Арифметическая прогрессия

1.Определение арифметической прогрессии.
2.Формула n-го члена.
3.Основное свойство.
4.Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии.

Определение арифметической прогрессии.

В жизни часто бывает так, что величины изменяются с течением времени на одно и то же их значение. Когда поезд едет со скоростью 80 км/ч, он за каждый час увеличивает пройденный путь на одно и то же количество километров. Верблюд, идущий по пустыне, ежедневно уменьшает свои запасы воды в горбах на одну и ту же величину.

Человек с каждым годом жизни увеличивает свой возраст на одно и то же время. А так же, уменьшает за каждый прожитый год на одну и ту же величину время, которое ему суждено прожить на этом свете. И даже толстяк, безуспешно применяющий модные диеты, каждые сутки изменяет свой вес на одну и ту же величину - на нуль килограммов. Всё это - примеры числовых последовательностей - примеры *арифметической прогрессии*.

Определение

Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.

То есть, последовательность является арифметической прогрессией, если выполняется условие:

$$\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + d},$$

где d - некоторое число.

Из определения арифметической прогрессии следует, что разность между любым ее членом, начиная со второго, и предыдущим членом равна, т.е. при любом натуральном n верно равенство:

$$d = a_{n+1} - a_n.$$

Число *d* называется ***разностью арифметической прогрессии***.

Чтобы задать арифметическую прогрессию, достаточно узнать ее первый член и разность.

Рассмотрим примеры

1. Если $a_1=1$ и $d=1$, то получим арифметическую прогрессию

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ldots,$$

члены которой – последовательные натуральны числа.

2. Если $a_1=1$ и $d=2$, то получим арифметическую прогрессию

$$1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ldots,$$

которая является последовательностью положительных нечетных чисел.

3. Если a_1=-2 и d=-2, то получим арифметическую прогрессию

-2; -4; -6; -8; -10;…,

которая является последовательностью отрицательных четных чисел.

4. Если a_1=7 и d=0, то имеем арифметическую прогрессию

7; 7; 7; 7; 7;…,

все члены которой равны между собой.

На заметку!

Зная первый член и разность арифметической прогрессии, можно найти любой ее член, вычисляя последовательно второй, третий, четвертый и т.д. члены. Однако для нахождения члена прогрессии с большим номером такой способ неудобен. Постараемся отыскать способ, требующий меньшей вычислительной работы.

Вывод формулы n – го члена:

Исходя из определения арифметической прогрессии:

$$a_2=a_1+d,$$

$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$

$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$

$$a_5=a_4+d=(a_1+3d)+d=a_1+4d.$$

Точно так же находим, что $a_6= a_1+5d$, и вообще, чтобы найти a_n, нужно к a_1 прибавить $(n-1)d$, т.е.

$$\mathbf{a_n=a_1+(n-1)d.}$$

Получили ***формулу n-го члена арифметической прогрессии***.

Рассмотрим примеры решения задач с использованием формулы

n-го члена арифметической прогрессии

Дано: (a_n) - арифметическая прогрессия

$a_1=0,62$, $d=0,24$

Найти: a_{50}

Решение: $\mathbf{a_n=a_1+(n-1)d}$.

$a_{50}=0,62+0,24\cdot(50-1)=12,38$.

Ответ: $a_{50}=12,38$.

Задача, в которой надо определить, является ли некоторое число членом арифметической прогрессии.

2. Дано: 23; 17,2; 11,4; 5,6;… - арифметическая прогрессия, $a_n = -122$

Найти: n - ?

Решение: $a_1=23$, $d=a_2-a_1=17{,}2-23=-5{,}8$.

$\boldsymbol{a_n=a_1+(n-1)d} = 23 - 5{,}8\cdot(n-1) = 28{,}8-5{,}8n$,

так как $a_n = -122$ решаем уравнение

$28{,}8-5{,}8n = -122$, $5{,}8n=150{,}8$, $n=26$ € N

Ответ: число -122 является 26-м членом данной арифметической прогрессии.

Рассмотрим важное свойство арифметической прогрессии.

$d = a_{n+1} - a_n, \quad d = a_n - a_{n-1}$

$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$

$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$

$$a_n = \frac{(a_{n-1} + a_{n+1})}{2}$$

Основное свойство:

Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов.

Обратное утверждение:

Если в последовательности каждый член, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов, то эта последовательность является арифметической прогрессией.

Формулу n-го члена арифметической прогрессии $a_n=a_1+(n-1)d$ можно записать иначе:

$$a_n=dn+(a_1-d).$$

Отсюда ясно, что ***любая арифметическая прогрессия может быть задана формулой вида***

$$\boldsymbol{a_n=kn+b,}$$

где *k* и *b* - некоторые числа.

Верно и обратное: **последовательность (a_n), заданная формулой вида**

$$a_n = kn + b,$$

где k и b - некоторые числа, является арифметической прогрессией.

$$d = a_{n+1} - a_n.$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$