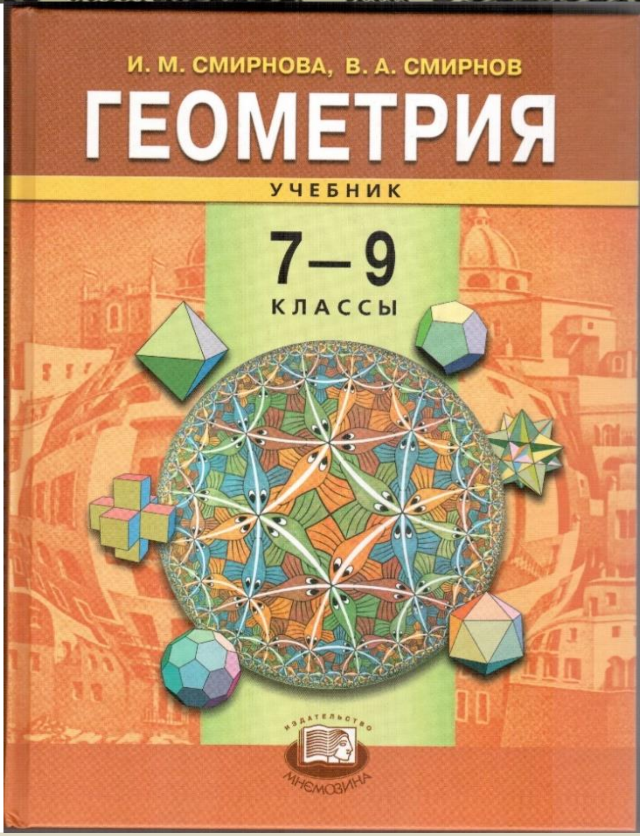
издательство Мнемозина

ВЕБИНАРЫ

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ. ОКРУЖНОСТЬ

Презентация к учебнику «Геометрия. 7-9 классы» И.М. Смирновой и В.А. Смирнова



ВЕДУЩИЙ: **Смирнов Владимир Алексеевич**, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой элементарной математики МПГУ, автор учебников по геометрии для 5-6, 7-9 и 10-11 классов.

E-mail: v-a-smirnov@mail.ru Сайт: vasmirnov.ru

Авторский сайт: vasmirnov.ru

Этот сайт представляет современный учебно-методический комплект по геометрии для 5-11 классов

Авторы:
Смирнова Ирина Михайловна – доктор педагогических наук, профессор кафедры элементарной математики Московского педагогического государственного университета.
Смирнов Владимир Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой элементарной математики Московского педагогического государственного университета

Учебно-методический комплект по геометрии

Программа и тематическое планирование по геометрии для 7-9 классов

Программа и тематическое планирование по геометрии для 10-11 классов

Программа по геометрии для 5-6 классов

Дидактические материалы
7-9 классы
7 класс (новые)
8 класс (новые)
9 класс (новые)

Уроки геометрии с "Power Point"
5-6 классы
7-9 классы
10-11 классы

Геометрия с "GeoGebra".

Элементарная математика для студентов педагогических вузов

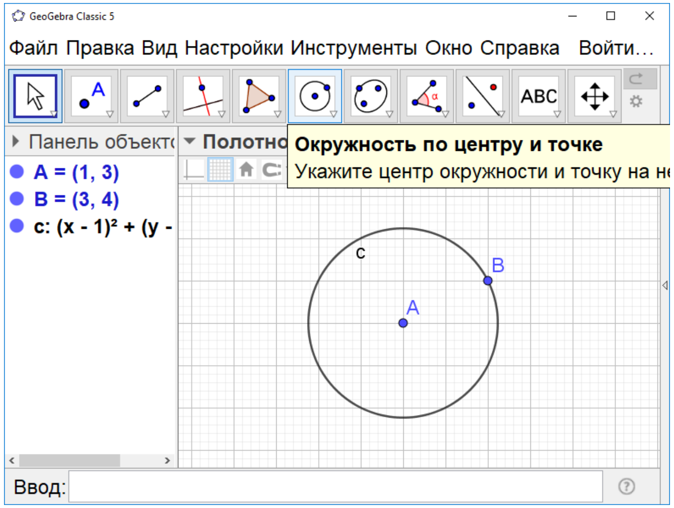
Статьи и пособия о преподавании геометрии в школе

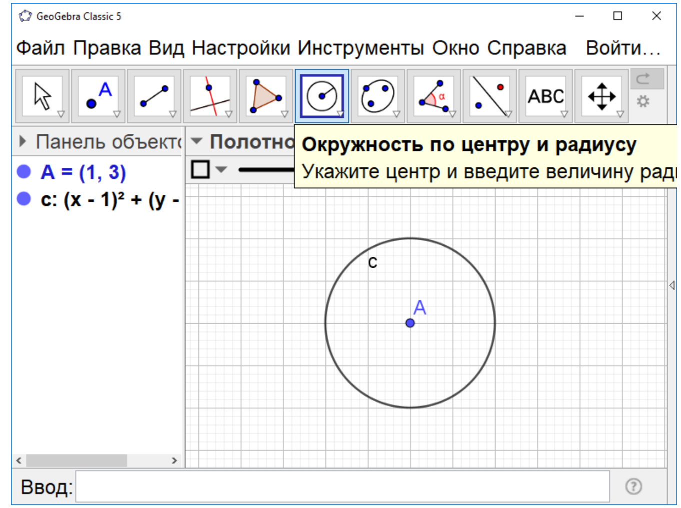
Видеолекции и вебинары   Подготовка к ОГЭ   Подготовка к ЕГЭ

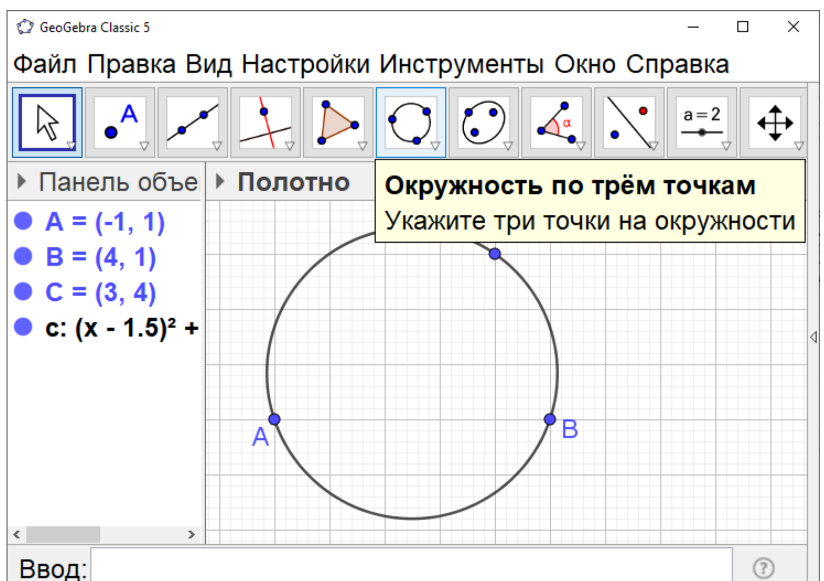
Вопросы, отзывы и пожелания присылайте по адресу: v-a-smirnov@mail.ru

I. Окружность

Для изображения окружности в программе GeoGebra имеются инструменты: Окружность по центру и точке; Окружность по центру и радиусу; Окружность по трём точкам.

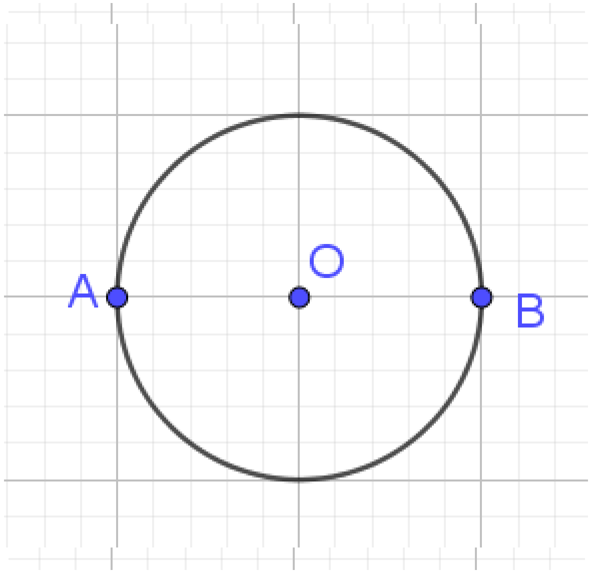






Упражнение 1

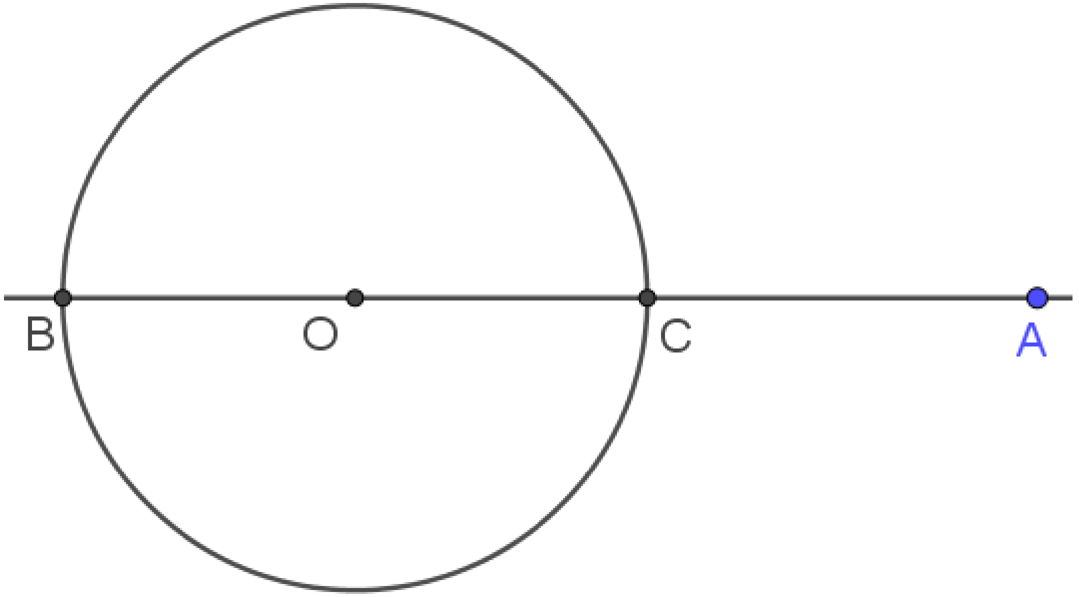
Расстояние между точками A и B равно 2 см. Найдите наименьший возможный радиус окружности, проходящей через эти точки.



Ответ. 1 см.

Упражнение 2

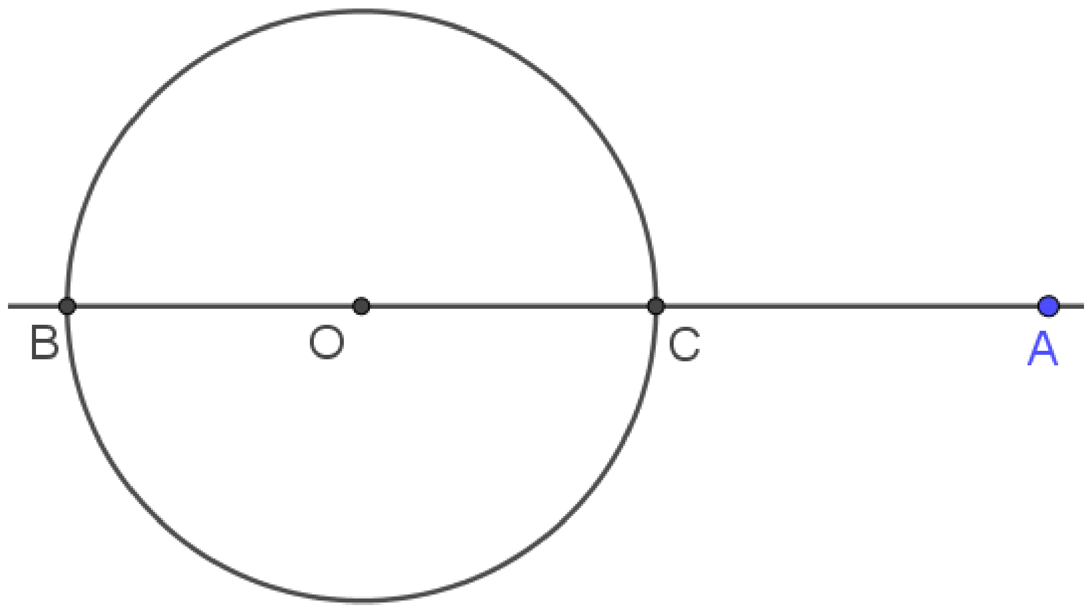
Точка A расположена вне окружности радиуса R и удалена от центра O этой окружности на расстояние d. Чему равны наименьшее и наибольшее расстояния от точки A до точек данной окружности?



Ответ: $d - R$; $R + d$.

Упражнение 3

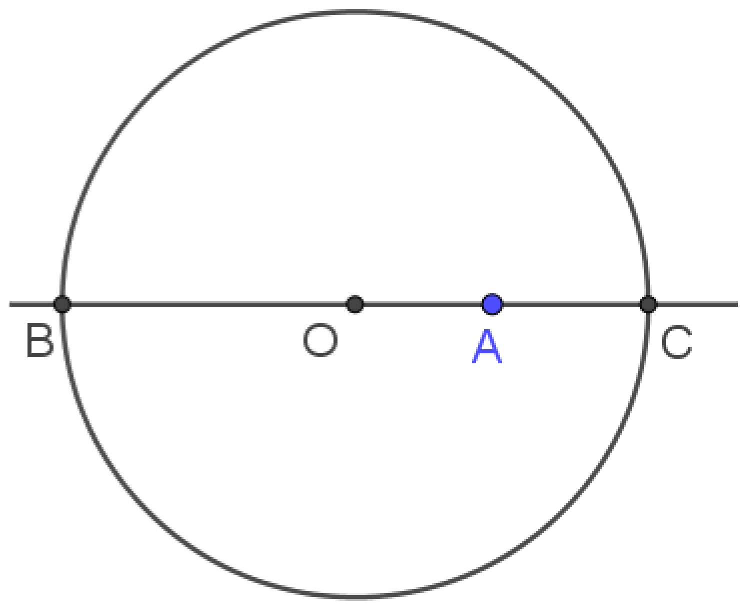
Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки *A*, расположенной вне окружности, до точек окружности равны соответственно 50 см и 20 см. Найдите радиус данной окружности.



Ответ: 15 см.

Упражнение 4

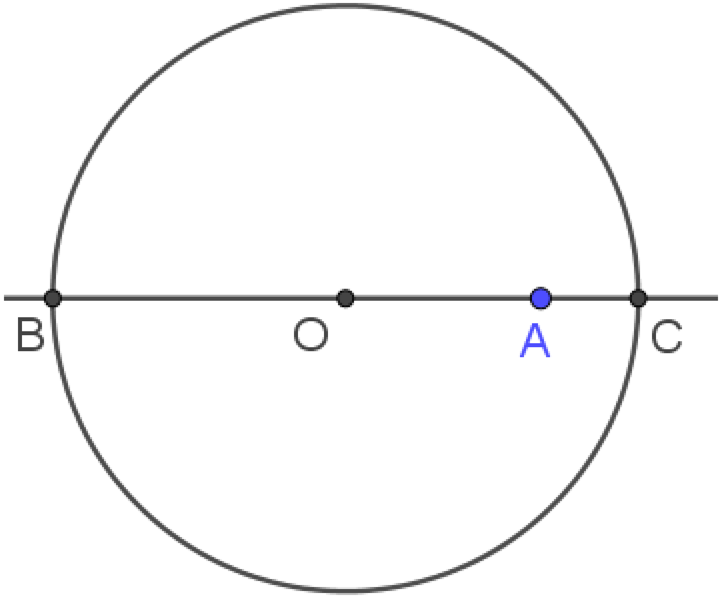
Точка A расположена внутри окружности радиуса R и удалена от центра O этой окружности на расстояние d. Чему равны наименьшее и наибольшее расстояния от точки A до точек данной окружности?



Ответ: $R – d$; $R + d$.

Упражнение 5

Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки, расположенной внутри окружности, до точек окружности равны соответственно 20 см и 4 см. Найдите радиус данной окружности.

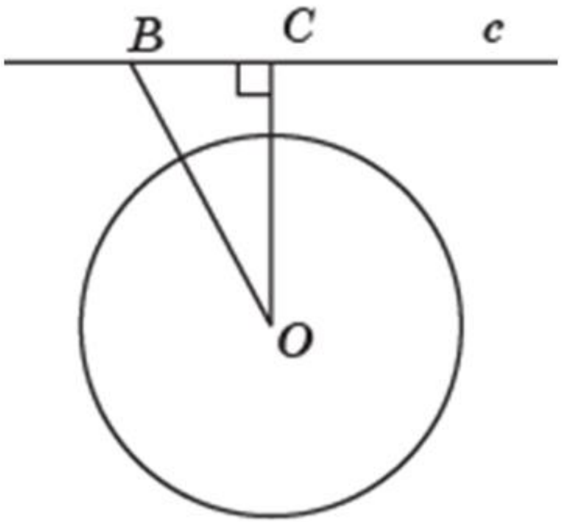


Ответ: 12 см.

Взаимное расположение прямой и окружности

Теорема 1. Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то эти прямая и окружность не имеют общих точек.

Доказательство. Рассмотрим прямую *c* и окружность с центром *O* и радиусом *R*. Из центра *O* опустим перпендикуляр *OC* на прямую *c*.

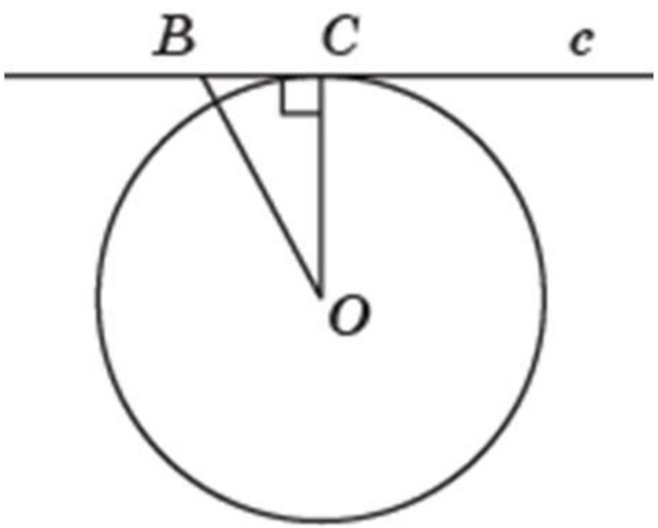


Длина этого перпендикуляра является расстоянием от точки *O* до прямой *c*. По условию, оно больше радиуса *R* окружности. Для любой другой точки *B* прямой *c* отрезок *OB* будет наклонной, которая больше перпендикуляра *OC*, значит, и подавно, больше *R*.

Мы получили, что расстояние от центра окружности до любой точки прямой *c* больше *R*. Следовательно, ни одна точка прямой *c* не принадлежит окружности, т.е. прямая и окружность не имеют общих точек.

Теорема 2. Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то эта прямая является касательной к окружности.

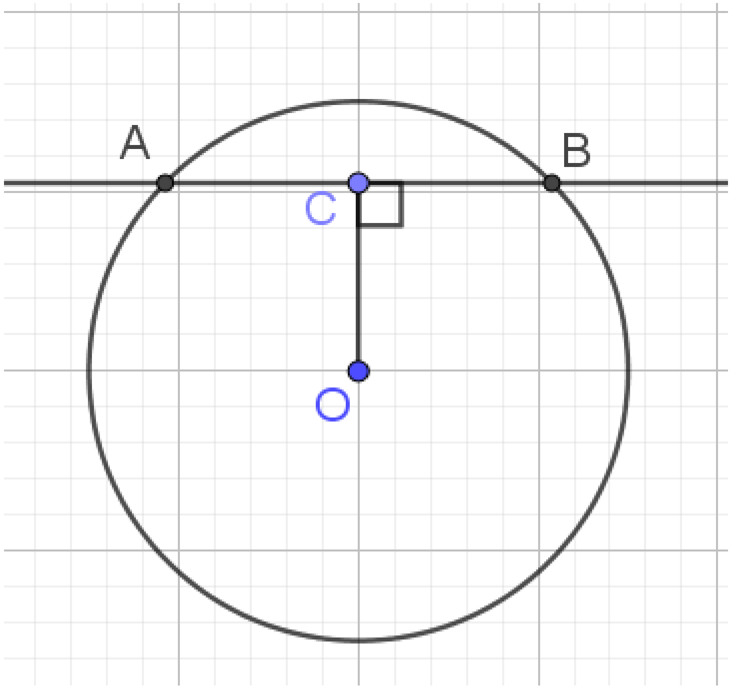
Доказательство. Рассмотрим прямую *c* и окружность с центром *O* и радиусом *R*. Из центра *O* опустим перпендикуляр *OC* на прямую *c*.



Так как длина этого перпендикуляра равна радиусу *R* окружности, то точка *C* принадлежит данной окружности. Для любой другой точки *B* прямой *c* отрезок *OB* будет наклонной, которая больше перпендикуляра *OC*, значит, больше *R*.

Следовательно, никакая другая точка *B* прямой *c* не принадлежит данной окружности. Таким образом, точка *C* является единственной общей точкой прямой *c* и окружности. Значит, прямая *c* касается окружности

Теорема 3. Если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности, то эта прямая и окружность имеют две общие точки (пересекаются).



Теорема 4. Отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, расположенной вне этой окружности, заключённые между этой точкой и точками касания, равны.

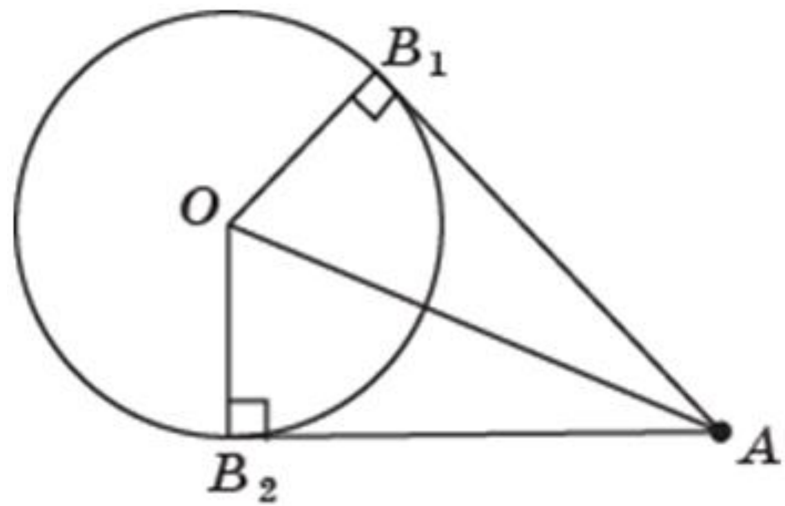
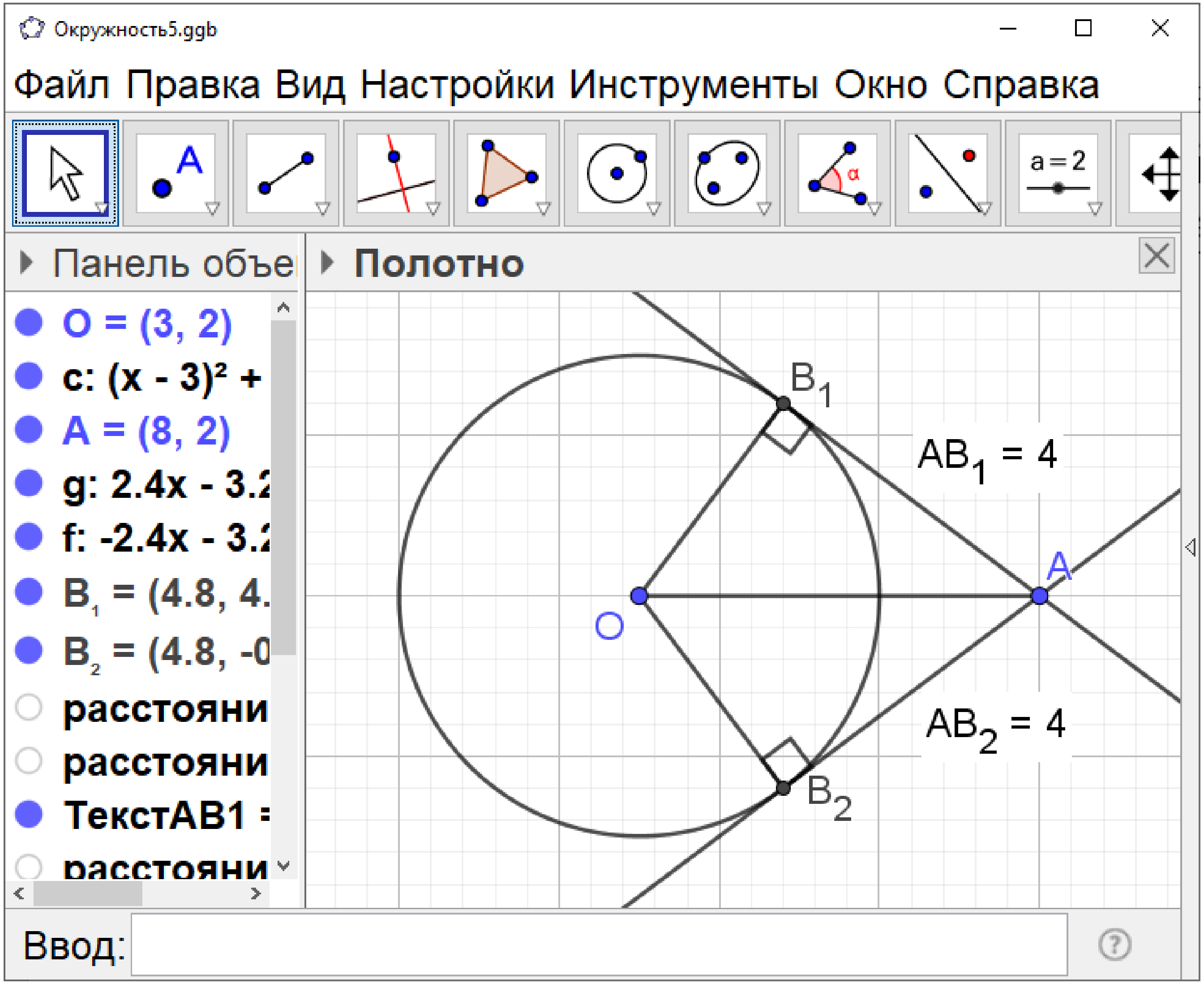
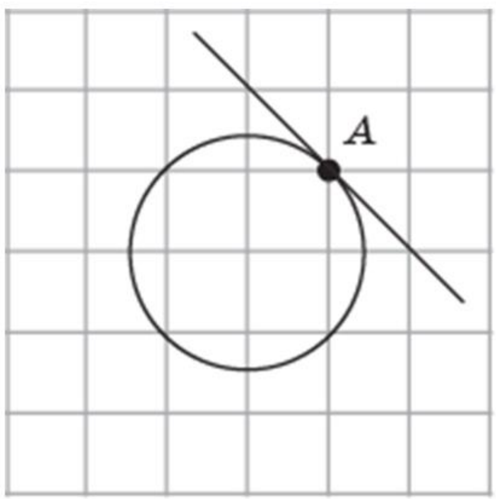


Иллюстрация в программе GeoGebra

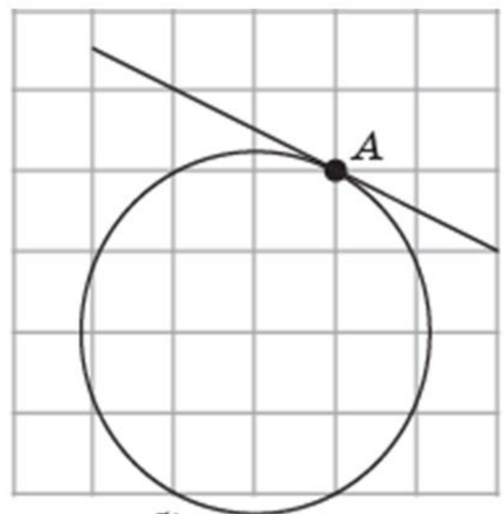


Упражнение 1

На клетчатой бумаге через точку A проведите касательную к данной окружности.



а)

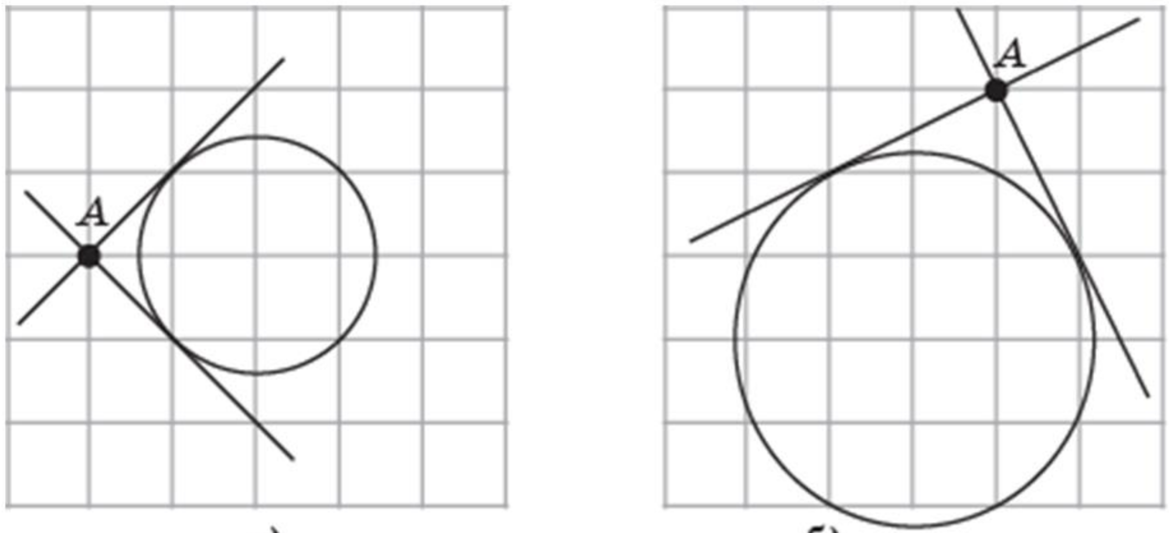


б)

Ответ:

Упражнение 2

На клетчатой бумаге через точку A проведите касательную к данной окружности.

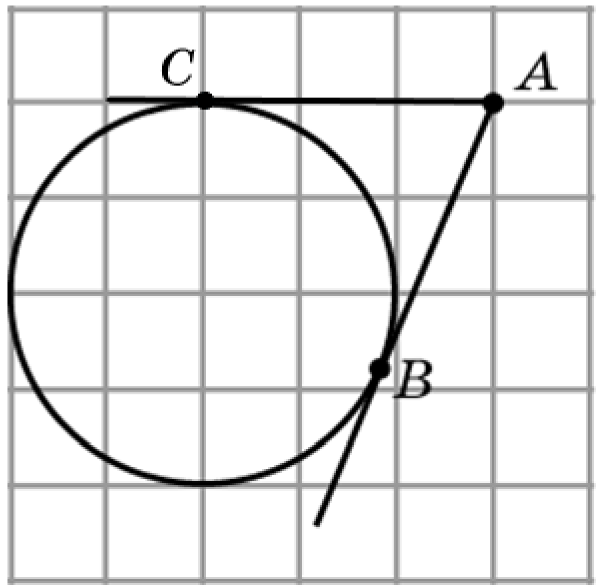


а) б)

Ответ:

Упражнение 3

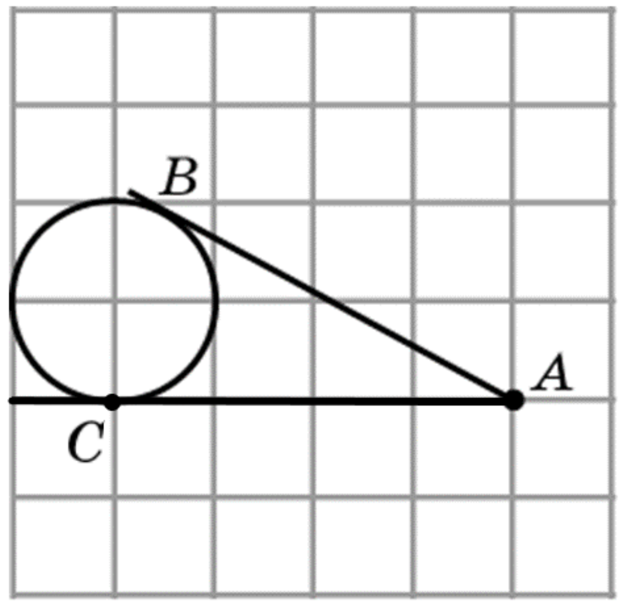
Найдите длину отрезка AB касательной. Стороны клеток равны 1.



Ответ: 3.

Упражнение 4

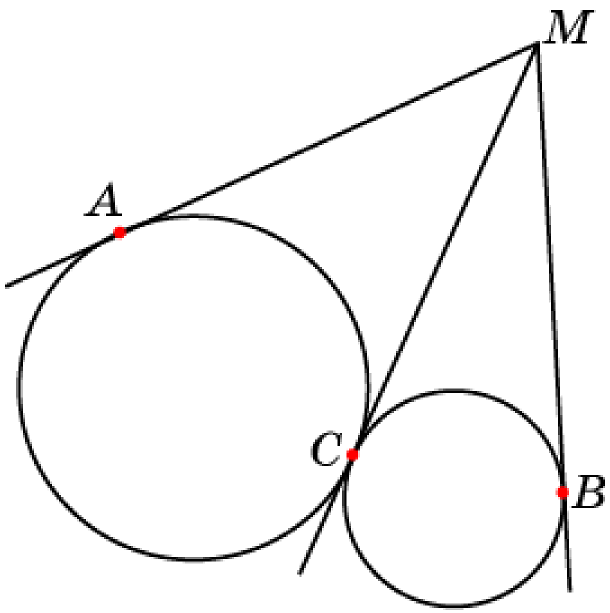
Найдите длину отрезка AB касательной. Стороны клеток равны 1.



Ответ: 4.

Упражнение 5

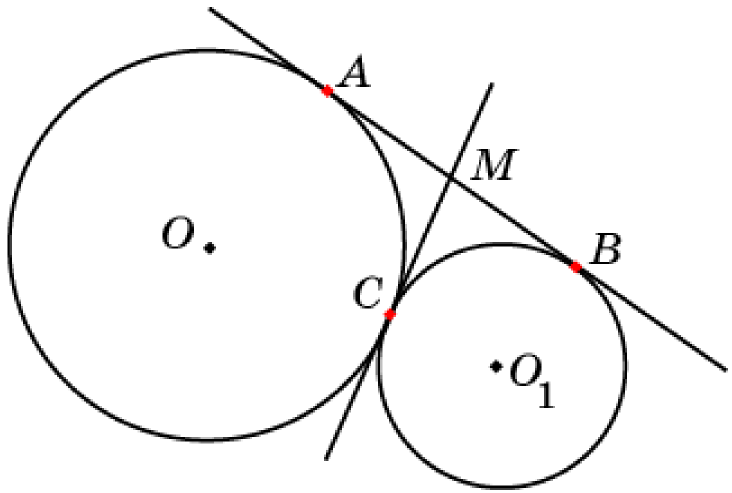
На рисунке MA, MB, MC - касательные. Верно ли, что $MA = MB$?



Ответ: Да.

Упражнение 6

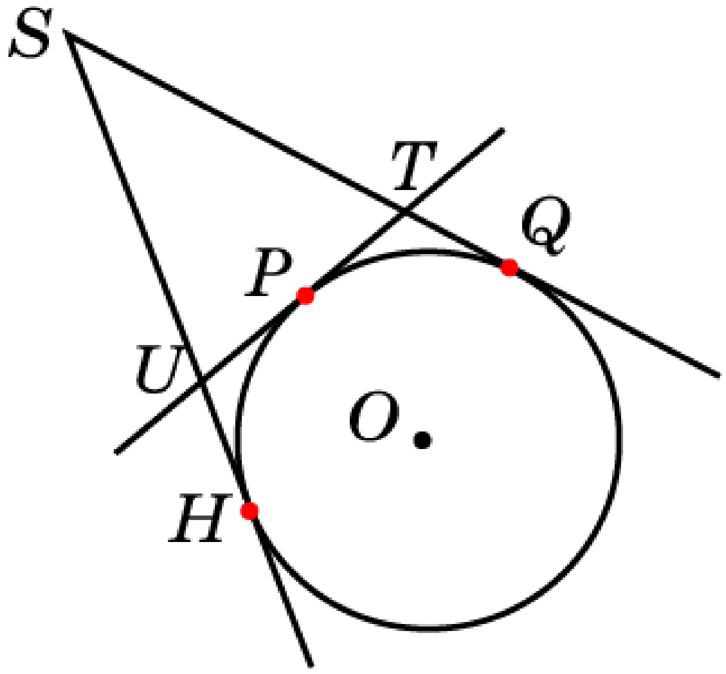
На рисунке *MA*, *MB*, *MC* - касательные. В каком отношении делит точка *M* отрезок *AB*?



Ответ: 1:1.

Упражнение 7

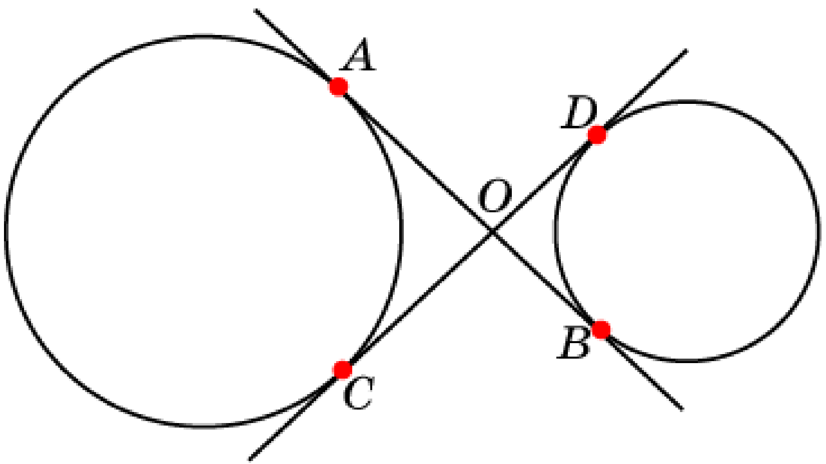
На рисунке SH и SQ - отрезки касательных, равные 18 см. Найдите периметр треугольника STU, где TU – касательная к данной окружности.



Ответ: 36 см.

Упражнение 8

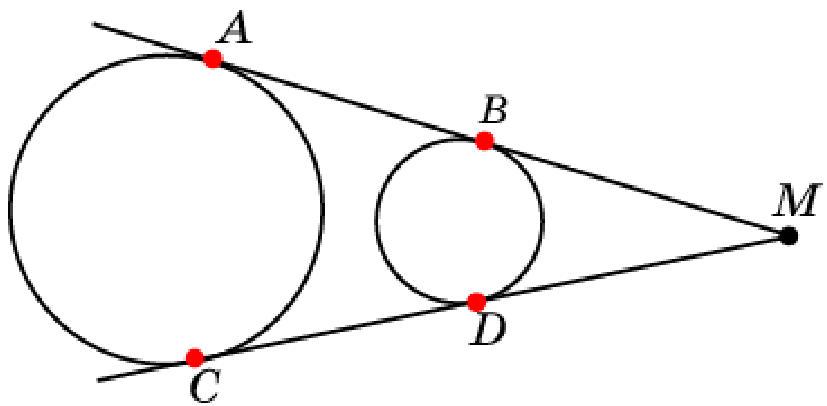
Докажите, что отрезки AB и CD общих внутренних касательных к двум окружностям, равны.



Решение: $OA = OC$, $OB = OD$, как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки. Следовательно, $AB = CD$.

Упражнение 9

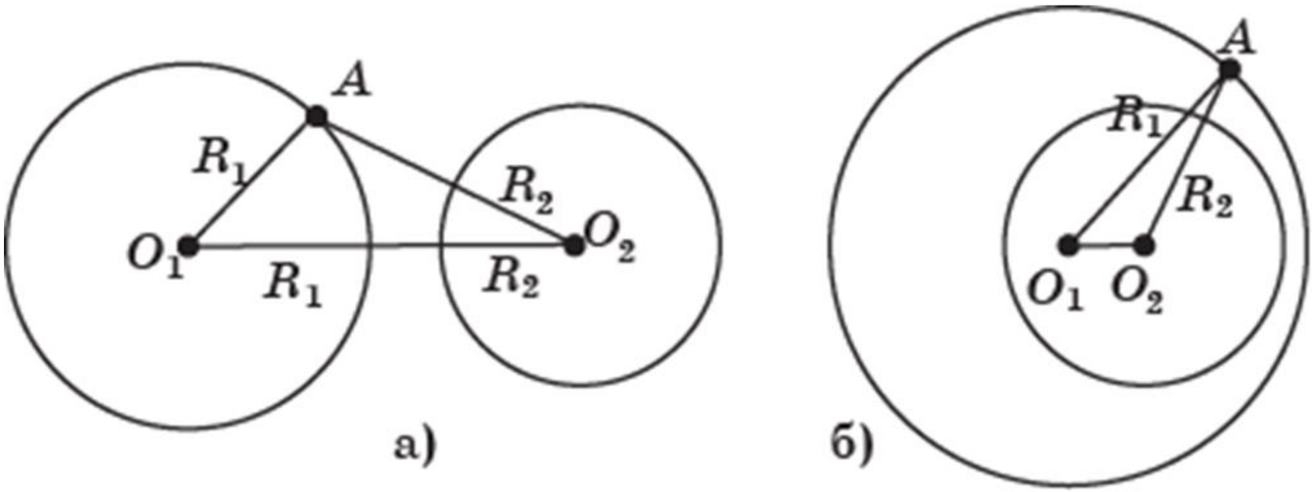
Докажите, что отрезки AB и CD общих пересекающихся внешних касательных к двум окружностям, равны.



Решение: $MA = MC$, $MB = MD$, как отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки. Следовательно, $AB = CD$.

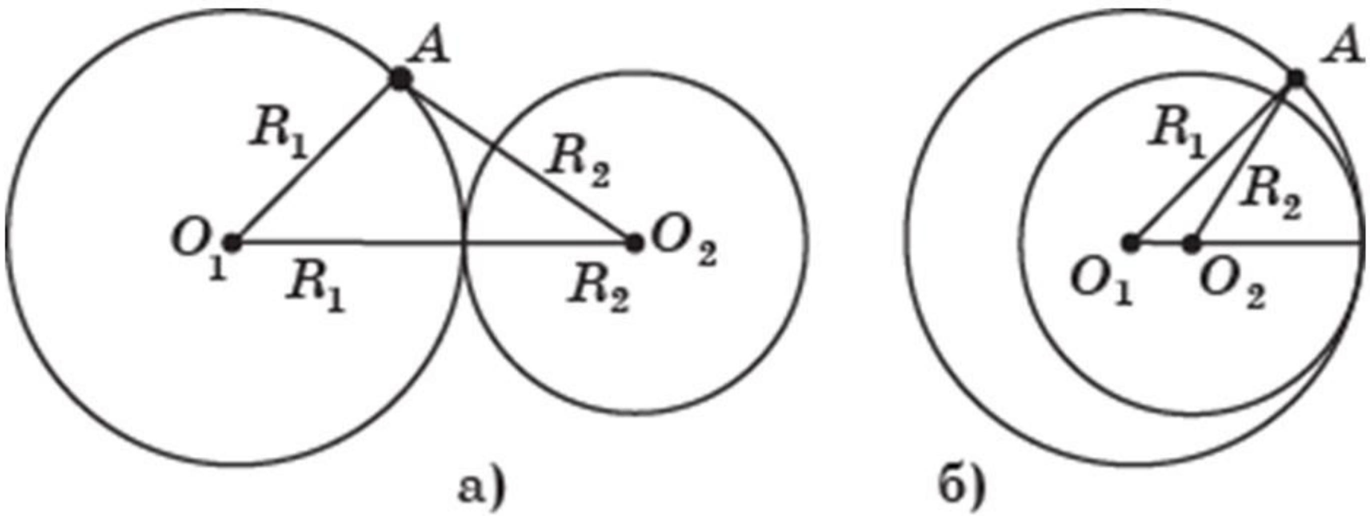
Взаимное расположение двух окружностей

Теорема 1. Если расстояние между центрами двух окружностей больше суммы их радиусов или меньше их разности, то эти окружности не имеют общих точек.

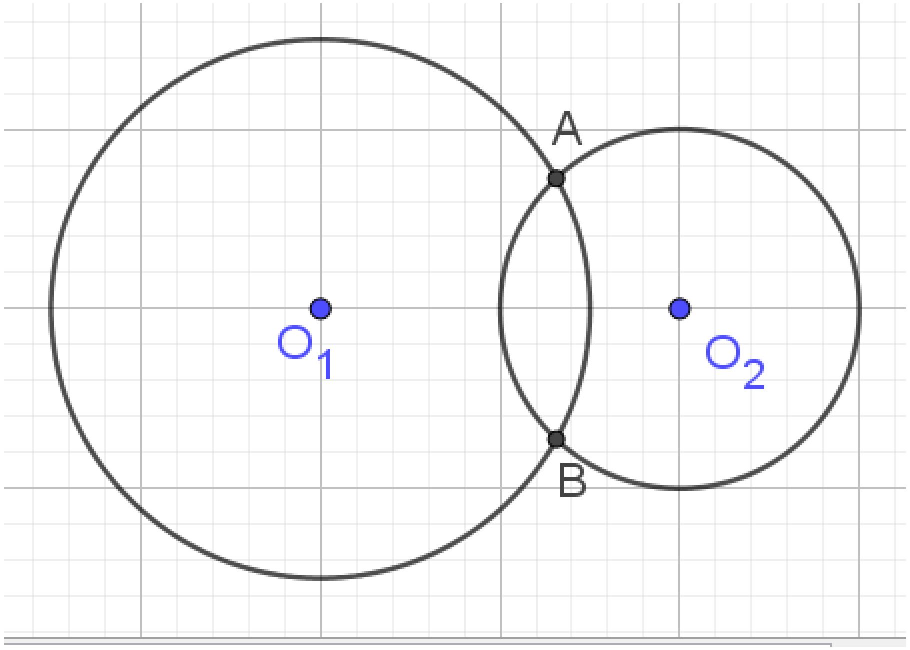


а) б)

Теорема 2. Если расстояние между центрами двух окружностей равно сумме или разности их радиусов, то эти окружности касаются.

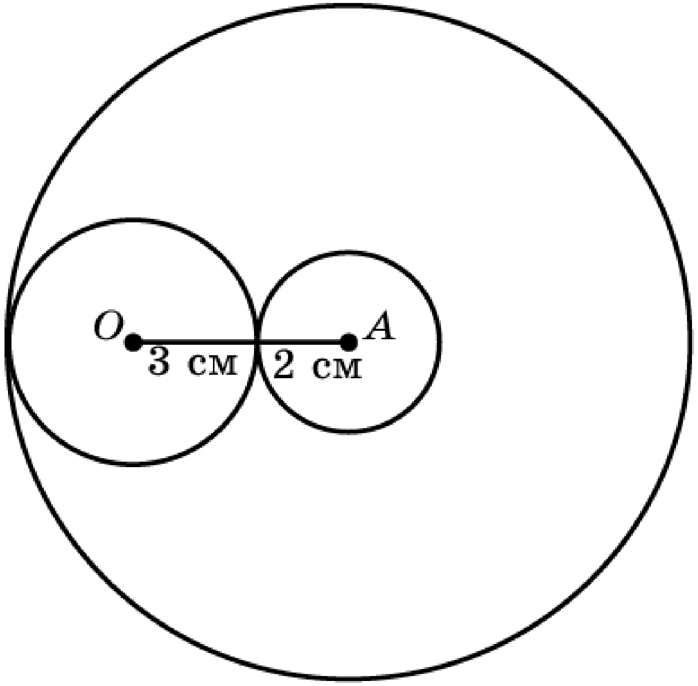


Теорема 3. Если расстояние между центрами двух окружностей меньше суммы радиусов и больше их разностей, то эти окружности имеют две общие точки (пересекаются).



Упражнение 1

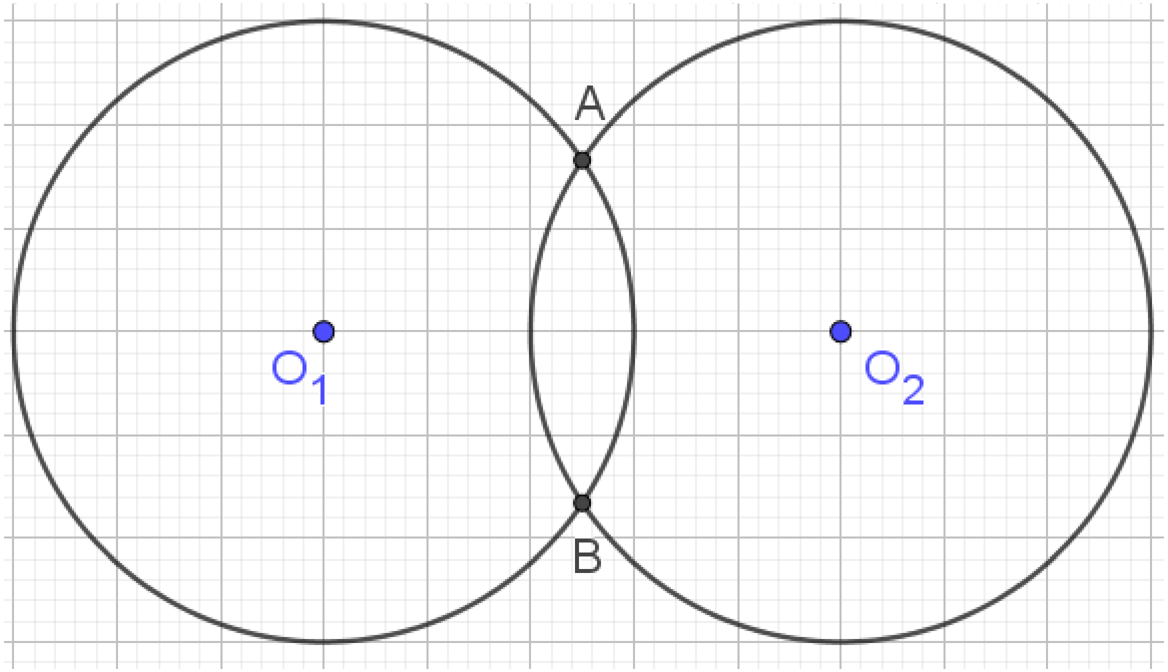
Дана окружность радиуса 3 см и точка A на расстоянии, равном 5 см, от центра окружности. Найдите радиус окружности, касающейся данной и имеющей центр в точке A.



Ответ: 2 см или 8 см.

Упражнение 2

Расстояние между центрами двух окружностей равно 5 см. Как расположены эти окружности по отношению друг к другу, если их радиусы равны: а) 2 см и 3 см; б) 2 см и 2 см; в) 3 см и 3 см?



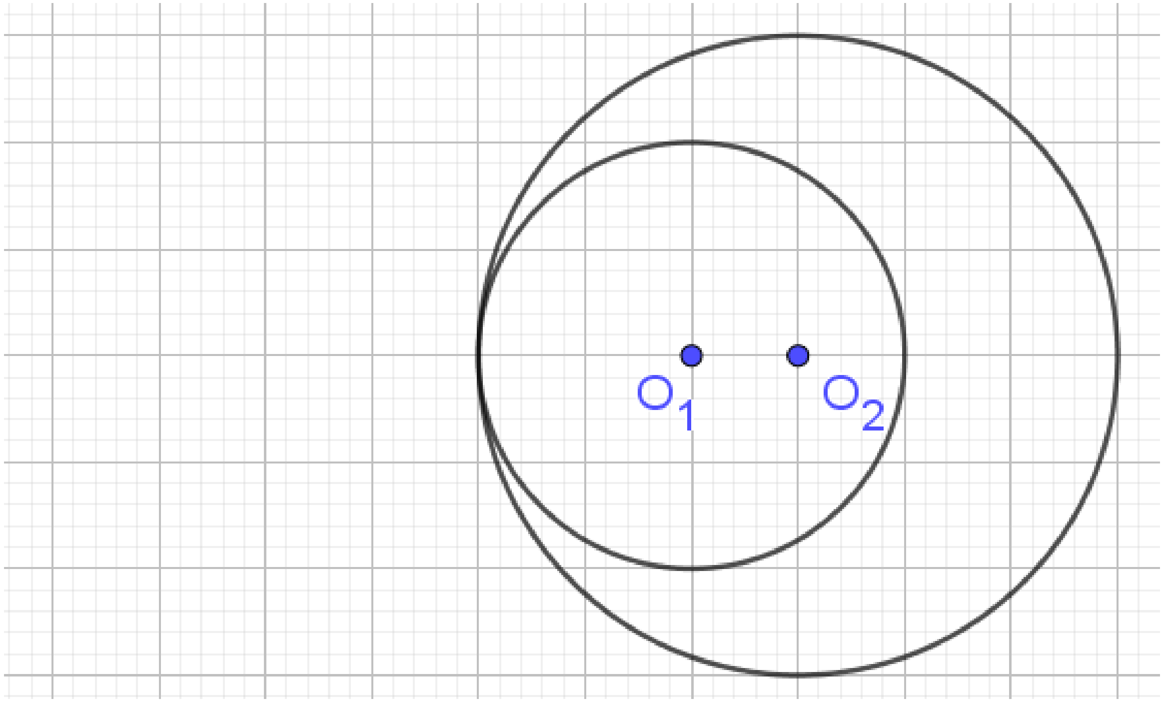
Ответ: а) касаются;

б) не имеют общих точек;

в) пересекаются.

Упражнение 4

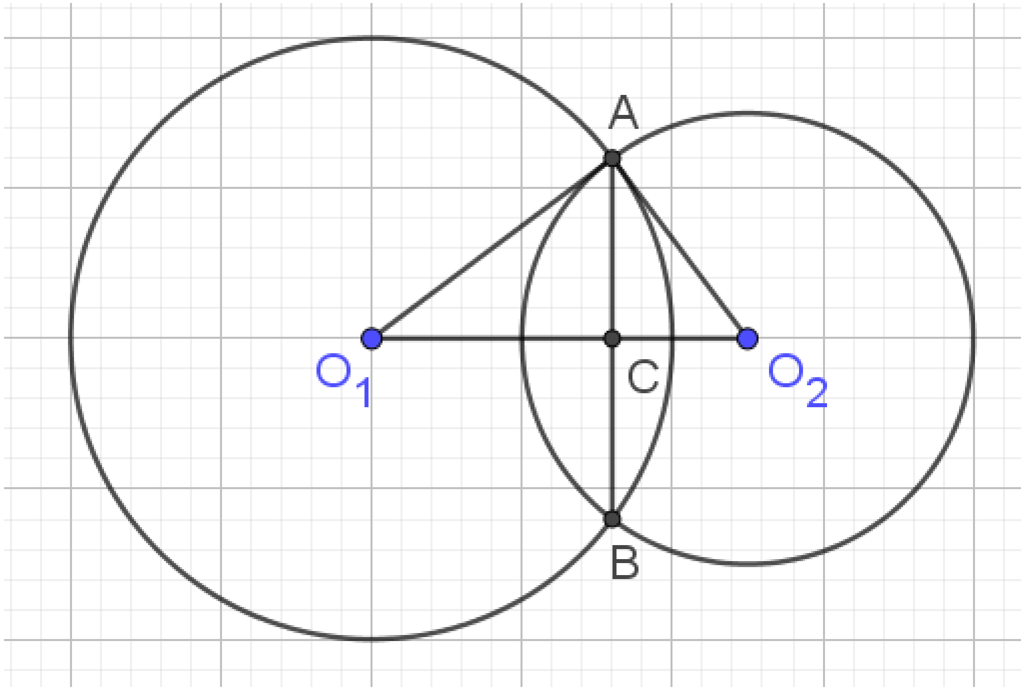
Чему равно расстояние между центрами двух окружностей, радиусы которых равны 2 см и 3 см, если окружности: а) касаются внешне; б) касаются внутренне?



Ответ: а) 5 см; б) 1 см.

Упражнение 5

Радиусы двух окружностей равны 4 и 3. Расстояние между их центрами равно 5. Найдите длину общей хорды этих окружностей.



Ответ: $AB = 4{,}8$.

Приведём пример задачи демоверсии ЕГЭ 2022

Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x|-5)^2+(y-4)^2=9, \\ (x+2)^2+y^2=a^2, \end{cases}$$

имеет единственное решение.

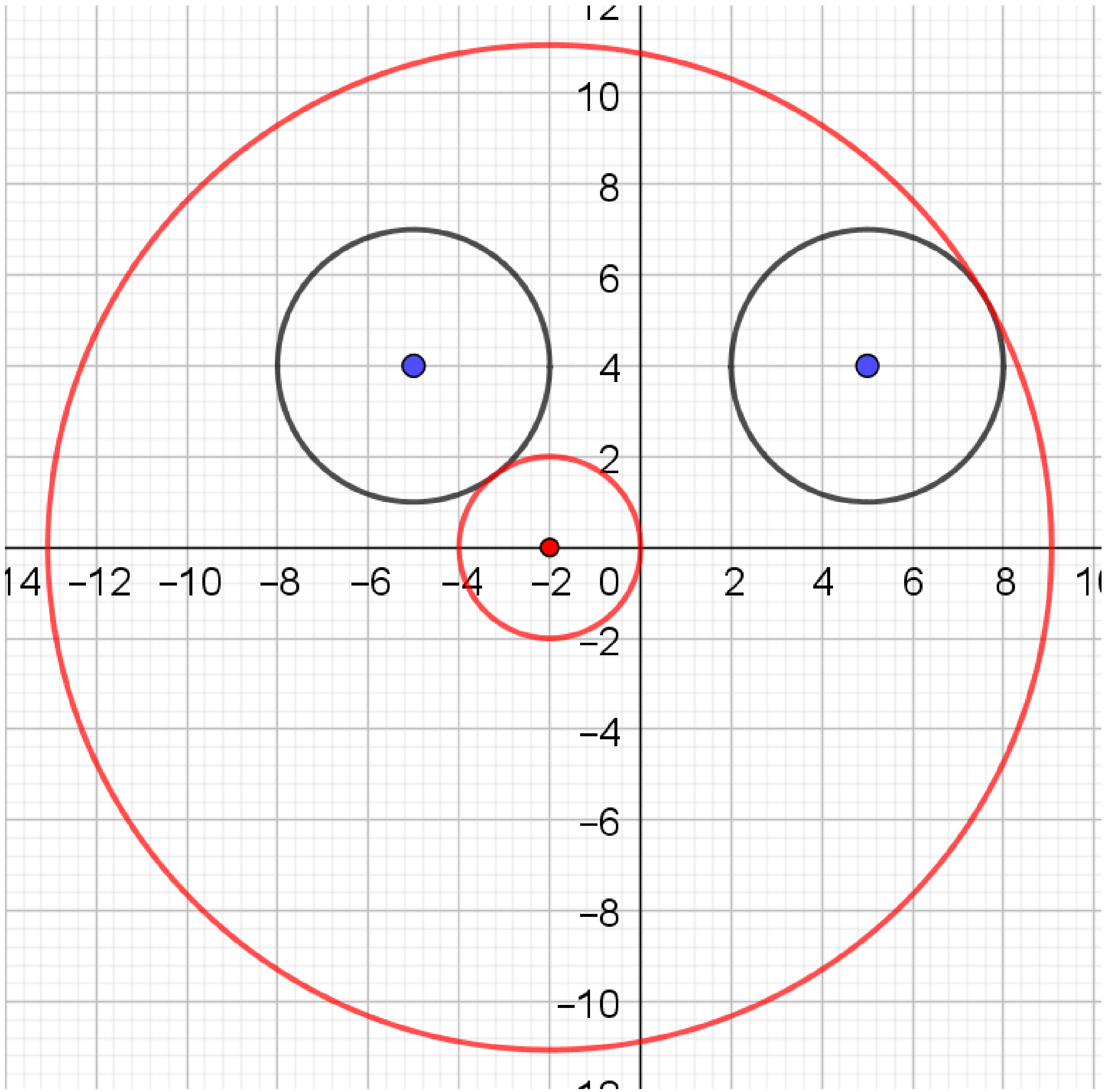
Решение можно проиллюстрировать в программе GeoGebra. Для этого нужно:

1. В строке «Ввод» набрать (|*x*|-5)^2+(*y*-4)^2=9 и нажать “Enter”.

2. Создать ползунок a.

3. В строке «Ввод» набрать (*x*+2)^2+*y*^2=a^2 и нажать “Enter”.

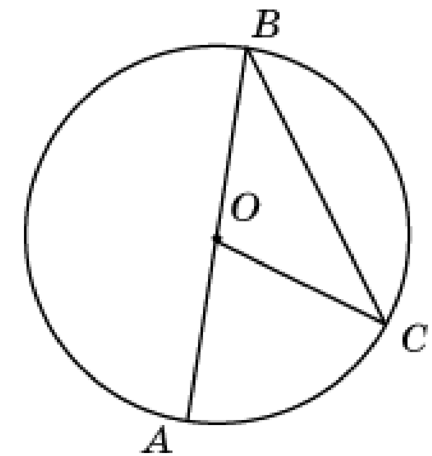
Перемещая ползунок, можно увидеть, при каких a данная система уравнений имеет единственное решение.



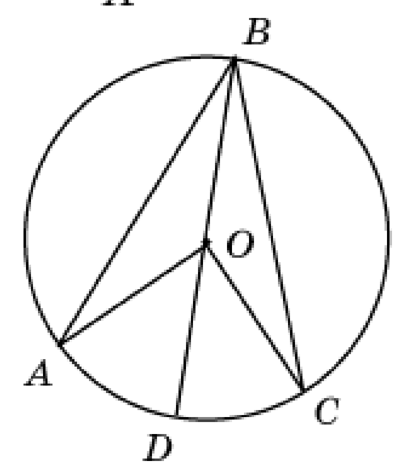
Ответ. 2, $\sqrt{65}+3$.

II. УГЛЫ, СВЯЗАННЫЕ С ОКРУЖНОСТЬЮ

Теорема 1. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу окружности.



Доказательство. Пусть угол *ABC* вписан в окружность с центром в точке *O*. Рассмотрим случай, когда одна из сторон угла, например *AB*, проходит через центр *O* окружности. Треугольник *BOC* - равнобедренный, следовательно, углы *B* и *C* равны. Угол *AOC* – внешний угол треугольника *BOC*, следовательно, он равен сумме углов *B* и *C*. Поэтому угол *ABC* равен половине угла *AOC*.

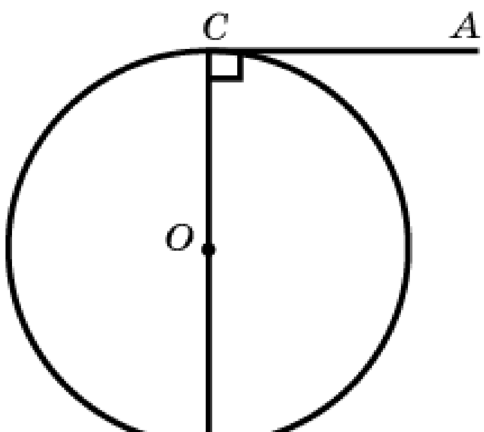


В случае, если центр *O* окружности лежит внутри угла *ABC*, проведем диаметр *BD* и рассмотрим углы *ABD* и *DBC*. По доказанному

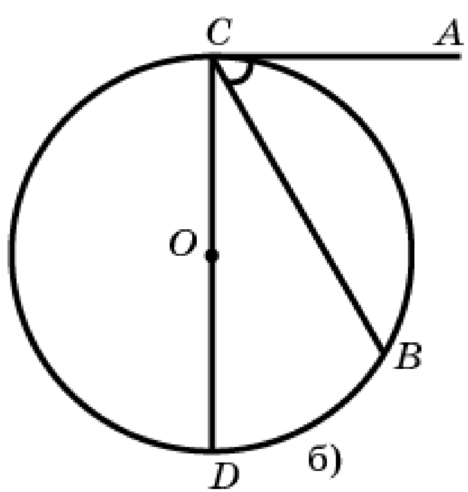
Следовательно,

Самостоятельно рассмотрите случай, когда центр *O* лежит вне угла *ABC*.

Теорема 2. Угол между касательной к окружности и хордой, проведенной через точку касания, измеряется половиной дуги окружности, заключенной внутри этого угла.



а)

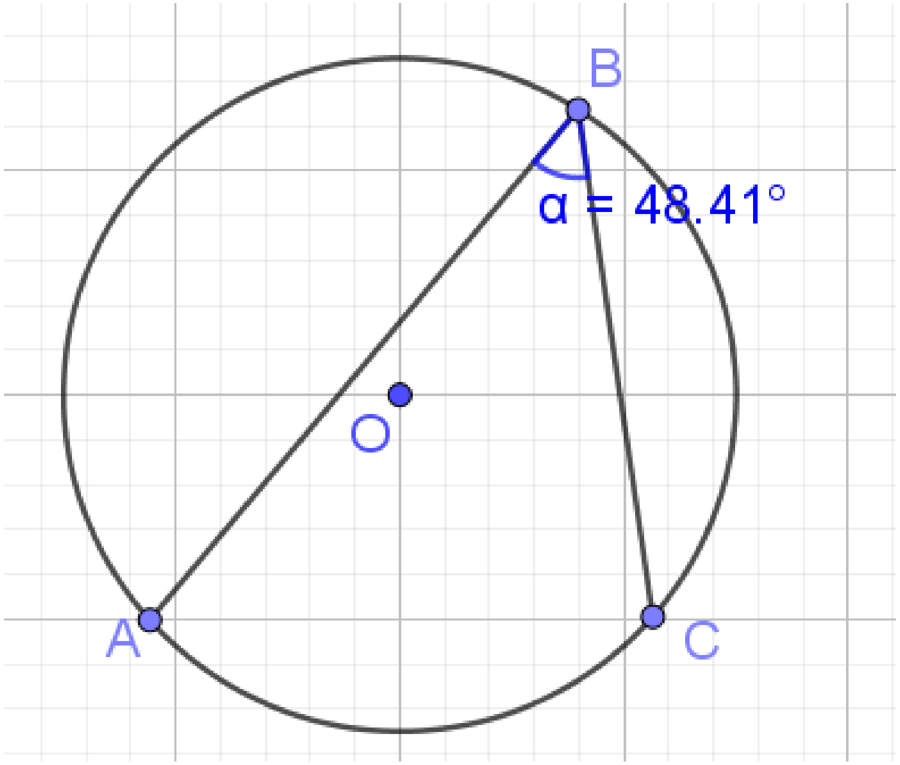


б)

Доказательство. Пусть угол ACB образован касательной AC и хордой BC окружности. Если этот угол – прямой, то BC – диаметр окружности и, следовательно, угол ACB измеряется половиной дуги полуокружности, заключенной внутри этого угла. Если угол ACB – острый, то проведем диаметр CD. Имеем ACB = ACD – BCD. Угол ACD измеряется половиной дуги CBD окружности. Угол BCD измеряется половиной дуги BD окружности. Следовательно, их разность (угол ACB) измеряется половиной дуги CB окружности, заключенной внутри этого угла.

Самостоятельно рассмотрите случай тупого угла.

Иллюстрация в программе GeoGebra



Упражнения

1. Чему равен вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности?

Ответ: 90^{o}.

2. Чему равен острый вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности?

Ответ: 30^{o}.

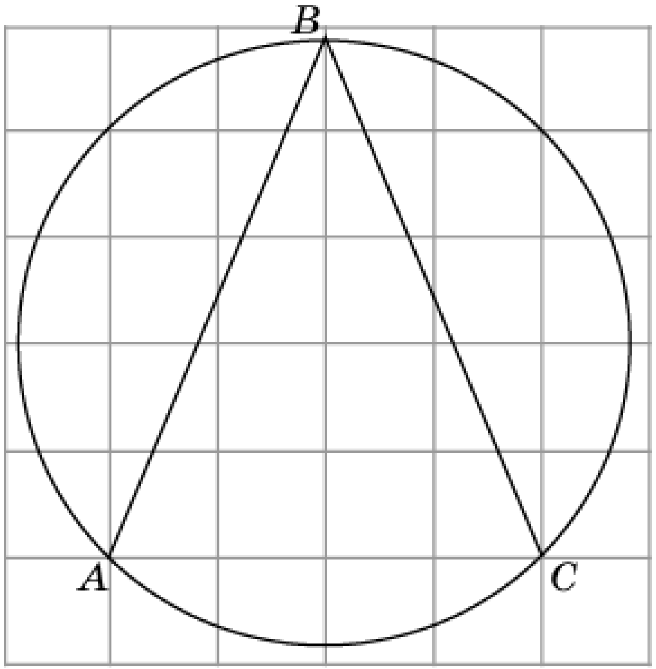
3. Чему равен тупой вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности?

Ответ: 150^{o}.

4. Найдите вписанный угол, опирающийся на дугу, которая составляет 20% окружности.

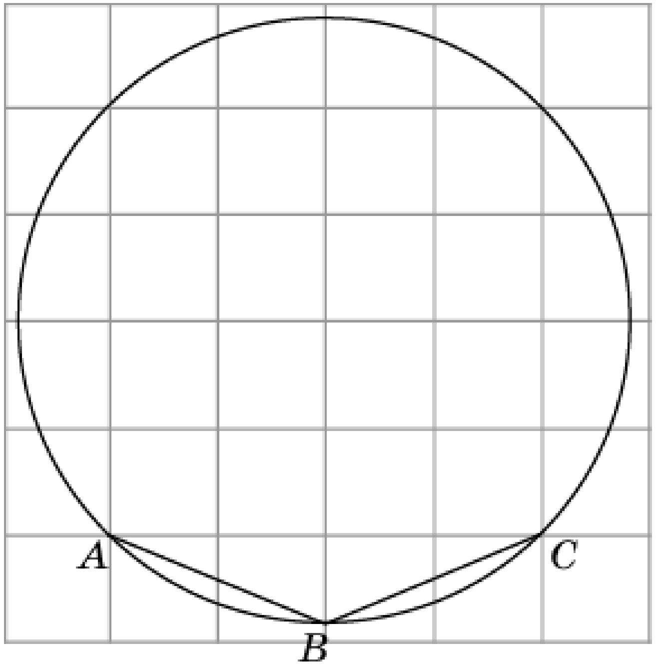
Ответ: 36^{o}.

5. Найдите величину угла *ABC*.



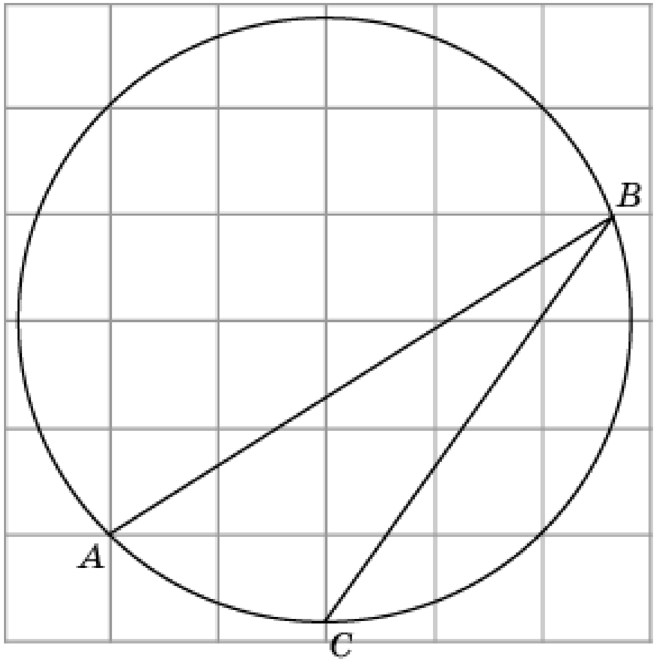
Ответ. 45°.

6. Найдите величину угла *ABC*.



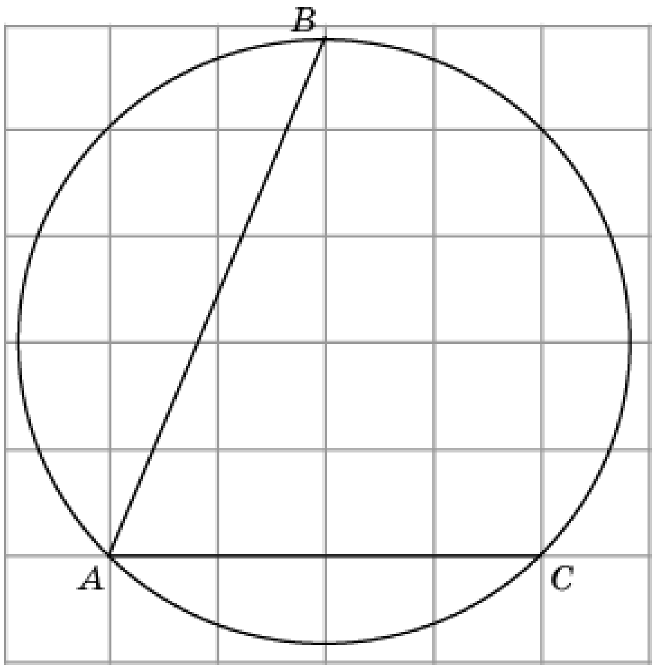
Ответ. 135°.

7. Найдите величину угла ABC.



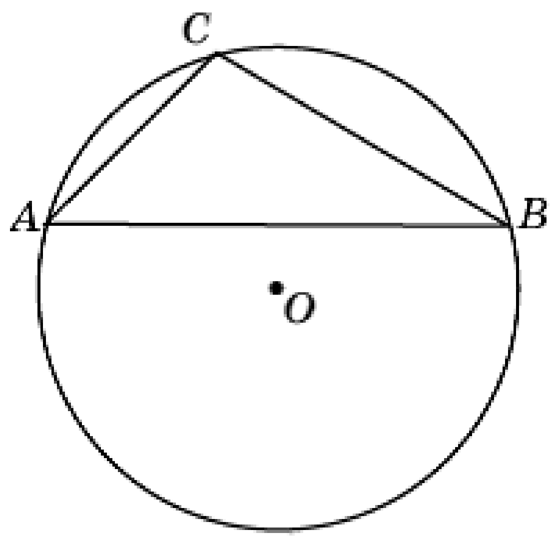
Ответ. 22,5°.

8. Найдите величину угла *BAC*.



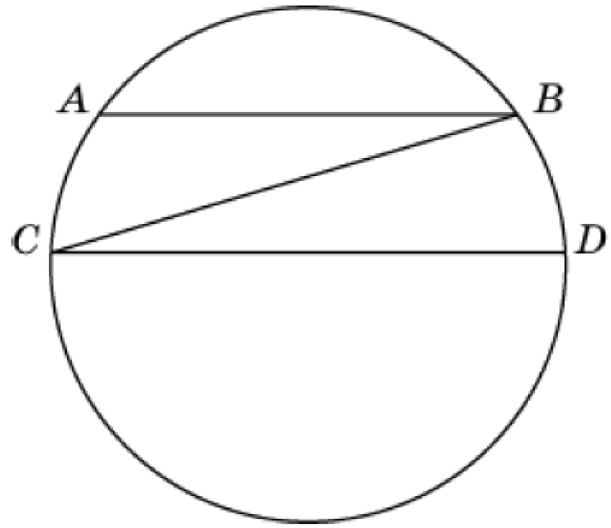
Ответ. 67,5°.

9. Хорда AB делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как 5 : 7. Под какими углами видна эта хорда из точек C меньшей дуги окружности?



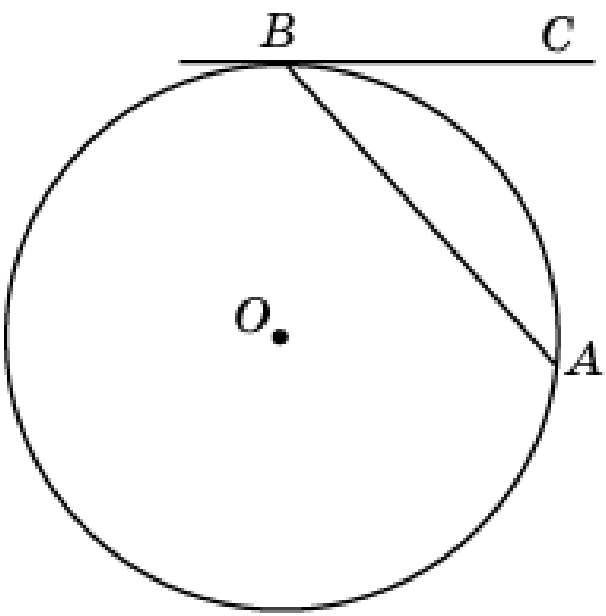
Ответ. 105°.

10. Докажите, что если хорды AB и CD окружности параллельны, то дуги AC и BD, заключенные между этими хордами, равны.



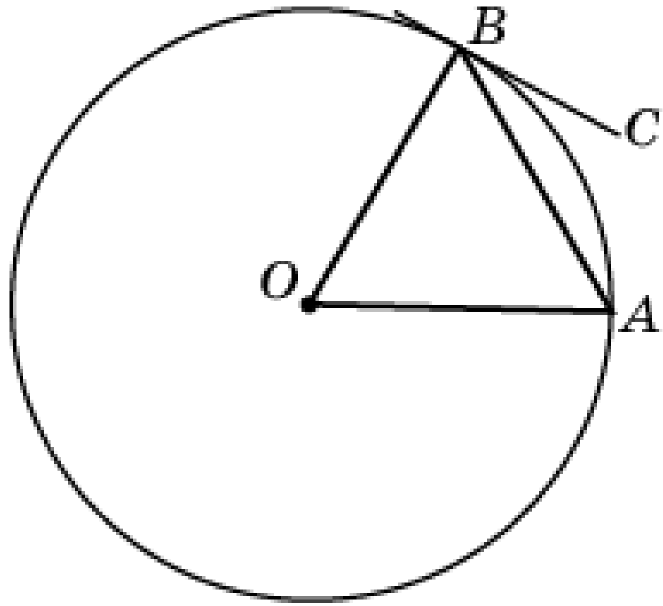
Решение. Проведем хорду BC. Углы ABC и DCB равны, как накрест лежащие углы при параллельных прямых. Они опираются на дуги AC и BD. Так как вписанный угол измеряется половиной, на которую он опирается, то и дуги AC и BD равны.

11. Хорда *AB* стягивает дугу окружности в 92^o. Найдите угол *ABC* между этой хордой и касательной к окружности, проведенной через точку *B*.



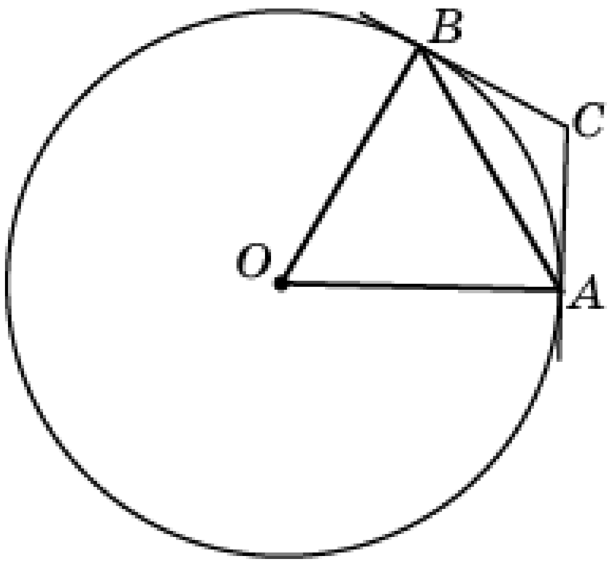
Ответ. 46^o.

12. Угол между хордой *AB* и касательной *BC* к окружности равен 32^o. Найдите градусную величину меньше дуги, стягиваемую хордой *AB*.



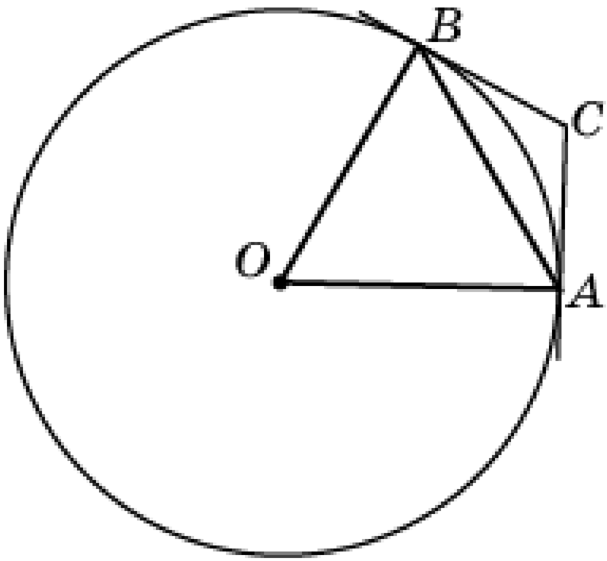
Ответ. 64^o.

13. Через концы A, B дуги окружности в 62^o проведены касательные AC и BC. Найдите угол ACB.



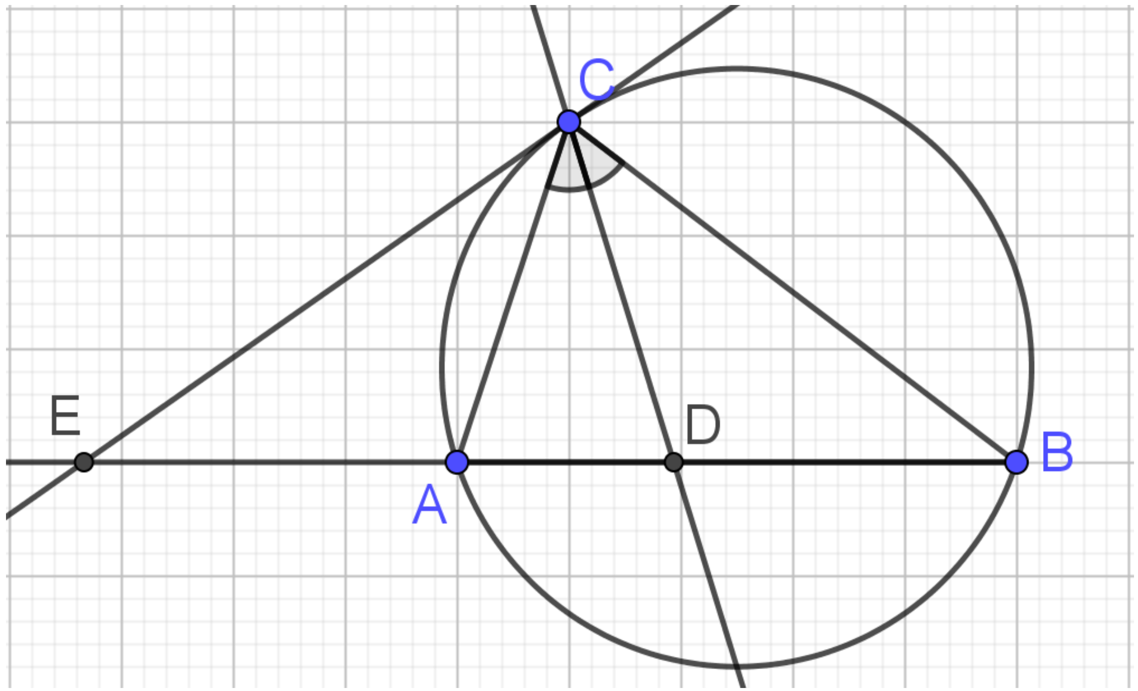
Ответ. 118^o.

14. Касательные CA и CB к окружности образуют угол ACB, равный 122°. Найдите градусную величину дуги AB, стягиваемую точками касания.



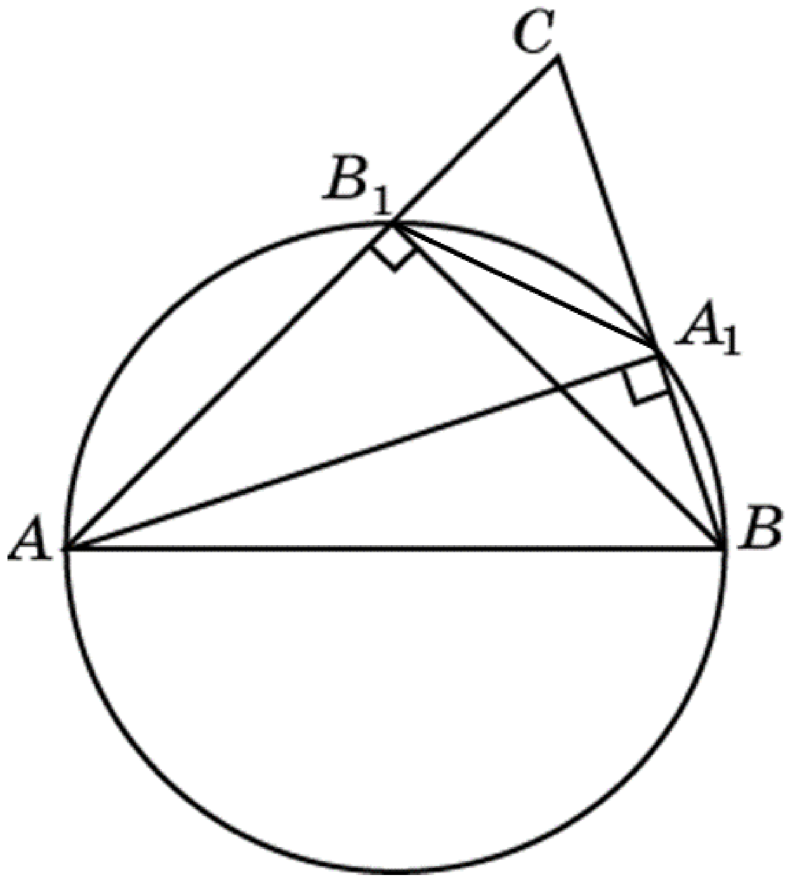
Ответ. 58°.

15. Через вершину C треугольника ABC проведена касательная к описанной окружности. Она пересекает прямую AB в точке E. CD – биссектриса. Докажите, что $EC = ED$.



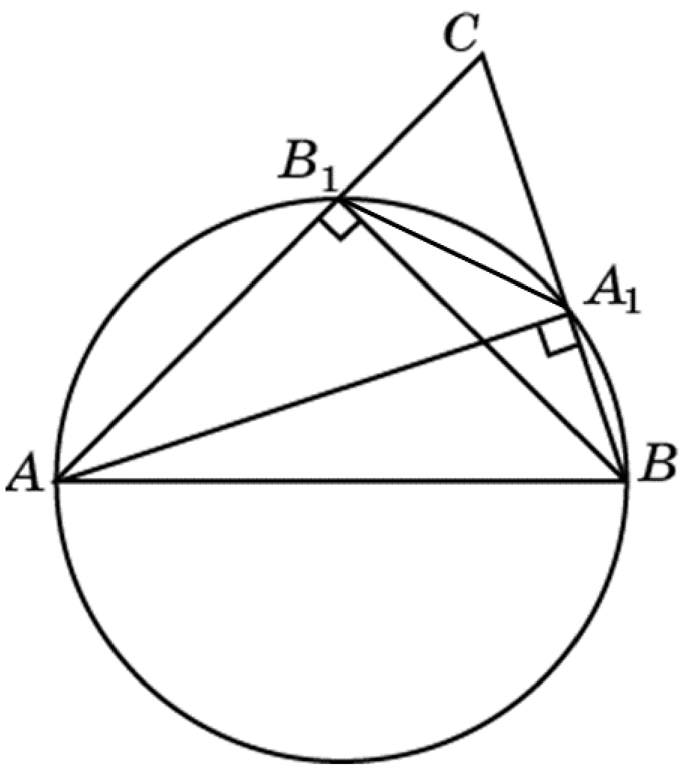
Решение. $\angle ECD = \angle ECA + \angle ACD = \angle EBC + \angle BCD = \angle EDC$. Следовательно, $EC = ED$.

16. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что углы AA_1B_1 и ABB_1 равны.



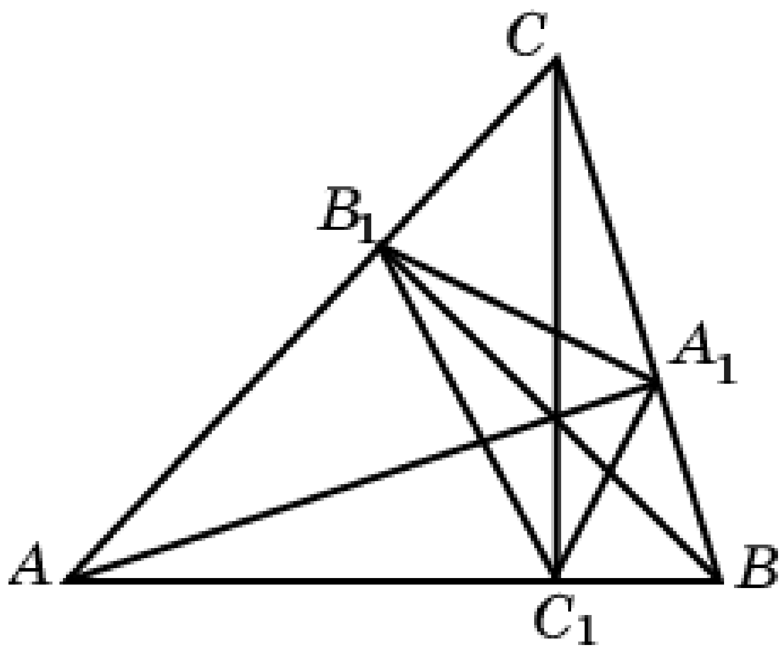
Решение. Окружность с диаметром AB пройдет через точки A_1 и B_1. Вписанные углы AA_1B_1 и ABB_1 опираются на одну дугу AB_1. Следовательно, они равны.

17. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что углы BAC и B_1A_1C равны.

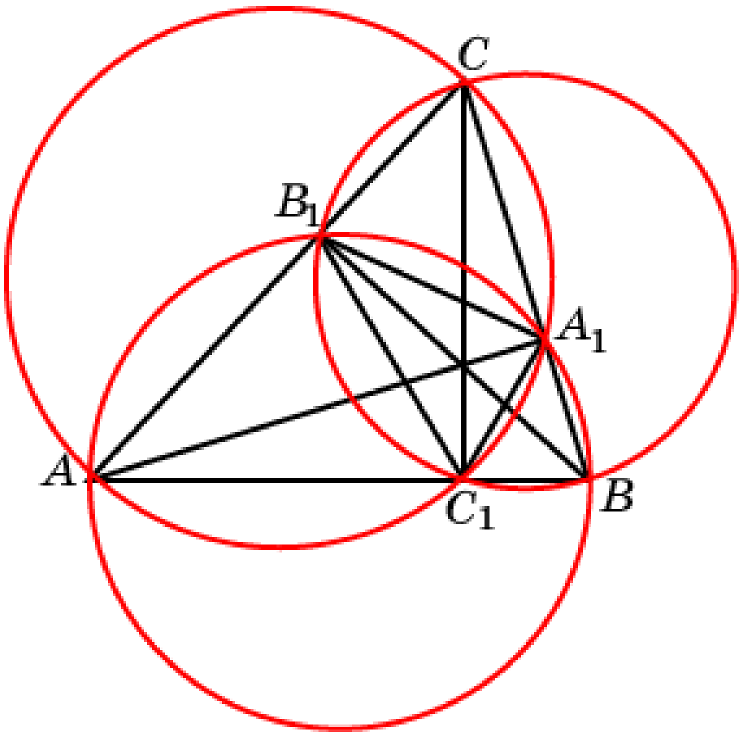


Решение. Угол BAC равен 90° минус угол ABB_1. Угол B_1A_1C равен 90° минус угол AA_1B_1. Так как углы AA_1B_1 и ABB_1 равны (см. предыдущую задачу), то равны и углы BAC и B_1A_1C.

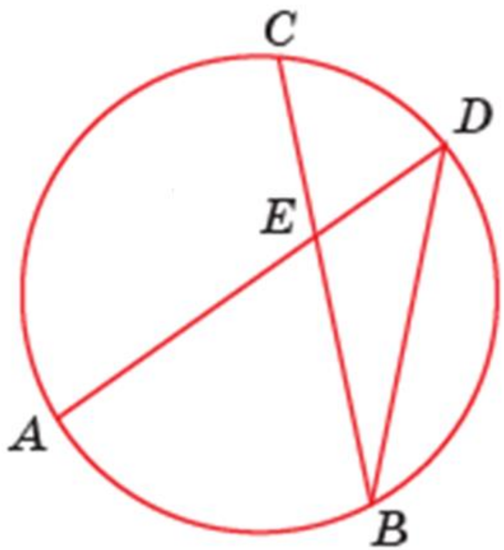
18. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты. Докажите, что биссектрисы треугольника, вершинами которого являются основания этих высот, лежат на высотах треугольника ABC.



Решение. Докажем, что угол A_1C_1C равен углу B_1C_1C. На сторонах треугольника ABC, как на диаметрах, опишем окружности. Они пройдут через точки A_1, B_1, C_1. Угол A_1C_1C равен углу A_1AC как углы, опирающиеся на одну дугу A_1C. Угол A_1AC равен углу B_1BC. Угол B_1BC равен углу B_1C_1C, как углы, опирающиеся на одну дугу B_1C. Следовательно, угол A_1C_1C равен углу B_1C_1C.



Теорема 1. Угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой дуг, на которые опираются данный угол и вертикальный с ним угол.

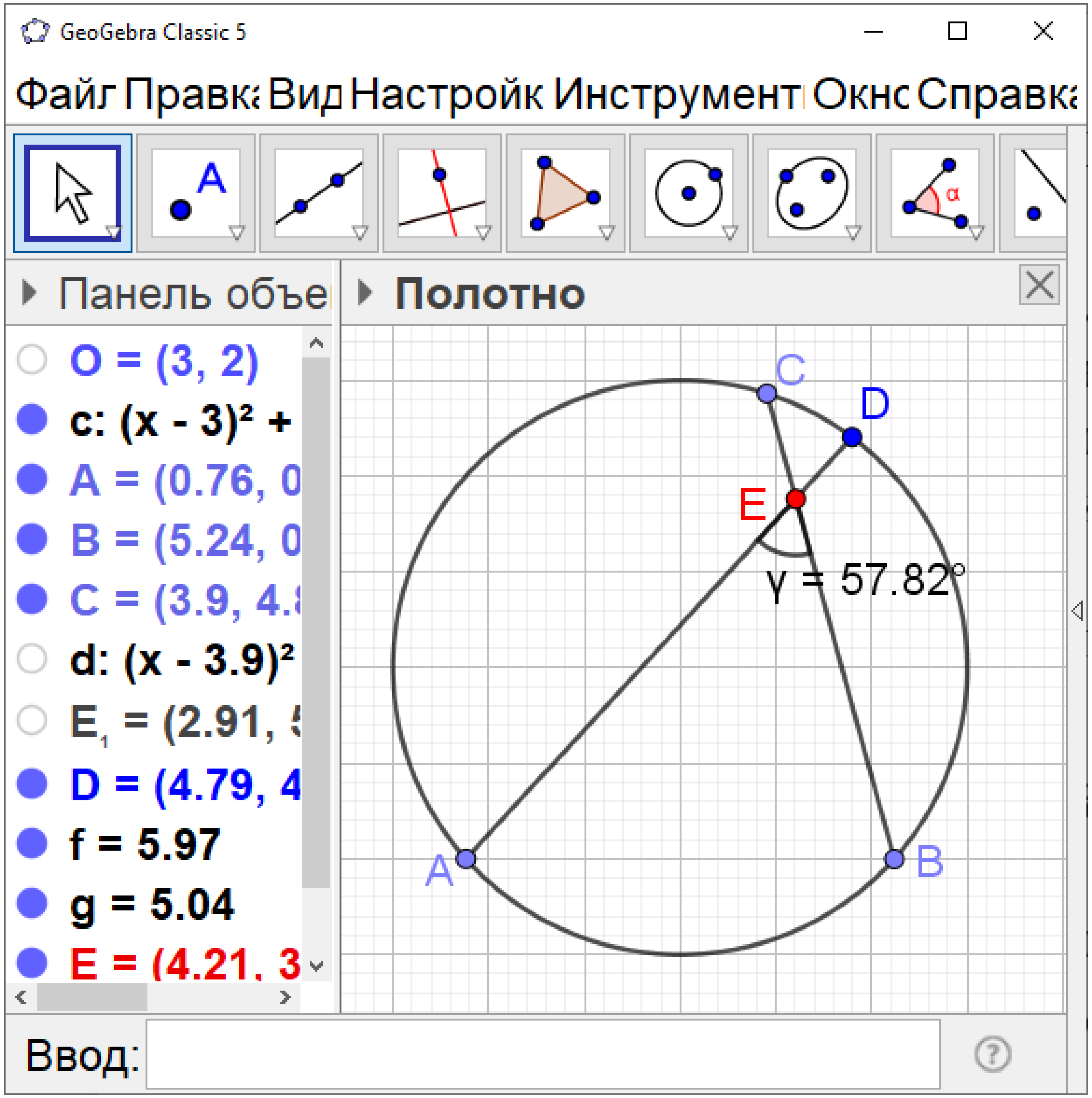


Доказательство. Пусть вершина E угла находится внутри окружности, а его стороны пересекают эту окружность в точках A и B. Обозначим D, C – точки пересечения с окружностью сторон вертикального с ним угла.

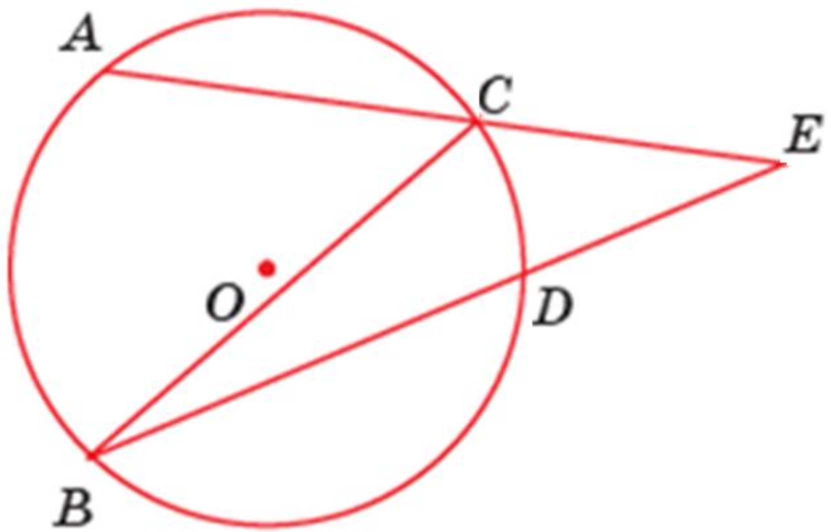
Проведём хорду BD. Угол AEB является внешним углом треугольника BED. Следовательно, $\angle AEB = \angle EDB + \angle EBD$. Вписанные углы с вершинами D и B измеряются половинами дуг $\smile{AB}$ и $\smile{CD}$ соответственно. Следовательно, $\angle AEB = \frac{1}{2}(\smile{AB} + \smile{CD})$.

Следствие 1. Угол с вершиной внутри круга больше половины дуги, на которую он опирается.

Иллюстрация в программе GeoGebra



Теорема 2. Угол с вершиной вне круга, стороны которого пересекают окружность, измеряется полуразностью дуг окружности, заключенных внутри этого угла.

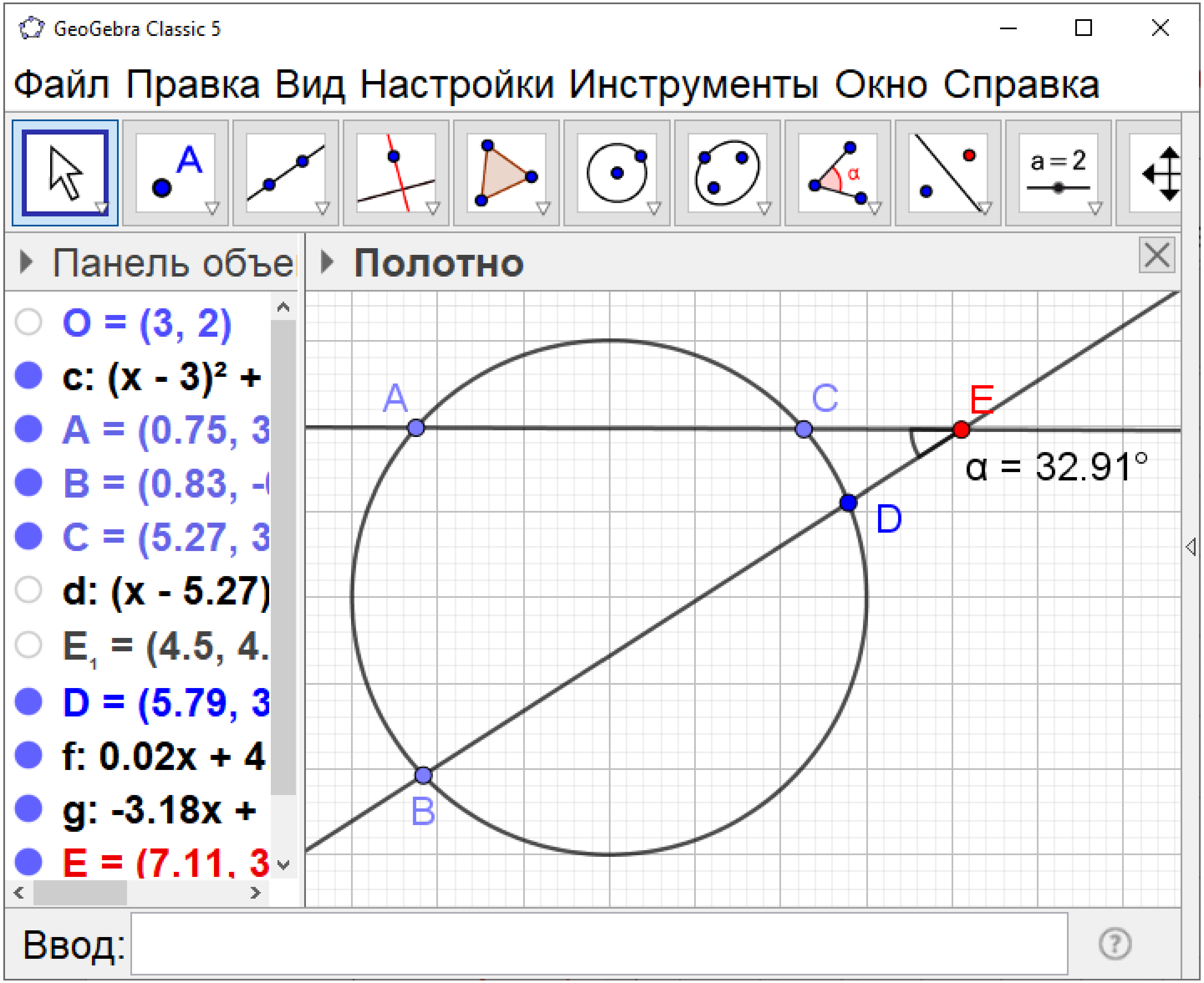


Доказательство. Пусть вершина E угла находится вне окружности, а его стороны пересекают эту окружность соответственно в точках A, C и B, B. Проведём хорду BC. Угол ACB является внешним углом треугольника BCE.

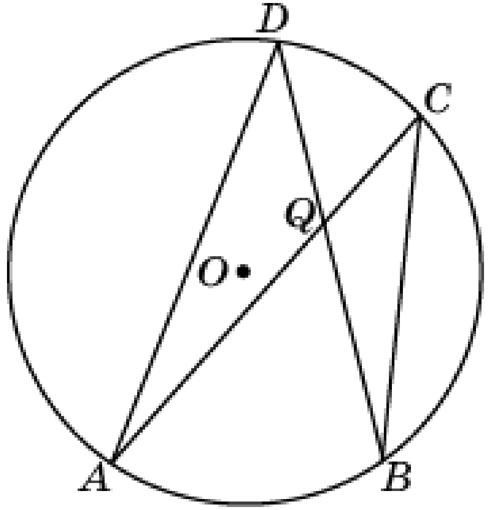
Следовательно, $\angle AEB = \angle ACB - \angle CBE$. Вписанные углы с вершинами C и B измеряются половинами дуг соответственно $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{CD}$. Следовательно, $\angle AEB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD})$.

Следствие 2. Угол с вершиной вне круга меньше половины большей дуги, на которую он опирается.

Иллюстрация в программе GeoGebra

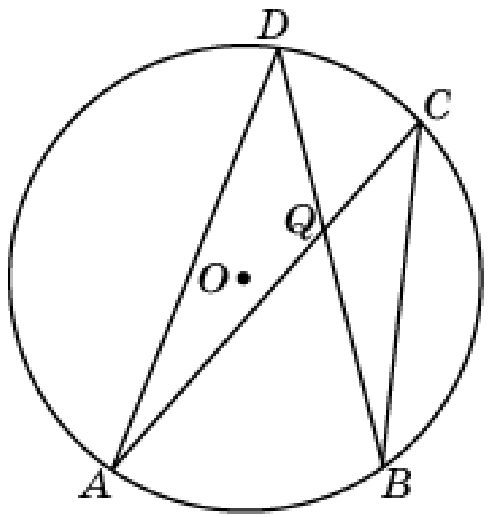


1. Вписанные углы *ACB* и *CAD* равны соответственно 36° и 20°. Найдите угол *AQB*, образованный пересекающимися хордами *AC* и *BD*.



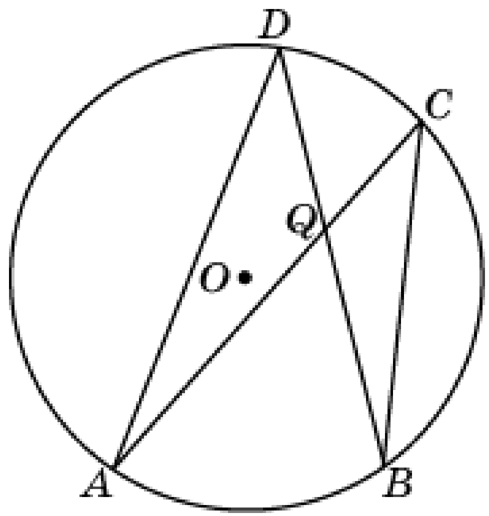
Ответ. 56°.

2. Угол AQB, образованный пересекающимися хордами AC и BD окружности, равен 54°. Вписанный угол ACB равен 34°. Найдите вписанный угол CAD.



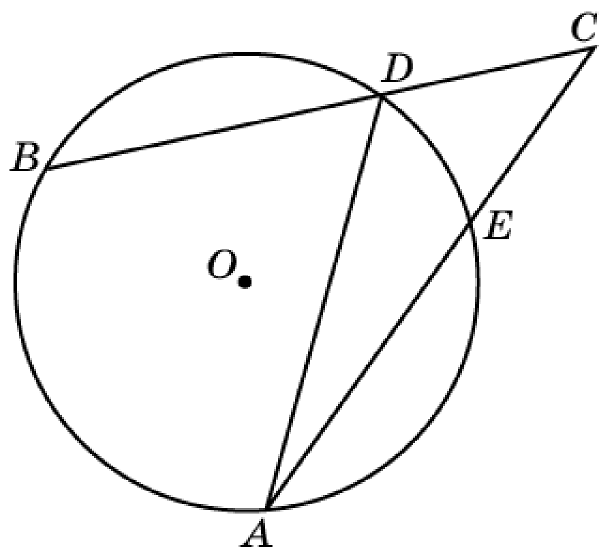
Ответ. 20°.

3. Дуги AB и CD окружности составляют соответственно 72^o и 38^o. Найдите угол AQB, образованный пересекающимися хордами AC и BD.



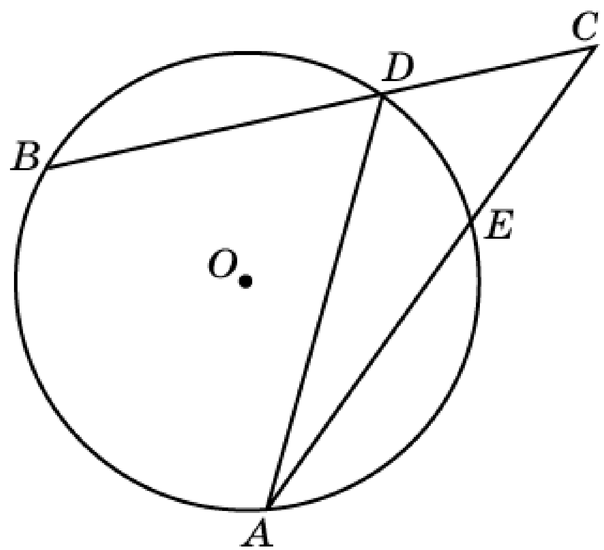
Ответ. 55^o.

4. Найдите угол *ACB*, если вписанные углы *ADB* и *DAE* опираются на дуги окружности, градусные величины которых равны соответственно 118° и 38°.



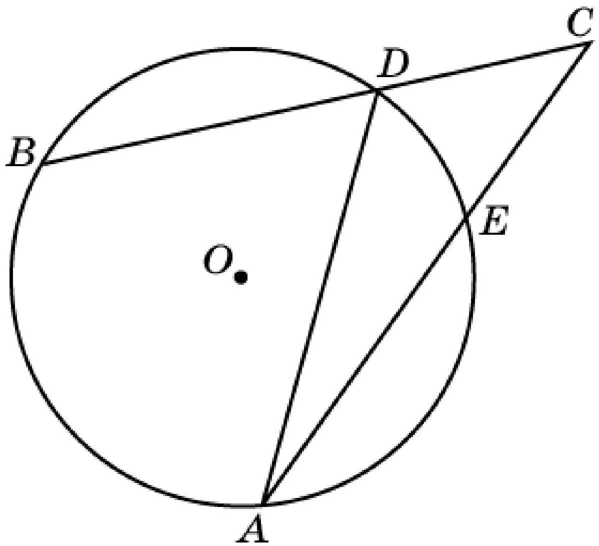
Ответ. 40°.

5. Угол ACB равен 42^{o}. Градусная величина дуги AB окружности равна 124^{o}. Найдите угол DAE.



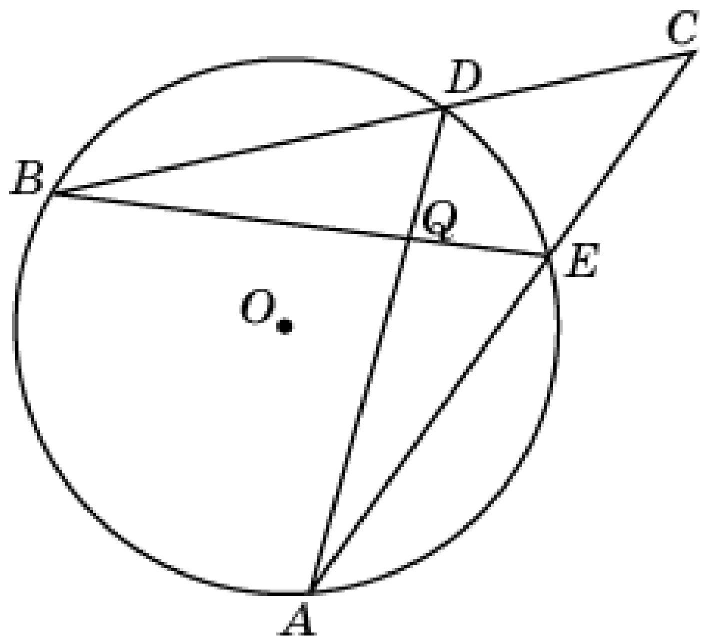
Ответ. 20^{o}.

6. Угол ACB равен 42^o. Градусная величина дуги DE окружности равна 38^o. Найдите угол ADB.



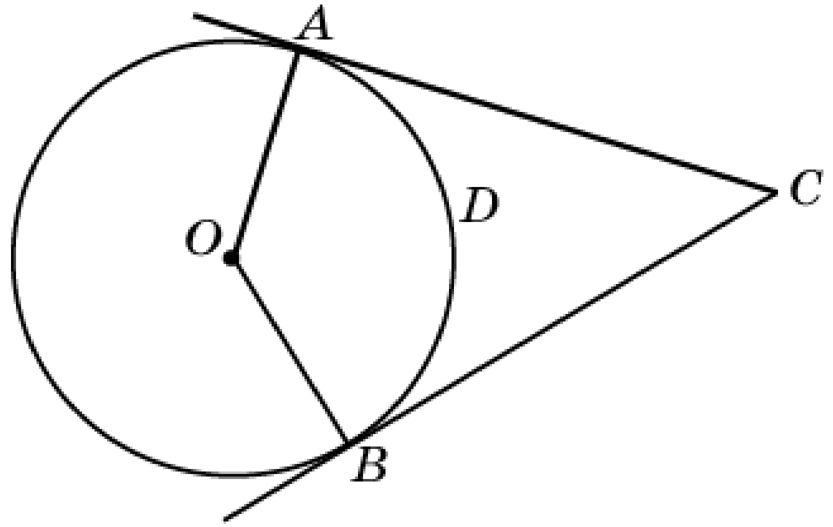
Ответ. 61^o.

7. Найдите угол ACB, если вписанный угол ADB равен 62^{o}, а угол AQB равен 80^{o}.



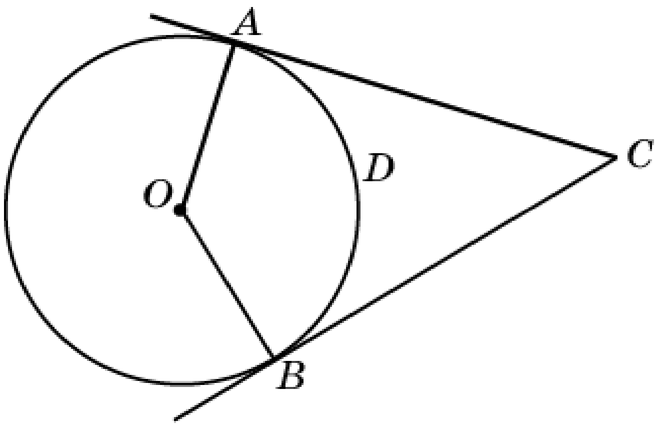
Ответ. 44^{o}.

8. Найдите угол ACB, если его стороны CA и CB касаются окружности, а дуга ADB окружности, заключенная внутри этого угла, равна 132^o.



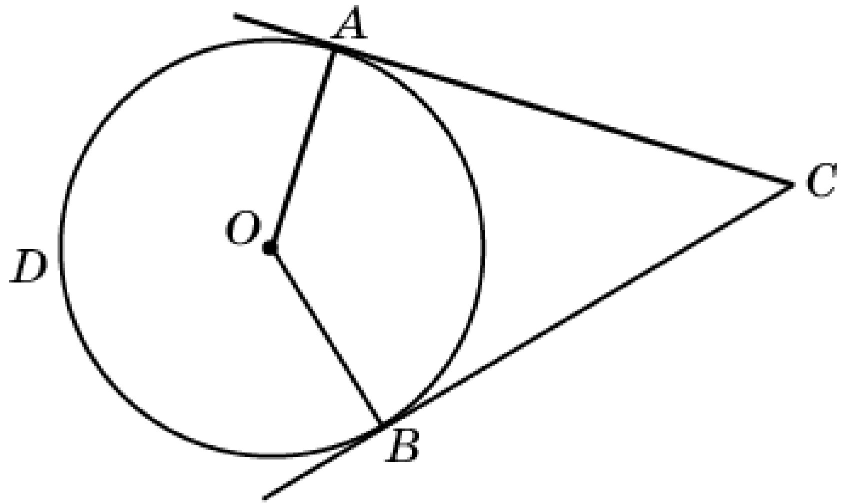
Ответ. 48^o.

9. Угол ACB равен 52^{o}. Его стороны CA и CB касаются окружности. Найдите градусную величину дуги ADB окружности, заключенной внутри этого угла.



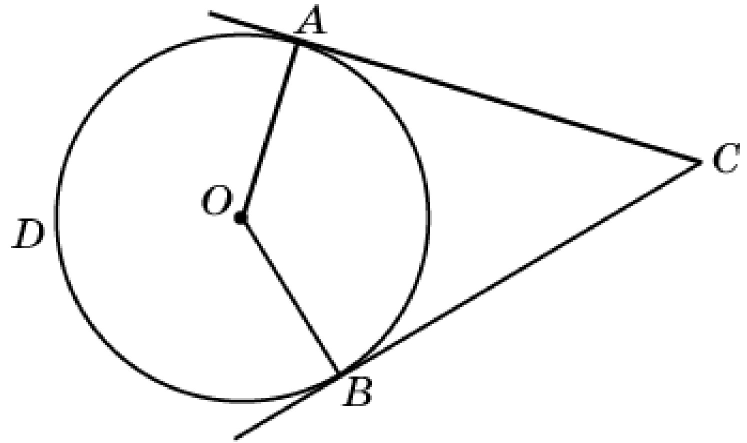
Ответ. 128^{o}.

10. Найдите угол ACB, если его стороны CA и CB касаются окружности, а дуга ADB окружности, заключенная внутри этого угла, равна 232^o.



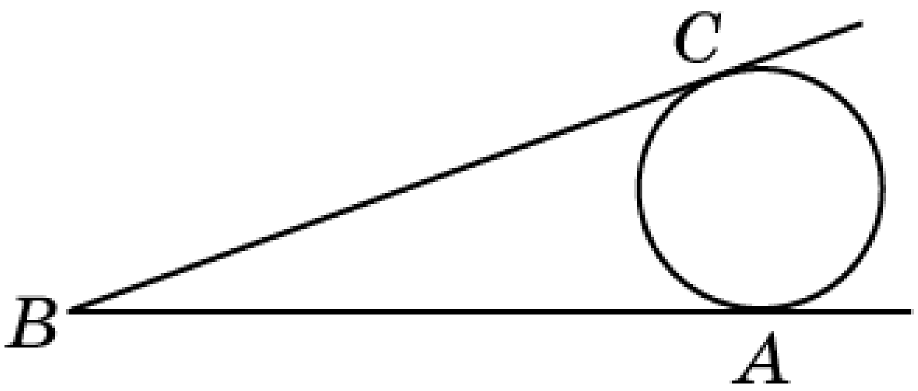
Ответ. 52^o.

11. Угол ACB равен 48^o. Его стороны CA и CB касаются окружности. Найдите градусную величину дуги ADB окружности, заключенной внутри этого угла.



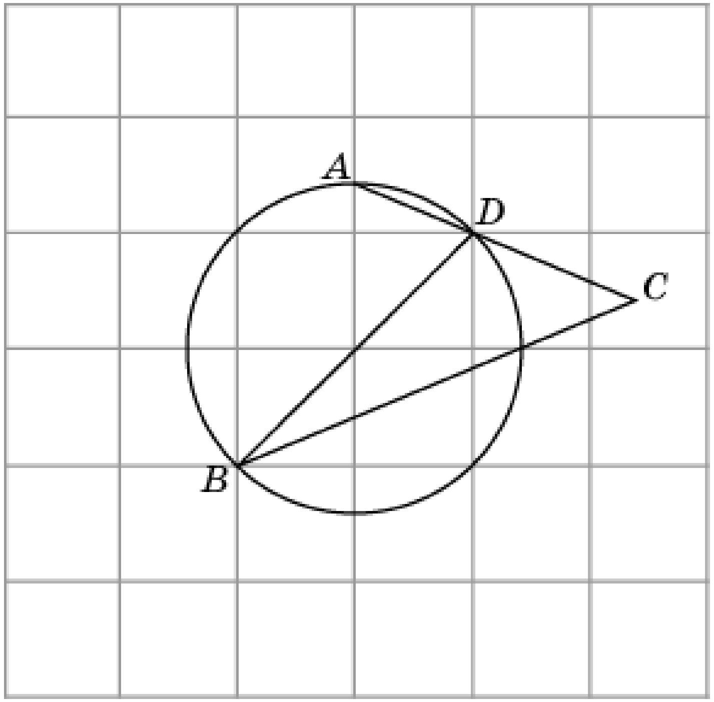
Ответ. 242^o.

12. В угол ABC вписана окружность. Точки касания делят окружность на дуги, градусные величины которых относятся как 5:4. Найдите величину угла ABC.



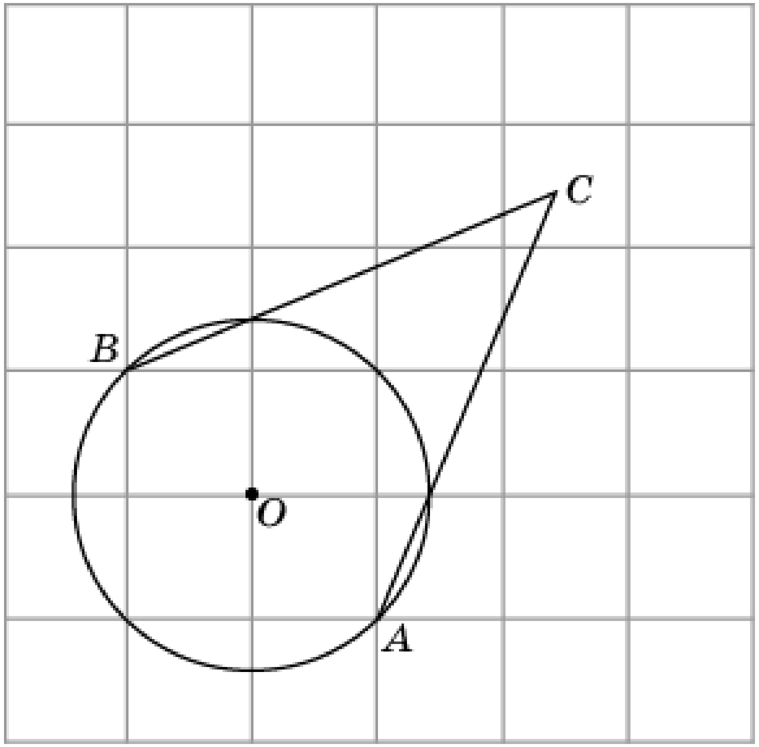
Ответ. 20^{o}.

13. Найдите величину угла ACB.



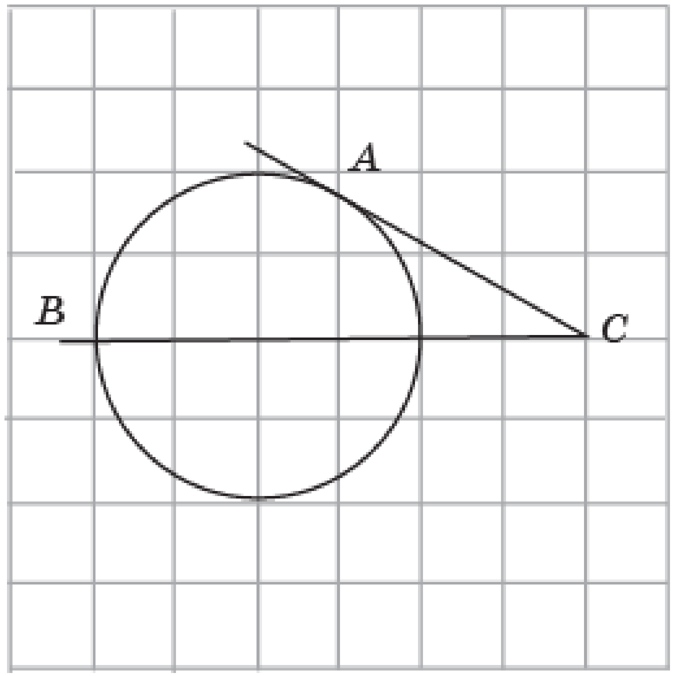
Ответ. 45^{o}.

14. Найдите величину угла ACB.



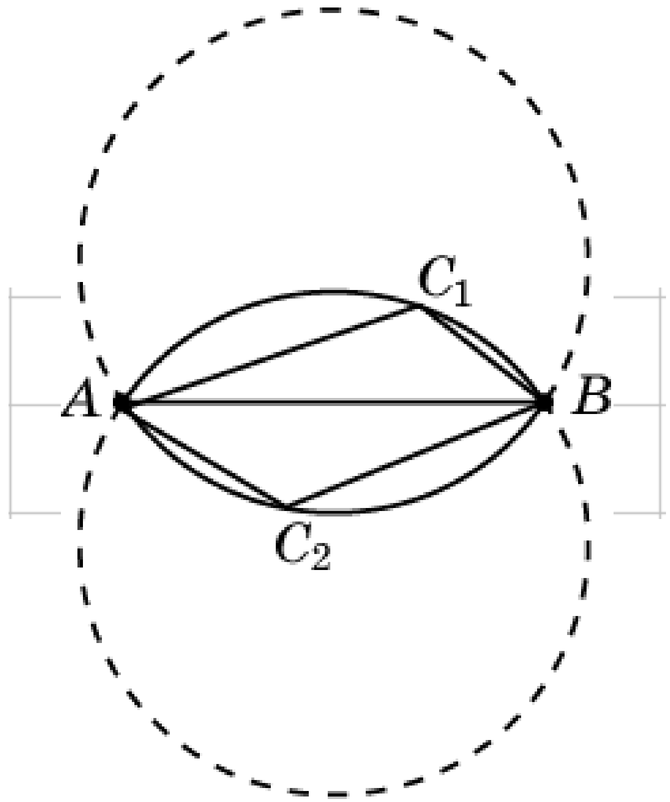
Ответ. 45^{o}.

15. Найдите величину угла ACB.



Ответ: 30°.

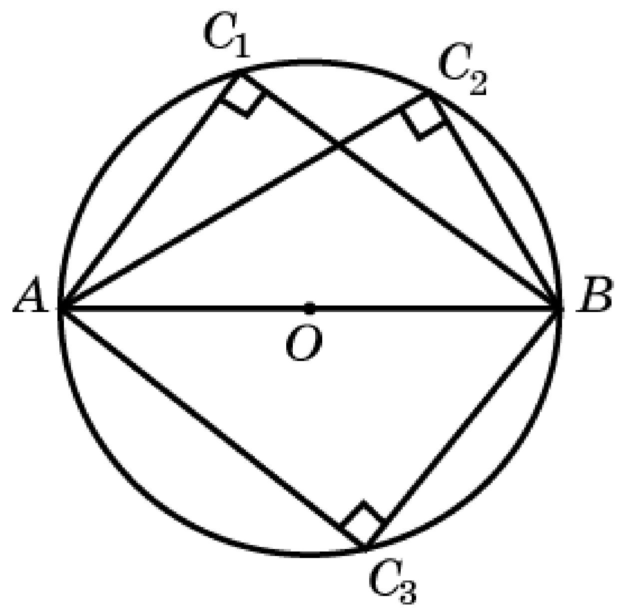
16. Найдите геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB виден под данным углом, т. е. таких точек C, для которых угол ACB равен данному углу.



Ответ: Дуги двух окружностей одинакового радиуса, опирающихся на отрезок AB, без точек A и B.

17. Найдите геометрическое место вершин C прямоугольных треугольников ABC с данной гипотенузой AB.

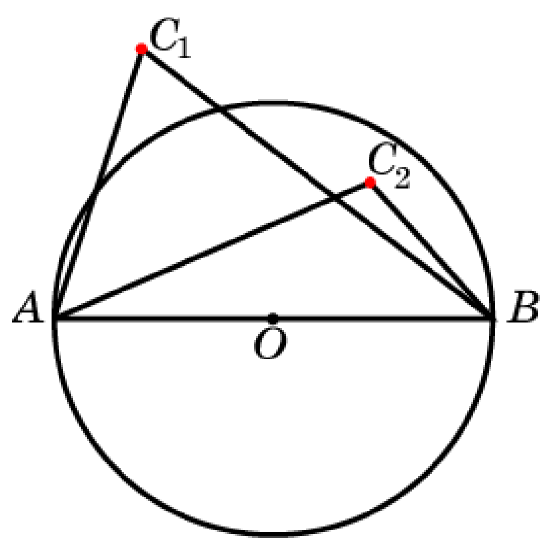
Ответ: Окружность с диаметром AB, за исключением точек A и B.



18. Для данных точек A и B найдите геометрическое место точек C, для которых угол ACB: а) острый; б) тупой.

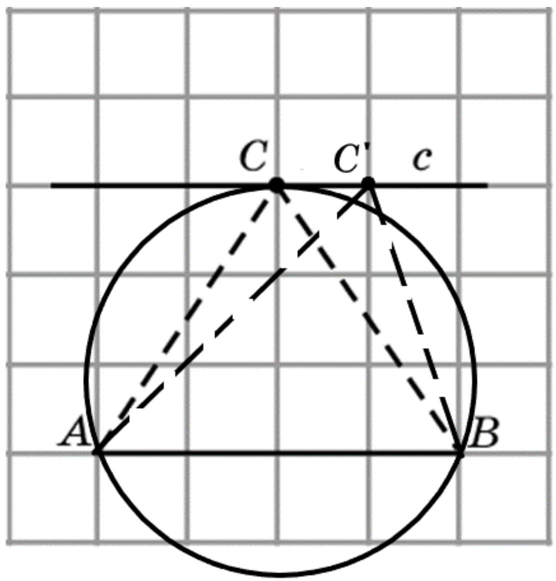
Ответ: а) ГМТ, лежащих вне окружности с диаметром AB и не принадлежащих прямой AB;

б) ГМТ, лежащих внутри окружности с диаметром AB и не принадлежащих отрезку AB.



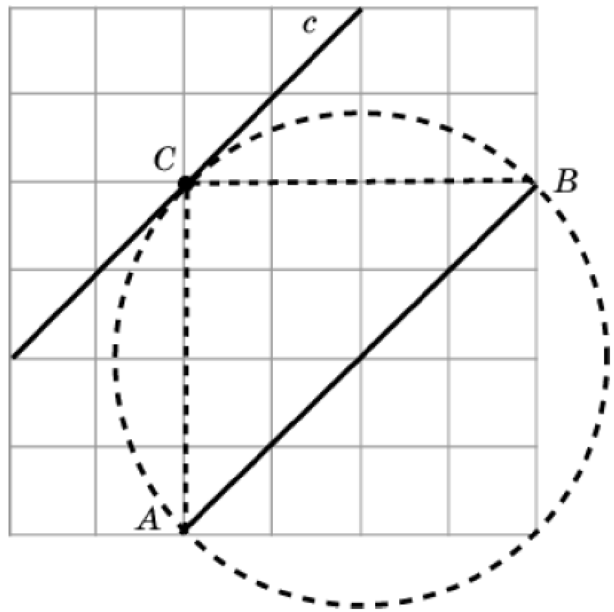
19. На прямой c отметьте точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

Ответ.



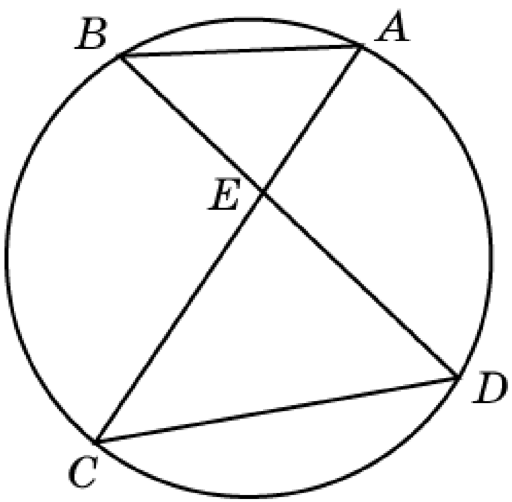
20. На прямой c отметьте точку C, из которой отрезок AB виден под наибольшим углом.

Ответ.



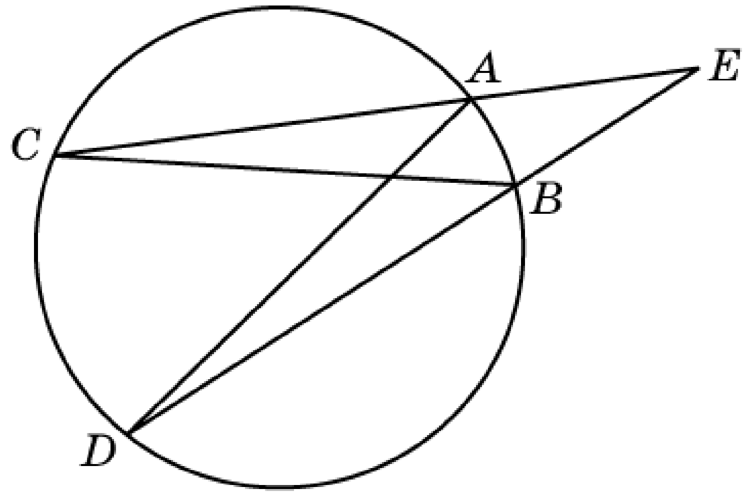
III. Отрезки, связанные с окружностью

Теорема 1. Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды, т.е. выполняется равенство $AE \cdot EC = BE \cdot ED$.



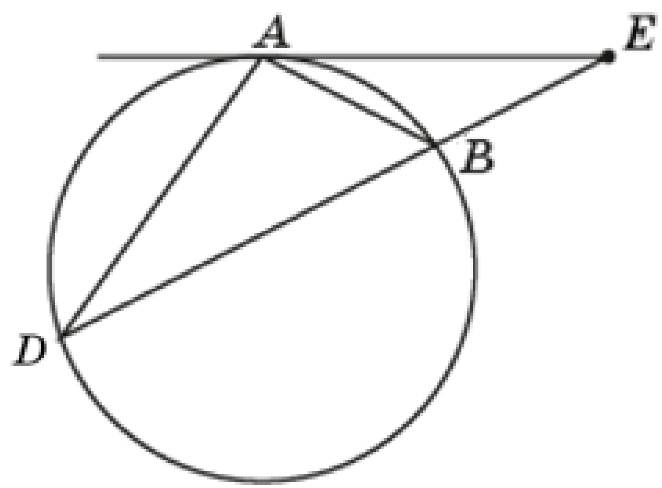
Доказательство. Треугольники ABE и DCE подобны, так как $\angle A = \angle D, \angle B = \angle C$. Следовательно, $\frac{AE}{ED} = \frac{BE}{EC}$. Значит, выполняется равенство $AE \cdot EC = BE \cdot ED$.

Теорема 2. Если из точки, лежащей вне окружности, проведены две секущие, то произведение одной секущей на её внешнюю часть равно произведению другой секущей на её внешнюю часть, т. е. выполняется равенство $EA \cdot EC = EB \cdot ED$.



Доказательство. Треугольники ADE и BCE подобны, так как $\angle D = \angle C, \angle E$ – общий. Следовательно, $\frac{EA}{EB} = \frac{ED}{EC}$. Значит, выполняется равенство $EA \cdot EC = EB \cdot ED$.

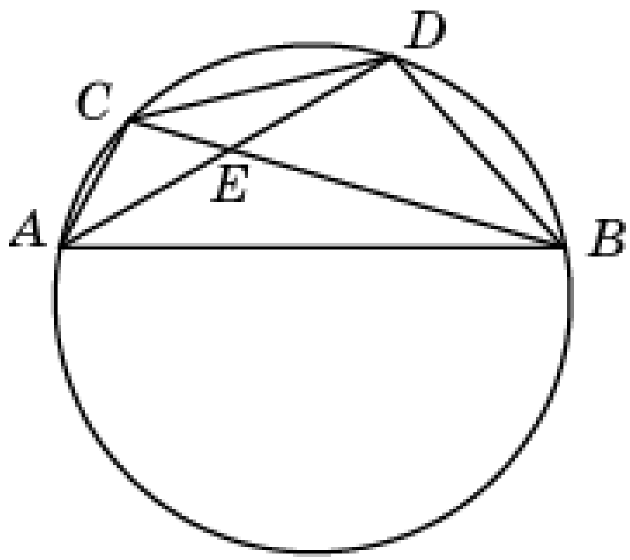
Теорема 3. Если из точки, лежащей вне окружности, проведены касательная и секущая, то квадрат длины отрезка касательной равен произведению секущей на её внешнюю часть, т.е. выполняется равенство $AE^2 = EB \cdot ED$.



Доказательство. Треугольники ABE и DAE подобны, так как $\angle A = \angle D, \angle E$ – общий. Следовательно, $\frac{AE}{ED} = \frac{EB}{AE}$. Значит, выполняется равенство $AE^2 = EB \cdot ED$.

Упражнения

1. На рисунке $AE = 3$, $BE = 6$, $CE = 2$. Найдите DE.
2. На рисунке $CE = 2$, $DE = 5$, $AE = 4$. Найдите BE.

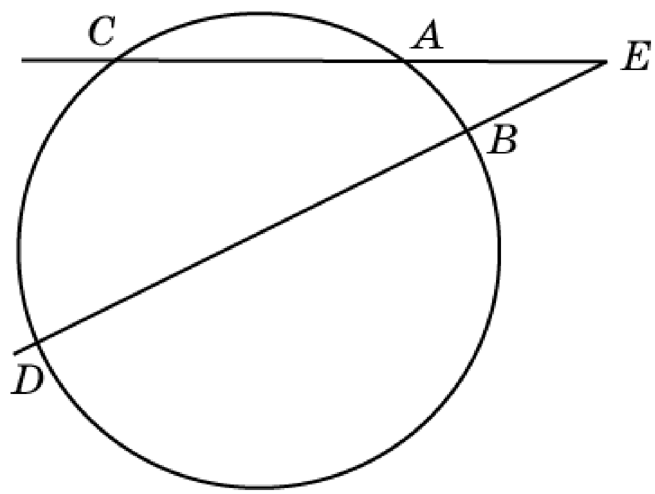


Ответ: 1. 4;

Ответ: 2. 10.

3. На рисунке $AE = 9$, $BE = 8$, $CE = 24$. Найдите DE.

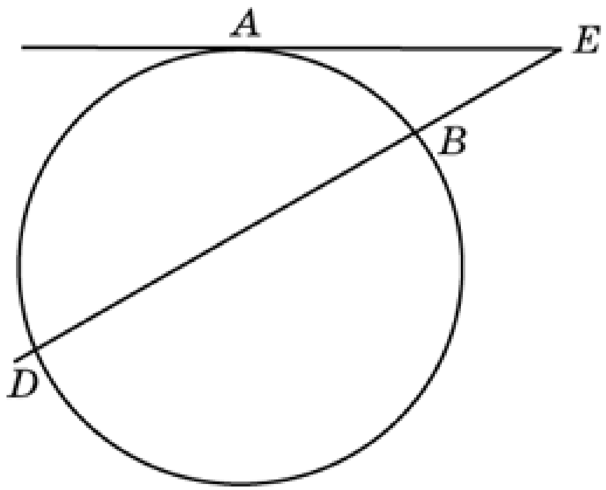
4. На рисунке $CE = 15$, $DE = 18$, $AE = 6$. Найдите BE.



Ответ: 3. 27;

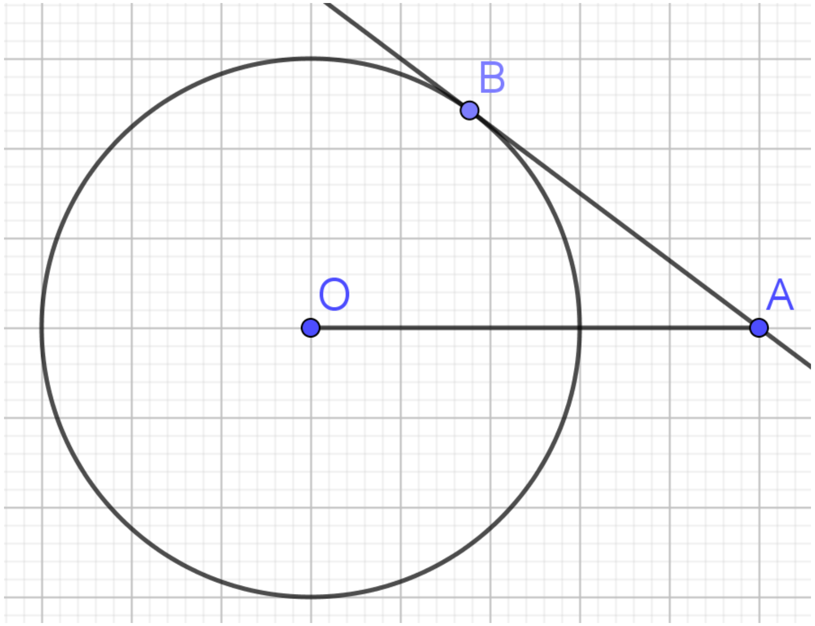
Ответ: 4. 5.

5. На рисунке $AE = 6$, $DE = 24$. Найдите BE.



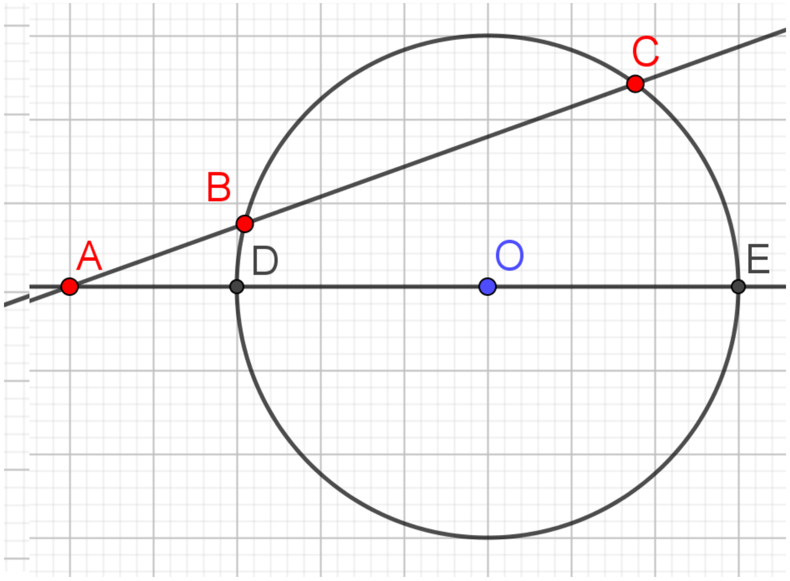
Ответ: 1,5.

6. Радиус окружности равен 3. Точка A удалена от центра этой окружности на расстояние, равно 5. Найдите длину отрезка AB касательной, проведённой к этой окружности из точки A



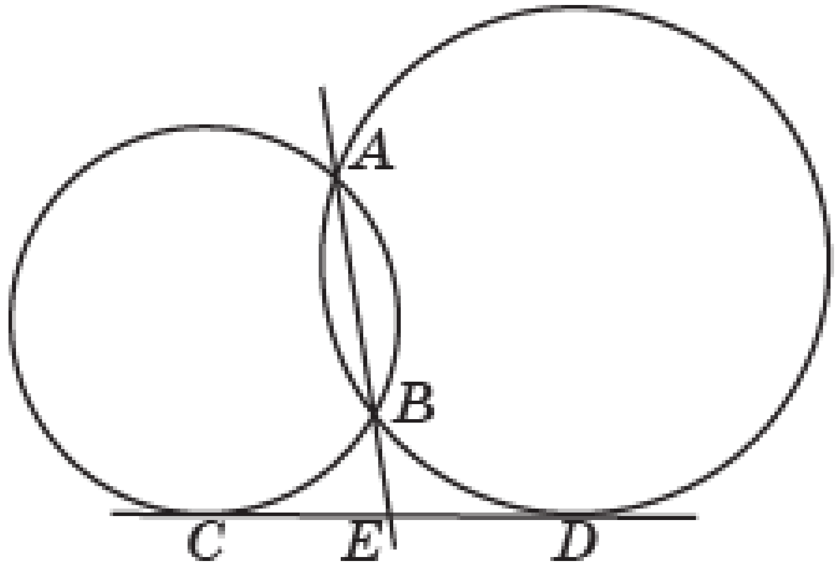
Ответ. 4.

7. Радиус окружности равен 3. Точка A удалена от центра окружности на расстояние, равное 5. Через точку A проведена прямая, пересекающая окружность в точках B и C. Найдите $AB \cdot AC$.



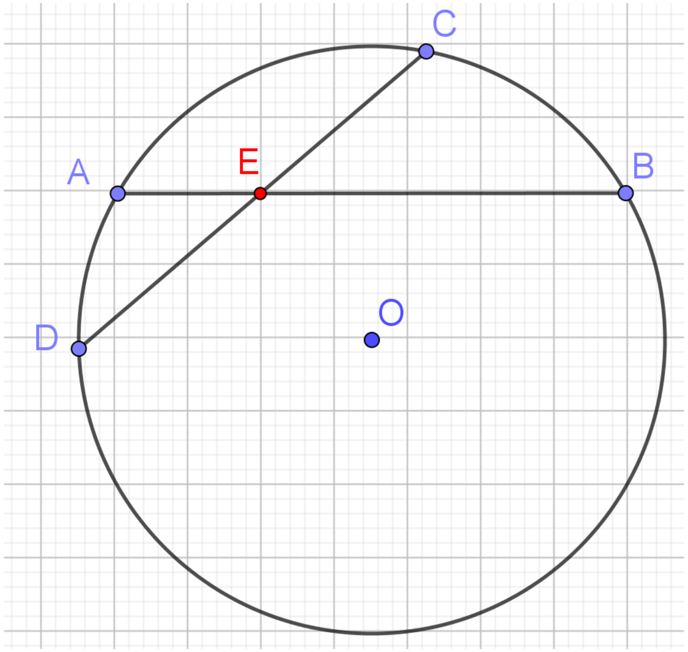
Решение. Через точку A и центр O окружности проведём прямую, пересекающую окружность в точках D и E. Тогда $AB \cdot AC = AD \cdot AE = 2 \cdot 8 = 16$.

8. Докажите, что прямая, проходящая через точки A, B пересечения двух окружностей, делит пополам отрезок CD их общей касательной.



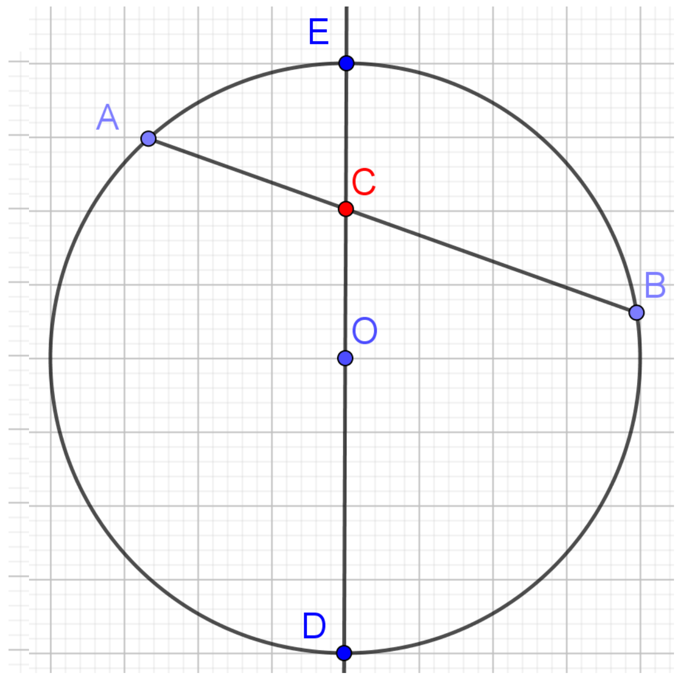
Решение. $CE^2 = AE \cdot BE = DE^2$. Следовательно, $CE = DE$.

9. Точка E внутри окружности делит хорду AB этой окружности на отрезки, равные 2 и 5. Через точку E проведена хорда CD, делящаяся точкой E пополам. Найдите длину хорды CD.



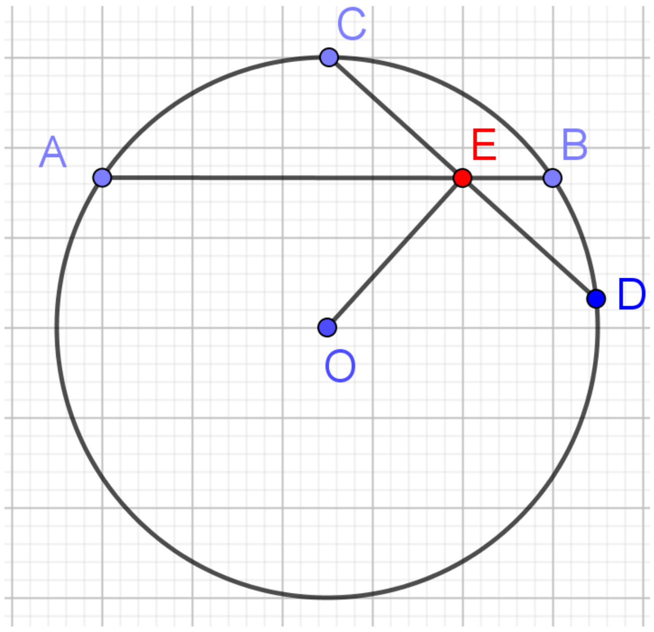
Ответ. $2\sqrt{10}$.

10. Точка C принадлежит хорде AB окружности радиусом 4. Найдите $AC \cdot BC$, если точка C удалена от центра окружности на расстояние, равное 2.



Решение. Через точку C проведём диаметр DE. Тогда $AC \cdot BC = DC \cdot CE = 12$.

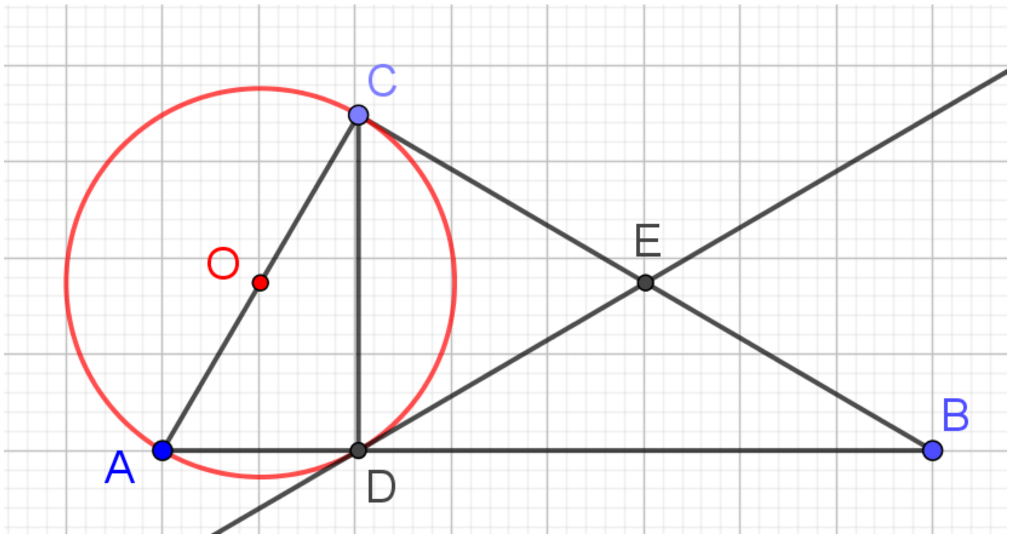
11. В окружности с центром O проведены хорды AB и CD, пересекающиеся в точке E, причём $AE = 4$, $EB = 1$, $CE = 2$. Найдите угол OEC.



Ответ: 90°.

Приведём пример задачи, которая предлагалась в этом году на Объединенной межвузовской математической олимпиаде (ОММО).

В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке D. Через точку D проведена касательная к окружности, которая пересекает катет BC в точке E. Найдите длину отрезка BE, если $AD = 2$, $DB = 6$.



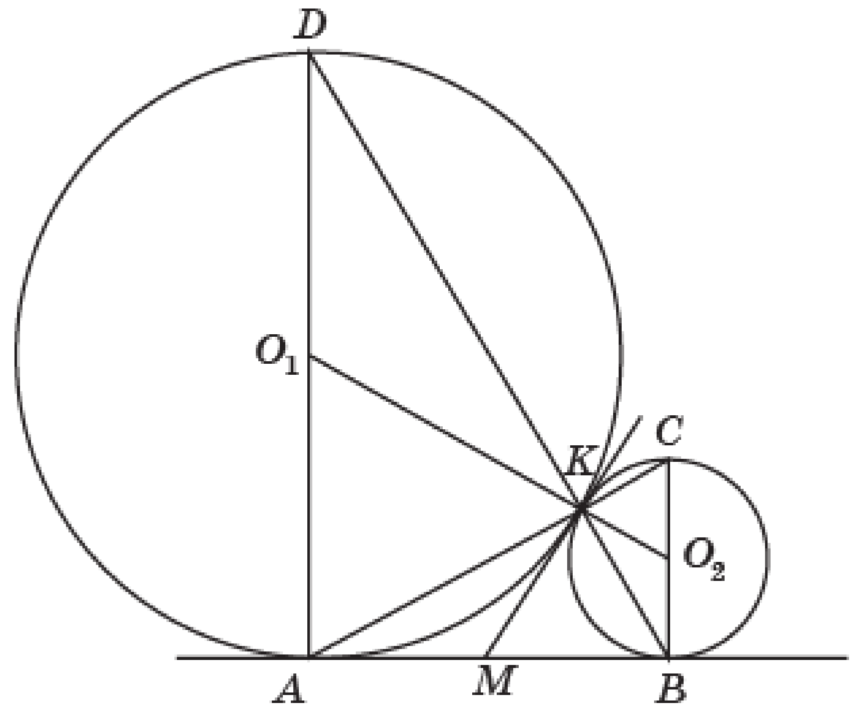
Решение. $BC = \sqrt{BA \cdot BD} = 4\sqrt{3}$, $EC = ED$. Следовательно, E – середина отрезка BC. Значит, $BE = 2\sqrt{3}$.

Приведём пример задачи из демоверсии ЕГЭ 2018 года.

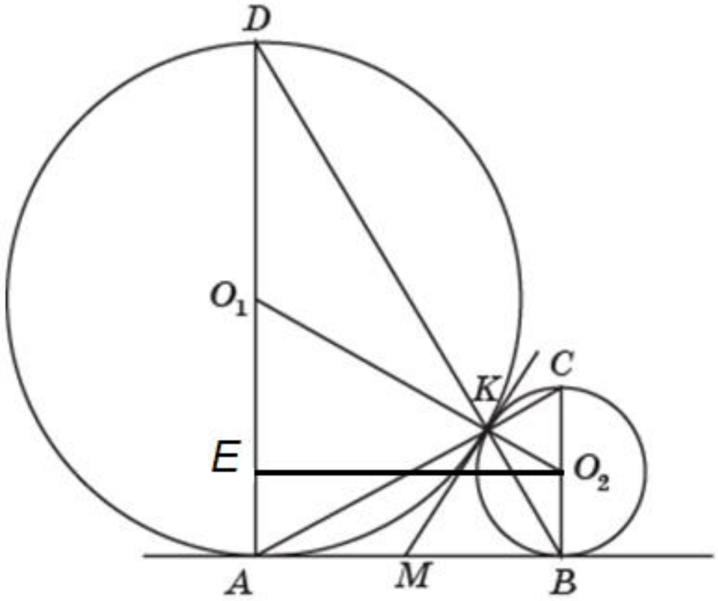
Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.



Решение. Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 соответственно. Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке K, пересекает AB в точке M. По свойству касательных, проведённых из одной точки, $AM = KM$ и $KM = BM$. Треугольник AKB, у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, прямоугольный. Вписанный угол AKD прямой, поэтому он опирается на диаметр AD. Значит, $AD \perp AB$. Аналогично, получаем, что $BC \perp AB$. Следовательно, прямые AD и BC параллельны. Из треугольника O_1O_2E находим $AB=O_2E = 4$. Площадь треугольника ABD равна 16. Площадь треугольника ABK составляет одну пятую площади треугольника ABD, т. е. равна 3,2.



Ответ. 3,2.

Контактная информация

Издательство «Мнемозина»:
105043, Москва, ул. Волочаевская, 40Г, строение 4, этаж 3
Тел.: 8 (495) 181-68-88
E-mail: ioc@mnemozina.ru
Сайт: mnemozina.ru

Интернет-магазин: shop.mnemozina.ru

Торговый дом:
E-mail: td@mnemozina.ru
E-mail для бюджетных закупок: tender@mnemozina.ru
Тел.: 8 (495) 640–93–99

Электронные формы учебников и пособий представлены на сайте **«Школа в кармане»**: pocketschool.ru
E-mail для оптовых закупок: zakaz@ars-edu.ru