

Решение тригонометрических уравнений

Першина Е.Ю.
учитель математики
МАОУ МО Динской район
СОШ №3 имени П.С. Нахимова

а) Решите уравнение $\sin 2x + \sqrt{3} \sin x = 0$.

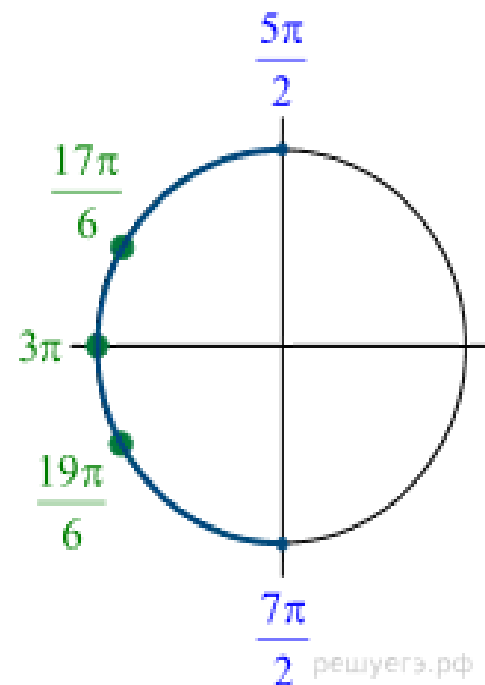
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$2 \sin x \cos x + \sqrt{3} \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x \cdot (2 \cos x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$. Получим числа: $\frac{17\pi}{6}; 3\pi; \frac{19\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{ \pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{17\pi}{6}; 3\pi; \frac{19\pi}{6}$.

Дано уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \cos x$.

а) Решите уравнение;

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Решение.

Используем формулу приведения и синуса двойного угла:

$$\sin 2x = \cos x \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x = \cos x \Leftrightarrow \cos x (2 \sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

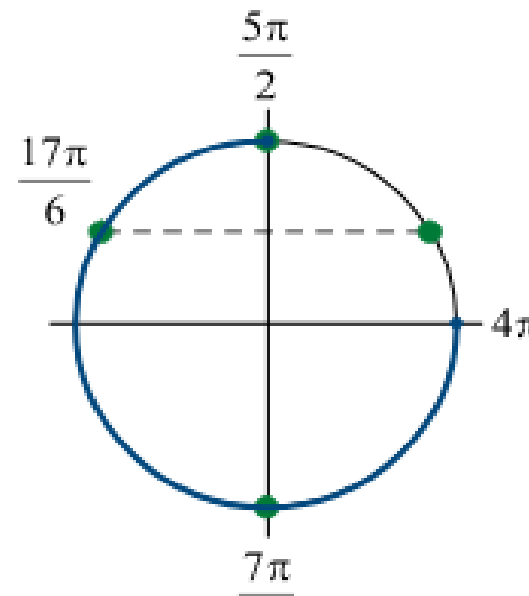
б) С помощью единичной окружности отберём корни на отрезке $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$. Находим: $\frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$.

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\frac{5\pi}{2}; \frac{17\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}$.

Примечание.

Уравнение может быть так же решено при помощи следующей теоремы:

$$\cos x = \cos y \Leftrightarrow x = \pm y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



а) Решите уравнение: $2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Выполним преобразования:

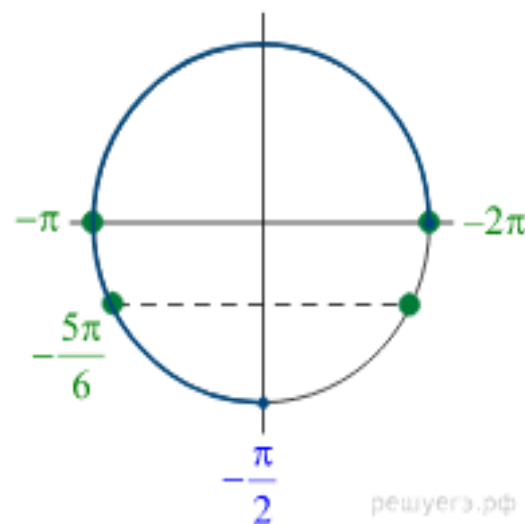
$$2\sin^2 x + \sin x + \cos x = \cos x \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cdot (2\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $-2\pi; -\pi; -\frac{5\pi}{6}$.

Ответ: а) $\left\{ \pi k, -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-2\pi; -\pi; -\frac{5\pi}{6}$



а) Решите уравнение $\cos 2x + \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3,5\pi]$.

Решение.

а) Воспользуемся формулой косинуса двойного угла и формулой приведения:

$$1 - 2\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x - 2 = 0.$$

Пусть $t = \sin x$. Тогда получаем:

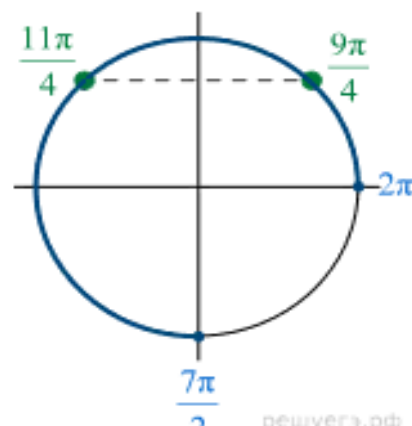
$$2t^2 + \sqrt{2}t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\sqrt{2}, \\ t = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\begin{cases} \sin x = -\sqrt{2}, \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$. Получим числа $\frac{9\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}$.

Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $\frac{9\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}$.



Решите уравнение $\frac{(\sin x - 1)(2 \cos x + 1)}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} = 0$.

Решение.

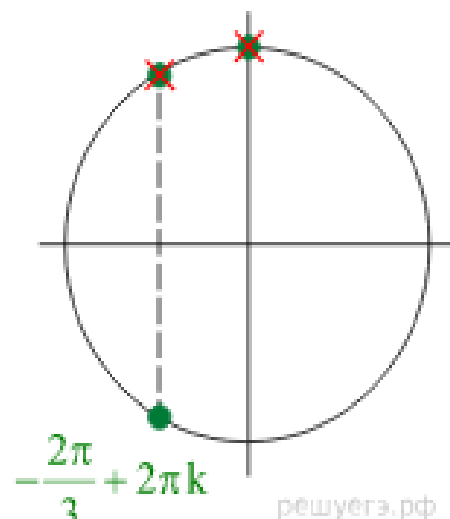
Уравнение имеет смысл если $\operatorname{tg} x > 0$. Приравняем числитель к нулю:

$$(\sin x - 1)(2 \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Учитывая условие $\operatorname{tg} x > 0$, получаем, что серии $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ и

$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ не являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $\left\{ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.



Решите уравнение $\frac{\sin 2x + 2 \sin^2 x}{\sqrt{-\cos x}} = 0$.

Решение.

Перейдём к системе:

$$\begin{cases} \sin 2x + 2 \sin^2 x = 0, \\ \cos x < 0. \end{cases}$$

Решим первое уравнение:

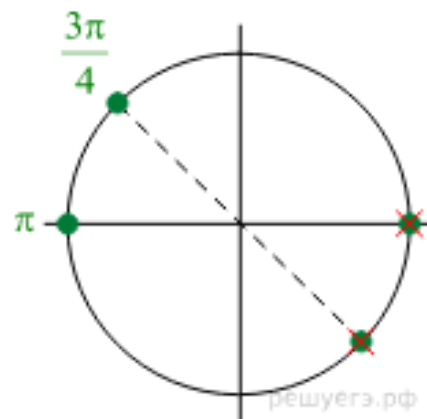
$$\sin 2x + 2 \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x (\cos x + \sin x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Учитывая, что $\cos x < 0$, получаем:

$$\begin{cases} x = \pi + 2\pi k, \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \pi + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.



а) Решите уравнение $(27^{\cos x})^{\sin x} = 3^{\frac{3 \cos x}{2}}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi, \frac{\pi}{2}]$.

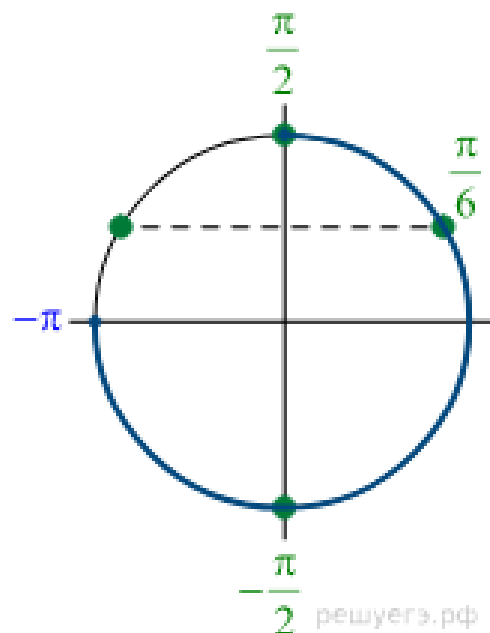
Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$3^{3 \cos x \sin x} = 3^{\frac{3 \cos x}{2}} \Leftrightarrow 3 \cos x \sin x = \frac{3 \cos x}{2} \Leftrightarrow \cos x \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

б) С помощью числовой окружности отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi, \frac{\pi}{2}]$. Получим числа: $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$.



Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}$.

а) Решите уравнение $9^{\sin x} + 9^{-\sin x} = \frac{10}{3}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}, -2\pi\right]$.

Решение.

а) Пусть $t = 9^{\sin x}$, тогда исходное уравнение запишется в виде $t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3, \\ t = \frac{1}{3}. \end{cases}$

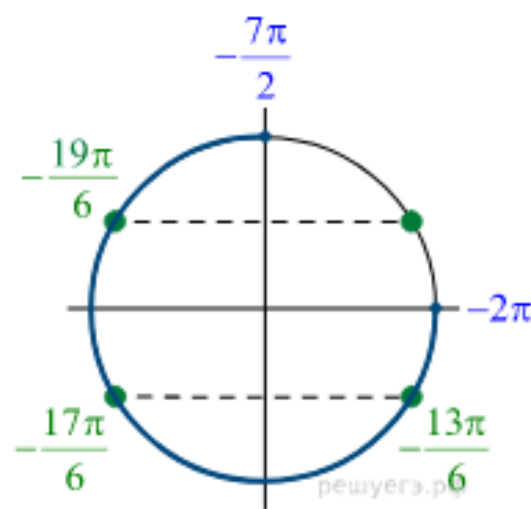
При $t = 3$ получим: $9^{\sin x} = 3 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$

При $t = \frac{1}{3}$ получим:

$9^{\sin x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}, -2\pi\right]$. Получим числа:

$-\frac{19\pi}{6}, -\frac{17\pi}{6}, -\frac{13\pi}{6}.$



Ответ: а) $\left\{ \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) $-\frac{19\pi}{6}; -\frac{17\pi}{6}; -\frac{13\pi}{6}.$

а) Решите уравнение $\frac{(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) \log_{13}(2 \sin^2 x)}{\log_{31}(\sqrt{2} \cos x)} = 0$.

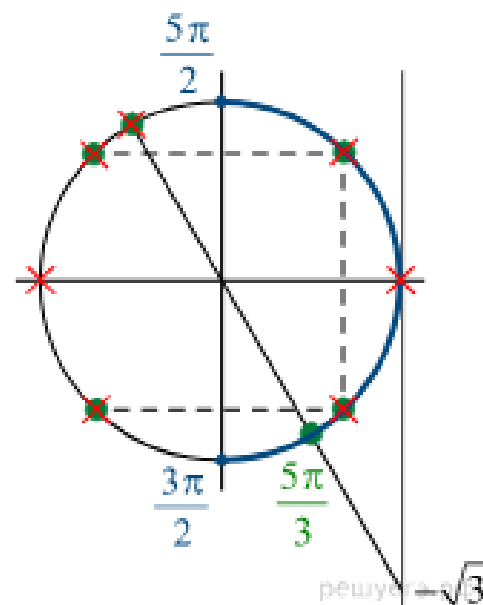
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а)

$$\frac{(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) \log_{13}(2 \sin^2 x)}{\log_{31}(\sqrt{2} \cos x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0, \\ 2 \sin^2 x = 1, \\ \sqrt{2} \cos x \neq 1, \\ \cos x > 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}, \\ \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x > 0, \\ \sin x \neq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}, \\ \cos x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$. Получим число $\frac{5\pi}{3}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{5\pi}{3}$.