

Решение уравнений ОГЭ-2022 (задания № 9, 20)

Выполнила Голинченко О. Н., учитель
математики МБОУ СОШ № 5,
региональный тьютор
ст. Октябрьская, МО Крыловский район

Задания № 9, 20

Уравнения:

линейные уравнения;

квадратные уравнения;

дробно-рациональные уравнения;

биквадратные уравнения;

кубические уравнения (уравнения третьей степени).

Задание № 9

Линейные уравнения – это уравнения вида $ax + b = 0$.

Сколько корней может иметь линейное уравнение?

1) при $a \neq 0$, один корень $x = -\frac{b}{a}$

2) при $a = 0, b = 0 \Rightarrow 0x = 0, x \in R$,
корней бесконечное множество

3) при $a = 0, b \neq 0 \Rightarrow 0x = -b$,
корней нет.

Задание № 9

Алгоритм решения линейных уравнений

$$1 - 10x = 5x + 10$$

1) перенести слагаемые, содержащие неизвестное, в левую часть, а слагаемые, не содержащие неизвестное, в правую часть (знаки переносимых слагаемых меняются на противоположные);

$$-10x - 5x = 10 - 1$$

2) привести подобные слагаемые;

$$-15x = 9$$

3) разделить обе части уравнения на коэффициент при неизвестном, если он не равен нулю.

$$x = 9 : (-15)$$

$$x = -0,6$$

Ответ: - 0,6

Задание № 9

Пример 1

Найдите корень уравнения $3x+3=5x$

$$3x - 5x = -3$$

$$-2x = -3$$

$$x = -3 : (-2)$$

$$x = 1,5$$

Ответ: 1,5

Пример 2

Найдите корень уравнения $5(x+4) = -9$

$$5x + 20 = -9$$

$$5x = -9 - 20$$

$$5x = -29$$

$$x = -29 : 5$$

$$x = -5,8$$

Ответ: -5,8

Пример 3

Найдите корень уравнения

$$12 \cdot x - \cancel{12} \cdot \frac{x}{\cancel{12}} = \cancel{12} \cdot \frac{11}{\cancel{3}}$$

$$12x - x = 44$$

$$11x = 44$$

$$x = 44:11$$

$$x = 4$$

Ответ: 4

Пример 4

Найдите корень уравнения

$$\cancel{24} \cdot \frac{x}{\cancel{12}} + \cancel{24} \cdot \frac{x}{\cancel{8}} + 24 \cdot x = \cancel{24} \cdot \left(-\frac{29}{\cancel{6}}\right)$$

$$2x + 3x + 24x = -116$$

$$29x = -116$$

$$x = -116:29$$

$$x = -4$$

Ответ: - 4

$$x - \frac{x}{12} = \frac{11}{3} \quad | \quad \cdot 12$$

Задание № 9

$$\frac{x}{12} + \frac{x}{8} + x = -\frac{29}{6} \quad | \quad \cdot 24$$

Задание № 9

Квадратные уравнения – это уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – действительные числа.

$$D = b^2 - 4ac$$

Сколько корней может иметь квадратное уравнение?

1) если $D > 0$ – 2 корня: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a};$$

2) если $D = 0$ – 1 корень: $x = \frac{-b}{2a};$

3) если $D < 0$, уравнение не имеет корней.

Задание № 9

Пример 5

Решите уравнение $x^2 + 3x - 10 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, **в ответе запишите больший из них.**

$$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49 > 0$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = -\frac{10}{2} = -5$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$

Ответ: 2

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Пример 6

Решите уравнение $x^2 = 2x + 8$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите их **в порядке возрастания без пробелов и запятых.**

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 36 > 0$$

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{2 - 6}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \quad x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{2 + 6}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Ответ: -24

Задание № 9

Пример 7

Решите уравнение $(-5x+3)(-x+6) = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из них.

$$-5x + 3 = 0 \quad \text{или} \quad -x + 6 = 0$$

$$-5x = -3 \quad \quad \quad -x = -6$$

$$x = -3 : (-5) \quad \quad \quad x = -6 : (-1)$$

$$x = 0,6 \quad \quad \quad x = 6$$

Произведение двух множителей равно нулю, тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а другой при этом имеет смысл.

Ответ: 0,6

Пример 8

Решите уравнение $4x^2 + 20x = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из них.

$$4x(x + 5) = 0$$

$$4x = 0 \quad \quad \text{или} \quad \quad x + 5 = 0$$

$$x = 0 \quad \quad \quad x = -5$$

Ответ: 0

Задание № 20

Дробно – рациональные уравнения

приводятся к виду $\frac{A}{B} = 0$,

где A и B – многочлены, $B \neq 0$.

Алгоритм решения дробно-рационального уравнения:

1. найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
2. умножить обе части уравнения на общий знаменатель;
3. решить получившееся целое уравнение;
4. исключить из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель.

Задание № 20

Решите дробно-рациональное уравнение

Пример 9

$$\frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{x+5}{x(x-5)} \quad | \cdot x(x-5)$$

$$x(x-3) + 1(x-5) = x+5$$

$$x^2 - 3x + x - 5 = x + 5$$

$$x^2 - 3x + x - x - 5 - 5 = 0$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49 > 0$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{49}}{2} = \frac{3 + 7}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{49}}{2} = \frac{3 - 7}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Если $x = 5$, то $x(x-5) = 0$, значит 5 – посторонний корень

Если $x = -2$, то $x(x-5) \neq 0$, значит -2 – корень этого уравнения

Ответ: - 2

Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где

a, b, c — числа и a отлично от нуля, а x — неизвестное, называют **биквадратным уравнением**.

Чтобы решить биквадратное уравнение, вводят новую переменную $t = x^2$

Тогда исходное уравнение превращается в квадратное $at^2 + bt + c = 0$ относительно неизвестного t .

Задание № 20

Решите биквадратное уравнение

$$x^4 - 5x^2 - 6 = 0$$

Пусть $x^2 = t$, тогда

$$t^2 - 5t - 6 = 0$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 49 > 0$$

$$t_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{5 - 7}{2} = -1$$

$$t_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{5 + 7}{2} = 6$$

уравнение $x^2 = -1$ не имеет смысла,
корней нет

уравнение $x^2 = 6$ имеет корни
 $x_1 = -\sqrt{6}$ и $x_2 = \sqrt{6}$

Ответ: $-\sqrt{6}; \sqrt{6}$

Пример 10

Задание № 20

Решите уравнение $x^4 = (2x - 15)^2$

Пример 11

$$x^4 - (2x - 15)^2 = 0$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(x^2 - (2x - 15))(x^2 + (2x - 15)) = 0$$

$$(x^2 - (2x - 15)) = 0 \quad \text{или}$$

$$(x^2 + (2x - 15)) = 0$$

$$x^2 - 2x + 15 = 0$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = -56 < 0$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64 > 0$$

корней нет

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 - 8}{2} = -5$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 + 8}{2} = 3$$

Ответ: -5 ; 3

Пример 12

Задание № 20

Решите уравнение $16x^4 = (x-5)^2$.

$$16x^4 = (x-5)^2$$

$$16x^4 - (x-5)^2 = 0$$

$$(4x^2)^2 - (x-5)^2 = 0$$

$$(4x^2 - x + 5)(4x^2 + x - 5) = 0$$

$$4x^2 - x + 5 = 0$$

или

$$4x^2 + x - 5 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = -79 < 0$$

корней нет

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а другой при этом имеет смысл

если в квадратном уравнении

$$a + b + c = 0, \text{ то } x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$$

$$4 + 1 + (-5) = 0, \text{ значит}$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -\frac{5}{4} = -1,25.$$

Ответ: $-1,25; 1$.

Кубическое уравнение – алгебраическое

уравнение третьей степени.

Общий вид кубического уравнения:

$$***ax^3+bx^2+cx+d=0, где a\neq 0***$$

На практике часто, решение кубических уравнений основывается на разложении их на множители.

При этом используются различные методы:

метод группировки,

применение формул сокращенного умножения,

упрощение, метод деления на многочлен.

Пример 13

Задание № 20

Решите уравнение $5x^3 = 4x^2 + x$.

$$5x^3 = 4x^2 + x$$

$$5x^3 - 4x^2 - x = 0$$

$$x(5x^2 - 4x - 1) = 0$$

Разложим левую часть на множители

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а другой при этом имеет смысл

$$x = 0$$

или

$$5x^2 - 4x - 1 = 0;$$

$$a = 5, b = -4, c = -1;$$

$$a + b + c = 0,$$

$$5 - 4 - 1 = 0;$$

$$x_1 = 1; x_2 = -\frac{1}{5} = -0,2.$$

если в квадратном уравнении

$a + b + c = 0$, то

$x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$

Ответ: $-0,2; 0; 1$.

Задание № 20

Пример 14

Решите уравнение $x^3 + x^2 = 49x + 49$.

$$x^3 + x^2 - 49x - 49 = 0$$

$$(x^3 + x^2) + (-49x - 49) = 0$$

$$x^2(x+1) - 49(x+1) = 0$$

$$(x+1)(x^2 - 49) = 0$$

$$(x+1)(x+7)(x-7) = 0$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Произведение двух или нескольких множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а другие при этом имеют смысл

$$x+1=0 \quad \text{или} \quad x+7=0 \quad \text{или} \quad x-7=0$$

$$x = -1 \quad \quad \quad x = -7 \quad \quad \quad x = 7$$

Ответ: $-7; -1; 7$.

Задание № 20

Пример 15

Решите уравнение $x^3 + 8x^2 - x - 8 = 0$.

$$x^3 + 8x^2 - x - 8 = 0$$

$$(x^3 + 8x^2) + (-x - 8) = 0$$

$$x^2(x + 8) - 1(x + 8) = 0$$

$$(x + 8)(x^2 - 1) = 0$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Произведение двух или нескольких множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а другие при этом имеют смысл

$$(x + 8)(x + 1)(x - 1) = 0$$

$$x + 8 = 0 \quad \text{или} \quad x + 1 = 0 \quad \text{или} \quad x - 1 = 0$$

$$x = -8$$

$$x = -1$$

$$x = 1$$

Ответ: $-8; -1; 1$.

Пример 16

Задание № 20

Решите уравнение $x(x^2 + 2x + 1) = 2(x + 1)$.

$$x(x^2 + 2x + 1) = 2(x + 1)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$x(x + 1)^2 - 2(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)(x(x + 1) - 2) = 0$$

$$(x + 1)(x^2 + x - 2) = 0$$

Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а другой при этом имеет смысл

$$x + 1 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + x - 2 = 0;$$

$$x = -1 \quad x^2 + x - 2 = 0;$$

$$a = 1, b = 1, c = -2;$$

$$a + b + c = 0;$$

$$x_1 = 1, x_2 = -2.$$

если в квадратном уравнении

$a + b + c = 0$, то

$$*x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}*$$

Ответ : $-2; -1; 1$.

Решите уравнение $(x+9)^3 = 81(x+9)$.

$$(x+9)^3 = 81(x+9)$$

$$(x+9)^3 - 81(x+9) = 0$$

$$(x+9)((x+9)^2 - 81) = 0$$

$$(x+9)((x+9)^2 - 9^2) = 0$$

$$(x+9)((x+9)-9)((x+9)+9) = 0$$

$$(x+9)x(x+18) = 0$$

$$x+9=0 \quad \text{или} \quad x=0 \quad \text{или} \quad x+18=0$$

$$x=-9 \quad \quad \quad x=0 \quad \quad \quad x=-18$$

Ответ: $-18; -9; 0$.