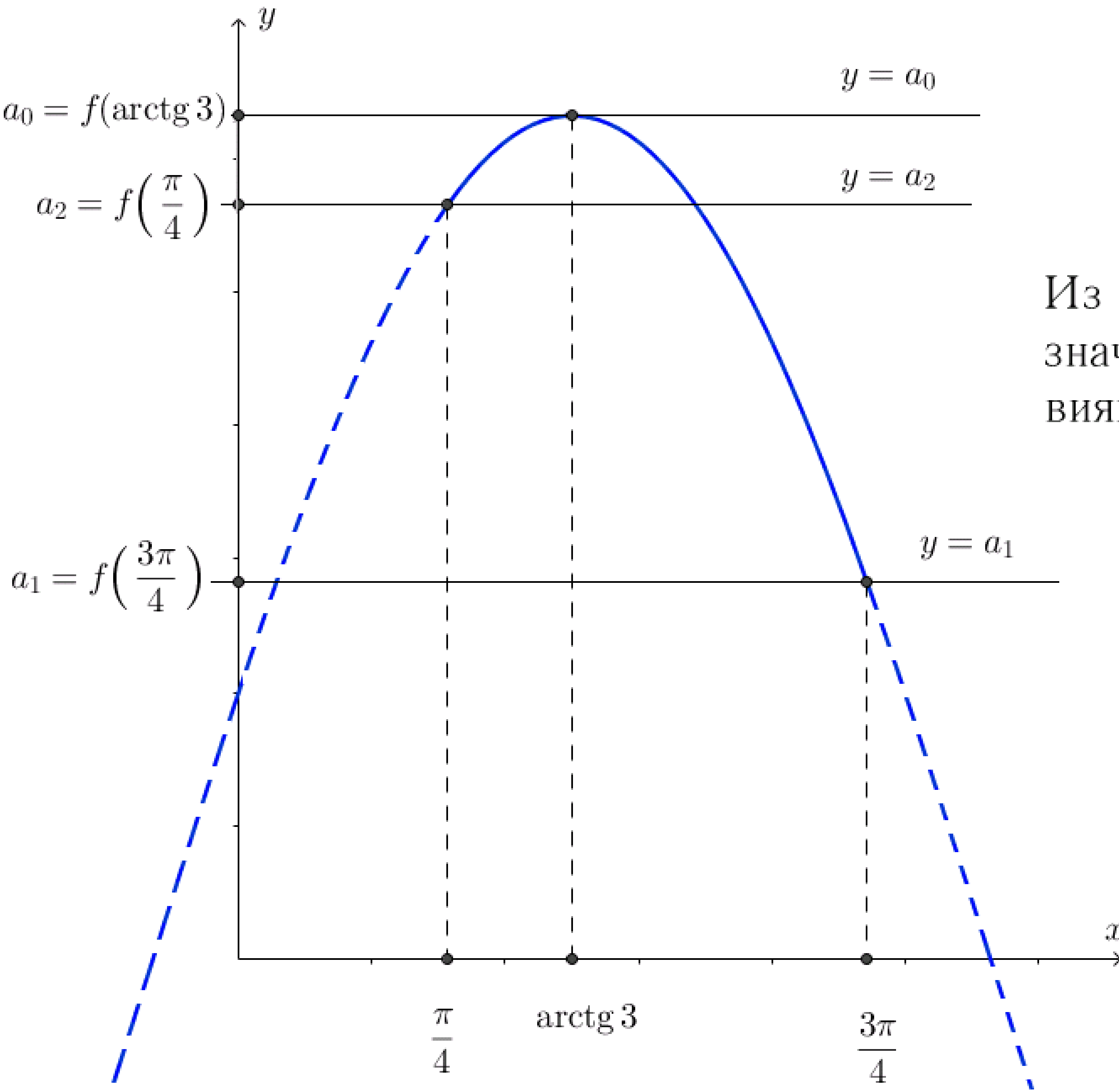
$f'(x) = 3\cos x - \sin x$,
$3\cos x - \sin x = 0 \quad (\cos x \neq 0)$,
$\operatorname{tg} x = 3$,

$x = \operatorname{arctg} 3 \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.



$x = \operatorname{arctg} 3$ — точка максимума.





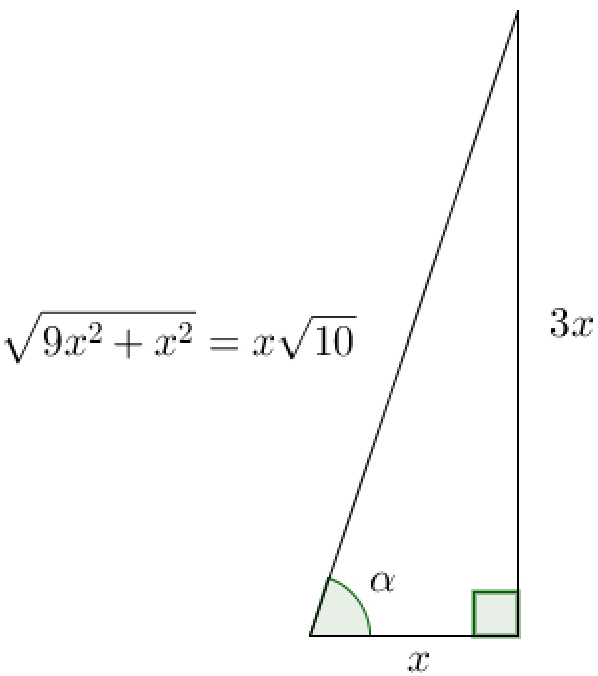
Из рисунка видно, что искомые значения a удовлетворяют условиям $a_1 \leqslant a < a_2$ или $a = a_0$.

$$f(x) = 3\sin x + \cos x$$

$$a_1 = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 3\sin\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} = 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

$$a_2 = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

$$a_0 = f(\operatorname{arctg} 3) = 3\sin(\operatorname{arctg} 3) + \cos(\operatorname{arctg} 3) = 3\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}.$$



$$\alpha = \operatorname{arctg} 3$$

$$\sin\alpha = \frac{3x}{x\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{x\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Ответ: $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \cup \{\sqrt{10}\}$.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $3\sin x + \cos x = a$ имеет ровно один корень на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Решение 4

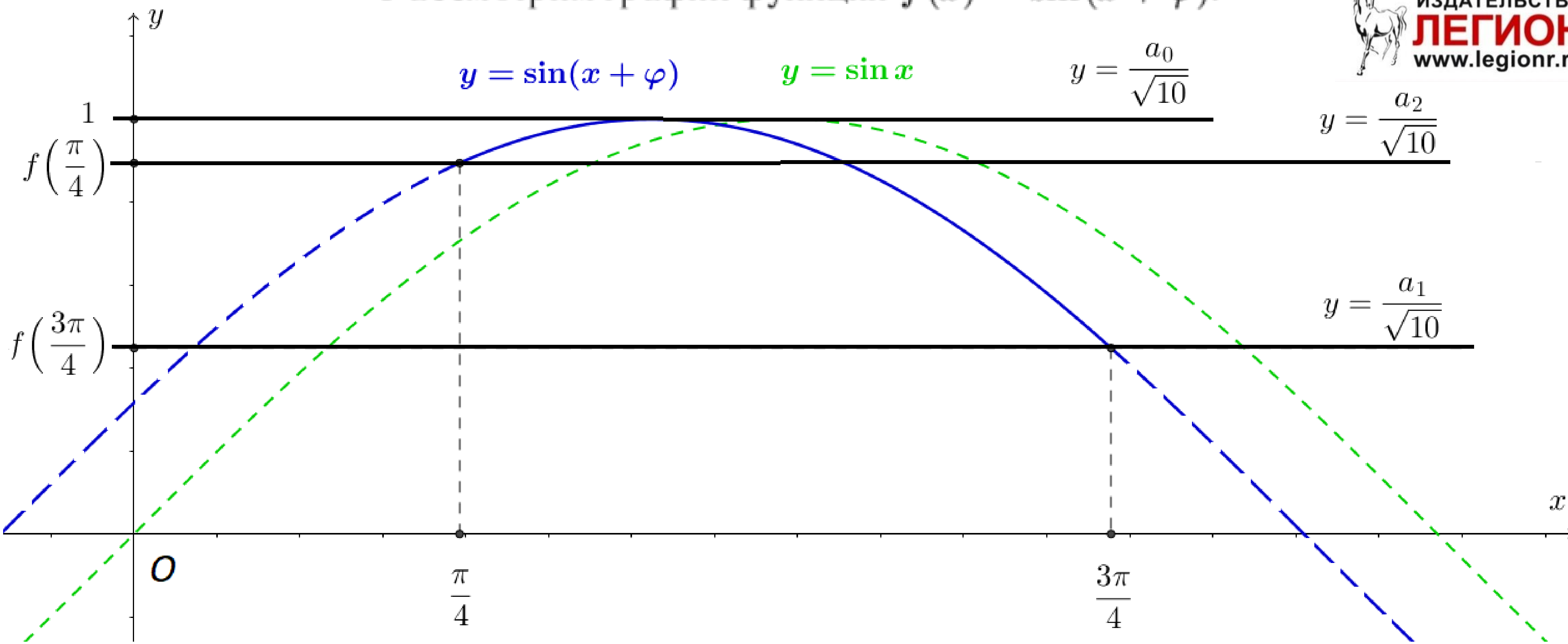
Домножив левую и правую часть исходного уравнения на множитель $\frac{1}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$, получим

$$\frac{3}{\sqrt{10}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{10}}\cos x = \frac{a}{\sqrt{10}}.$$

Тогда для некоторого угла φ такого, что $\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$ получим уравнение

$$\sin(x+\varphi) = \frac{a}{\sqrt{10}}.$$

Рассмотрим график функции $f(x) = \sin(x + \varphi)$.



Из рисунка видно, что искомые значения a удовлетворяют условиям $a_1 \leqslant a < a_2$ или $a = a_0$.

Так как $1 = \frac{a_0}{\sqrt{10}}$, то $a_0 = \sqrt{10}$.

$$\frac{a_1}{\sqrt{10}} = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}+\varphi\right) = \sin\frac{3\pi}{4}\cdot\cos\varphi+\cos\frac{3\pi}{4}\cdot\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}.$$

Отсюда $a_1 = \sqrt{2}$.

$$\frac{a_2}{\sqrt{10}} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\varphi+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}}.$$

Отсюда $a_2 = 2\sqrt{2}$.

Ответ: $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \cup \{\sqrt{10}\}$.

19 Вася и Петя решали задачи из сборника, и каждый из них решил все задачи этого сборника. Каждый день Вася решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а Петя решал на две задачи больше, чем в предыдущий день. Они начали решать задачи в один день, при этом в первый день каждый из них решил хотя бы одну задачу.

а) Могло ли получиться так, что Вася в первый день решил на одну задачу меньше, чем Петя, а Петя решил все задачи из сборника ровно за 5 дней?

б) Могло ли получиться так, что Вася в первый день решил на одну задачу больше, чем Петя, а Петя решил все задачи из сборника ровно за 4 дня?

в) Какое наименьшее количество задач могло быть в сборнике, если каждый из ребят решал задачи более 6 дней, причем в первый день один из мальчиков решил на одну задачу больше чем другой?

а) Могло ли получиться так, что Вася в первый день решил на одну задачу меньше, чем Петя, а Петя решил все задачи из сборника ровно за 5 дней?

Решение

а) Пусть в первый день Петя решил x задач. Тогда Вася в этот день решил $(x-1)$ задачу.

Всего задач в сборнике: $x+(x+2)+(x+4)+(x+6)+(x+8)=5x+20$ (Петя решил их за 5 дней).

Предположим, что Вася решил все задачи за n дней. Тогда

$$(x-1)+x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+\ldots+\big(x+(n-2)\big)=$$

$$=nx+\big(2+3+\ldots+(n-2)\big)=nx+\frac{2+(n-2)}{2}\cdot(n-3)=$$

$$=nx+\frac{n(n-3)}{2}.$$

Таким образом, получим уравнение $nx+\dfrac{n(n-3)}{2}=5x+20.$

Понятно, что при $n\leqslant 5$ это уравнение не имеет решений, так как при любом натуральном x левая часть меньше правой.

При $n=6$: $6x+\dfrac{6(6-3)}{2}=5x+20;$

$6x+9=5x+20;$

$x=11.$

Ответ в этом пункте — да.

б) Могло ли получиться так, что Вася в первый день решил на одну задачу больше, чем Петя, а Петя решил все задачи из сборника ровно за 4 дня?

Решение

б) Пусть в первый день Петя решил x задач. Тогда Вася в этот день решил $(x+1)$ задачу.

Всего задач в сборнике: $x+(x+2)+(x+4)+(x+6)=4x+12$ (Петя решил их за 4 дня).

Предположим, что Вася решил все задачи за n дней. Тогда

$$(x+1)+(x+2)+(x+3)+\ldots+(x+n)=$$
$$=nx+(1+2+3+\ldots+n)=nx+\frac{1+n}{2}\cdot n=nx+\frac{n(n+1)}{2}.$$

Таким образом, получим уравнение $nx+\dfrac{n(n+1)}{2}=4x+12.$

При $n\leqslant 4$, $\quad nx+\dfrac{n(n+1)}{2}\leqslant 4x+10<4x+12$ для любого натурального x.

При $n\geqslant 5$, $\quad nx+\dfrac{n(n+1)}{2}\geqslant 5x+15>4x+12$ для любого натурального x.

Таким образом, уравнение $nx+\dfrac{n(n+1)}{2}=4x+12$ не имеет решений в натуральных числах.

Ответ в этом пункте — нет.

в) Какое наименьшее количество задач могло быть в сборнике, если каждый из ребят решал задачи более 6 дней, причем в первый день один из мальчиков решил на одну задачу больше чем другой?

Решение

в) Пусть Петя решил все задачи сборника за m дней, а Вася — за n дней ($m > 6, n > 6$). При этом, предположим, что в первый день Петя решил x задач. Тогда возможны 2 случая:

1) Вася в первый день решил $(x + 1)$ задачу;
2) Вася в первый день решил $(x - 1)$ задачу.

Первый случай

Петя решил всего задач:

$$x + (x+2) + (x+4) + (x+6) + \ldots + \bigl(x + (2m-2)\bigr) =$$
$$= mx + \bigl(2 + 4 + 6 + \ldots + (2m-2)\bigr) =$$
$$= mx + \frac{2 + (2m-2)}{2} \cdot (m-1) = mx + m(m-1).$$

Вася решил всего задач:

$$(x+1) + (x+2) + (x+3) + \ldots + (x+n) =$$
$$= nx + (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = nx + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Имеем уравнение $mx + m(m-1) = nx + \dfrac{n(n+1)}{2}$.

При $m = 7, n = 7$ решений нет.

При $m = 7, n = 8$ получим уравнение: $7x + 42 = 8x + 36, x = 6$.

При этом количество задач в сборнике равно $7x + 42 = 7 \cdot 6 + 42 = 84$.

Покажем, что в этом случае 84 — это наименьшее число задач

Первый случай (продолжение)

В уравнении $mx + m(m-1) = nx + \dfrac{n(n+1)}{2}$

обозначим, $Z_1 = mx + m(m-1)$ и $Z_2 = nx + \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1) При $m = 7$ и $n \geqslant 9$, $Z_2 \geqslant 9x + 45 > Z_1 = 7x + 42$
для любого натурального x.

2) При $m = 8$, $Z_1 = 8x + 56$.
При $n \leqslant 8$, $Z_2 \leqslant 8x + 36 < Z_1 = 8x + 56$ при любом x.
При $n = 9$ получим уравнение $8x + 56 = 9x + 45$. Его корень $x = 11$.
Тогда число задач $8 \cdot 11 + 56 > 84$.
При $n = 10$ получим уравнение $8x + 56 = 10x + 55$, $2x = 1$.
Нет решений для любого натурального x.
При $n \geqslant 11$, $Z_2 \geqslant 11x + 66 > Z_1 = 8x + 56$ при любом натуральном x.

3) При $m = 9$, $Z_1 = 9x + 72$.
При $n \leqslant 9$, $Z_2 \leqslant 9x + 45 < Z_1 = 9x + 72$ при любом натуральном x.
При $n = 10$ получим уравнение $9x + 72 = 10x + 55$. Его корень $x = 17$.
Тогда число задач $9 \cdot 17 + 72 > 84$.
При $n = 11$ получим уравнение $9x + 72 = 11x + 66$, $2x = 6$, $x = 3$.
Тогда число задач $9 \cdot 3 + 72 > 84$.
При $n \geqslant 12$, $Z_2 \geqslant 12x + 78 > Z_1 = 9x + 72$ при любом натуральном x.

4) При $m \geqslant 10$, число задач $mx + m(m-1) \geqslant 10x + 90$.
Это число больше 84 при любом $x \geqslant 1$.

Второй случай

Петя решил всего задач: $mx + m(m-1)$.

Вася решил всего задач:

$$(x-1) + x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + \ldots + \big(x + (n-2)\big) =$$

$$= nx + \frac{n(n-3)}{2}.$$

Имеем уравнение $mx + m(m-1) = nx + \dfrac{n(n-3)}{2}$.

Аналогично первому случаю можно показать, что наименьшее количество задач в этом случае не может быть меньше 88, которое получается из этого уравнения при $m = 8$, $n = 11$, $x = 4$.

Таким образом, наименьшее число задач в сборнике равно 84.

Ответ: а) да; б) нет; в) 84.

19 В последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1$, $a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна $3, 5$ или 25.

а) Приведите пример такой последовательности.

б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?

в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

Решение

а) Заметим, что для любого числа a можно построить удовлетворяющую условию подпоследовательность $a, 3-a, a+2$. Таким образом, начиная с 1, можно получить любое нечётное число, в том числе и число 235.

Пример последовательности: $1, 2, 3, 0, 5, -2, 7, \ldots, 233, -230, 235$.

б) Так как сумма любых двух соседних членов последовательности является нечётным числом, то они имеют разную чётность. Последовательность начинается с нечётного числа 1 и заканчивается нечётным числом 235. Значит, она состоит из нечётного количества чисел, то есть не может состоять из 1000 членов.

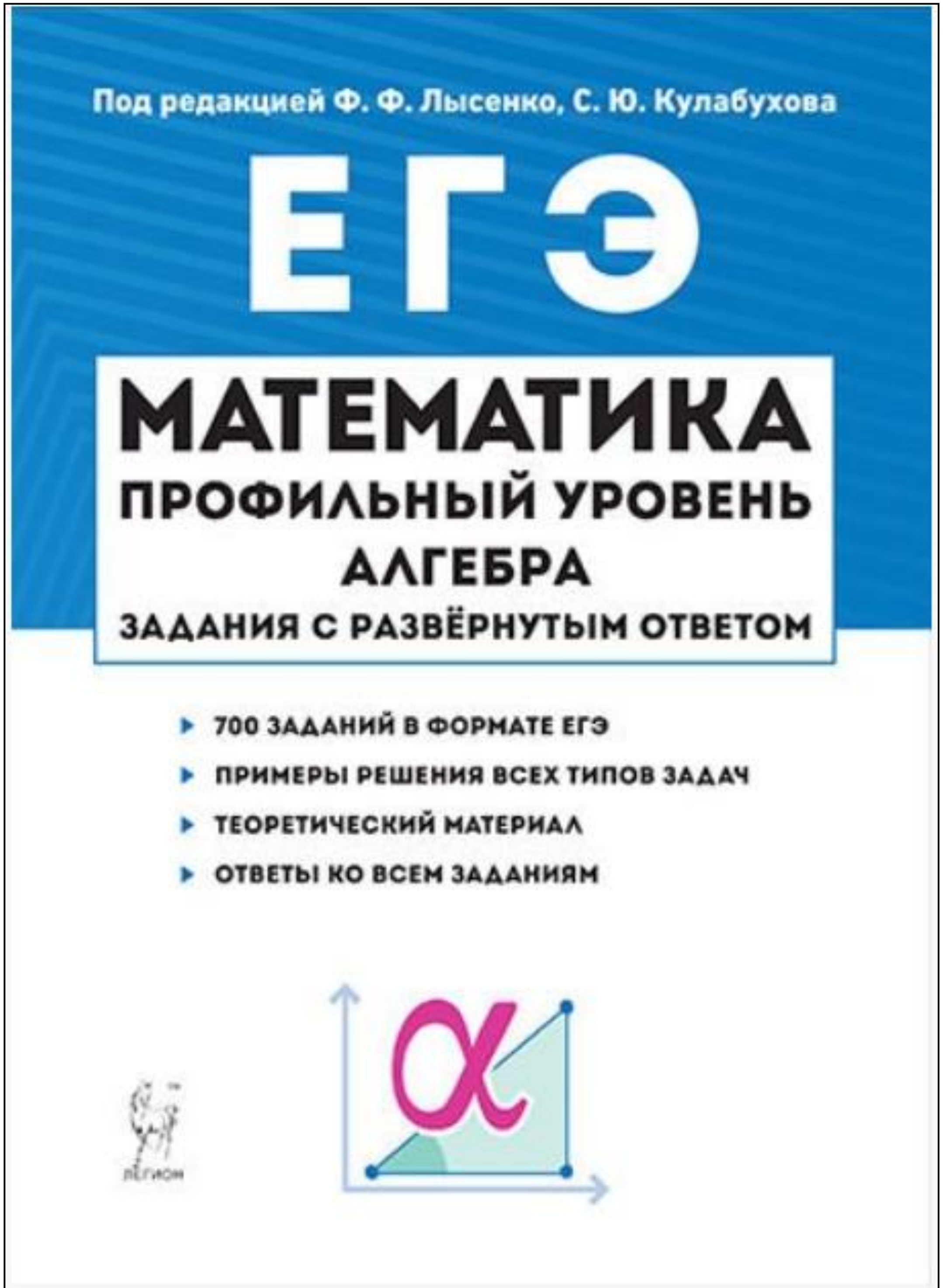
в) Любое очередное число a последовательности, приписав к ней ещё два числа, мы можем изменить на следующее число единиц:

$+2$: $a, 3 - a, a + 2$;
-2: $a, 5 - a, a - 2$;
$+20$: $a, 5 - a, a + 20$;
-20: $a, 25 - a, a - 20$;
$+22$: $a, 3 - a, a + 22$;
-22: $a, 25 - a, a - 22$.

Чтобы последовательность содержала наименьшее число членов, необходимо, чтобы она росла как можно быстрее. Так как $\dfrac{235 - 1}{22} \approx 10{,}6$, то потребуется не менее 11 пар чисел после первого члена последовательности 1, чтобы достигнуть числа 235.

Пример. Так как $234 = \mathbf{7} \cdot 22 + \mathbf{4} \cdot 20$, то необходимо добавить к 1 ещё 11 пар чисел (7 пар, дающих прибавку $+22$ и 4 пары, дающих прибавку $+20$). Таким образом, наименьшее число членов последовательность равно $1 + 2 \cdot 11 = 23$.

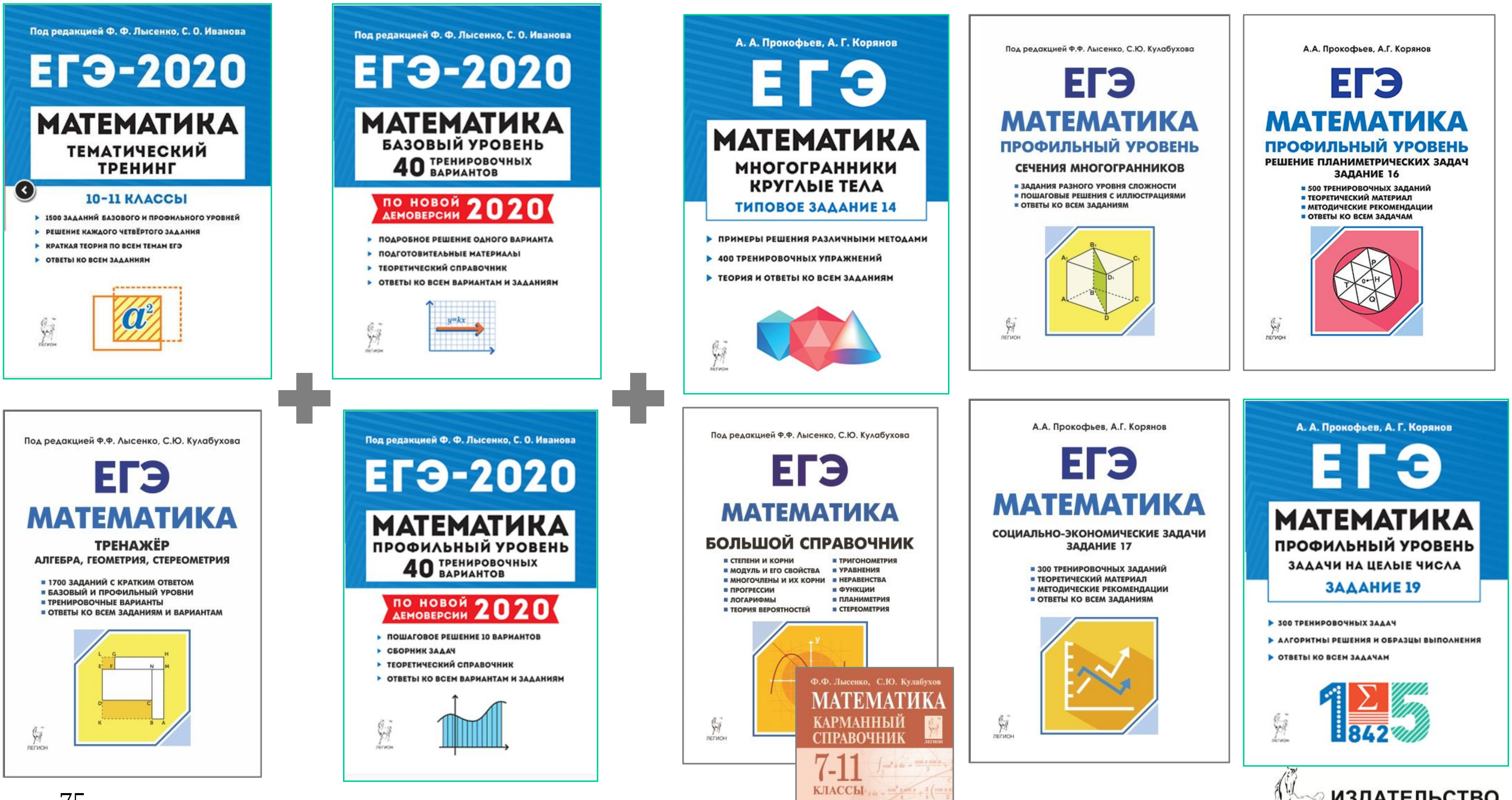
Ответ: б) нет; в) 23.



Пособие позволяет подготовиться к заданиям **с развёрнутым ответом по алгебре**:

- Тригонометрические уравнения
- Неравенства
- Экономические задачи
- Задания с параметром
- Олимпиадные задачи

Комплекс пособий для подготовки к ЕГЭ по математике

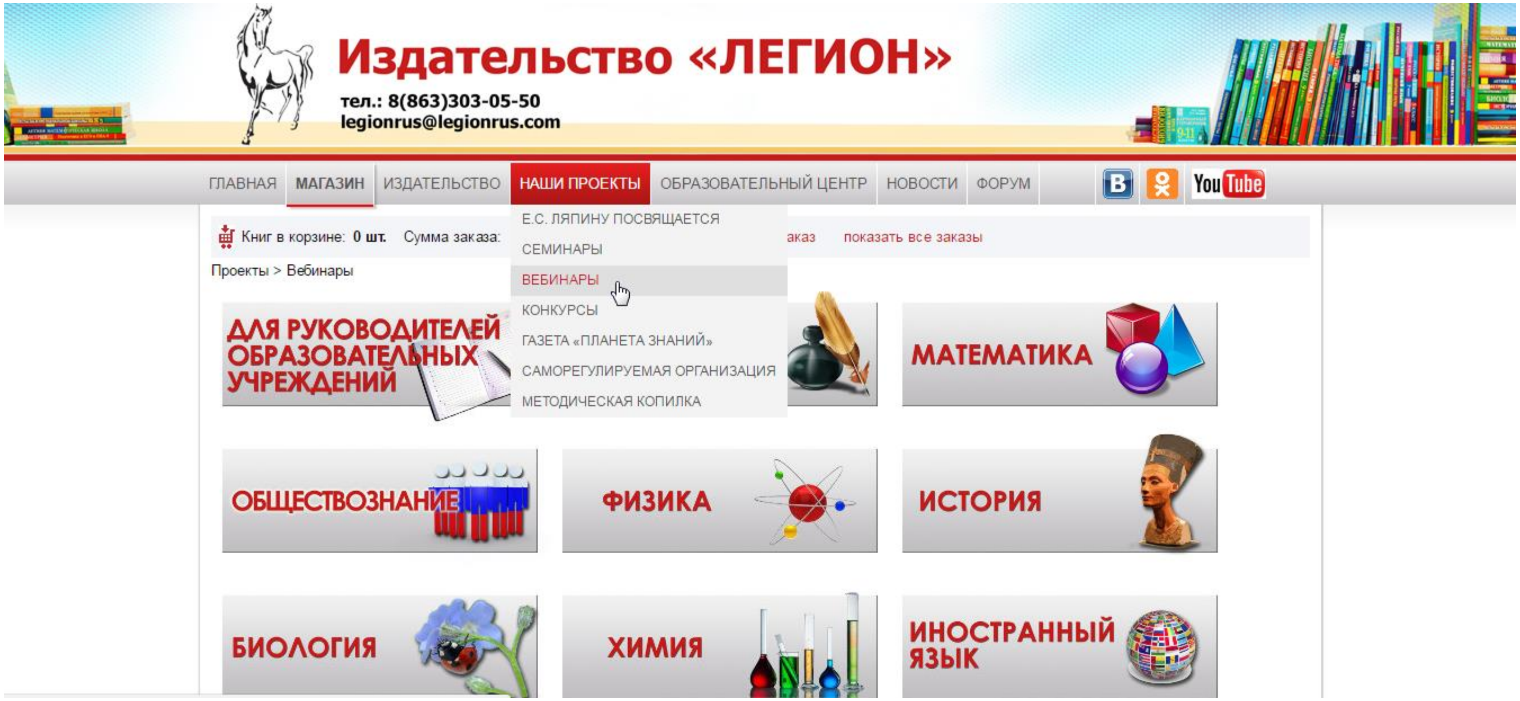


ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН

Полный ассортимент пособий на сайте www.legionr.ru

Вебинары

Авторы и специалисты издательства «Легион» регулярно проводят **бесплатные вебинары по всем предметам школьного курса**. Все участники получают именные бесплатные **сертификаты**.



запланируйте участие прямо сейчас!

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН

legionrus@legionrus.com

Вступайте в группу

«Издательство «Легион»

в социальных сетях:

Контакте

одноклассники

acebook

Видео вебинаров смотрите на .

Адрес для корреспонденции

344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН www.legionr.ru

Спасибо за внимание!

Издательство «Легион» на связи:

Сайт, интернет-магазин: www.legionr.ru

E-mail: legionrus@legionrus.com

Тел.: 8(863)303-05-50, 282-20-76