издательство Мнемозина

ВЕБИНАРЫ

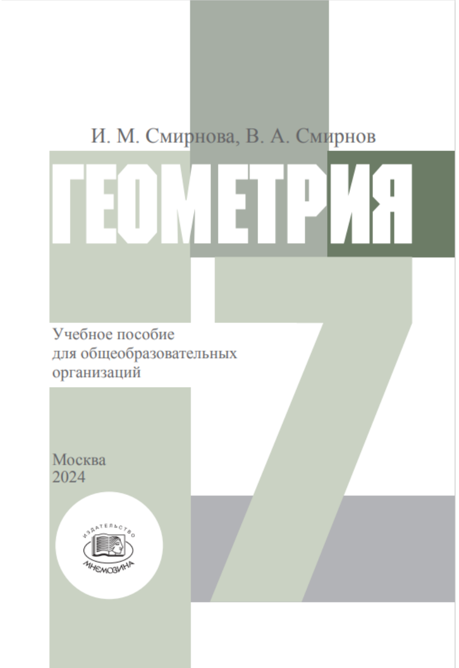
МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВАМ В 7-М КЛАССЕ

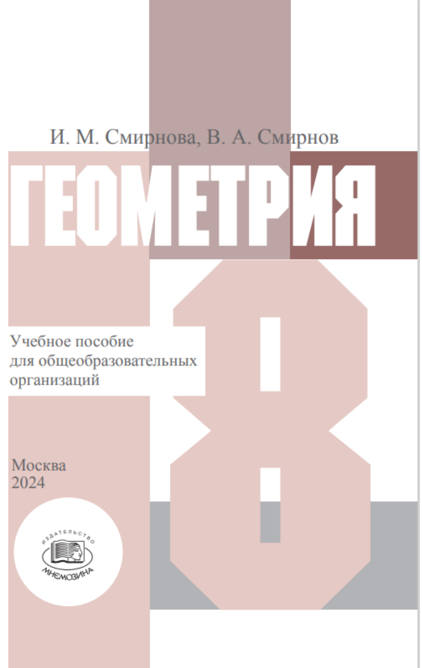
Презентация к учебникам И.М. Смирновой и В.А. Смирнова

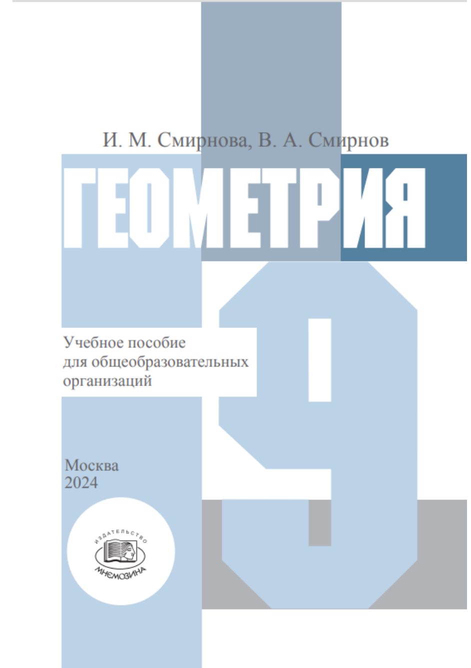
ВЕДУЩИЙ: **Смирнов Владимир Алексеевич**, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой элементарной математики и теории чисел МПГУ, автор учебников по геометрии для 5-6, 7-9 и 10-11 классов.

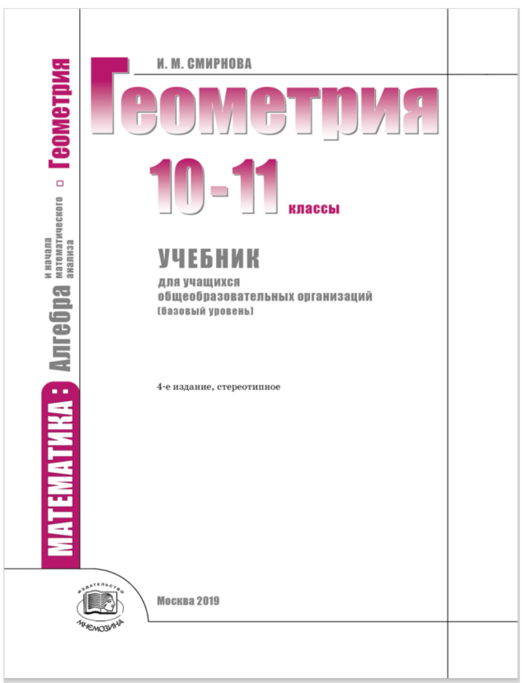
E-mail: v-a-smirnov@mail.ru Сайт: vasmirnov.ru

Учебники можно бесплатно скачать на сайте https://mnemozina.ru


И. М. Смирнова, В. А. Смирнов
ГЕОМЕТРИЯ
7
Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций
Москва
2024
ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА


И. М. Смирнова, В. А. Смирнов
ГЕОМЕТРИЯ
8
Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций
Москва
2024
ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА


И. М. Смирнова, В. А. Смирнов
ГЕОМЕТРИЯ
9
Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций
Москва
2024
ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА


МАТЕМАТИКА: Алгебра и начала математического анализа ◦ Геометрия
И. М. СМИРНОВА
Геометрия
10–11 классы
УЧЕБНИК
для учащихся
общеобразовательных организаций
(базовый уровень)
4-е издание, стереотипное
ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА
Москва 2019


МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ГЕОМЕТРИЯ
И. М. Смирнова, В. А. Смирнов
Геометрия
10 класс
Учебник
для учащихся общеобразовательных
организаций
(базовый и углублённый уровни)
Рекомендовано
Министерством просвещения
Российской Федерации
5-е издание, стереотипное
ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА
Москва 2019


МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ГЕОМЕТРИЯ
И. М. Смирнова, В. А. Смирнов
Геометрия
11 класс
Учебник
для учащихся общеобразовательных
организаций
(базовый и углублённый уровни)
Рекомендовано
Министерством просвещения
Российской Федерации
5-е издание, стереотипное
ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА
Москва 2019

Принципы построения наших учебников геометрии

1. Преемственность, опора на традиции отечественного геометрического образования, заложенные ещё в учебнике А.П. Киселева, просуществовавшего до середины прошлого века.

2. Научность, предполагающая строгие математические формулировки и строгие математические доказательства.

3. Доступность, означающая, что формулировки определений, формулировки и доказательства свойств и теорем можно спросить с учащихся.

4. Модульная структура. Ориентация на результаты обучения, подготовку к ОГЭ и ЕГЭ.

Авторский сайт: vasmirnov.ru

Этот сайт представляет современный учебно-методический комплект по геометрии для 5-11 классов

Авторы:

Смирнова Ирина Михайловна – доктор педагогических наук, профессор кафедры элементарной математики Московского педагогического государственного университета.

Смирнов Владимир Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой элементарной математики Московского педагогического государственного университета

Учебно-методический комплект по геометрии

Программа по геометрии для 5-6 классов

Программа и тематическое планирование по геометрии для 7-9 классов

Дидактические материалы
7-9 классы
7 класс
8 класс)
9 класс)

Программа и тематическое планирование по геометрии для 10-11 классов

Дидактические материалы 10-11 классы

Уроки геометрии с "Power Point"
5-6 классы
7-9 классы
10-11 классы

Геометрия с "GeoGebra".

Статьи о преподавании геометрии в школе

Элементарная математика для студентов

Видеолекции Вебинары Подготовка к ОГЭ Подготовка к ЕГЭ

В мире многогранников. 1995 Геометрия для гуманитарных классов. 1997 г.

Вопросы, отзывы и пожелания присылайте по адресу: v-a-smirnov@mail.ru

Обучение доказательствам является одной из основных целей обучения геометрии в седьмом классе.

Академик А. В. Погорелов в одном из первых изданий своего учебника по геометрии для средней школы писал о том, что «главная задача преподавания геометрии в школе — научить учащихся логически рассуждать, аргументировать свои утверждения, доказывать; очень немногие из оканчивающих школу будут математиками, тем более геометрами; будут и такие, которые в своей практической деятельности ни разу не воспользуются теоремой Пифагора; однако вряд ли найдётся хотя бы один, которому не придётся рассуждать, анализировать, доказывать».

Академик А. Д. Александров, говоря о целях обучения геометрии, указывал, что «особенность геометрии, выделяющая её среди других наук вообще, состоит в том, что в ней самая строгая логика соединена с наглядным представлением. Геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимодействуют и дополняют друг друга».

Если мы хотим научить учащихся проводить доказательства, то доказательства должны удовлетворять определённым требованиям.

1. Они должны быть строгими, т. е. опираться на аксиомы, определения и ранее доказанные утверждения.

2. Они должны быть полными. В них не должны использоваться недоказанные утверждения.

3. Они должны быть доступны для учащихся. Их можно спросить с учащихся.

4. Если строгое доказательство выходит за рамки школьного курса математики, то об этом нужно открыто говорить учащимся.

Учащиеся должны понимать, что такое доказательство, уметь: проводить доказательства свойств и теорем, содержащихся в учебнике геометрии; решать задачи на доказательства; распознавать верные и неверные утверждения; находить ошибки в доказательствах; приводить примеры и контрпримеры.

В школьных учебниках геометрии в основном используются два подхода к построению курса геометрии.

1. Подход, при котором допускаются нестрогие определения, использующие рисунок, и нестрогие доказательства, использующие перегибания листа бумаги, наложение и др.

2. Подход, построенный на научной основе, при котором формулируются аксиомы, даются строгие математические определения основных понятий, основанных на аксиомах, приводятся строгие математические доказательства.

К первому подходу относится учебники геометрии Л.С. Атанасяна и др.: А.Г. Мерзляка и др.

Второй подход реализован в учебниках геометрии наших величайших учёных, академиков А.Н. Колмогорова, А.Д. Александрова, А.В. Погорелова.

Этот же подход используется и в наших учебниках геометрии.

Большое значение для понимания доказательств учебника геометрии является его структура.

В нашем учебнике мы придерживаемся модульной структуры, рекомендованной ФГОС, при которой связанные между собой темы объединены в один модуль и расположены в одном месте.

Таким модулем является вторая глава «Треугольники» нашего учебника геометрии 7-го класса, в которой рассматриваются все свойства и теоремы 7-го класса, связанные с треугольниками.

Учебник геометрии Л.С. Атанасяна и др. модульной структуры не придерживается.

Примеры доказательств в учебнике Л.С. Атанасяна и др.

Напомним, что две фигуры, в частности два треугольника, называются равными, если их можно совместить наложением.

Теорема

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство

Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, углы A и A_1 равны (рис. 51). Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Так как $\angle A = \angle A_1$, то треугольник ABC можно наложить на треугольник $A_1B_1C_1$ так, что вершина A совместится с вершиной A_1, а стороны AB и AC наложатся соответственно на лучи A_1B_1 и A_1C_1. Поскольку $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, то сторона AB совместится со стороной A_1B_1, а сторона AC — со стороной A_1C_1; в частности, совместятся точки B и B_1, C и C_1. Следовательно, совместятся стороны BC и B_1C_1. Итак, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полностью совместятся, значит, они равны. Теорема доказана.

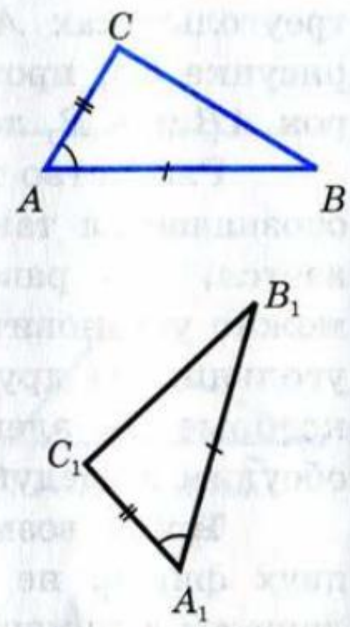


Рис. 51

В нашем учебнике равенство треугольников определяется через равенство соответствующих элементов.

Два треугольника называются ***равными***, если стороны одного соответственно равны сторонам другого и углы, заключённые между соответственно равными сторонами, равны.

Таким образом, если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются равенства: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$; $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, то эти треугольники равны и их равенство обозначают: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (рис. 7.2).

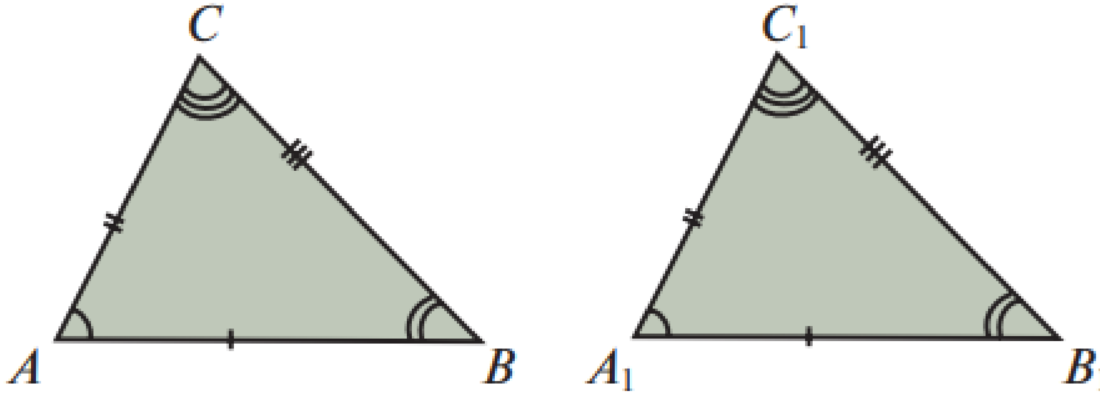


Рис. 7.2

Следующее свойство равенства треугольников принимается за аксиому.

Каковы бы ни были треугольник и луч на плоскости, существует треугольник, равный данному, у которого первая вершина совпадает с вершиной луча, вторая — принадлежит лучу, а третья — расположена в заданной полуплоскости относительно луча (рис. 7.3)**.**

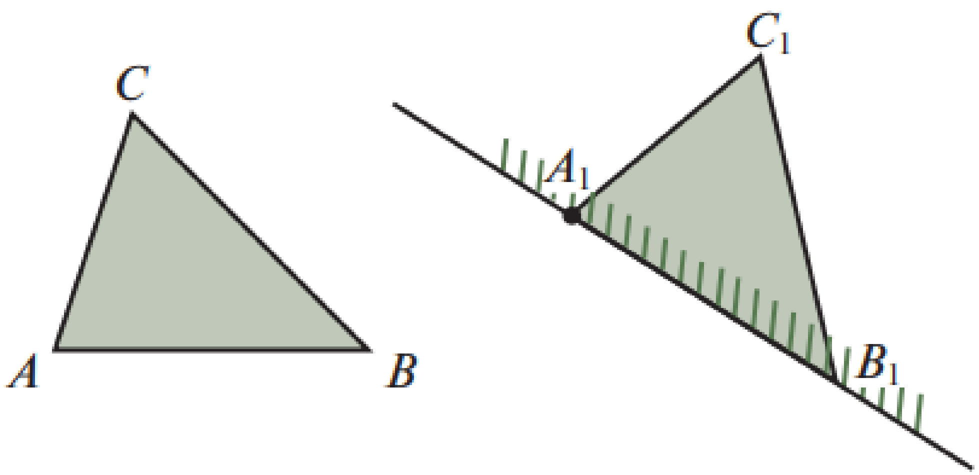


Рис. 7.3

Другими словами, это свойство означает (см. рис. 7.3), что в заданной полуплоскости относительно заданного луча можно отложить треугольник, равный данному, у которого одна вершина совпадает с вершиной луча, а другая — принадлежит лучу.

ТЕОРЕМА

(Первый признак равенства треугольников.) Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника, у которых $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ (рис. 8.1). Если, откладывая один из этих треугольников, его удастся совместить с другим, то эти треугольники будут равны. Отложим треугольник ABC от луча A_1B_1 в полуплоскости, определяемой вершиной C_1. При этом вершина A совместится с вершиной A_1. В силу равенства сторон AB и A_1B_1 вершина B совместится с вершиной B_1. В силу равенства углов A и A_1 сторона AC пойдёт по стороне A_1C_1, и в силу равенства этих сторон вершина C совместится с вершиной C_1. Таким образом, треугольник ABC совместится с треугольником $A_1B_1C_1$. Следовательно, эти треугольники равны.

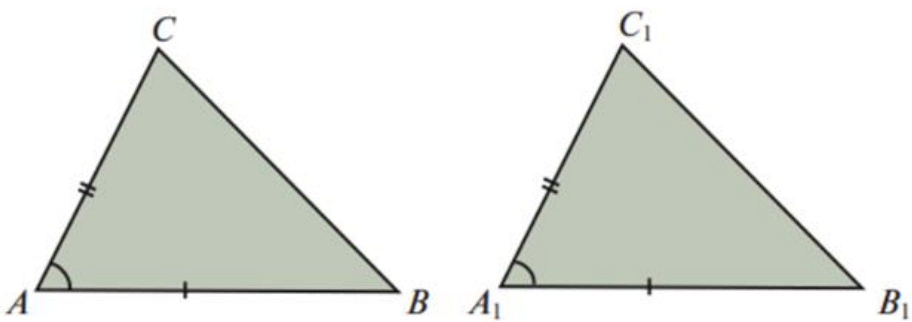


Рис. 8.1

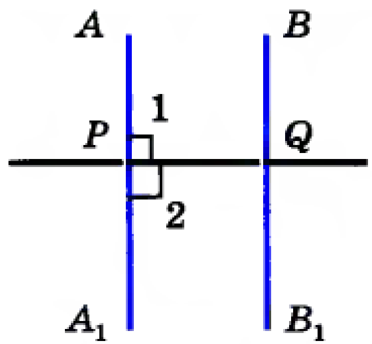
Учебник Л.С. Атанасяна и др.

Отметим, что **две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются** (рис. 43, *а*).

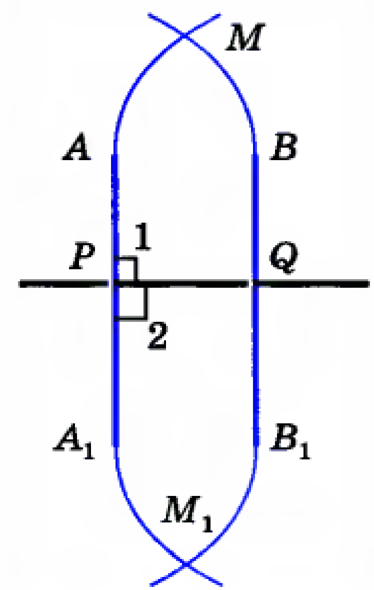
В самом деле, рассмотрим прямые AA_1 и BB_1, перпендикулярные к прямой PQ (рис. 43, *б*). Мысленно перегнем рисунок по прямой PQ так, чтобы верхняя часть рисунка наложилась на нижнюю. Так как прямые углы 1 и 2 равны, то луч PA наложится на луч PA_1. Аналогично, луч QB наложится на луч QB_1. Поэтому, если предположить, что прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M, то эта точка наложится на некоторую точку M_1, также лежащую на этих прямых (рис. 43, *в*), и мы получим, что через точки M и M_1 проходят две прямые: AA_1 и BB_1. Но это невозможно. Следовательно, наше предположение неверно и, значит, прямые AA_1 и BB_1 не пересекаются.

Для проведения перпендикулярных прямых используют чертежный угольник и линейку (рис. 44).

а)



б)



Теорема

Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

Доказательство

Пусть при пересечении прямых a и b секущей AB накрест лежащие углы равны: $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 101, *а*).

Докажем, что $a \parallel b$. Если углы 1 и 2 прямые (рис. 101, *б*), то прямые a и b перпендикулярны к прямой AB и, следовательно, параллельны.

Рассмотрим случай, когда углы 1 и 2 не прямые.

Из середины O отрезка AB проведем перпендикуляр OH к прямой a (рис. 101, *в*). На прямой b от точки B отложим отрезок BH_1, равный отрезку AH, как показано на рисунке 101, *в*, и проведем отрезок OH_1. Треугольники OHA и OH_1B равны по двум сторонам и углу между ними ($AO = BO$, $AH = BH_1$, $\angle 1 = \angle 2$), поэтому $\angle 3 = \angle 4$ и $\angle 5 = \angle 6$. Из равенства $\angle 3 = \angle 4$ следует, что точка H_1 лежит на продолжении луча OH, т. е. точки H, O и H_1 лежат на одной прямой, а из равенства $\angle 5 = \angle 6$ следует, что угол 6 — прямой (так как угол 5 — прямой). Итак, прямые a и b перпендикулярны к прямой HH_1, поэтому они параллельны. **Теорема доказана.**

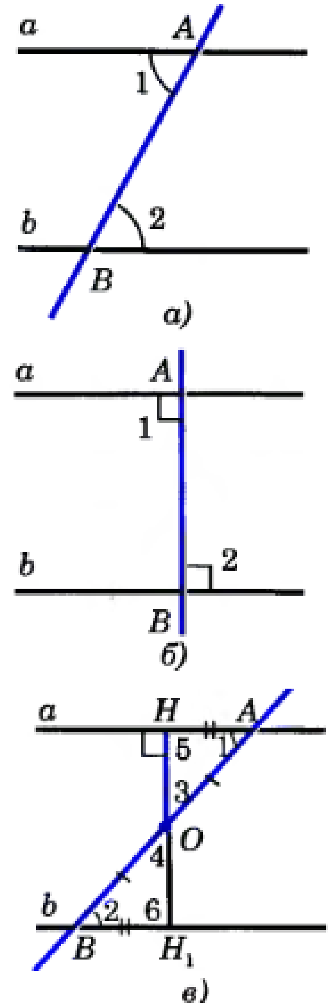


Рис. 101

В нашем учебнике доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА

Внешний угол произвольного треугольника больше каждого его внутреннего угла, не смежного с ним.

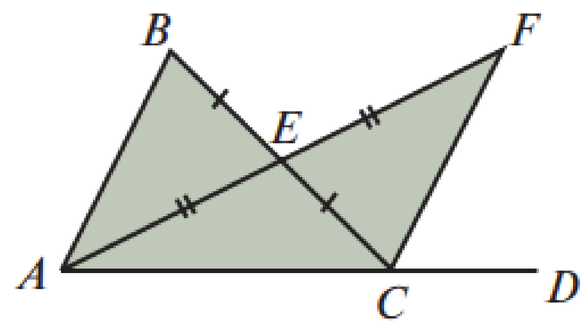


Рис. 12.2

Доказательство. Пусть ABC — произвольный треугольник. Рассмотрим, например, внешний угол BCD и докажем, что он больше внутреннего угла ABC (рис. 12.2). Для этого через вершину A и середину E стороны BC проведём прямую и отложим на ней отрезок EF, равный AE. Треугольники ABE и FCE равны по первому признаку равенства треугольников ($BE = CE$, $AE = FE$, $\angle AEB = \angle FEC$). Следовательно, $\angle ABC = \angle BCF$. Но вершина F лежит внутри угла BCD. Поэтому угол BCF составляет только часть угла BCD. Значит, $\angle BCD > \angle ABC$. Аналогично доказывается, что $\angle BCD > \angle BAC$ (сделайте это самостоятельно).

В качестве следствия из этой теоремы доказывается, что две прямые, перпендикулярные третьей прямой, не пересекаются.

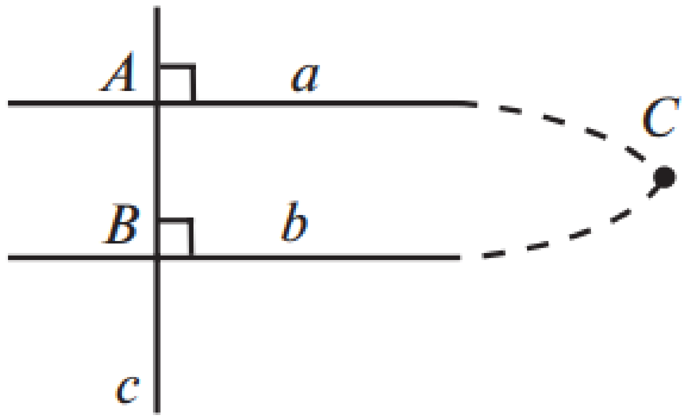


Рис. 12.5

Пусть прямые a и b перпендикулярны прямой c (рис. 12.5) и A, B — их точки пересечения с прямой c. Если бы прямые a и b пересекались в точке C, то внешний угол при вершине A треугольника ABC был бы равен 90° и равен внутреннему углу B, что противоречит теореме о внешнем угле треугольника. Значит, прямые a и b не пересекаются, т. е. параллельны.

Эта теорема применяется и для доказательства признака параллельности двух прямых.

ТЕОРЕМА

(Признак параллельности двух прямых.) Если при пересечении двух прямых третьей прямой внутренние накрест лежащие углы равны, то эти две прямые параллельны.

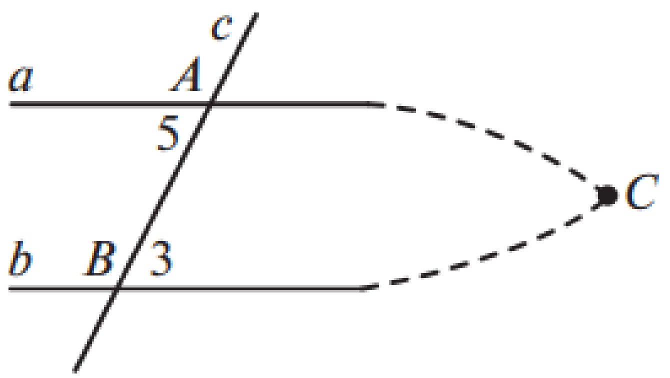


Рис. 27.3

Доказательство. Пусть прямые a и b пересекаются прямой c в точках A и B соответственно и образуют равные внутренние накрест лежащие углы. Предположим, что прямые a и b не параллельны. Тогда они пересекутся в некоторой точке C (рис. 27.3). Для треугольника ABC угол 5 является внешним и, следовательно, должен быть больше внутреннего угла 3, что противоречит условию равенства этих углов. Значит, прямые a и b не могут пересекаться, т. е. они параллельны.

40 Выпуклый многоугольник

Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.

На рисунке 154 многоугольник F_1 является выпуклым, а многоугольник F_2 — невыпуклым.

Рассмотрим выпуклый n-угольник, изображенный на рисунке 155, *а*. Углы $A_nA_1A_2$, $A_1A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_nA_1$ называются **углами** этого многоугольника. Найдем их сумму.

Для этого соединим диагоналями вершину A_1 с другими вершинами. В результате получим $n-2$ треугольника (рис. 155, *б*), сумма углов которых равна сумме углов n-угольника. Сумма углов каждого треугольника равна 180°, поэтому сумма углов многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$ равна $(n-2) \cdot 180°$.

Итак, **сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2) \cdot 180°$.**

Рис. 153

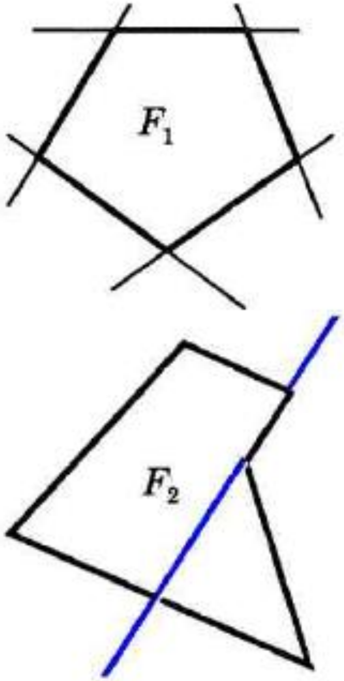
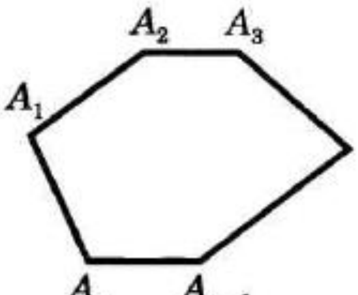
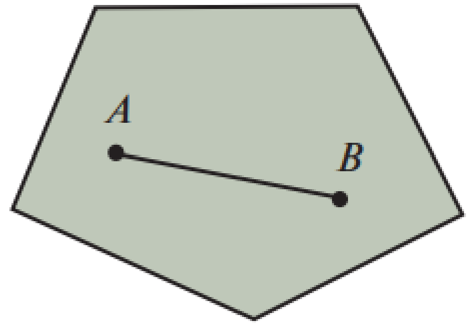


Рис. 154



В нашем учебнике многоугольник называется выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками он содержит и соединяющий их отрезок.



ТЕОРЕМА

Сумма углов произвольного выпуклого n-угольника равна $180°(n - 2)$.

Доказательство. Рассмотрим выпуклый n-угольник $A_1 \ldots A_n$. Из его вершины A_1 проведём все диагонали (рис. 29.3).

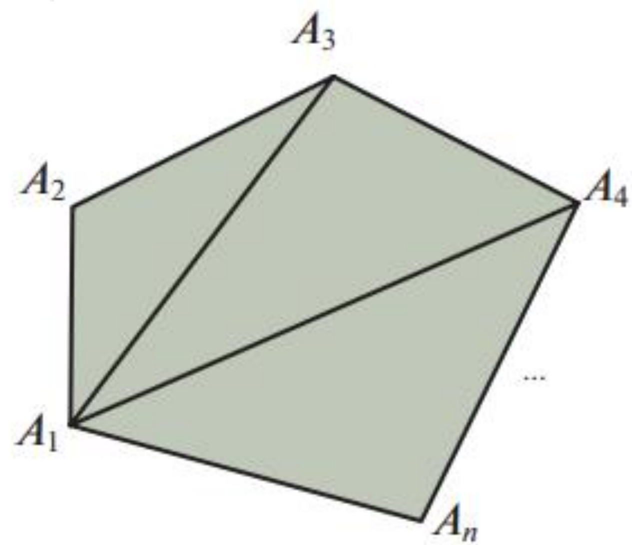


Рис. 29.3

Так как данный многоугольник выпуклый, то эти диагонали разбивают его на $n - 2$ треугольника. В каждом треугольнике сумма углов равна 180°, и эти углы составляют углы многоугольника. Следовательно, сумма углов многоугольника равна $180°(n - 2)$.

Важным требованием к структуре школьного учебника геометрии и приводимым доказательствам является их соответствие структуре геометрии, как науки.

Геометрия разделяется на абсолютную геометрию, не использующую аксиому параллельных, и геометрию, использующую аксиому параллельных.

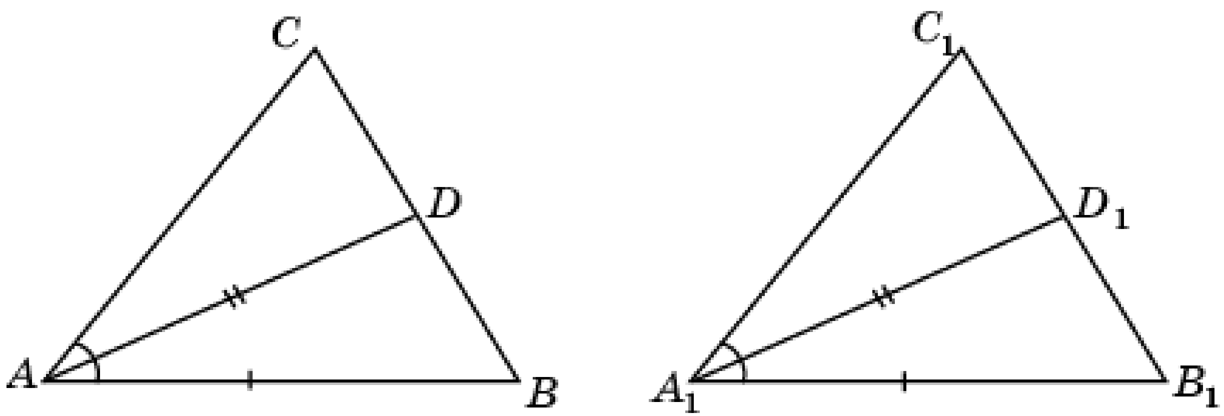
Такая структура учебника геометрии позволяет сформировать правильные представления о том, какие свойства и теоремы геометрии зависят от аксиомы параллельных, а какие не зависят. На основе этих представлений могут изучаться и другие геометрии, например, геометрия Лобачевского, сферическая геометрия и др.

Эта структура реализована в учебнике геометрии А.П. Киселева и в наших учебниках геометрии.

Учебники геометрии Л.С. Атанасяна и др., А.Г. Мерзляка и др. этой структуре не придерживаются. В частности, теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольника; о неравенстве треугольника; о признаках равенства прямоугольных треугольников и др. рассматриваются после введения аксиомы параллельных. Приводимые доказательства этих свойств и теорем использует аксиому параллельных. Тем самым формируются искажённые представления о том, что зависит от аксиомы параллельных, а что не зависит.

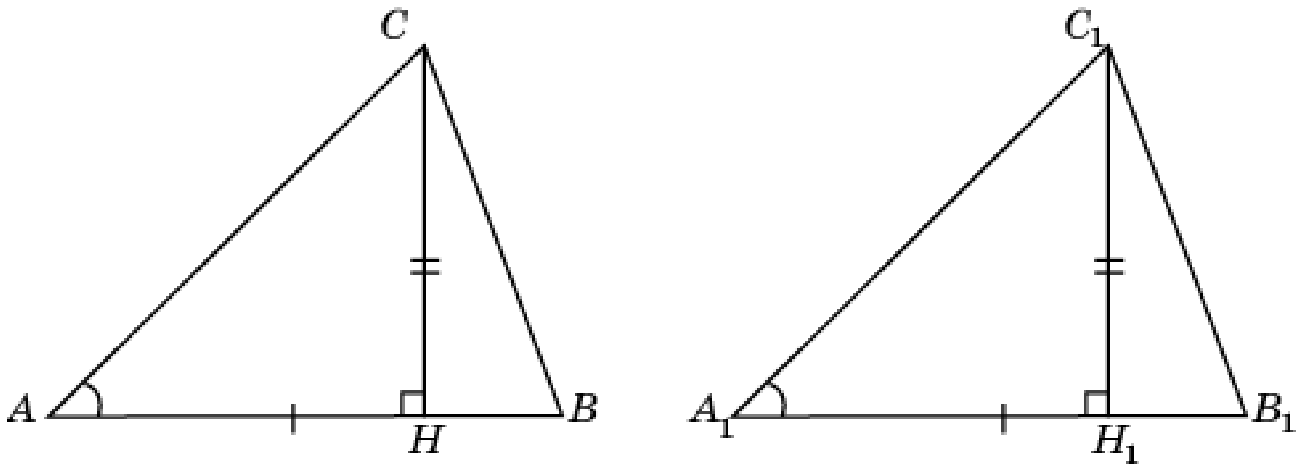
Признаки равенства треугольников по трём элементам

1. Докажите, что если треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ угол A равен углу A_1, $AB = A_1B_1$, биссектриса AD равна биссектрисе A_1D_1, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



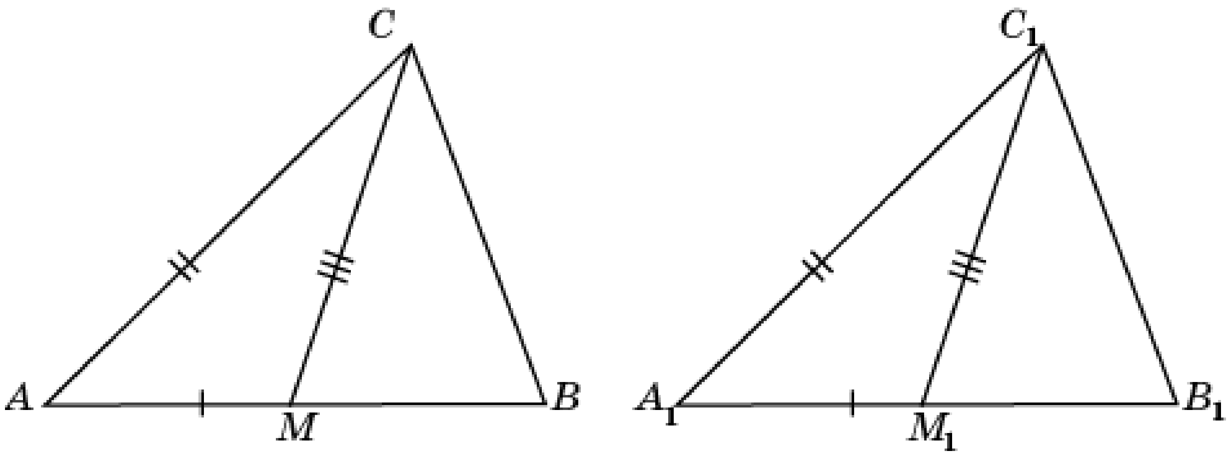
Доказательство. Треугольники ABD и $A_1B_1D_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, угол B равен углу B_1. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

2. Докажите, что если треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, угол A равен углу A_1, высота CH равна высоте C_1H_1, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



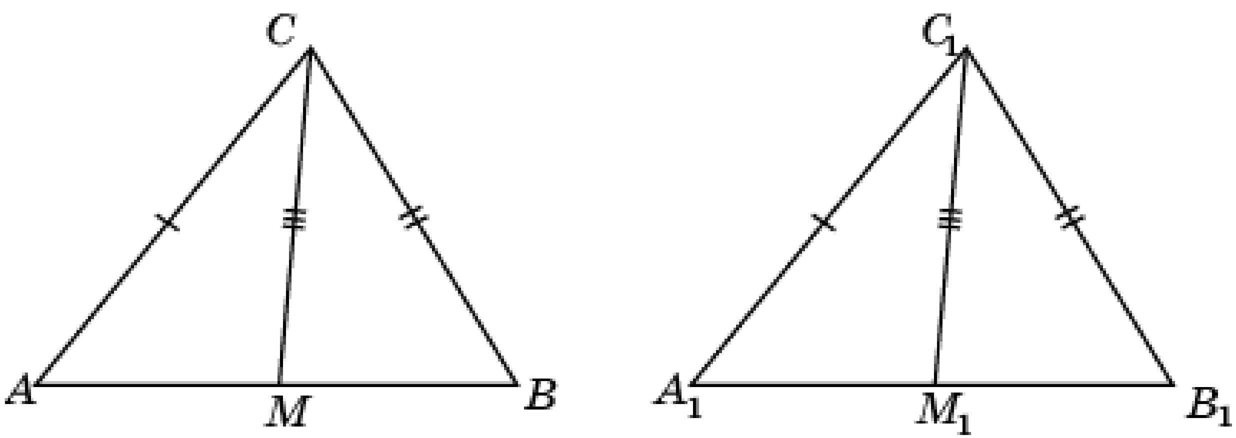
Доказательство. Прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по катету и острому углу. Значит, $AC = A_1C_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

3. Докажите, что если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, медиана CM равна медиане C_1M_1, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

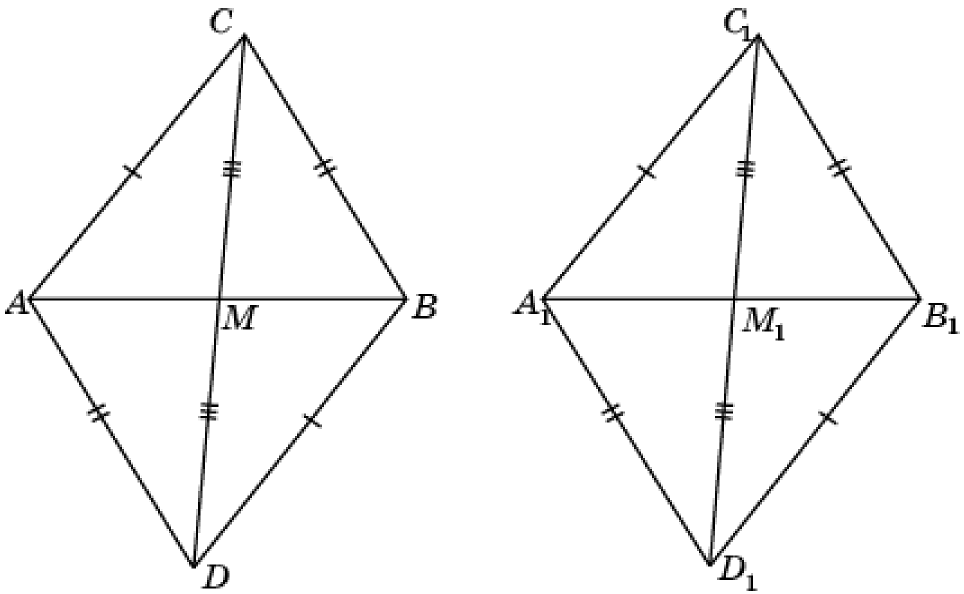


Доказательство. Треугольники ACM и $A_1C_1M_1$ равны по трем сторонам. Значит, углы A и A_1 равны. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, угол A равен углу A_1. Следовательно, эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними.

4*. Докажите, что если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, медиана CM равна медиане C_1M_1, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.



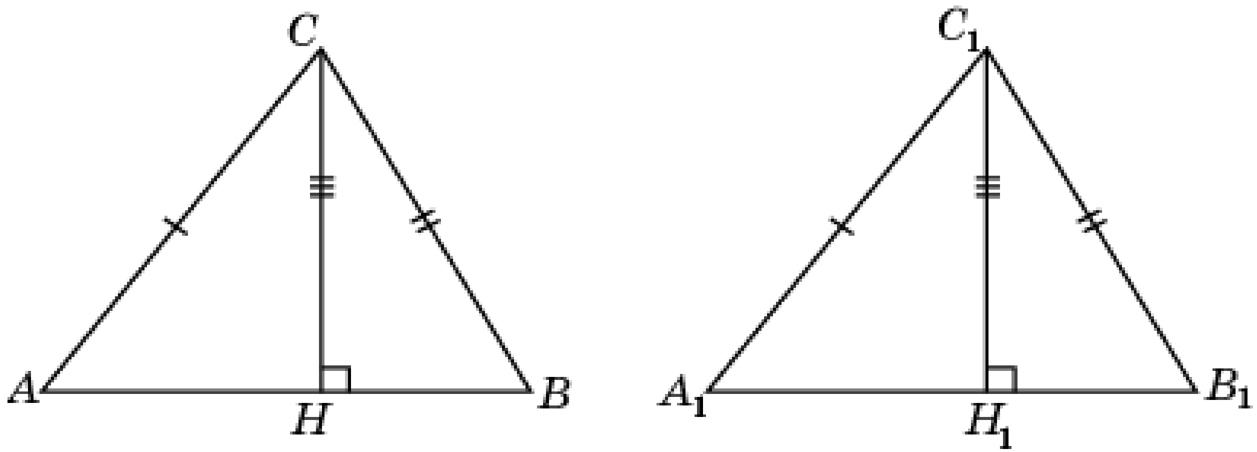
Доказательство. Продолжим медианы и отложим отрезки $MD=CM$ и $M_1D_1=C_1M_1$. Тогда четырехугольники $ACBD$ и $A_1C_1B_1D_1$ – параллелограммы. Треугольники ACD и $A_1C_1D_1$ равны по трем сторонам.



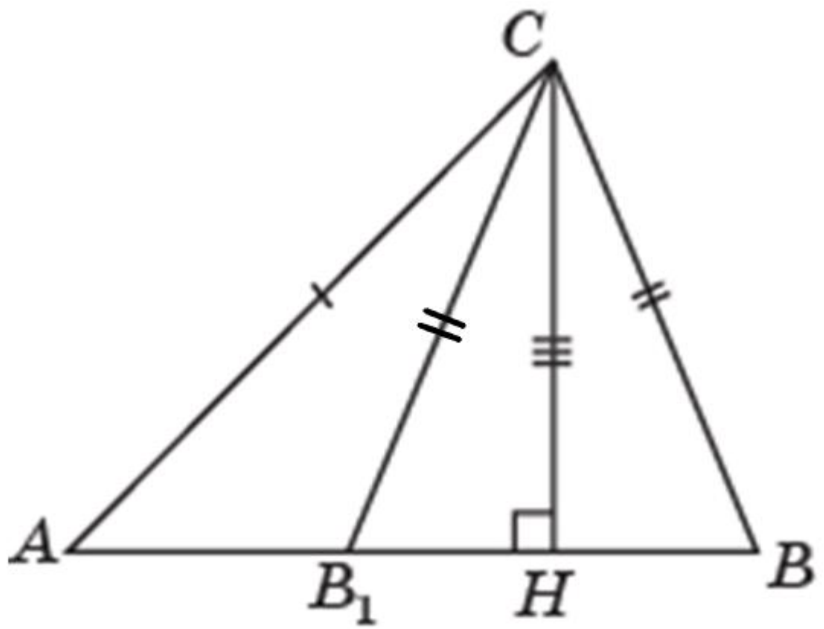
Следовательно, $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$. Аналогично, треугольники BCD и $B_1C_1D_1$ равны по трем сторонам. Следовательно, угол BCD равен углу $B_1C_1D_1$. Значит, угол C равен углу C_1 и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

Верны ли следующие утверждения?

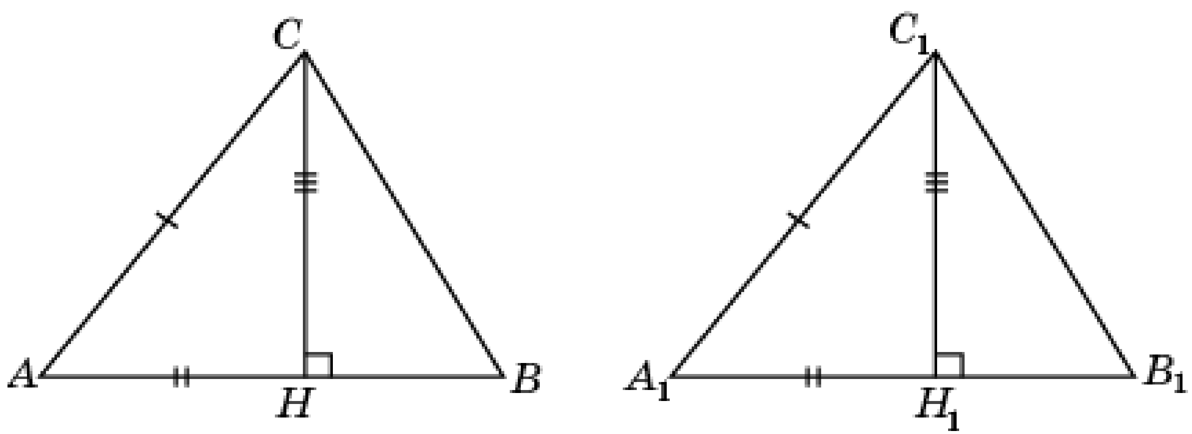
1. Если две стороны и высота, проведённая из их общей вершины, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.



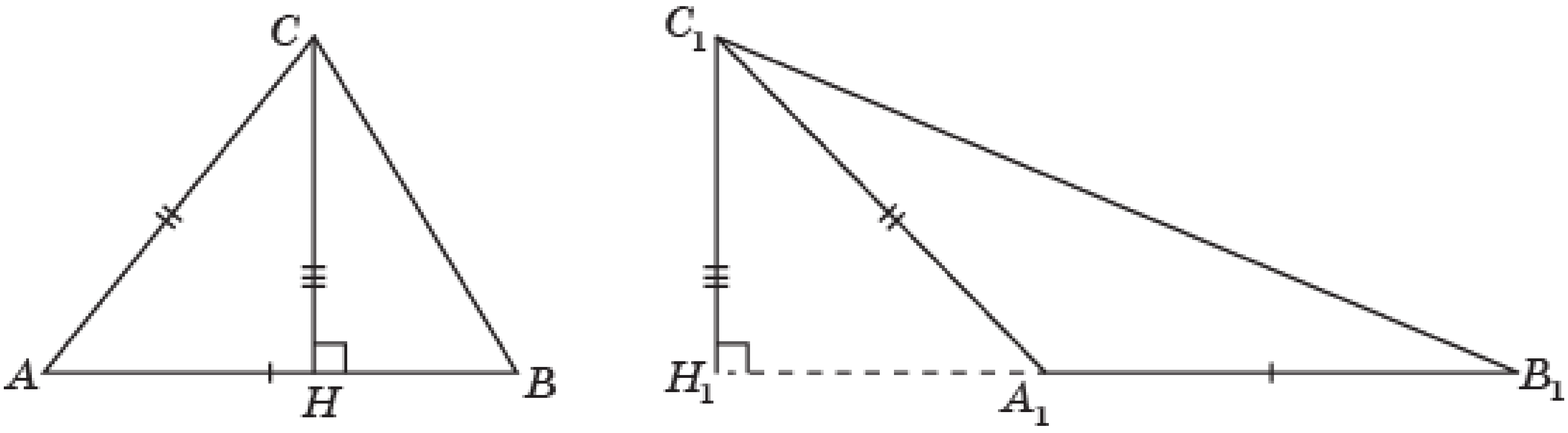
Решение. Неверно. Пример приведён на рисунке.



2. Если две стороны и высота, проведённая к одной из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте другого треугольника, то такие треугольники равны.



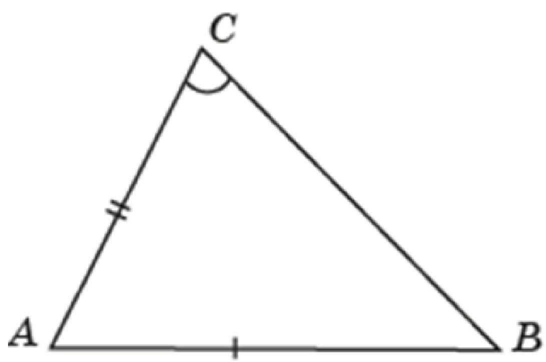
Решение. Неверно. Пример приведён на рисунке.

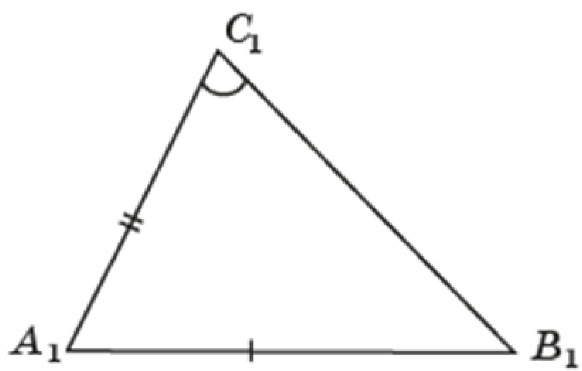


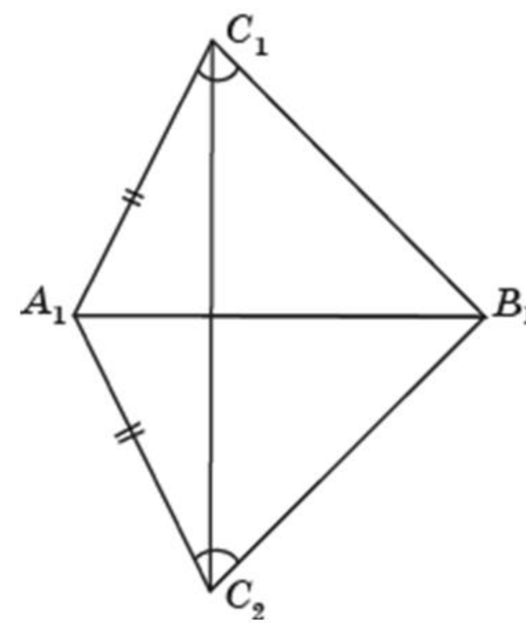
Найдите ошибку в доказательстве следующих утверждений

1. Если две стороны и угол, противолежащий одной из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$.



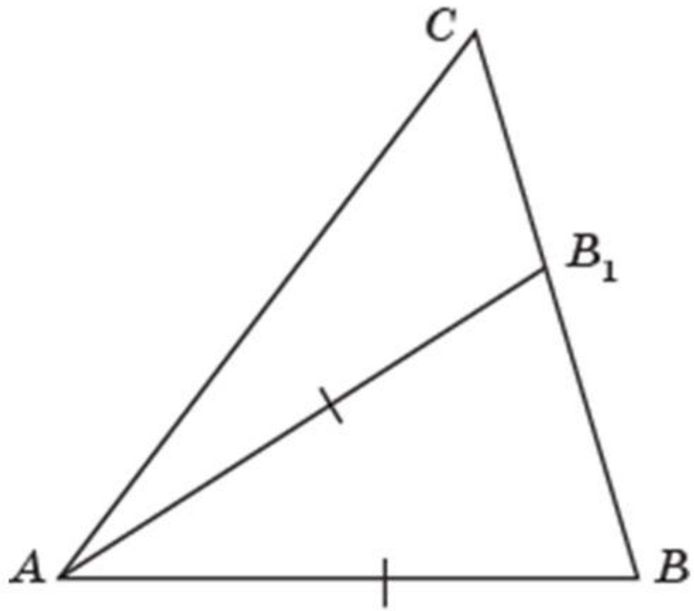




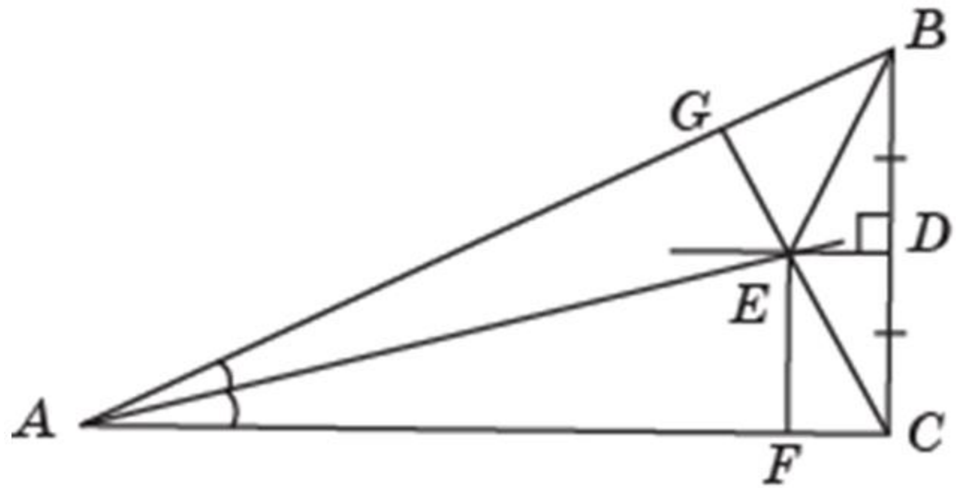
Отложим треугольник ABC от луча A_1B_1 так, чтобы вершина C перешла бы в точку C_2, лежащую по другую сторону от точки C_1 относительно прямой A_1B_1.

Из равенства сторон A_1C_1 и A_1C_2 следует, что треугольник $C_1A_1C_2$ равнобедренный, значит, $\angle A_1C_1C_2 = \angle A_1C_2C_1$. Из этого и равенства углов C_1 и C_2 следует равенство углов $B_1C_1C_2$ и $B_1C_2C_1$. Значит, треугольник $B_1C_1C_2$ равнобедренный. Следовательно, его стороны B_1C_1 и B_1C_2 равны. Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_1B_1C_2$ равны по двум сторонам и углу между ними ($A_1C_1 = A_1C_2$, $B_1C_1 = B_1C_2$, $\angle C_1 = \angle C_2$). Следовательно, равны и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$.

На самом деле, это утверждение неверно. Пример приведён на рисунке. Треугольники ABC и AB_1C не равны, но у них $AB = AB_1$, AC – общая сторона, угол C общий.

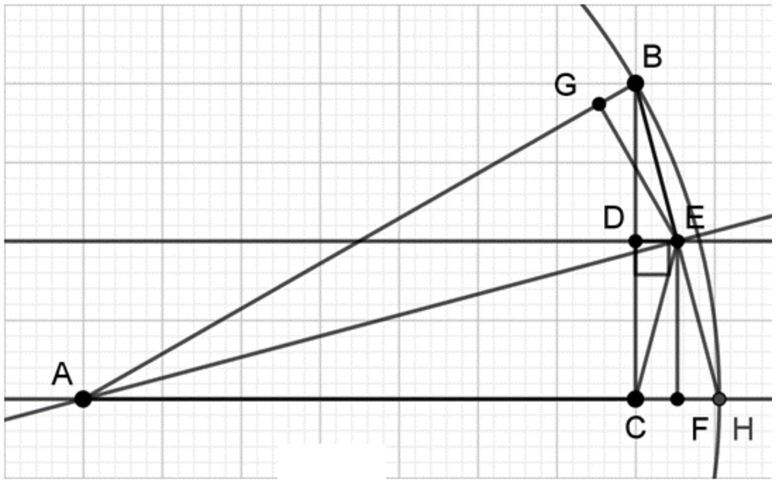


2. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна его катету.



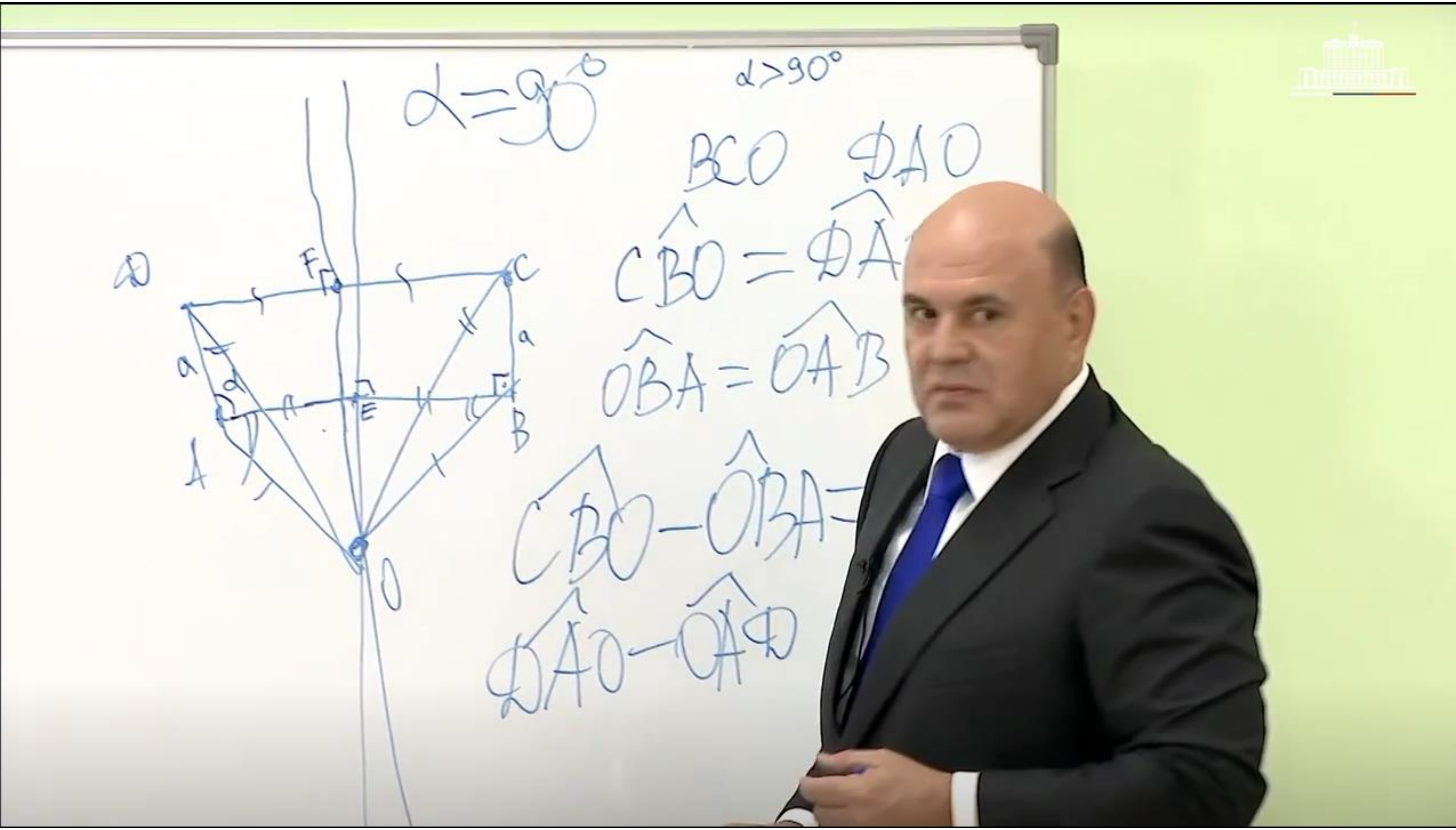
Доказательство. Пусть ABC – прямоугольный треугольник (угол C – прямой). Докажем, что гипотенуза AB равна катету AC. Проведём биссектрису угла A и серединный перпендикуляр к стороне BC. Обозначим через E их точку пересечения. Соединим отрезками точку E с вершинами B и C. Из точки E опустим перпендикуляры EF и EG соответственно на стороны AC и AB треугольника ABC. Так как точка E принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку BC, то отрезки BE и CE равны. Так как точка E принадлежит биссектрисе угла A, то отрезки EF и EG равны. Прямоугольные треугольники BEG и CEF равны по катету и гипотенузе. Следовательно, отрезки BG и CF равны. Прямоугольные треугольники AEG и AEF равны по катету и гипотенузе. Следовательно, отрезки AG и AF равны. Складывая отрезки AG и BG, AF и CF, получаем равенство гипотенузы AB и катета AC.

Найти ошибку поможет программа GeoGebra. В ней можно построить прямоугольный треугольник *ABC*, провести биссектрису угла *A* и серединный перпендикуляр к отрезку *BC*, найти их точку пересечения *E*, опустить из неё перпендикуляры на прямые, содержащие стороны *AC* и *AB*.

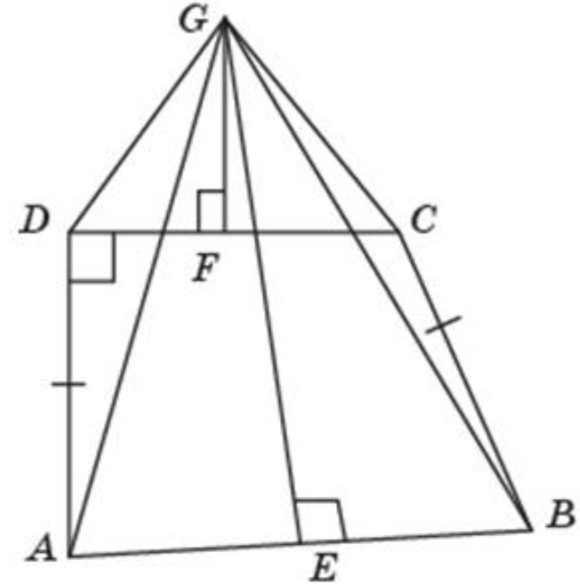


В треугольнике *ABH* *AB* = *AH*. Следовательно, биссектриса угла *A* пересечёт отрезок *BH* в его середине *E*, которая расположена вне треугольника *ABC*. Серединный перпендикуляр к отрезку *BC* содержит среднюю линию треугольника *BCH*, следовательно, пересекает отрезок *BH* в точке *E*. Таким образом, точка *E* является точкой пересечения биссектрисы угла *A* и серединного перпендикуляра к отрезку *BC*. Так как точка *E* расположена вне треугольника *ABC*, то основание *F* перпендикуляра, опущенного из точки *E* на прямую *AC*, будет принадлежать продолжению стороны *AC*, а так как отрезок *AE* меньше отрезка *AB*, то основание *G* перпендикуляра, опущенного из точки *E* на прямую *AB*, будет принадлежать стороне *AB*.

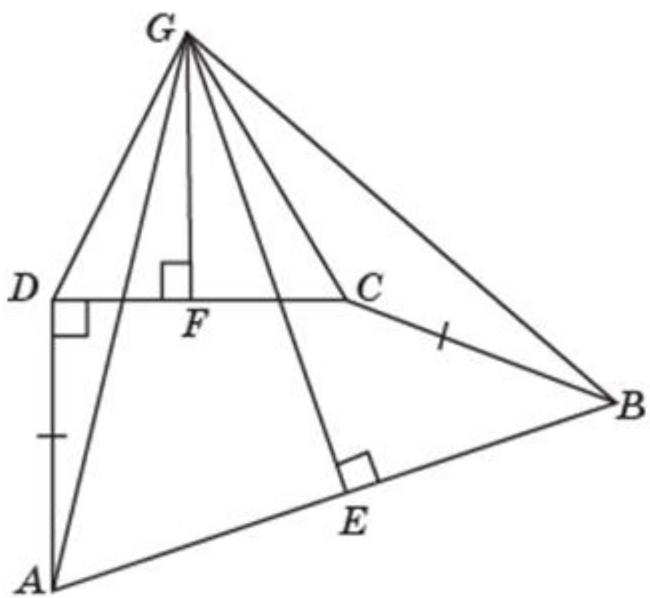
3. Прямой угол равен тупому углу.



Доказательство. Пусть $ABCD$ – четырёхугольник, в котором $AD = BC$, угол D прямой, угол C тупой. Докажем, что углы D и C равны. Проведём серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD. Обозначим через G их точку пересечения. Прямоугольные треугольники AEG и BEG равны по двум катетам. Следовательно, $AG = BG$. Прямоугольные треугольники DFG и CFG также равны по двум катетам. Следовательно, $DG = CG$, $\angle GDF = \angle GCF$. Треугольники ADG и BCG равны по трём сторонам. Следовательно, $\angle ADG = \angle BCG$. Вычитая из второго равенства углов первое, получаем равенство углов ADC и BCD, т. е. получаем, что прямой угол ADC равен тупому углу BCD.



Решение. Из равенства углов ADG и BCG, GDF и GCF не следует равенство углов ADC и BCD, так как угол ADC равен разности углов ADG и CDG, а угол BCD нет.



Книги о развитии критического мышления

1. Брадис В.М. и др. Ошибки в математических рассуждениях. – 2-е изд. – М.: Учпедгиз, 1959.

2. Дубнов Я.С. Ошибки в геометрических доказательствах. – 2-е изд. – М.: Гос. изд. Технико-теоретической литературы, 1955 / Популярные лекции по математике. Выпуск 11.

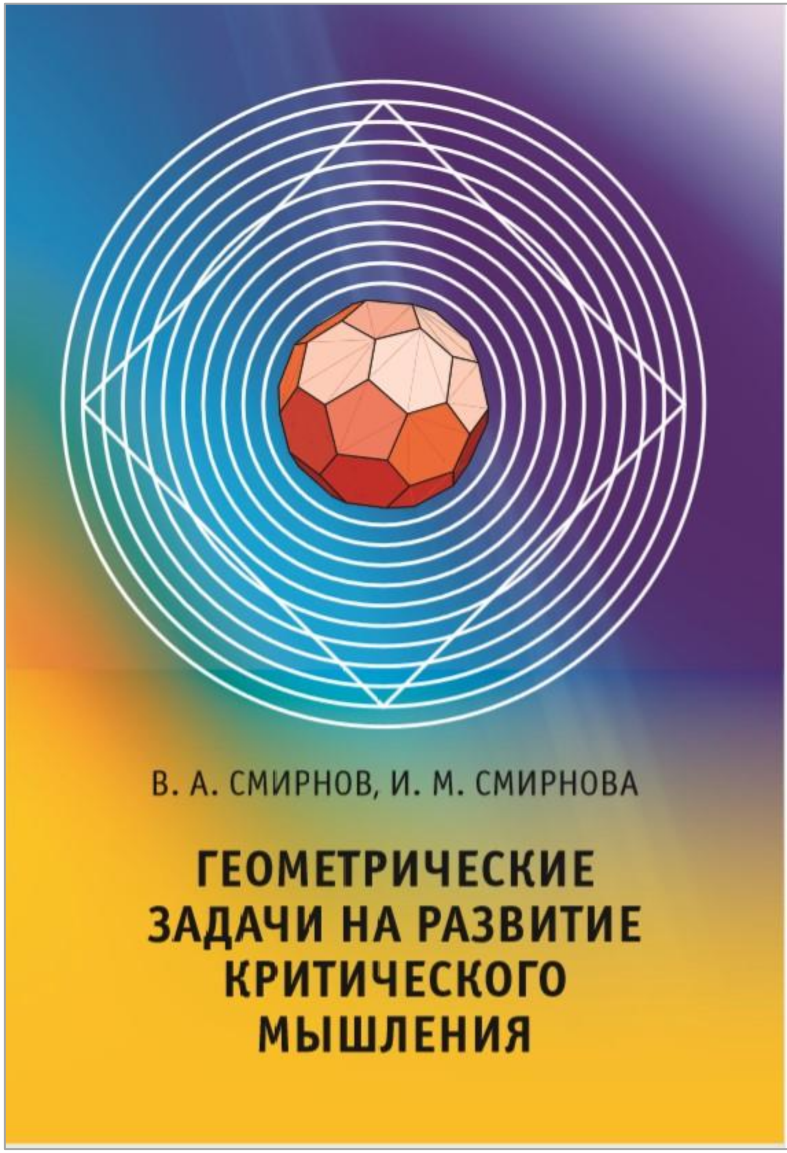
3. Литцман В. Где ошибка? – М.: Физматлит, 1962.

4. Мадера А.Г., Мадера Д.А. Математические софизмы. – М.: Просвещение, 2003.

5. Уёмов А.И. Логические ошибки. – М.: Госполитиздат, 1958.

6. Халперн Д. Психология критического мышления. – М.–СПб.: Питер, 2000.

7. Смирнов В.А., Смирнова И.М. Геометрические задачи на развитие критического мышления. – М.: МЦНМО, 2021.



Учебники можно бесплатно скачать на сайте https://mnemozina.ru

Контактная информация

Издательство «Мнемозина»:
105043, Москва, ул. Волочаевская, 40Г, строение 4, этаж 3
Тел.: 8 (495) 181-68-88
E-mail: ioc@mnemozina.ru
Сайт: mnemozina.ru

Интернет-магазин: shop.mnemozina.ru

Торговый дом:
E-mail: td@mnemozina.ru
E-mail для бюджетных закупок: tender@mnemozina.ru
Тел.: 8 (495) 640–93–99

Электронные формы учебников и пособий представлены на сайте **«Школа в кармане»**: pocketschool.ru
E-mail для оптовых закупок: zakaz@ars-edu.ru