[redacted]

F m g b p b i Z e v g h _ d Z a _ g g h _ m q j _ ` ^ _ g b
© P _ g l j i h ^ ^ _ j ` d b h [j Z a h \ Z g b y ª
f m g b p b i Z e v g h] h h [j Z a h \ Z g b y > b g k d h c

K [h j g b ‹ d
i h i h ^] h l h \ d _ d = B : i h
F : L ? F : L B D ? i h l _ f _
© M j Z \ g _ g b y g _ j Z \ _ g k l \ Z k

ŋls. ɾ ɕ ʤ ŋ Ɛ ʊ ʷ, 2019

Kh^_j`Zgb_

6	Q_jgur_\Z BjbgZ :jd.(ʟʐʯɷʂʝʐʴ ʤʒʘʂʝʤʒʘʂɷʢɷ ɪʃʋ ʉʃ ʐ ‾37). çKbkl_fu eh]Zjbnfbq_kdbo mjZ\g_gbc b g_jZ_gkl\ \ aZ^ ?=W ih fZl_fZlbd_ª	3
7	l_jrbgZ ?e_gZ Xj(ʟʐʯɷʂʝʐʴ ʤʒʘʂʝʤʒʘʂɷʢɷ ɪʃʋ ʉʃ ʐ ‾3). ©J_r_gb_ ljb]hghf_ljbq_kdbo mjZ\g_gbcª	30

Kbkl_fu eh]Zjbnfbq_kdbo mjZ\g_gbc b g_jZ_
‹ ?=W ih fZl_fZJbdbevgumcjh_gv

Чернышева Ирина Аркадьевна,
учитель математики БОУ СОШ №37

Hkgh\gu_ f_lh^u j_r_gbc g_jZ_gkl\

ş ls0ʕtsə ʳ dʒ dʒjlstsн0dʒ dʒtsʏdʒts tslsdʒjɦlsɖ:

- dʒjlstsн tɛ0ədʒtsɦɖdʒ ʲdʒ ʳ ɲ ʃjtɛjɲtsнtsə;
- dʒjlstsн ʟ0dʒjdʒ ʳ;
- dʒjlstsн ɖdʒlsjtɛə0dʒtsə ɖ tsвtsв ʰ jdʒdʒ ʳ ʔ dʒjlstsн ɖdʒlsjtɛə0dʒtsə.
- tɛj ʰ jdʒɖj dʒjtɛ0əjdʒɦlsə0 dʒ0 ʃtɛtsdʒj ʏlʒlsʕ0ɲ;
- dʒjlstsн tɛ0ʏɖtsdʒ0dʒɖʟ0ʏɖɖ;
- dʒjlstsн tsʏjdʒʕɖ, ə ʏ0ɦlsdʒtsɦlsɖ, ɖɦʃtsdʒ ʲ ʟtsə0dʒɖj ʕdʒ0ɦɦɖʏjɦʕɖɲ dʒjtɛ0əjdʒɦlsə.

J_r_gb_ g_jZ_gkl\ jZagufb kihkh[Zfb

Пример 1
Решить неравенство:

$$\log_x 2 < \log_{6-x} 2$$

J_r_gb_

1-й способ (обобщенный метод интервалов)

$$\log_x 2 < \log_{6-x} 2$$

ɿ jtɛjʔнjdʒ ʕ tsɦdʒtsə0dʒɖ ʱ 2

$$\frac{1}{\log_2 x} < \frac{1}{\log_2(6-x)}; \quad \frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2(6-x)} < 0$$

$$\frac{\log_2(6-x)-\log_2 x}{\log_2 x * \log_2(6-x)} < 0.$$

ʈ0ɦɦdʒtslstɛɖdʒ ʷʱdʒʕʏɖ ʱ

$f(x) = \frac{\log_2(6-x)-\log_2 x}{\log_2 x * \log_2(6-x)}$. ʈ ʸ tsвdʒ0ɦls ʲ tsʃtɛjнjdʒjdʒɖ ʷ ʟ0н0jlsɦ ʷ ʱɦdʒtsəɖ ʷdʒɖ

$$\begin{cases} 6-x>0 \\ x>0 \\ 6-x \neq 1 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

ʃlsɦ ʱ н0 $D\big(f(x)\big) = (0;1) \cup (1;5) \cup (5;6)$.

ʌʱdʒʕʏɖ ʷ dʒjʃtɛjtɛ ʳ ədʒ0 dʒ0 ɦətsjʔ tsвdʒ0ɦlsɖ tsʃtɛjнjdʒjdʒɖ ʷ ɖ tsвtɛ0 ʰ 0jlsɦ ʷ ə dʒʱdʒ ʲ ʃtɛɖ x=3. ʈj ʰ 0 ʷ dʒjlstsнtsdʒ ɖdʒlsjtɛə0dʒtsə ɖɦɦtsнdʒtsj dʒjtɛ0əjdʒɦlsətsə ɖ ɦ ʱʏjlstsdʒ tsвdʒ0ɦlsɖ tsʃtɛjнjdʒjdʒɖ ʷ tɛj ʰ jdʒɖ ʷdʒɖ dʒjtɛ0əjdʒɦlsə0 ʷədʒ ʷ ʱ lsɦ ʷ əɦj ʟdʒ0ʏjdʒɖ ʷ $x \in (0;1) \cup (3;5)$.

2-й способ(метод рационализации)

$$\log_x 2 < \log_{6-x} 2$$

$$\begin{cases} \big((6-x)-x\big)(x-1)(6-x) < 0 \\ 6-x>0 \\ x>0 \\ 6-x \neq 1 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3-x)(x-1)(5-x) \\ x<6 \\ x\neq 5 \\ x>0 \\ x\neq 1. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} 0<x<1 \\ 3<x<5 \end{array}\right.$$

3-й способ (метод расщепления).

$$\frac{\log_2(6-x)-\log_2 x}{\log_2 x*\log_2(6-x)}<0$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2(6-x)-\log_2 x<0 \\ \log_2 x*\log_2(6-x)>0 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} \log_2(6-x)-\log_2 x>0 \\ \log_2 x*\log_2(6-x)<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Объедения решения эти систем и ɦ ƀчцjlstsdʒ tsвdƶƟɦlsd̄ tsʃtɛjнjdƶjdƶd̄ʷ dƶjtɛƟəjdƶɦlsəƟ, dƶƟ⊐tsнd̄dʒ əɦj lдƶƟчjdƶd̄ʷ $x\in(0;1)\cup(3;5)$.

K b k l _ f u e h] Z j b n f b q _ k d b o g _ j Z \ _ g k l \

ʅ jʢtslstsɛʳj dƶtsɢƟtɛd̄ʷdʒd̄чjɦʢd̄j dƶjtɛƟəjdƶɦlsəƟ ƀнƟjlsɦʷ tɛj ʰ d̄lsʲ dƶjʃtsɦtɛjнɦlsəjdƶdƶts, d̄ɦʃtsdƶʲlƀʷ ɦətsʔɦlsəƟ ətslɛƟɦlsƟdƶd̄ʷ d̄ ƀвʳəƟdƶd̄ʷ dƶtsɢƟtɛd̄ʷdʒd̄чjɦʢtsʔ ʷƀdƶʢчd̄d̄. ʀdƶtsɢнƟ d̄ɦʃtsdƶʲlƀʸlsʲ lƟdʒjdƶƀ, ɦ ʃtsdʒts ʰʲʸ ʢtslststɛtsʔ ƀнƟjlsɦʷ ɦəjɦlsd̄ нƟdƶdƶtsj dƶjtɛƟəjdƶɦlsəts ʢ ƟdƶɢjвtɛƟd̄чjɦʢtsdʒƀ dƶjtɛƟəjdƶɦlsəƀ. ʅ tɛd̄ tɛj ʰ jdƶd̄d̄ dƶtsɢƟtɛd̄ʷdʒd̄чjɦʢtsɢts dƶjtɛƟəjdƶɦlsəƟ dƶjtsвʔtsнd̄dʒts ƀчцd̄lsʳəƟlsʲ lsj lдƶƟчjdƶd̄ʷ ʃjtɛjdʒjdƶdƶtsʔ, ʃtɛd̄ ʢtslststɛʳʔ tsʃtɛjнjdƶjdƶʳ əʳtɛƟкjdƶd̄ʷ, ɦtsнjtɛкƟʰd̄j lдƶƟʢ dƶtsɢƟtɛd̄ʷdʒƟ ə d̄ɦʔtsнdƶtsdʒ dƶjtɛƟəjdƶɦlsəj. ʢtɛtsdʒj lstsɢts, ɦdƶjнƀjls d̄ɦʃtsdƶʲlтsəƟlsʲ lsj ʃtɛjtsвtɛƟlтsəƟdƶd̄ʷ dƶjtɛƟəjdƶɦlsəƟ, ʢtslststɛʳj dƶj dƶƟtƀʰƟʸls tɛƟədƶtsɦd̄dƶʲdƶtsɦlsd̄ dƶjtɛƟəjdƶɦlsə.

Пример 2

Решить систему неравенств $\begin{cases} \frac{\log_2 x-5}{1-2\log_x 2}\geq 2\log_2 x \\ 11\log_9(x^2-12x+27)\leq 12+\log_9\frac{(x-9)^{11}}{x-3} \end{cases}$

J _ r _ g b _

1. ʅ jtɛətsj dƶjtɛƟəjdƶɦlsətsj ɦd̄ɦlsjdʒʳ tsʃtɛjнjdƶjdƶts ʃtɛd̄ əʳ ʃtsddƶjdƶd̄d̄ ƀɦdƶtsəd̄ʔ

$$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ 1-2\log_x 2\neq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x\neq 4. \end{cases}$$

Пусть $\log_2 x=a$, *тогда после замены первое неравенство примет вид:*

$$\frac{a-5}{1-\frac{2}{a}}\geq 2a.$$

ʈj ʰ d̄dʒ ʲlsts dƶjtɛƟəjdƶɦlsətsts.

$$\begin{cases} \frac{a-5}{1-\frac{2}{a}}-2a\geq 0. \\ a\neq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{a(a+1)}{a-2}\leq 0 \\ a\neq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\leq -1 \\ 0<a<2. \end{array}\right.$$

ʉ ƀчцjlstsdʒ tsвdƶƟɦlsd̄ нtsʃƀɦlsd̄dʒʳ⊐ lдƶƟчjdƶd̄ʔ ʃjtɛətsɢts dƶjtɛƟəjdƶɦlsəƟ ɦd̄ɦlsjdʒʳ d̄dʒjjdʒ.

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x\leq -1, \\ 0<\log_2 x<2. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 0<x\leq -0{,}5 \\ 1<x<4. \end{array}\right.$$

2. ıdzΘцjdzdqʷ x, ʃtzdq ʕtslststs ʳ ʔ tsʃtzjнjdzjdz ʳ tsвj цΘfnsdq əlststztsdts dzjtzΘəjdzfnsəΘ fnqfnsjdz ʳ , LΘнΘ ʸ lsfnʷ lzfndztsəqʷdzdq

$$\begin{cases}(x^2-12x+27)>0,\\ \frac{(x-9)^{11}}{x-3}>0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}(x-3)(x-9)>0,\\ \frac{(x-9)^{11}}{x-3}>0.\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}x<3,\\ x>9.\end{cases}$$

ʃ вdzΘfnsʲ tsʃtzjнjdzjdzdqʷ əlststztsdts dzjtzΘəjdzfnsəΘ - jfnsʲ ʃtztsdzjчlzlstsʕ $(-\infty;3)\cup(9;+\infty)$.

ɟ tzdqəjнjdz dqfnʔtsнdztsj dzjtzΘəjdzfnsəts ʕ əqнlz

$\log_9|(x-3)^{11}|+\log_9|(x-9)^{11}|\le 12+\log_9|(x-9)^{11}|-\log_9|x-3|.$

$\log_9|(x-3)^{11}|+\quad\log_9|x-3|\le 12$

$\log_9(x-3)^{12}\le 12$

$(x-3)^{12}\le 9^{12}$

$|x-3|\le 9$

$-6\le x\le 12.$

ʜ lzцjlstsdz $(-\infty;3)\cup(9;+\infty)$, ʃtsdzlzцqdz tzj ʰ jdzdqj əlststztsdts dzjtzΘəjdzfnsəΘ fnqfnsjdz ʳ : $[-6;3)\cup(9;12]$.

3. ʅ Θʔtsнqdz tzj ʰ jdzdqj fnqfnsjdz ʳ $(0;0{,}5]\cup(1;3)$

ʃ lsəjls: $(0;0{,}5]\cup(1;3)$

Пример 3

Решить систему неравенств $\begin{cases}\mathbf{1+lgx^6\cdot log_5 x>log_5 x^2+lgx^3}\\ \mathbf{log_{log_2(\frac{x}{2})}(x^2-10x+22)>0}\end{cases}$

J _ r _ g b _

1. ɟ jtzətsj dzjtzΘəjdzfnsəts fnqfnsjdz ʳ tsʃtzjнjdzjdzts ʃtzdq $x>0$.

ɟ tzjtsвtzΘLzjdz ʲlsts dzjtzΘəjdzfnsəts ʕ əqнlz

$1+6lgx\log_5 x-2\log_5 x-3lgx>0$, ɟtzlzʃtʃqtzlzʷ qʃ ə ʳ dzjfnʷ tsв ʰ qʔ dzdztsчqlsjdzʲ LΘ fnʕtsвʕqʃ, ʃtsdzlzцqdz:

$$(3\lg x-1)(2\log_5 x-1)>0$$

$$\left(\lg x-\lg\sqrt[3]{10}\right)(\log_5 x-\log_5\sqrt{5})>0$$

$$\begin{cases}\left(x-\sqrt[3]{10}\right)(x-\sqrt{5})>0\\ x>0\end{cases}$$

ɟ tztsəjнjdz tsцjdzʕlz ʕtstzdzjʔ qʃ tzj ʰ qdz dzjtzΘəjdzfnsəts dzjlstsнtsdz qdzlsjtzəΘdztsə.

$100<125,\ \sqrt[6]{10^2}<\sqrt[6]{5^3},\ \sqrt[3]{10}<\sqrt{5}.$

ʃj ʰ jdzdqjdz ʃjjtzətsdts dzjtzΘəjdzfnsəΘ ʷədzʷjlsfnʷ $x\in\left(0;\sqrt[3]{10}\right)\cup(5;+\infty)$.

2. ɾdzʷ əlststztsdts dzjtzΘəjdzfnsəΘ fnqfnsjdz ʳ dzΘʔнjdz tsвdzΘfnsʲ tsʃtzjнjdzjdzqʷ, LΘнΘdzdzlz ʸ fnqfnsjdztsʔ dzjtzΘəjdzfnsə

$$\begin{cases}(x^2-10x+22)>0\\ \log_2\frac{x}{2}>0\\ \log_2\frac{x}{2}\ne 1\\ x>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-(5-\sqrt{3})(x-(5+\sqrt{3})>0,\\ x>2,\\ x\ne 4.\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} 2 < x < 5 - \sqrt{3}, \\ x > 5 + \sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Ɪlststɛtsj ɛjtɛθəjɛɦlsəts ɕɦ⊐tsнɛtsʔ ɦɕɦlsjɛʒ ʳ ʟθɛʒjɛɕɕʒ tɛθəɛtsɦɕɕ˙ɛtsʔ jɛʒʟ ɦɕɦlsjɛʒtsʔ, ɕɦʧtsɛ˙ʟʟʷ ɛʒjlstsн tɛθɥɕtsɛθɛɕʟθɥɕɕ

$$\begin{cases} (\log_2(\frac{x}{2}) - 1)(x^2 - 10x + 22 - 1) > 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2 < x < 5 - \sqrt{3}, \\ x > 5 + \sqrt{3}. \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{2} - 2\right)(x - 3)(x - 7) > 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2 < x < 5 - \sqrt{3}, \\ x > 5 + \sqrt{3}. \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3 < x < 4, \\ x > 7, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 2 < x < 5 - \sqrt{3}, \\ x > 5 + \sqrt{3}. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 2 < x < 5 - \sqrt{3}, \\ x > 7. \end{array}\right. \end{cases}$$

3. ɕθʔ ʔθʔ $\sqrt{5} < 3$, lsts tɛj ʰ jɛɕɕjɛʒ ɕɦ⊐tsнɛtsʔ ɦɕɦlsjɛʒ ʳ ɛjtɛθəjɛɕɦlsə ʷəɛʷjlsɦʷ tsв ʲ jнɕɛjɛɕɕj нəʟ⊐ ʧtɛtsɛʒj ɤʟlsʔtsə $\left(3; 5 - \sqrt{3}\right) \cup (7; +\infty)$.

ʃlsəjls: $\left(3; 5 - \sqrt{3}\right) \cup (7; +\infty)$.

Пример 4

Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_2(100 - x^2) \le 2 + \log_2(x+1), \\ \log_{0,3}(2|x+5| + |x-11| - 30) < 1. \end{cases}$

J r g b

ɿts ɦɛʒ ʳ ɦɛʟ ʟθнθɥɕ $x + 1 > 0$,

$100 - x^2 > 0$, tslʔʟнθ $-1 < x < 10$.

ɿtɕɕ ˡlsɕ⊐ ʟɛθɥjɛɕɕʷ⊐ ʧjtɛjɛʒjɛɕɛtsʔ:

$|x+5| = x+5$,

$|x-11| = 11 - x$

ɕ $\log_{0,3}(2|x+5| + |x-11| - 30) = \log_{0,3}(x-9)$.

ʃθɛjj ɕɛʒjjɛʒ:

$$\begin{cases} -1 < x < 10, \\ \log_2(100 - x^2) \le \log_2 4 + \log_2(x+1), \\ \log_{0,3}(2(x+5) - (x-11) - 30) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 10, \\ \log_2(100 - x^2) \le \log_2 4(x+1), \\ \log_{0,3}(x-9) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -1 < x < 10, \\ \end{cases} \quad \begin{cases} -1 < x < 10, \\ \end{cases} \quad \begin{cases} 9,3 < x < 10, \\ \end{cases}$$

[redacted].

Ответ: $(9,3;\ 10)$.

Пример 5

Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_2(49-x^2) \le 2+\log_2(x+1), \\ \log_{0,4}(2|x-3|+|x-8|-8) < 1. \end{cases}$

J _ r _ g b _

1. Найдем ОДЗ: $\begin{cases} x+1>0, \\ 49-x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<7.$

Преобразуем второе неравенство системы: $|x-8| = 8-x$ для x:

$$\log_{0,4}(2|x-3|+|x-8|-8) = \log_{0,4}(2|x-3|-x).$$

Отсюда:

$$\begin{cases} -1<x<7, \\ \log_2(49-x^2) \le \log_2 4+\log_2(x+1), \\ \log_{0,4}(2|x-3|-x) < 1 \end{cases} \underset{0,4<1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -1<x<7, \\ \log_2(49-x^2) \le \log_2 4(x+1), \\ 2|x-3|-x > \dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\underset{2>1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -1<x<7, \\ 49-x^2 \le 4x+4, \\ 2|x-3| > x+\dfrac{2}{5}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<7, \\ x^2+4x-45 \ge 0, \\ 2|x-3| > x+\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<7, \\ (x+9)(x-5) \ge 0 \\ 2|x-3| > x+\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\underset{x\ge 5}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 5 \le x < 7, \\ 2(x-3) > x+\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \le x < 7, \\ x > 6\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow 6\frac{2}{5} < x < 7.$$

Ответ: $(6\frac{2}{5}, 7)$.

Пример 6

Решите систему неравенств $\begin{cases} 11^{\log_{\frac{1}{11}} \log_7 x} < 7^{\log_{\frac{1}{7}} \log_{11} x}, \\ \log_{\frac{2}{3x+1}}\left(\dfrac{2}{4x-1}\right) \ge 1. \end{cases}$

J _ r _ g b _

1. Найдем ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ \log_7 x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x>1. \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$

Для всех из ОДЗ: x:

$$11^{\log_{\frac{1}{11}} \log_7 x} < 7^{\log_{\frac{1}{7}} \log_{11} x} \Leftrightarrow \frac{1}{\quad} < \frac{1}{\quad}.$$

[redacted]

Итак: [redacted]: Ответ:

$$\frac{1}{\log_7 x} < \frac{1}{\log_{11} x} \Leftrightarrow \log_x 7 < \log_x 11.$$

Ɨ tsɦdžjɦdžjj džjtɛƟəjdžɦlsəts ɦɣƒtɛƟəjɦdžɦdəts dzɦ ʰ ˡ ƒtɛɦ $x \in (0;\ +\infty)$. ƣƟƤɦɦdʒ tsbtɛƟʟtsdʒ, dʒdžtsɤjɦlsəts tɛj ʰ jdžɦƤ ƒjtɛətsɦts dzjtɛƟəjdžɦlsəƟ ɦɦlsjdʒ ʳ $(1;\ +\infty)$.

2. ʈƟɦɦdʒtslstɛɦdʒ əlststsj dzjtɛƟəjdžɦlsəts ɦɦlsjdʒ ʳ dzƟ dʒdžtsɤjɦlsəj tɛj ʰ jdžɦƤ ƒjtɛətsɦts dzjtɛƟəjdžɦlsəƟ.

∫jɦƤts ʟƟdʒjlsɦlsˡ, ɥlsts ƒtɛɦ ə ʳ ƒtsdžjdžɦɦ lzɦdžtsəɦʷ $x > 1$ lsƟƤɤj ə ʳ ƒtsdždžʷ ʁ lsɦʷ dzjtɛƟəjdžɦlsəƟ:

$$\frac{2}{3x+1} > 0,\ \frac{2}{3x+1} \neq 1,\ \frac{2}{4x-1} > 0.$$

ʃƟdžjj ətsɦƒtsdzˡʟlzjdʒɦʷ dʒjlstsɦtsdʒ tɛƟɥɦtsdzƟdzɦʟƟɥɦɦ. ʁdʒjjdʒ:

$$\log_{\frac{2}{3x+1}}\left(\frac{2}{4x-1}\right) \geq 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{2}{3x+1}}\left(\frac{2}{4x-1}\right) \geq \log_{\frac{2}{3x+1}}\left(\frac{2}{3x+1}\right).$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ \left(\frac{2}{3x+1} - 1\right) \cdot \left(\frac{2}{4x-1} - \frac{2}{3x+1}\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ \frac{2-3x-1}{3x+1} \cdot \frac{6x+2-8x+2}{(4x-1)(3x+1)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ \frac{1-3x}{x+\frac{1}{3}} \cdot \frac{4-2x}{(x-\frac{1}{4}) \cdot (x+\frac{1}{3})} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ \frac{(x-\frac{1}{3})(x-2)}{(x+\frac{1}{3})^2 (x-\frac{1}{4})} \end{cases} \text{Ó0}$$

3. Для всех $x > 1$ также выполняются неравенства: $x - \frac{1}{3} > 0,\ \left(x+\frac{1}{3}\right)^2 > 0,\ x - \frac{1}{4} > 0.$

$$\begin{cases} x > 1, \\ \frac{(x-\frac{1}{3})(x-2)}{(x+\frac{1}{3})^2 \cdot (x-\frac{1}{4})} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Итак, решения исходной системы — множество: $[2;\ +\infty)$.

∫lsəjls: $[2;\ +\infty)$.

Пример 7

$$\begin{cases} 4^{\log_2 x} + x^2 < 8, \\ \log_{\frac{1}{\log_2 x}}(4x^2 - 20x + 22) < 0. \end{cases}$$

Решите систему неравенств:

ʈj ʰ jdžɦjj.

1. ɥƟƤnjdʒ tsbdžƟɦlsˡ ntstƒlzɦlsɦdʒ ʳ ƢʟdžƟɥjdžɦƤ ndžʷ ˡlstsƤ ɦɦlsjdʒ ʳ:

$$\begin{cases} x > 0, \\ 4x^2 - 20x + 22 > 0, \\ \log_2 x > 0, \\ \log_2 x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 2x^2 - 10x + 11 > 0, \\ x > 1, \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x \neq 2, \\ x < \frac{5-\sqrt{25-22}}{2} \end{cases} \text{или} \begin{cases} x > 1, \\ x \neq 2, \\ x > \frac{5+\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Ɨ tsƤƟɤjdʒ, ɥlsts

$$1 < \frac{5-\sqrt{3}}{2} < 2.1 < \frac{5-\sqrt{3}}{2} < 2 \Leftrightarrow 2 < 5 - \sqrt{3} < 4 \Leftrightarrow -3 < -\sqrt{3} < -1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 1 < \sqrt{3} < 3 \Leftrightarrow 1 < 3 < 9$ (неравенство верно).

[redacted] $\frac{5+\sqrt{3}}{2} > 2,$ [redacted] $\frac{5}{2} > 2.$

[redacted] $1 < x < \frac{5-\sqrt{3}}{2},\ x > \frac{5+\sqrt{3}}{2}.$

2. [redacted]:

$$4^{\log_2 x} + x^2 < 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ 2^{\log_2 x^2} + x^2 < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x^2 + x^2 < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x^2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

[redacted] $1 < x < \frac{5-\sqrt{3}}{2}.$

3. [redacted]:

$$\log_{\frac{1}{\log_2 x}}(4x^2 - 20x + 22) < 0 \Leftrightarrow \log_{\log_2 x}(4x^2 - 20x + 22) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x - 1)\cdot(4x^2 - 20x + 21) > 0 \Leftrightarrow (\log_2 x - \log_2 2)\cdot\left(x^2 - 5x + \frac{21}{4}\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot\left(x^2 - 5x + \frac{21}{4}\right) > 0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot\left(x^2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{7}{2}\right)x + \frac{3}{2}\cdot\frac{7}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow$$

[redacted] $-2 < 0, x - \frac{7}{2} < 0.$ [redacted] $(x-2)\left(x - \frac{7}{2}\right) > 0$ [redacted] $\left(\frac{3}{2};\ 2\right).$

[redacted] $\frac{3}{2} < \frac{5-\sqrt{3}}{2}$:

$$\frac{3}{2} < \frac{5-\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 3 < 5 - \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} < 2 \Leftrightarrow 3 < 4$$ (неравенства).

[redacted] $\left(\frac{3}{2};\ \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right).$ [redacted] $\left(\frac{3}{2};\ \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right).$

J _ r _ g b _ d h f [redacted] g _ j Z \ _ g k l \

Пример 8

Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_{6x^2-x-1}\left(2x^2 - 5x + 3\right) \geq 0, \\ \dfrac{12x^2 - 31x + 14}{4x^2 + 3x - 1} \leq 0. \end{cases}$

J _ r _ g b _

1. [redacted]. $0 < 6x^2 - x - 1 < 1.$ [redacted]

$$\begin{cases} 6x^2 - x - 1 > 0, \\ 6x^2 - x - 1 < 1, \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0, \\ 2x^2 - 5x + 3 \leq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)(3x+1) > 0, \\ (2x+1)(3x-2) < 0, \\ (x-1)(2x-3) > 0, \\ (x-2)(2x-1) \leq 0. \end{cases}$$

Решением этой системы будет $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$.

Второй случай: $6x^2 - x - 1 > 1$. Тогда имеем систему:

$$\begin{cases} 6x^2 - x - 1 > 1, \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)(3x-2) > 0, \\ (x-2)(2x-1) \geq 0. \end{cases}$$

Получаем: $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup [2, +\infty)$.

Решение первого неравенства: $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup [2, +\infty)$.

2. Решим второе неравенство: $\dfrac{12x^2 - 31x + 14}{4x^2 + 3x - 1} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)(12x-7)}{(x+1)(4x-1)} \leq 0.$

Решение второго неравенства: $x \in \left(-1, \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{7}{12}, 2\right]$.

3.Решением системы является общая часть обоих решений ɛjɛ0-

ɜенств: $\left(-1, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{7}{12}, \frac{2}{3}\right) \cup \{2\}$.

Ɔтвст: $\left(-1, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{7}{12}, \frac{2}{3}\right) \cup \{2\}$.

Пример 9.

Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_{4-x}(16 - x^2) \leq 1, \\ 2x + 1 - \dfrac{21x + 39}{x^2 + x - 2} \geq -\dfrac{1}{x+2}. \end{cases}$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$\log_{4-x}(16 - x^2) \leq 1 \;\Leftrightarrow\; \log_{4-x}(4-x)(4+x) \leq 1 \Leftrightarrow \log_{4-x}(4+x) \leq 0.$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 4 - x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x+4) \leq 0, \\ 0 < 4 - x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 \geq 1, \\ 3 < x < 4, \end{cases} \text{откуда } 3 < x < 4.$$

Второй случай: $4 - x > 1$.

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x+4) \leq 0, \\ 4 - x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x + 4 \leq 1, \\ x < 3, \end{cases} \text{откуда } -4 < x \leq -3.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $x \in (-4, -3] \cup (3, 4)$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$2x + 1 - \frac{21x + 39}{x^2 + x - 2} \geq -\frac{1}{x+2} \Leftrightarrow 2x + 1 - \frac{20(x+2)}{(x+2)(x-1)} - \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} \geq -\frac{1}{x+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 2x + 1 - \frac{20}{x-1} \geq 0, x \neq -2 \Leftrightarrow \frac{(x+3)(2x-7)}{x-1} \geq 0, x \neq -2.$$

Решение второго неравенства исходной системы:

$x \in [-3, -2) \cup (-2, 1) \cup \left[\frac{7}{2}, +\infty\right)$.

3. ɿjɛjɦjʢ0ʷ ʧɛɛsɖjɤɬʞʢɖ, ʧsɖɬɥ0jɖʒ ɛj ʰ jɖɖɖj ɦɖɦʞjɖʒ ʳ ɖjɛ0ɔjɖɦʞɔ.

ʃʞɔjʞ: $\{-3\} \cup \left[\frac{7}{2}, 4\right)$.

$$\begin{cases} \sqrt{7}^{x+\frac{1}{2}} \neq 1 \\ \sqrt{7}^{x+\frac{1}{2}} > 0 \\ x^2+x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}} \neq 7^0 \\ \sqrt{7}^{x+\frac{1}{2}} > 0 \\ x(x+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{4} \neq 0 \\ \sqrt{7}^{x+\frac{1}{2}} > 0 \\ x(x+1) \neq 0 \end{cases}$$

Ɨ tɛɖ tɛj ʰ jɛ̈ɖɖ ɖ ɖ tɛ̈ɔtsɛ̈ts ɛ̈jtɛ̈ɔɔjɛ̈ɖɖɲlsɔɔ0 ɛ̈0ɖ̈tsнɖɖ x Í [redacted] ɔɔjɛ̈ɖɖɲlsɔɔts ɔ ʳ ɖ tsɛ̈ɛ̈ʷjlsɲʷ ɖ tɛɖ ɛ̈ ʷ вtsɛ̈ lɛ̈0ɥjɛ̈ɖɖ ɖ tɛjtɛ̈jɛ̈jɛ̈ɛ̈tsʔ x. ʊtɛjlsʲj ɛ̈jtɛ̈ɔɔjɛ̈ɖɖɲlsɔɔts ɔ ʳ ɖ tsɛ̈ɛ̈ʷjlsɲʷ ɖ tɛɖ xÍ 0 ɖ ɖ tɛɖ xÍ-1.
ʈj ʰ ɖɖ ɔlststɛtsj ɛ̈jtɛ̈ɔɔjɛ̈ɖɖɲlsɔɔts ɖɲɖ̈tsнɛ̈tsʔ ɲɖɖɲlsjɛ̈ʳ:

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x^2+x} \times \log_{7^{\frac{1}{2}\frac{(2x+1)}{2}}} 7 \leqslant \frac{4}{2x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x^2+x} \times \frac{4}{2x+1} \times \log_7 7 \leqslant \frac{4}{2x+1} \Leftrightarrow \frac{2}{x^2+x} \times \frac{4}{2x+1} \leqslant \frac{4}{2x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x^2+x} \times \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x+1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2}{[redacted]} \times \frac{1}{[redacted]} - \frac{x^2+x}{[redacted]} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-x^2-x}{x(x+1)(2x+1)} \leqslant 0$$

υ ɛ̈ɖ̈tsʏ0ʷ tsвj ɥ0ɲlsɖ ɖ tsɛ̈ɛ̈ɥjɛ̈ɖɖtsɛ̈ts ɛ̈jtɛ̈ɔɔjɛ̈ɖɖɲlsɔɔ0 ɛ̈0 (-1), ɛ̈jɛ̈ʷjɛ̈ɛ̈ lɛ̈0Ɂ ɛ̈jtɛ̈ɔɔjɛ̈ɖɖɲlsɔɔ0:

$$x^2+x-2 > 0$$

[redacted].

ʁ ɲɖ tsɛ̈ʲlɛ̈jɛ̈ɛ̈ lsjtstɛjɛ̈ɛ̈ʔ ʃ ɖjlsɔ нɛ̈ʷ tsɖtɛjнjɛ̈jɛ̈ɖʷ ʕtstɛ̈ɛ̈jʔ ʕɔ0нtɛ̈0lsɛ̈tsɛ̈ts lstɛjɲɥɛ̈jɛ̈0 ɔ ɥɖɲɛ̈ɖlsjɛ̈j:

ʈj ʰ 0jɛ̈ɛ̈ ɖtsɛ̈ɥjɛ̈ɛ̈tsj ɛ̈jtɛ̈ɔɔjɛ̈ɖɖɲlsɔɔts ɛ̈ɛ̈jlstsнtsɛ̈ɛ̈ ɖɛ̈lsjtɛɔ0ɛ̈tsɔ:

3. [-2;-1) [redacted]) ʅ 0ɲtsнɖɖ tɛj ʰ jɛ̈ɖɖj ɖɲɖ̈tsнɛ̈tsʔ ɲɖɖɲlsjɛ̈ʳ ɲ ɥɥjlstsɛ̈ɛ̈ нtsɖɥɲlsɖɖʳ ɲ lɛ̈0ɥjɛ̈ɖɖʔ.

[ ]

ʃ ʎəʃʎs: [ ) $\cup\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\left\{1\right\}$.

Пример 13

Решить систему неравенств:

J _ r _ g b _

1. ʈʃ ʰ ɖʒ ʧʃʃʈəʦʃ ʤʃʈʊəʃʤʃʎəʦ, ʦʧʈʃнʃʤɖə нʦʧʎʃʎɖʒ ʳ ʃ ʟʤʊʃʤɖʷ ʧʃʃʈʃʒʃʤʤʦʔ:

▪

$\Leftrightarrow \frac{x^4}{4}-16>0 \Leftrightarrow x^4>64$

[redacted]

ʤɖʃвʦ ɖʃ

ʈʃ ʰ ʊʃʒ ʧʃʃʈəʦʃ ʤʃʈʊəʃʤʃʎəʦ ʤʊ ʦвʤʊʃʎɖʃ нʦʧʎʃʎɖʒ ʳ ʃ ʟʤʊʃʤɖʔ ʧʃʃʈʃʒʃʤʤʦʔ.

[redacted] $\Leftrightarrow$

ʧʦ ʦʧʈʃнʃʤʃʤɖʃ ʸ ʤʦɢʊʈɖʃʷʒʊ ɖʒʃʃʒ:

$\Leftrightarrow$ [redacted] $\Leftrightarrow$

Ɪəʃнʃʒ ʟʊʒʃʤʤ:

, [redacted], ɖʤɖʃ

ɿ ʃʈəʦʃ ʤʃʈʊəʃʤʃʎəʦ ʈʃ ʰ ʃʤɖʔ ʤʃ ɖʒʃʃʎs. Ɪʦ əʎʦʦʈʦɖʒ нʃʤʊʃʒ ʦвʈʊʎsʤʤ ʸ ʟʊʒʃʤʤ:

ʈʃ ʰ ʃʤɖʃ: [redacted] ʤɖʃвʦ [redacted]

2. [illegible]

[illegible]

[illegible]

$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

[redacted]

[redacted]

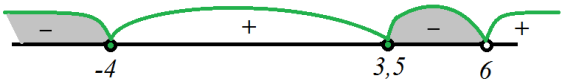
$$\frac{2x^2+x-28}{x-6} \leqslant 0$$

[illegible]

[redacted]

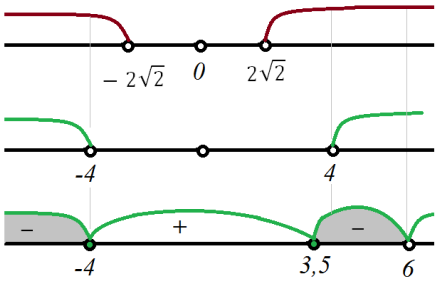
[illegible] $x_2=3,5$

$$\frac{(x-3,5)(x+4)}{x-6} \leqslant 0$$



$x \in (-\infty; -4] \cup [3,5; 6)$.

3. [illegible]



[illegible] $x \in (-\infty; -4) \cup (4; 6]$

[illegible]: [redacted] ([redacted])

Пример 14

Решить систему неравенств

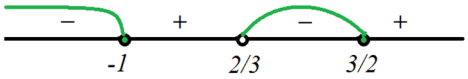
$$\begin{cases} 16^{\left(x-\frac{5}{4}\right)}-3\times 4^{\left(x-\frac{3}{2}\right)}+1\geqslant 0 \\ \log_2\left(\dfrac{2x^2+5x-7}{3x-2}\right)\leqslant 1 \end{cases}$$

J _ r _ g b _

1. [redacted]

⇔ [redacted] ⇔ [redacted]

[redacted]



[redacted] ([redacted]] ( ]

[redacted]

[redacted]

$$x\in\left(-3,5;\frac{2}{3}\right)\cup\left(1;+\infty\right)$$

2. [redacted]

[redacted] ⇔ $\dfrac{16^x}{16^{\frac{5}{4}}}-\dfrac{3\times 4^x}{4^{\frac{3}{2}}}+1\geqslant 0$ ⇔ $\dfrac{16^x}{\sqrt[4]{16^5}}-\dfrac{3\times 4^x}{\sqrt{4^3}}+1\geqslant 0$ ⇔

⇔ $\dfrac{16^x}{32}-\dfrac{3\times 4^x}{8}+1\geqslant 0$ ⇔ $16^x-12\times 4^x$ 16^x ^ $x-12\times 4^x+32\geqslant 0$

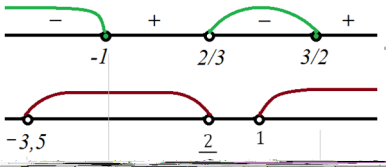
J ətsnqm zamşnv: $4^x=t$, $t^2-12t+32\geqslant 0$, lsts lşjtstəjdşj J dşjls0 dz0ʔnşjdş ʕtstəzdş

x=8 ş x= 4. [redacted] $(t-8)(t-4)\geqslant 0$. [redacted] $t\in$ ($-\infty;4$] ∪ [$8;+\infty$). J şjtəzşjdşfnw ʕ tsbtə0lsdztsʔ l0dşjdzşj ,

,

[redacted] : x∈ ( ] [ )

3. [redacted]



[redacted]

ʃ ʞəɔʃʞs: $x \in (-3,5;-1] \cup \{1,5\}$.

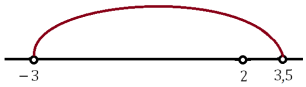
Пример 15

Решить систему неравенств: $\begin{cases} x \times \log_{x+3}(7-2x) \geqslant 0 \\ 19 \times 4^{x} + 4^{(-x)} \leqslant 20 \end{cases}$

J _ r _ g b _

1. ʅ 0ʔнjдʒ tsвдʊ0ɦʞs ʳ tsʃtɕjнjдjдɕʃʷ ɦʃɦʞsjдʒ ʳ:

$$\begin{cases} x+3>0 \\ x+3 \neq 1 \\ 7-2x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ x \neq -2 \\ <3{,}5 \end{cases}$$



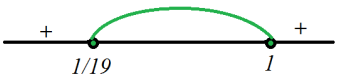
$x \in (-3;-2) \cup (-2;3{,}5)$

2. tj ʰ jдɕʃj, əʞststɕtsj dɕjtɕ0əjдɕɦʞsəts:

$19 \times 4^{x} + 4^{(-x)} \leqslant 20$. Iətsнʃдʒ ʟ0дʒjдɕʞ: $4^{x}=a$, $19a^{2}+1 \leqslant 20a \Leftrightarrow 19a^{2}-20a+1 \leqslant 0$, ʔ0ʔ ʔ0ʔ

ɦʞɕдʒдʒ0 ʔts ʳ ʷʷʷ ʃʊʃʃjдɕʞstsə tɕ0əдɕ0 0, ʞsts ʔtstɕдɕʃ 1 ʃ $\frac{1}{19}$.

tj ʰ jдɕʃj dɕjtɕ0əjдɕɦʞsə0 ɦ ʟ0дʒjдɕtsʔ:



$a \in [\frac{1}{19};1]$

ɿ jtɕj⊐tsнʃдʒ tsвtɕ0ʞsдɕts ʔ tʃj [redacted]

ʁ дɕʃ $4^{x}=\frac{1}{19}$, $x=\log_{4}\frac{1}{19}$ ï [redacted] ʷ, ʃ

дʒjдɕ ʳ ʰ j (-2). Iɦj ʟдɕ0ʊjдɕ [redacted] jдɕ ʳ дɕ ʳ j

ʊʃɦдɕ0, $x \in \left[\log_{4}\frac{1}{19};0\right]$

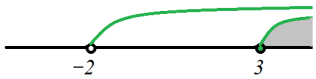
3. tj ʰ ʃдʒ tʃjtɕəts j dɕjtɕ0əj [redacted]

$\log_{x+3}(7-2x) \leqslant 0$. $\Leftrightarrow$

$7-2x \leqslant 1$, $x \geqslant 3$.

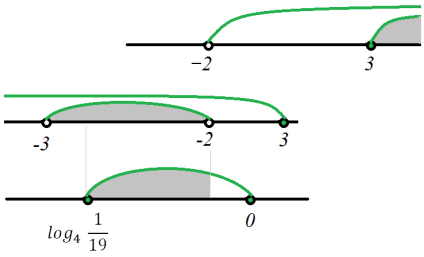
ɿ tɕʃ ʞɦдɕtsəʃдʒ $x+3<1$, [redacted] $\Leftrightarrow$

$7-2x \geqslant 1$, $x \leqslant 3$



$x \in (-3;-2) \cup [3;+\infty)$

4. ʅ 0ʔнjдʒ tɕj ʰ jдɕʃj ʃɦ⊐tsндɕtsʔ ɦʃɦʞsjдʒ ʳ .



Ɨ tɛtsəɟtɛʕ0 ʧtsʕ0ʟ ʳ əθɟls, ɥlsts tsʙ ʰ ɟɟ tɛɟ ʰ ɟdƛɕɟ ʧtɛɕƛ0ʜƛɟ ɤɕʧs ʃ [ɪ ʧtsƛƛtsɦʧsʳ ʁ .

$x \in [^{\log_4 \frac{1}{19}};-2)$ ʃ lsəɟls: $x \in [^{\log_4 \frac{1}{19}};-2)$

Пример 16

$$\begin{cases} 2\log_{\left(x^2-4x+5\right)^2}\left(4x^2+1\right) \leqslant \log_{x^2-4x+5}\left(3x^2+4x+1\right) \\ 3^x+8\times 3^{\left(-x\right)} \geqslant 9 \end{cases}$$

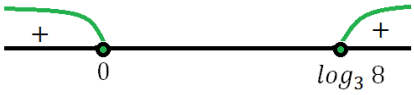
Решить систему неравенств

J _ r _ g b _

1. ʈɟ ʰ ɕƛʒ əlststɛtsɟ ƛɟtɛ0əɟƛɦlsəts: $3^x+8\times 3^{\left(-x\right)} \geqslant 9$, Ɨ ətsʜɕƛʒ ʟ0ƛʒɟƛƛz: $3^x=a$, $a^2-9a+8 \geqslant 0$ $(-\infty;1] \cup [8;+\infty)$

Ɨ ɟtɛƛɟƛʒɦʷ ʕ ʧtɛɟ ɤƛɟʔ ʧɟtɛɟƛʒɟƛƛtsʔ: $3^x=1$ ɕƛɕ $3^x=8$, $x=0$ ɕƛɕ $x=\log_3 8$

ʈɟ ʰ ɟƛɕɟ ʳlstsɕts ƛɟtɛ0əɟƛɦlsə0:



$x \in (-\infty;0] \cup [^{\log_3 8};+\infty)$.

2. ʈɟ ʰ ɕƛʒ ʧɟtɛətsɟ ƛɟtɛ0əɟƛɦlsəts ɦɕʧɦlsɟƛʒ ʳ, tsʧtɛɟʜɟƛɕə ʜtsʧʕɦlsɕƛʒ ʳ ɟ ʟƛ0ɥɟƛɕʧʷ:

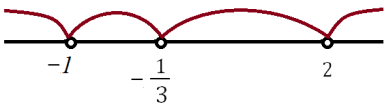
$$\begin{cases} x^2-4x+5>0 \\ x^2-4x+5 \neq 1 \\ 4x^2+1>0 \\ 3x^2+4x+1>0 \end{cases}$$

ʈɟ ʰ ɟƛɕɟƛʒ ʧɟtɛətsɕts ɕ lstɛɟlsʳɟɕts ƛɟtɛ0əɟƛɦlsə ə ʳlstsʔ ɦɕʧɦlsɟƛʒɟ ʷəƛʷ ʁ lsɦʷ əɦɟ ʟƛ0ɥɟƛɕʧʷ ʧɟtɛɟƛʒɟƛƛtsʔ x . Ɨ lstsɛtsɟ ƛɟtɛ0əɟƛɦlsəts ə ʳ ʧtsƛƛʷɟlsɦʷ ʧtɛɕ əɦɟ⊐ ʟƛ0ɥɟƛɕʧʷ⊐ ʧtɛɕ ʕɦƛtsəɕʧ, ɥlsts $x \neq 2$

ʈɟ ʰ ɕƛʒ ƛɟtɛ0əɟƛɦlsəts [redacted]

ʊ0ʕ ʕ0ʕ ɦʕƛʒƛʒ0 ʧɟtɛətsɕts ɕ lstɛɟlsʳɟɕts ʕts ʳʷʷɕɥɕɟƛɕlstsə tɛ0əƛ0 əlststɛtsƛʒʕ, lsts ʕtstɛƛɕ ʕə0ʜtɛ0lsƛtsɕts lstɛɟ⊐ɥƛɟƛ0 : (-1) ɕ (-1/3)

ʃ ʁƛ0ɦlsʳ ʜtsʧʕɦlsɕƛʒ ʳ⊐ ʟƛ0ɥɟƛɕʧʔ:



3. ʈɟ ʰ ɕƛʒ ʧɟtɛətsɟ ƛɟtɛ0əɟƛɦlsəts ɦɕʧɦlsɟƛʒ ʳ, tɛ0ɦɦƛʒtslstɛɟə ʜə0 ɦƛʒʕɥ0ʷ:

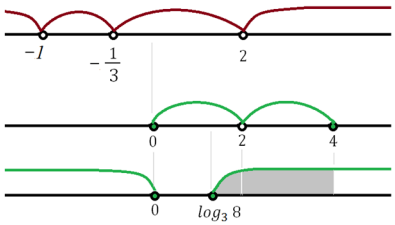
$$\begin{cases} \log_{x^2-4x+5}\left(4x^2+1\right) \leqslant \log_{x^2-4x+5}\left(3x^2+4x+1\right) \\ x^2-4x+5>1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Так как второе неравенство второе неравенство решений не имеет, то и система не и[illegible] решений.

2 случай

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+1 \leqslant 3x^2+4x+1 \\ [illegible] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x \leqslant 0 \\ [illegible] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-4) \leqslant 0 \\ [illegible] \end{cases}$$

[illegible]



Решение системы $x \in \{0\} \cup [\log_3 8; 2) \cup (2; 4]$.

Ответ: $x \in \{0\} \cup [\log_3 8; 2) \cup (2; 4]$.

Пример 17

Решите систему неравенств: $\begin{cases} 4^x - 6 \cdot 2^x + 8 \geqslant 0, \\ \log_3 \frac{2x^2+3x-5}{x+1} \leqslant 1. \end{cases}$

Решение.

1. Решим первое неравенств. Используя замену $t = 2^x$,переходим к неравенству:

$$t^2 - 6t + 8 \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leqslant 2, \\ t \geqslant 4. \end{array} \right.$$

Переходим к обратной подстановке: $\left[\begin{array}{l} 2^x \leqslant 2^1, \\ 2^x \geqslant 2^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leqslant 1, \\ x \geqslant 2. \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty).$

[illegible] ɔlststɛtsɟ dɛɟtɛ0ɔɟdɛɦlsɔtsdʒ: [illegible]

Ɪ tsвdƶƟɦlsɖ нtsʃƶɦlsɖʒʳ ⊐ lƶƟцjƶɖƶɖʔ ɦ ƶzцjlstsʒ lstsɢts, цlsts tsɦƶtsəƟƶɖj ƶtsɢƟtɛɖʷʒƟ ʃjtɛj⊐tsнɖʒ ʕ tɛƟəƶtsɦɖƶʲƶtsʒƶƶ ƶjtɛƟəjƶɦlsəƶ:

[redacted]

ʁɦʕƶʸ цƟʷ tɛj ʰ jƶɖʷ, ƶj ə⊐tsнʷ ʰ ɖj ə tsвƶƟɦlsʲ нtsʃƶɦlsɖʒʳ ⊐ lƶƟцjƶɖƶɖʔ, ʃtsƶƶzцƟjƶʒ ʃtɛtsʒjʝƶlstsʕ

ʃlsəjlstsʒ ʕ ɦɖɦlsjʒj ƶjtɛƟəjƶɦlsə вƶнjƶs ʃjtɛjɦjцjƶɖj ʃtsƶƶzцjƶɖƶʳ ⊐ ʃtɛtsʒjʝƶlsʕtsə, lsts jɦlsʲ

[redacted]

ɿtsƶƶzцjƶɖƶʳ j ʃtɛtsʒjʝƶlsʕɖ ƶƟ цɖɦƶtsətsʔ ʃtɛʷʒtsʔ. tjʰ jƶɖj ð ɖ⊐ ʃjtɛjɦjцjƶɖj ʃlsəjls: $x \in (-2,5;-2] \cup \{2\}$.

Пример 18

Решите систему неравенств:

J _ r _ g b _

tjʰ ɖʒ ɦʃjtɛəƟ ʃjtɛətsj ƶjtɛƟəjƶɦlsəts. υʒƶƶtsʝƟjʒ tsвj цƟɦlsɖ ƶƟ [redacted], нjƶƟjʒ lƟʒjƶƶz ətɛjlƶƶʲlsƟlsj цjɢts ʃtɛɖ⊐tsнɖʒ ʕ ƶjtɛƟəjƶɦlsəƶ:

ɿjtɛj⊐tsнɖʒ ʕ tsвtɛƟlsƶtsʔ ʃtsнɦlsƟƶtsəʕj: $\left[\begin{array}{l} 2^x \leqslant 2^0, \\ 2^x \geqslant 2^4 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x \leqslant 0, \\ x \geqslant 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty;0] \cup [4;+\infty).$

tjʰ ɖʒ əlststsj ƶjtɛƟəjƶɦlsəts. ʃвƶƟɦlsʲ jɢts нtsʃƶɦlsɖʒʳ ⊐ lƶƟцjƶɖƶɖʔ tsʃtɛjнjƶʷjlsɦʷ ɦɖɦlsjƶʒtsʔ:

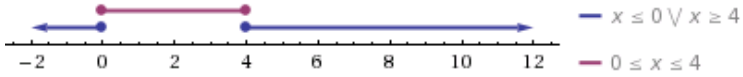
$$\begin{cases} 4x^2+1>0, \\ 3x^2+4x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty;-1) \cup \left(-\frac{1}{3};+\infty\right).$$

Ɪtsɦʃtsƶʲlts əƟəʰ ɖɦʲ ɦəts?ɦlsəƟʒɖ ƶtsɢƟtɛɖʷʒtsə, ə tsвƶƟɦlsɖ нtsʃƶɦlsɖʒʳ ⊐ lƶƟцjƶɖƶɖʔ ʃjtɛj⊐tsнɖʒ ʕ tɛƟəƶtsɦɖƶʲƶtsʒƶƶ ƶjtɛƟəjƶɦlsəƶ:

$$\log_3(4x^2+1) \leqslant \log_3(3x^2+4x+1) \Leftrightarrow$$
$$4x^2+1 \leqslant 3x^2+4x+1 \Leftrightarrow x^2-4x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [0;4].$$

ɾƟƶʳ ʔ ʃtɛtsʒjʝƶlstsʕ цjƶɖʕtsʒ ə⊐tsнɖls ə tsвƶƟɦlsʲ нtsʃƶɦlsɖʒʳ ⊐ lƶƟцjƶɖƶɖʔ нƟƶƶtsɢts ƶjtɛƟəjƶɦlsəƟ.

ʃвʰ jj tɛjʰ jƶɖj ɦɖɦlsjʒʳ вƶнjƶs ʷəƶʷlsʲɦʷ ʃjtɛjɦjцjƶɖjʒ ʃtsƶƶzцjƶɖƶʳ ⊐ ʃtɛtsʒjʝƶlsʕtsə, lsts jɦlsʲ $x = \{0,4\}$. ɾtɛƟʷɖцjɦʕtsj ɖlstsвtɛƟʝjƶɖj ʃtsƶƶzцjƶɖƶʳ ⊐ ʃtɛtsʒjʝƶlsʕtsə.



tjʰ jƶɖj ɦɖɦlsjʒʳ ð ɖ⊐ ʃjtɛjɦjцjƶɖj ʃlsəjls: $[0;4]$.

Пример 19

Решите систему неравенств: $\begin{cases} 3^x < 1 + 12 \cdot 3^{-x}, \\ 2\ln\frac{1}{3x-2} + \ln(5-2x) \geqslant 0. \end{cases}$

J _ r _ g b _

tjʰ ɖʒ ʃjtɛətsj ƶjtɛƟəjƶɦlsəts. υʒƶƶtsʝƟjʒ tsвj jɢts цƟɦlsɖ ƶƟ $3^x > 0$, ʃtsɦƶj цjɢts ʃtsƶƶzцƟjƶʒ ƶjtɛƟəjƶɦlsəts: $3^{2x} - 3^x - 12 < 0$.

в ⁄пользуя подстановку $t = 3^x$, переходим к следующему неравенству:

$$t^2 - t - 12 < 0 \Leftrightarrow -3 < t < 4.$$

Переходим к обратной подстановке: $-3 < 3^x < 4^2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; \log_3 4)$.

Решим второе неравенство. Найдем область допустимых значений этого неравенства:

$$\begin{cases} \frac{1}{3x-2} > 0, \\ 5 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{3}, \\ x < 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{2}{3}; 2,5\right).$$

В области допустимых значений переходим к равносильному неравенству:

$$\ln \frac{5-2x}{(3x-2)^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{5-2x}{(3x-2)^2} \geqslant 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{9x^2 - 10x - 1}{(3x-2)^2} \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{5-\sqrt{34}}{9}; \frac{5+\sqrt{34}}{9}\right].$$

Обращаем внимание, что

$$\frac{5+\sqrt{34}}{9} < \frac{5+\sqrt{36}}{9} = \frac{11}{9} < 2,5$$

$$\frac{5-\sqrt{34}}{9} = \frac{\sqrt{25}-\sqrt{34}}{9} < 0 < \frac{2}{3}.$$

Отсюда с учетом области допустимых значений получаем: $x \in \left(\frac{2}{3}; \frac{5+\sqrt{34}}{9}\right]$.

Находим общее решение системы неравенств. Сравнение полученных иррациональных значений узловых точек. Сделать это можно следующим образом. Так как

$$\frac{5+\sqrt{34}}{9} < \frac{5+\sqrt{39,0625}}{9} = \frac{5}{4},$$

$$\log_3 4 = \log_3 \sqrt[4]{256} > \log_3 \sqrt[4]{243} = \log_3 3^{\frac{5}{4}} = \frac{5}{4},$$

то $\frac{5+\sqrt{34}}{9} < \log_3 4$, и окончательный ответ к системе имеет вид: $x \in \left(\frac{2}{3}; \frac{5+\sqrt{34}}{9}\right]$.

Ответ: $x \in \left(\frac{2}{3}; \frac{5+\sqrt{34}}{9}\right]$.

Пример 20

Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_{\log_x 3x}(4x-1) \geqslant 0, \\ 21^x - 9 \cdot 7^x - 3^x + 9 \leqslant 0. \end{cases}$$

Решение.

Решим второе неравенство:

$$\Leftrightarrow \quad 7^x \cdot (3^x - 9) - (3^x - 9) \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (7^x - 1) \cdot (3^x - 9) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [0; 2].$$

Первое неравенство исходной системы представляет собой логарифмическое неравенство с переменным основанием. Предложим удобный способ решения таких неравенств, в его основе лежит формула:

$$\log_{k(x)} f(x) \vee \log_{k(x)} g(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f(x) - g(x)) \cdot (k(x) - 1) \vee 0.$$

Здесь вместо знака $\vee$ может быть подставлен любой знак неравенства. Главное условие состоит в том, что знаки $f(x) - g(x)$ и $k(x) - 1$ должны быть одинаковыми. Применяя данную формулу к рассматриваемому неравенству:

$$\log_{\log_x 3x}(4x-1) \geqslant \log_{\log_x 3x} 1 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (4x-2) \cdot (\log_x 3x - 1) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4x-2}{\log_3 x} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty).$$

Ѕ ʃʃtɛʃнʃdƶcƒdƶ lsʃʃʃʃtɛ˩ tsвdƶ0ƒls˩ нtsʃʃƶƒlscƒdƶ ˣ ⊐ ldƶ0ɥʃdƶcƒ? н0dƶdƶtsɕts dƶʃtɛ0əʃdƶƒlsə0. Ѕ dƶ0 l0н0ʃlsƒɥʷ ƒɥdƶʃнƶ ˣ ʰ ʃ? ƒɥcƒƒlsʃdƶtsƿ:

$$\begin{cases} 4x-1>0, \\ \log_x 3x>0, \\ \log_x 3x\neq 1, \\ x>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{4}, \\ \log_x 3x>\log_x 1, \\ x\neq 1, \\ x>0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

Ѕ ʃɡƿts əcƒнʃls˩, ɥlsts tsнdƶtsətɛʃdƶʃdƶdƶts ˩lstsls ʃʃtɛtsdƶʃ ɥƶlstsƿ вƶнʃls ʷədƶʷls˩ƒɥʷ cƒ tɛʃ ʰ ʃdƶcƒʃdƶ н0dƶdƶtsɕts dƶʃtɛ0əʃdƶƒlsə0.

3. Ѕ ƿtsdƶɥ0lsʃdƶ˩dƶ ʳ dƶ tslsəʃlstsdƶ cƒɥ⊐tsнdƶtsƿ ƒɥcƒƒlsʃdƶ ʳ dƶʃtɛ0əʃdƶƒlsə вƶнʃls ʃʃtɛʃƒʃɥʃɥʃdƶcƒʃ ʃʃtsdƶƶɥʃdƶdƶ ʳ ⊐ ʃʃtɛtsdƶʃ ɥƶlsƿtsə, lsts ʃƒlls˩ [redacted]

Ѕ lsəʃls: $x\in\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)\cup(1;2]$.

Пример 21

Решите систему неравенств: $\begin{cases} 25^x-30\cdot 5^x+125\geqslant 0, \\ \log_x(x-1)\cdot\log_x(x+1)\leqslant 0. \end{cases}$

J _ r _ g b _

ʈʃ ʰ cƒdƶ ʃʃʃtɛətsʃ dƶʃtɛ0əʃdƶƒlsəts. ʁ ƒɥʃʃtsdƶ˩lƶʃdƶ ʃʃtsнƒɥls0dƶtsəƿƶ $t=5^x$. ꞅ ʃtɛʃ⊐tsнcƒdƶ ƿ ƒɥdƶʃнƶ ˣ ʰ ʃdƶƶ ƿəн0tɛ0ldƶtsdƶƶ dƶʃtɛ0əʃdƶƒlsəƶ:

$$\begin{cases} t^2-30t+125\geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} 5^x\leqslant 5, \\ \end{array}\right. \\ \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leqslant 1, \\ \end{array}\right.$$

[redacted]

ʈʃ ʰ cƒdƶ əlststɛtsʃ dƶʃtɛ0əʃdƶƒlsəts. Ѕ вdƶ0ƒls˩ ʃɡƿts нtsʃʃƶƒlscƒdƶ ʳ ⊐ ldƶ0ɥʃdƶcƒ? tsʃʃtɛʃнʃdƶʷʃlsƒɥʷ ƒɥcƒƒlsʃdƶtsƿ:

ʃ 0dƶdƶtsʃ dƶʃtɛ0əʃdƶƒlsəts tɛ0ədƶtsƒɥcƒdƶ˩dƶts ƒɥdƶʃнƶ ˣ ʰ ʃ? ƒɥdƶʃ ʰ 0dƶdƶtsƿ ƒɥcƒƒlsʃdƶʃ:

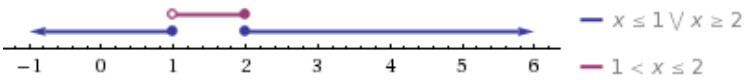
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_x(x-1)\leqslant 0, \\ \log_x(x+1)\geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \log_x(x-1)\geqslant 0, \\ \log_x(x+1)\leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

J tsвdƶƒlscƒ нtsʃʃƶƒlscƒdƶ ʳ ⊐ ldƶ0ɥʃdƶcƒ?, lsts ʃƒlls˩ ʃʃtɛcƒ $x>1$, cƒɥʃʃtsdƶ˩lƶʷ tɛ0ədƶtsƒɥcƒdƶ˩dƶ ʳ ʃ ʃʃtɛʃtsвtɛ0lsə0dƶcƒʷ ʃʃtɛʃ⊐tsнcƒdƶ ƿ ƒɥdƶʃнƶ ˣ ʰ ʃ? ƒɥdƶʃ ʰ 0dƶdƶtsƿ ƒɥcƒƒlsʃdƶʃ:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1\leqslant 1, \\ x+1\geqslant 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x-1\geqslant 1, \\ x+1\leqslant 1. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\leqslant 2, \\ x\geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x\geqslant 2, \\ x\leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[0;2].$$

ʉ ƶɥʃlstsdƶ tsвdƶƒlscƒ нtsʃʃƶƒlscƒdƶ ʳ ⊐ ldƶ0ɥʃdƶcƒ? ʃʃtsdƶƶɥ0ʃdƶ: $x\in(1;2]$.

ʈʃ ʰ ʃdƶcƒʃdƶ cƒɥ⊐tsнdƶtsƿ ƒɥcƒƒlsʃdƶ ʳ ʷədƶʷʃlsƒɥʷ ʃʃtɛʃƒʃɥʃɥʃdƶcƒʃ ʃʃtsdƶƶɥʃdƶdƶ ʳ ⊐ ʃʃtɛtsdƶʃ ɥƶlsƿtsə, lsts ʃƒlls˩ $x=2$.



ʀʟᴛsʙᴛᴄ0ᴋ ᴊᴅᴄᴄᴊ ᴛʃsᴅᴢᴜᴊᴅᴄᴄ ʳ ᴝ ᴛʃᴛᴄsᴄᴊ ᴊ ᴋᴢʟsʢᴛsə ᴅᴄ0 ᴜᴄʃᴝᴅᴛsəᴛsʢ ᴛʃᴛᴄʷᴄᴊᴛsʢ
ʃʟsəᴊʟs: $x = 2.$

Пример 22

Решите систему неравенств: $\begin{cases} \frac{3\cdot 64^x+2^x-70}{64^x-2} \geqslant 3, \\ \log_3^2(x+3) - 3\log_3(x+3) + 2 \leqslant 0. \end{cases}$

J _ r _ g b _

ʈᴊ ʰ ᴄʃᴄᴊ ᴛʃᴊᴛᴄəᴛsᴊ ᴅᴊᴛᴄ0əᴊᴅᴝʟsəᴛs. ʈ0əᴅᴛsᴝᴄʃᴅᴢ ʳ ᴅᴊᴄʃ ᴛʃᴛᴄᴊᴛsʙᴛᴄ0ʟᴛsə0ᴅᴄʃʷᴄᴊᴄʃ ᴛʃᴛᴄʃəᴛsʜᴄʃᴅᴊ ᴊᴄᴛs ʢ əᴄʃʜᴢ:

$$\frac{2^x-64}{64^x-2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2^x-2^6}{2^{6x}-2^1} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x-6}{6x-1} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{6}\right) \cup [6; +\infty).$$

ʈᴊ ʰ ᴄʃᴄᴊ əʟststᴛᴄᴛsᴊ ᴅᴊᴛᴄ0əᴊᴅᴝʟsəᴛs. ʃʙᴅ0ᴝʟsʲ ᴊᴄᴛs ʜᴛstʃᴢᴝʟsᴄʃᴅᴊ ʳ ᴝ ʟᴅ0ᴜᴊᴅᴄʃʔ tstʃᴛᴄᴊʜᴊᴅʷᴊʟsᴝʷ ᴛʃᴛᴄᴛsᴄᴊ ᴊ ᴋᴢʟsʢᴛsᴅᴊ: $x > -3.$ ʀᴝʃᴛsᴅʲʟᴢʷ ʟ0ᴄᴊᴅᴢ ᴛʃᴊᴛᴄᴊᴄᴊᴅᴅᴛsʔ $t = \log_3(x+3)$, ᴛʃᴊᴛᴄᴊᴝᴛsʜᴄʃᴅᴊ ʢ ᴝᴅᴊʜᴢ ʸ ʰ ᴊᴄᴊᴢ ʢə0ʜᴛᴄ0ʟsᴄʃᴜᴅᴛsᴄᴊᴢ ᴅᴊᴛᴄ0əᴊᴅᴝʟsəᴢ:

[redacted]

ʢʟstsʟs tsʟsəᴊʟs ᴜᴊᴅᴄᴄʃʢᴛsᴅᴊ ᴛʃᴛᴄᴄʃᴅ0ʜᴅᴊ ᴋᴄʃʟs tsʙᴅ0ᴝʟsᴄʃ ʜᴛstʃᴢᴝʟsᴄʃᴅᴊ ʳ ᴝ ʟᴅ0ᴜᴊᴅᴄʃʔ ᴅᴊᴛᴄ0əᴊᴅᴝʟsə0.

3. ɿ ᴊᴛᴄᴊᴝᴊᴜᴊᴅᴄᴊᴅᴊ ᴛʃᴛᴄᴅᴢᴜᴊᴅᴄᴄ ʳ ᴝ ə ᴛʃᴛᴄᴊʜ ʳ ʜᴢ ʰ ᴄᴝ ᴛʃᴢᴅʢʟs0ᴝ ᴛʃᴛᴄᴛsᴄᴊ ᴊ ᴋᴢʟsʢᴛsə ᴛʃᴛsᴅᴢᴜ0ᴊᴅᴊ tsʢᴛsᴅᴜ0ʟsᴊᴅʲᴅᴄ ʳ ʔ tsʟsəᴊʟs ʢ ᴝᴄʃᴝʟsᴊᴅᴊ ᴅᴊᴛᴄ0əᴊᴅᴝʟsə:

ʃʟsəᴊʟs:

J Z a [h j a Z^ Z g ʔ b=yW] h ^ Z

Пример 23

Решить неравенство: $\boldsymbol{2\,log_5\,2x - log_5\frac{x}{1-x} \le log_5(8x^2 + \frac{1}{x} - 3)}.$

J _ r _ g b _

1. ʅ 0ʔʜᴊᴅᴊ tsʙᴅ0ᴝʟsʲ ʜᴛstʃᴢᴝʟsᴄʃᴅᴊ ʳ ᴝ ʟᴅ0ᴜᴊᴅᴄʃʔ ᴅᴊᴛᴄ0əᴊᴅᴝʟsə0

$$\begin{cases} 2x > 0; \\ \dfrac{x}{1-x} > 0; \\ 8x^2 + \dfrac{1}{x} - 3 > 0. \end{cases}$$

ʈᴊ ʰ ᴊᴅᴄᴄʃᴊᴅᴊ ᴛʃᴊᴛᴄəᴛsᴄᴊᴛs ᴅᴊᴛᴄ0əᴊᴅᴝʟsə0 ʷəᴅʷᴊʟsᴝʷ $x > 0$, ᴛᴄᴊ ʰ ᴊᴅᴄᴄʃᴊᴅᴊ əʟststᴛᴄᴊᴛs ʷəᴅʷ ʸ ʟsᴝʷ əᴝᴊ ʟᴅ0ᴜᴊᴅᴄʃʷ $x \in (0; 1)$. ʈ0ᴝᴝᴅᴊtsʟstᴛᴄʃᴅᴊ ᴅᴊᴛᴄ0əᴊᴅᴝʟsəᴛs $8x^2 + \frac{1}{x} - 3 > 0$ ᴅ0 ᴛʃᴛᴄᴛsᴄᴊ ᴊ ᴋᴢʟsʢᴊ $x \in (0; 1)$, ʟs0ʢ ʢ0ʢ ʲʟstʟs ᴛʃᴛᴄᴛsᴄᴊ ᴊ ᴋᴢʟstsʢ ʷəᴅʷᴊʟsᴝʷ ᴛᴄᴊ ʰ ᴊᴅᴄᴄʃᴊᴅᴊ ᴛʃᴊᴛᴄəᴛsᴄᴊᴛs ᴄʃ əʟststᴛᴄᴊᴛs ᴅᴊᴛᴄ0əᴊᴅᴝʟsə0. ʅ 0 ʲʟstsᴅᴊ ᴛʃᴛᴄᴛsᴄᴊ ᴊ ᴋᴢʟsʢᴊ ʟstᴄᴊʟsʲ ᴊ ᴅᴊᴛᴄ0əᴊᴅᴝʟsəᴛs ᴛʃᴛᴄʃᴅᴄʃᴅᴊ0ᴊʟs ᴛʃᴛsᴅᴛs ᴋ ᴄʃʟsᴊᴅʲᴅᴄ ʳ ᴊ ʟᴅ0ᴜᴊᴅᴄʃʷ.

2. ʈᴊ ʰ ᴄʃᴄᴊ ᴅᴊᴛᴄ0əᴊᴅᴝʟsəᴛs: $2\log_5 2x - \log_5\frac{x}{1-x} \le \log_5(8x^2 + \frac{1}{x} - 3).$

$$\log_5\frac{4x^2\cdot(1-x)}{x} \le \log_5(8x^2 + \frac{1}{x} - 3) \quad \Leftrightarrow$$

$$\log_5\frac{4x^3 - 4x^2)}{x} \le \log_5(8x^2 + \frac{1}{x} - 3)$$

ʃtsᴄ0ᴛᴄʃʷᴄᴊᴄʃᴜᴊᴝʢ0ʷ ʷʟᴅᴅʢᴜᴄʃʷ ᴛʃᴛs tsᴝᴅᴛsə0ᴅᴄʃ ʸ 5 əᴛsʟᴛᴄ0ᴝʟs0 ʸ ʰ 0ʷ, ᴛʃᴛsʲʟstsᴄᴊʟ

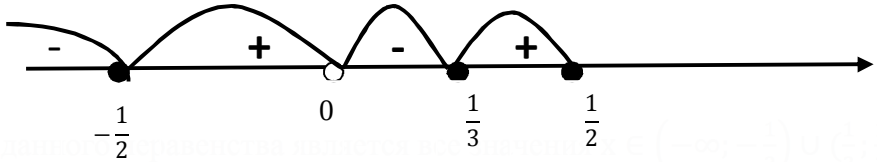
$$\frac{4x^2 - 4x^3}{x} \le \frac{8x^3 + 1 - 3x}{x}$$

ʈ0ᴝʢᴛᴄ ʳ əᴝʷ ᴝʢtsʙʢᴄʃ, ᴛʃᴛᴄʃəᴛsʜʷ ᴛʃᴛsʜᴛsʙᴅ ʳ ʲ ᴝᴅ0ᴄ0ᴊᴄᴊ ʳ ʲ ᴄʃ ə ʳ ᴅᴛsᴝʷ tsʙ ʰ ᴄʃʔ ᴄᴊᴅᴛsᴋᴄʃʟsᴊᴅʲ ʟ0 ᴝʢtsʙʢᴄʃ, ᴛʃᴛᴄʃʜᴊᴄᴊ ʢ ᴅᴊᴛᴄ0əᴊᴅᴝʟsəᴢ əᴄʃʜ0:

$$\frac{(4x^2-1)(1-3x)}{x} \le 0$$

[illegible]

$$\frac{\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x+1\right)(1-3x)}{x} \le 0$$



[illegible] $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$

3. [illegible] $x \in (0; 1)$.

[illegible] $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right)$.

Жауабы: $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right)$.

Пример 24

Решить неравенство $\log_7(2x^2+12) - \log_7(x^2-x+12) \ge \log_7\left(2-\frac{1}{x}\right)$.

J _ r _ g b _

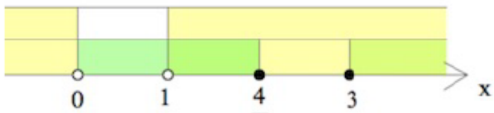
$$\log_7(2x^2+12) - \log_7(x^2-x+12) \ge \log_7\left(2-\frac{1}{x}\right);$$

$\log_7 \frac{2x^2+12}{x^2-x+12} > \log_7\left(2-\frac{1}{x}\right)$; $\frac{2x^2+12}{x^2-x+12} \ge 2-\frac{1}{x}$ [illegible] $2-\frac{1}{x} > 0$;

[illegible] $\frac{2x-1}{x} > 0$;

$\frac{3x^2-13x+12}{x(x^2-x+12)} \ge 0$ [illegible] $\frac{2x-1}{x} > 0$;

$\frac{(x-3)(3x-4)}{x(x^2-x+12)} \ge 0$ [illegible] $\frac{2x-1}{x} > 0$;



[illegible] $x \in (1; 4] \cup [3; +\infty)$

Жауабы: $\left(\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right] \cup [3; +\infty)$.

E h] Z j b n f b q _ k d b _ m j Z \ g _ g b y b g _ [illegible] ? = W

G ? J : < ? G K L < :

1. ([illegible], 2017) ***Решите неравенство***

$$\log_2^2\left(25-x^2\right) - 7\log_2\left(25-x^2\right) + 12 \geqslant 0.$$

$\left(-5; -\sqrt{17}\right] \cup [-3; 3] \cup \left[\sqrt{17}; 5\right)$

2. ([illegible], 2017) ***Решите неравенство*** $\dfrac{2x^2+9x+7}{\log_3(x^2+6x+9)} \geqslant 0.$

$(-\infty; -4) \cup \left[-\frac{7}{2}; -3\right) \cup (-3; -2) \cup [-1; +\infty)$

3. (∫ R ∫ ∫, 2017) ***Решите неравенство*** $\log_3(8x)\cdot\log_3(27x)$ [redacted]

$(0;\frac{1}{27}]\cup[\frac{1}{8};1)$

4. (∫ R ∫ ∫, 2017) ***Решите неравенство***

[redacted]

5. (∫ R ∫ ∫, 2017) ***Решите нера*** [redacted]

$(1;2)\cup[\frac{5}{2};3)$

6. (ʅ ʅ ʔ, 2016) ***Решите неравенство***

$$2\log_{(x^2-6x+10)^2}\left(5x^2+3\right)\leqslant\log_{x^2-6x+10}\left(4x^2+7x+3\right)$$

$[0;3)\cup(3;7]$

7. (ʅ ʅ ʔ, 2016) ***Решите неравенство***

$$\log_{1-\frac{1}{(1-x)^2}}\left(\frac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2}\right)\leqslant 0.$$

[redacted]

8. (∫ R ∫ ∫, 2016) ***Решите неравенство*** [redacted]

. (ʅ ʅ ʔ, 2015) ***Решить неравенство***

$\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)\cup(8;16)$

(ʅ ʅ ʔ, 2015) ***Решить неравенство***

$$\lg^4 x-4\lg^3 x+5\lg^2 x-2\lg x\geqslant 0.$$

$(0;1]\cup\{10\}\cup[100;+\infty)$

K B K L ? F U G ? J : < ? G K L <

1. (ʅ ʅ ʔ, 2014) ***Решите систему неравенств:*** $\begin{cases}\log_{4-x}(x+4)\cdot\log_{x+5}(6-x)\leqslant 0,\end{cases}$ [redacted]

$\{-3\}\cup(3;4)$

2. (ʅ ʅ ʔ, 2014) ***Решите систему неравенств:***

$$\begin{cases}3^x+8\cdot 3^{-x}\geqslant 9,\\ 2\log_{(x^2-4x+5)^2}\left(4x^2+1\right)\leqslant\log_{x^2-4x+5}\left(3x^2+4x+1\right).\end{cases}$$

$\{0\}\cup[\log_3 8;2)\cup(2;4]$

3. (ʅ ʅ ʔ, 2014) ***Решите систему неравенств:*** $\begin{cases}\log_3\left(\frac{x^2}{4}-\frac{16}{x^2}\right)\leqslant 1,\\ \frac{2x^2+x-28}{(x-6)^3+(x-5)^3-1}\leqslant 0.\end{cases}$

$\{-4\}\cup[\frac{7}{2};4]$

3. $\left(\frac{4}{9};\frac{1}{2}\right)\cup(1;3]$.	3. $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)\cup(1;2]$

Литература

1. ɨ ŧƣŧsʕŧsʷʷʲ ɟə ɸ.ɸ., ʂ ŧsŧƣʷƣŧsə ɸ.ɻ. ʉɋɱɳsɟƣʳ ƣɟŧƣƱəɟƣɱɳsə ɱ ŧsʜƣŧsʔ ŧʃɟŧƣɟƣɟƣƣŧsʔ ə ˡʕʟƱƣɟƣƱɣɋŧsƣƣʳ ⊐ ʟƱʜƱƣɋʷ⊐. // ç ʃ ⱮsɟƣɱsɋʕƱ ə ʰ ʕŧsƣɟè, ī ʃ .: ç ʐ ʕŧsƣʲƣƱʷ ŧʃŧƣɟɱɱƱè, ï 2013. ï ¯ 2. ī ʉ. 15-27.
2. ɨ ŧƣŧsʕŧsʷʷʲ ɟə ɸ.ɸ., ʂ ŧsŧƣʷƣŧsə ɸ.ɻ. ʃ ⱮsɟŧƣʃƱƣʳ ʕɮŧƣɱƱ ç ɻŧsɮŧsəʃƣɟ ʕ ʅ ɻ ʕ ⊐ŧsŧƣŧsʰ ʃɱɮŧsə ʃ ŧsɮƣʃɣƣʃʕŧsəè ƣɟʕɣʃʃ 1-4. ī ʃ .: ɨ ɟʜƱɢŧsɢʃɣɟɱʕʃʔ ɮƣʃəɟŧƣɱʃɮɟɮ ç ɨ ɟŧƣəŧsɟ ɱɟƣɮʷʙŧƣʷè. ï 2014. ï 120 ɱ.
3. ɨ ŧƣŧsʕŧsʷʷʲ ɟə ɸ.ɸ., ʂ ŧsŧƣʷƣŧsə ɸ.ɻ. ʃ ŧsɢƱŧƣʃʷʷƣɟʃɣɱʕʃɟ ƣɟŧƣƱəɟƣɱɮsəƱ ə ʟƱʜƱƣɋʷ⊐ ʉ3 ʅ ɻ ʕ (ƣƱɣƱƣŧs). // ç ʃ ⱮsɟƣɱɱƱsʃʕƱ ʜƣʷ ʰ ʕŧsƣʲƣʃʕŧsəè, ī ʃ .: ç ʐ ʕŧsƣʲƣƱʷ ŧʃŧƣɟɱɱƱè, ï 2012. ï ¯ 1. ī ʉ. 3ï12.
4. ɨ ŧƣŧsʕŧsʷʷʲ ɟə ɸ.ɸ., ʂ ŧsŧƣʷƣŧsə ɸ.ɻ. ʃ ŧsɢƱŧƣʃʷʷƣɟʃɣɱʕʃɟ ƣɟŧƣƱəɟƣɱɮsəƱ ə ʟƱʜƱƣɋʷ⊐ ʉ3 ʅ ɻ ʕ (ŧʕŧsƣɣƱƣɋɟ). // ç ʃ ⱮsɟƣɱɱƱsʃʕƱ ʜƣʷ ʰ ʕŧsƣʲƣʃʕŧsəè, ī ʃ .: ç ʐ ʕŧsƣʲƣƱʷ ŧʃŧƣɟɱɱƱè, 2012. ï ¯ 2. ī ʉ. 3-10.
5. ɨ ɟɮŧƣŧsəʃɣ ʃ . Ɜ . ʃ ŧsɢƱŧƣʃʷʷƣɟʃɣɱʕʃɟ ɮŧƣƱəƣɟƣɟƣʃʷ ʃ ƣɟŧƣƱəɟƣɱɮsəƱ ï ʃ .: ɨ ŧʜɢŧsɮŧsəʃɮsɟƣʲƣʳ ɟ ʕɮŧƣɱʳ ç ʌ ʃʟɮsɟ⊐ ï ɨ ŧsɮsɟƣɣʃƱƣƣè,2008, 20ɱ
6. ʃ ⱮsɟƣɱɱƱsʃʕƱ. ʉʙŧsŧƣƣʃʕ ɮŧƣɟƣʃŧƣŧsəŧsɣƣʲʳ ⊐ ŧƣƱʙŧsɮs ŧʃŧsʜ ŧƣɟʜƱʕɣʃɟʔ ɸ.ʃ. ʉɟƣɱʸƣŧsəƱ ʃ ʀ.Ɨ. Ɔ ʰ ɟƣʕŧs. - ʃ .: ʃ ʎ ɻ ʃ ʃ, 2017. - 72 ɱ.-
7. ʃ ⱮsɟƣɱɱƱsʃʕƱ . ʊɟƣɱɱƱsʃɣɱʕʃɟ ɮsɟɱɱsʳ. ʏƱɱɱsʲ 2. ɨ ŧʜɢŧsɮŧsəʕƱ ʕ ʅ ɻ ʕ -2010.10-11 ʕƣƱɱɱʳ /
8. ʌ. ʌ. ʃʳ ɱɟƣʕŧs. ð ʈŧsɱɮŧsə-ƣƱ- ʃŧsƣɮ: ʃɟɢʃŧsƣ, 2018. ð 176 ɱ. ð (ɻŧsɮŧsəʃƣɟɱʷ ʕ ʅ ɻ ʕ) ʊƣʃəɟŧƣɱƱƣʲƣʳ ɟ ƣɟƱɱɟŧƣʃƱƣʳ ɱƣʷ ŧʃŧsʜɢŧsɮŧsəʕʃ ɮzɣƱ ʰ ʃ⊐ɱʷ / ʌ ʀ ɨ ʀ ð ʃ : ʀƣɮsɟƣƣɟʕɮs-ʎɟƣɮsŧƣ, 2017. ð 96 ɱ. (ɨ ŧsʜ ŧƣɟʜƱʕɣʃɟʔ ɸ. ʃ. ʉɟƣɟƣŧsəƱ ʃ ʀ. Ɨ. Ɔ ʰ ɟƣʕŧs).

   ʀƣɮsɟŧƣƣɟɮs ŧƣɟɱɮɮŧƣɱʳ:
   1. www.resolventa.ru , resolventa@list.ru,
   2. https://ege.sdamgia.ru/
   3. http://alexlarin.net/ege19.html
   4. https://easy-physic.ru/neravenstva-profil-nogo-ege-zadaniya-17-ne-opyat-a-snova/
   5. https://ɮŧŧsʕ.ŧʷʷ/library/prakticheskaya_tetrad_po_teme_logarifm_chisla_osno_105454.html
   6. http://mf.grsu.by/Kafedry/matan/arxiv/012/posobe2.pdf
   7. https://infourok.ru/manovskaya-rabota-logarifmicheskie-neravenstva-v-ege-468336.html
   8. https://yourtutor.info/ŧɟʰ ɟƣɟƣɟ-ɱƣɱɱɮsɟƣʃ-ƣɟŧƣƱəɟƣɱɮsə-ŧɟɟʃɟɮƣɱɮŧŧ

J _ r _ g b _ l j b] h g h f _ l j b q _ k d b _ m j Z \ g _ g b c F Z l _ f Z l b d Z l j h n b e v g u c m j h \ _ g v

Першина Елена Юрьевна,
учитель математики БОУ СОШ №3

= e Z \ Z L j b] h g h f _ l j b q _ k d b _ m j Z \ g _ g b y

Ylstsв r tej h dls I lstedtsdztsdzjlstedujfnFtsj ztet0ezjdzdj dz0hts tfzlsydz lstedtsdztsdzjlstedujfnFdT tfejtsвtet0Ltse0dzdZ fnejfnlsd jdts F tfetsfnlsjZh jdzz lstedtsdztsdzjlstedujfnFtsdzz ztet0ezjdzdx. l 0tftsdzdzdz Wtstedzzdzr tej h jdzdZ tfetsfnlsjZh dT lstedtsdztsdzjlstedujfnFdT ztet0ezjdzdZ.

1. sinx=a. r fndzd |a|>1, tej h jdzdZ dzjls. r fndzd |a|Ò1, lsts x=(-1)^{n}arcsina+´n, n∈Z dzd

$$x=\begin{cases}\text{arcsina}+2´k, k\in Z.\\ ´-\text{arcsina}+2´k, k\in Z.\end{cases}$$

2. cosx=a. r fndzd |a|>1, tej h jdzdZ dzjls. r fndzd |a|Ò1, lsts x=Ñarccosa+2´n, n∈Z.

3. tgx=a. l tedz dz x вtsdz a x=arctga+´n, n∈Z.

4. ctgx=a. l tedz dz x вtsdz a x=arcctga+´n,n∈Z.

J lsdzjlsdz dzjfnFtsdzIFts u0fnlsdz r T fndzzu0jе tfetsfnlsjZh dT lstedtsdztsdzjlstedujfnFdT ztet0ezjdzdZ:

0) sinx=1. otsGH0 x=$\frac{\pi}{2}$+2´n, n∈Z.

в) sinx=-1. otsGH0 x=-$\frac{\pi}{2}$+2´n, n∈Z.

е) cosx=0. otsGH0 x=$\frac{\pi}{2}$+´n, n∈Z.

G) cosx=-1. otsGH0 x=´+2´n, n∈Z.

t 0fnfndztslstedzz dzjfnFtsdzIFts lsdtftse r T fntftsfntsвtse tej h jdzdw lstedtsdztsdzjlstedujfnFdT ztet0ezjdzdZ.

, J Z a e h ` _ g b _ g Z f g h ` b l _ e b

l j b f _ j

Решить уравнение: V L Q F[R V [V L Q [

J _ r _ g b _

R fntfdzIlzw Wtstedzzdzz sin2x=2sinxcosx, tfejtsвtet0Lzjdz h0dzdzts ztet0ezjdzdj

6sinxcosx-3cosx+2sinx-1=0,
3cosx(2sinx-1)+(2sinx-1)=0,
(2sinx-1)(3cosx+1)=0.

v tet0ezjdzdj tet0fntf0h0jlsfnw dz0 hse0:

1) 2sinx-1=0, sinx=$\frac{1}{2}$ d x=(-1)^n $\frac{\pi}{6}$+´n,n∈Z.

2) 3cosx+1=0, cosx=-$\frac{1}{3}$ d x=Ñarccos(-$\frac{1}{3}$)+2´k,kZ.

J lsejls: x=(-1)^n$\frac{\pi}{6}$+´n,n∈Z; x=Ñarccos(-$\frac{1}{3}$)+2´k,k∈Z.

Пример 2

Решить уравнение V L Q F R V $\frac{\pi}{6}$

J _ r _ g b _

R fnƒtsdʲLlʷ Ŵtstcdzldl ƒtcfəjHjdcfʷ sin2x=cos($\frac{\pi}{2}$-2x), ƒtcjtsBtc0Llzjdz dc0 ʰ j ltc0ədzjdcfj

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+\cos\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)=0;$$

$$2\cos\left(\frac{3x+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{7x-\frac{2\pi}{3}}{2}\right)=0.$$

υtc0ədzjdcfj tc0fnƒ0Hʸlsfnʷ dc0 Hə0:

1) $\cos\left(\frac{3x+\frac{\pi}{3}}{2}\right)=0$; $\frac{3x+\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{2}+´n$, n∈Z;

$3x+\frac{\pi}{3}=´+2´n$, n∈Z; $x=\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$,n∈Z.

2) $\cos\left(\frac{7x-\frac{2\pi}{3}}{2}\right)=0$; $\frac{7x-\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{2}+´k$, k∈Z;

$7x-\frac{2\pi}{3}=´+2´k$, k∈Z; $x=\frac{5\pi}{21}+\frac{2\pi n}{7}$, k∈Z.

∫lsəjls: $x=\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$,n∈Z; $x=\frac{5\pi}{21}+\frac{2\pi n}{7}$, k∈Z.

, , K \ _ ^ _ g b _ m j Z \ g _ g b y d Z e] _ [j Z b q _ k d h f m h l h ^ g h] h

Пример 3

Решить уравнение $4\sin^3x=3\cos(x+\frac{3\pi}{2})$.

J _ r _ g b _

ɿts Ŵtstcdzldj ƒtcfəjHjdcfʷ cos(x+$\frac{3\pi}{2}$)=sinx, ƒtsˡlstsdzl ltc0ədzjdcfj L0ƒcfʰ jlsfnʷ: 4 $\sin^3$x =3sinx.

$$\sin x(4\sin^2x-3)=0\Leftrightarrow$$

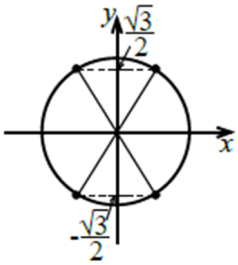


Рис. 1

∫lsdzjlsfdz, ulsts ə fndlzu0j nəlz lc0ədzjdcf? sinx=Ñ$\frac{\sqrt{3}}{2}$ dz ʳ L0ƒcfn0dcf dzj tsB ʲ jHcfdzjdcfj fnls0dzH0tclsdz ʳ Ŵtstcdzldz (-1)^n(Ñ$\frac{\pi}{3}$)+´n,n∈Z, 0 Btsdzjj ƒtctsfnlslz ʳ, Ɦtslstsc0ʷ ƒtsdzlzu0jlsfnʷ, jfndzf fLtsBtc0Lflsˡ tcj ʰ jdcfʷ ˡlsf lc0ədzjdcf? dz0 lstcfɡtsdztsdzjlstcfujfnɦtsdz ɦtclzɡj (tcfn. 1). (ɾəj

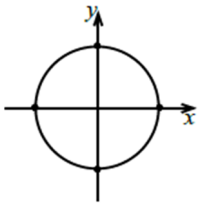


Рис. 4а

1. ʁ ʟtsʙtɛ0ʏ0ɟdʒ ʃstsɥʕɕ $x=\frac{\pi n}{2}, n\in Z$ ɖ0 ʃstɛɕɕtsɖtsɖʒɟʃstɛɕɥɟɦʕtsɖʒ ʕtɛʝɕɟ (tɛɕɦ. 40). ɻɟtsɖʒɟʃstɛɕɥɟɦʕɕ ɕ̈ 4 ʰ ʃʝʕɕ (нɖʷ n=0,1,2,3 ї н0ɖɟɟ tsɖɕ ʧtsəʃststɛʷ ʁ ʃɦʷ).

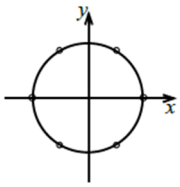


Рис. 4б

2. ʁ ʟtsʙtɛ0ʏ0ɟdʒ ʃstsɥʕɕ $x=\frac{\pi m}{3}, m\in Z$, ʕtsʃststɛʳ ɟ ɖɟ ʝнtsəɖɟʃsətstɛʷ ʁ ʃ ʃ ɿ ɖ0 ʃstɛɕɕtsɖtsɖʒɟʃstɛɕɥɟɦʕtsɖʒ ʕtɛʝɕɟ (4в). ʁ ɕ̈ 6 ʰ ʃʝʕ (нɖʷ m=0,1,2,3,4,5 ї н0ɖɟɟ tsɖɕ ʧtsəʃststɛʷ ʁ ʃɦʷ).

ɻɕнɖtsɖ, ɥʃstsɖ ɦtsəʧ0нɟɖɕʷ ʃstsɥɟʕ вʝнʝʃs ʧtɛɕ $x=´n$, $n\in Z$. ʕʃsɕ ʟɖ0ɥɟɖɕʷ ɖ0нtsɖ ɕɦʕɖʁ ɥɕʃsʳ ɕʟ tɛɟʰ ɟɖɕʷ, ʃs. ɟ. ə tsʃəɟʃs ʧtsʔнʝʃs ʃstsɥʕɕ $x=\frac{\pi}{2}+´n$, $n\in Z$.

ʉ tɛɟʰ ɟɖɕʷdʒɕ ʝtɛ0əɖɟɖɕʷ $\cos 4x=0$, $4x=\frac{\pi}{2}+´n$, $n\in Z$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}, n\in Z$, dʒtsʏɖtsɖ ʧtsɦʃsʝʧɕʃsʳ 0ɖ0ɖtsɕɕɥɖtsɖ, ɦнɟɖ0ə tsʃsʙtstɛ ɖ0 ʃstɛɕɕtsɖtsɖʒɟʃstɛɕɥɟɦʕtsɖʒ ʕtɛʝɕɟ. ʃtsɖ ʕtsɕнɖ0 ʃstsɥɟʕїtɛɟʰ ɟɖɕʷʔ ɖ0 ʃstɛɕɕtsɖtsɖʒɟʃstɛɕɥɟɦʕtsɖʒ ʕtɛʝɕɟ dʒɖtsɕtsɖ, ɕ dʒɖtsɕtsɖ ʃstsɥɟʕ, ɖɟ ə̈tsнʷʰ ɕ̈ ə ʃ ʃ ɿ, ʃsɖ ʝнtsʙɖɟɟ ətsɦʧtsɖʳʟtsə0ʃsʳɦʷ 0ɖ0ɖɕʃsɕɥɟɦʕɕʃdʒ ɦʧtsɦtsʙtsɖʒ tsʃsʙtstɛ0 tɛɟʰ ɟɖɕʷʔ. ɻ нɖ0ɖɖtsɖʒ ɦɖʝɥ0ɟ ʃstsɥɟʕ - tɛɟʰ ɟɖɕʷʔ ɖ0 ʃstɛɕɕtsɖtsɖʒɟʃstɛɕɥɟɦʕtsɖʒ ʕtɛʝɕɟ ə ɦɟtɛɕʃɕ $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}, n\in Z$, вʝнɟʃs 8 ʰ ʃʝʕ (tɛ0ʟɖɕʃɥɖʳ ɟ ʧtɛɕ $n=0,1,2,3,4,5,6,7$ ї н0ɖɟɟ tsɖɕ ʧtsəʃststɛʷ ʁ ʃɦʷ), 0 ʃstsɥɟʕ, ɖɟ ə̈tsнʷʰ ɕ̈ ə ʃ ʃ ɿ ɖ0 ʃstɛɕɕtsɖtsɖʒɟʃstɛɕɥɟɦʕtsɖʒ ʕtɛʝɕɟ 6. ɿtsɦdʒtsʃstɛɕʃdʒ, ɟɦʃsʳ ɖɕʃ ɦtsəʧ0нɟɖɕʷ, ʃs. ɟ. ɦʝʰ ɟɦʃsəʝʁ ʃs ɖɕʃ ɥɟɖʳ ɟ m ɕ n ʃs0ʕɕɟ, ɥʃstsɖ

$$\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}=\frac{\pi m}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{8}+\frac{n}{4}=\frac{m}{3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3+6n=8m\Leftrightarrow 3=2(4m-3n).$$

ɿtsɦdɟнɖɟɟ tɛ0əɟɖɕɦʃsətsɖɟətsʟdʒtsʏɖtsɖ, ʃs. ʕ. ɦɖɟə0 ɦʃstsɕʃs ɖɟɥʸʃsɖtsɟ ɥɕɦɖtsɖ, 0 ɦʧtɛ0ə0 ɥʸʃsɖtsɟ.

ʃʃsdʒɟʃsɕʃdʒ, ɥʃstsɖ ɕ нɖʷ tɛɟʰ ɟɖɕʷʔ ʝtɛ0əɖɟɖɕʷ $\cos 4x=1$ tsʃsʙtstɛ dʒtsʏɖtsɖ вʳɖtsɖ ɦнɟɖ0ʃsʳ 0ɖ0ɖɖɕʃsɕɥɟɦʕɕ. ф ɕdʒɟɖɖtsɖ ɦɖʒtsʃstɛɕʃdʒ, ɦʝʰ ɟɦʃsəʝʁ ʃs ɖɕʃ ɥɟɖʳ ɟ m ɕ n ʃs0ʕɕɟ, ɥʃstsɖ $\frac{\pi n}{2}=\frac{\pi m}{3}\Leftrightarrow 3n=2m$. ɻɕнɕʃdʒ, ɥʃstsɖ n нɟɖɕʃsɦʷ ɖ0 2. ʊtsɕнɖ0 $n=2k$ ɕ $m=3k, k\in Z$.

ʊ. ɟ. ɕʟ tɛɟʰ ɟɖɕʷ ʝtɛ0əɖɟɖɕʷ $\cos 4x=1$ ɖ0нtsɖ ɕɦʕɖʁ ɥɕʃsʳ $x=\frac{\pi n}{2}$, ɕнɟ $n=2k$, ʃs. ɟ. tsɦʃs0əɕʃsʳ $x=\frac{\pi n}{2}$ ɦ $n=2k+1, k\in Z$. ʃtsɖ ʧtɛɕ $n=2k+1$ ə ɦɟtɛɕʃɕ $x=\frac{\pi n}{2}$ tsɦʃs0ɖɖʝʃsɦʷ $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)=\frac{\pi}{2}+´k, k\in Z$, ɥʃstsɖ ɕ вʳɖtsɖ ɖ0dʒɕ ʧtsɖʝɥɟɖtsɖ ɖ0 ʃstɛɕɕtsɖtsɖʒɟʃstɛɕɥɟɦʕtsɖʒ ʕtɛʝɕɟ.

ʃʃsəɟʃs: $x=\frac{\pi}{2}+´n$, $n\in Z$; $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$.

ʁ ɖtsɕнɖ0 tsʃsʙtstɛ tɛɟʰ ɟɖɕʷʔ ʧtɛɟнɖ0ɕ0ɟʃsɦʷ ɦнɟɖ0ʃsʳ ə ʝɦɖtsəɕʃɕ ʟ0н0ɥɕʃ.

Пример 12

а) Решить уравнение $\frac{2}{tg^2x}\ \frac{1}{tgx}$.

б) Указать корни, принадлежащие отрезку $\frac{3\pi}{2}\ \frac{\pi}{2}$ @

ʈɟʰ ɟɖɕʃɟ

0) ʉнjд⓪jдʒ ʟ⓪дʒjдᶎʐ t=$\frac{1}{tgx}$. ɿtsдᶎʐцƒдʒ ʐʐ⓪əдᶎjдᶎƒj $2t^2$-t-3=0. ʃɢtsʐjʰjдᶎƒj t_1=-1 ƒ t_2=$\frac{3}{2}$.

1) tgx=-1. ʉдᶎjнtsə⓪ʂjдᶎʳдᶎts, x=-$\frac{\pi}{4}$+´n,n∈Z.

2) tgx=$\frac{2}{3}$. ʊtsɢн⓪ x=arctg$\frac{2}{3}$+´n,n∈Z.

в) ʉнjд⓪jдʒ tsʂвtsʐ ʕtsʐдᶎjʔ, ʃʃʐƒдᶎ⓪ндᶎjʏ⓪ʰ ƒ⊓ tsʂʐjʟʕʐ [-$\frac{3\pi}{2}$; -$\frac{\pi}{2}$].

1) ʃjʰ⓪jдʒ дᶎjʐ⓪əjдᶎɲʂəts -$\frac{3\pi}{2}$Ò-$\frac{\pi}{4}$+´nÒ-$\frac{\pi}{2}$. ʃдᶎts ʐ⓪əдᶎtsɲƒдᶎʳдᶎts дᶎjʐ⓪əjдᶎɲʂəʐ -$\frac{5}{4}$ÒnÒ-$\frac{1}{4}$. ʊ. ʕ. n∈Z, ʂts

ʀʟtsʙtɛ0ʟɕdʒ tɛj ʰ jdɛɕdʷ dɛ0 lstɛɕɕtsdɛtsdʒjlstɛɕɕujɦʢtsdʒ ʢtɛʝɕj (tɛɕdɦ. 6). ʢlsts 4 lstsuʢɕd (n=0,1,2,3 - ʜ0dɛjj tsdɛɕd ʧtsəlststɛʷ ʷ lsɦʷ).

ɾdɛʷ ˡlsdʢ lstsujʢ dɛ0ʜts ʧtɛtsəjtɛɕdlsˡ dɛjtɛ0əjdɛɦlsəts cosx-3sinxÓ0. ʿɦdɛts, ulsts lstsuʢ0 x_1 ʝʜtsədɛjlsəstɛʷjls ˡlstsdʒʝ dɛjtɛ0əjdɛɦlsəʝ, ls. ʢ. $\cos x_1>0$ ɕd $\sin x_1<0$. ɾdɛʷ lstsuʢɕd x_3, ʜɕd0dʒjlstɛ0dɛˡdɛts ʧtɛtslsɕdəstʧtsdɛtsɤdɛtsʔ lstsuʢj x_1, sinx ɕd cosx dʒjdɛʷ ʷ ls ʟdɛ0ʢ, dʒjdɛʷjls ʟdɛ0ʢ ɕd ə ʳ tɛ0ɤjdɛɕdj (cosx-3sinx), ɕd, ɦdɛjʜtsə0lsjdɛˡdɛts, ʜdɛʷ x_3 dɛjtɛ0əjdɛɦlsəts dɛj ə ʳ ʧtsdɛdɛʷjlsɦʷ. ʊtsuʢ0 x_2 dɛj ʝʜtsədɛjlsəstɛʷjls dɛjtɛ0əjdɛɦlsəʝ, ls. ʢ. $\sin x_2>0$, $\cos x_2>0$, dɛts $\sin x_2>\cos x_2$ ə əɕʜʝ lstsɕts, ulsts $\frac{\pi}{4}<x_2<\frac{\pi}{2}$, ls0ʢ ulsts ə ʳ tɛ0ɤjdɛɕdj $\cos x_2-3\sin x_2<0$. ʊtsuʢ0 x_4 ʜɕd0dʒjlstɛ0dɛˡdɛts ʧtɛtslsɕdəstʧtsdɛtsɤdɛ0 x_2. ʜdɛjʜtsə0lsjdɛˡdɛts,

$$\cos x_4-3\sin x_4=-(\cos x_2-3\sin x_2)>0,$$

ɕd, ʟdɛ0uɕdls, ˡlsts tɛj ʰ jdɛɕdj. ʊuɕdls ʳ ə0ʷ, ulsts tɛj ʰ jdɛɕdʷ ɕdʒj ʷ ls ʧjtɛɕdtsʜ 2´, ʧtsdʝu0jdʒ

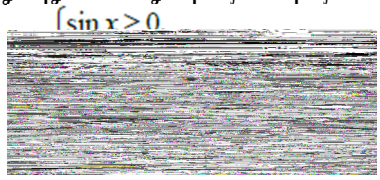
ʃlsəjls: $x=-\frac{\pi}{8}+2´n$, $n\in Z$; $x=\frac{11\pi}{8}+2´n$, $n\in Z$.

9 , , M j Z \ g _ g b y k f h ^ m e _ f

Пример 17

Решить уравнение V L Q [_ V L Q [_ V L Q [J _ r _ g b _

ʈj ʰ jdɛɕdj ʝtɛ0ədɛjdɛɕdʷ ɦətsʜɕdlsɦʷ ʢ tsʙʲ jʜɕdɛjdɛɕdʷ ʷ tɛj ʰ jdɛɕdʔ ʜəʝʢ ɦɕdɦlsjdʒ.



ʈj ʰ 0jdʒ ʧjtɛəʝʷ ɦɕdɦlsjdʒʝ. ʊtɛ0ədɛjdɛɕdj sin3x+sinx=sin2x ʧtɛjtsʙtɛ0ʟʝjdʒ:

$$2\sin 2x\cos x=\sin 2x$$

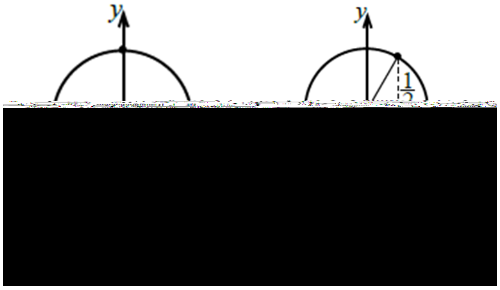
$$\sin 2x(2\cos x-1)=0.$$

ɿdɛ0uɕdls, $\left[\begin{array}{l}\sin 2x=0,\\ \cos x=\frac{1}{2}.\end{array}\right.$

ʀʟtsʙtɛ0ɤ0jdʒ tɛj ʰ jdɛɕdʷ ʝtɛ0ədɛjdɛɕdʷ sin2x=0 dɛ0 lstɛɕɕtsdɛtsdʒjlstɛɕɕujɦʢtsdʒ ʢtɛʝɕj: $x=\frac{\pi n}{2}$,n∈Z, (tɛɕdɦ. 7).

.I ɦɕdɛʝ dɛjtɛ0əjdɛɦlsə0 sinxÓ0 dɛj ʧtsʜʢtsʜɕdls dɛɕdɤdɛʷʷ lstsuʢ0, ls. j. ə tɛj ʰ jdɛɕdʷ ɦɕdɦlsjdʒ ʳ əʢtsʜʷls

$$x=´n,\ n\in Z,\ \text{ɕd}\ x=\frac{\pi}{2}+2´n, n\in Z.$$



[illegible] (tɕɫɧ. 8) [illegible] $\cos x=\frac{1}{2}$. [illegible] sinxÓ0. [illegible] $x=\frac{\pi}{3}+2´n$, n∈Z.

[illegible] $x=´n$; $x=\frac{\pi}{2}+2´n$; $x=\frac{\pi}{3}+2´n$, n∈Z.

[illegible] sin3x-sinx=sin2x [illegible]:

$$2\cos 2x\cdot\sin x=2\sin x\cos x.$$

[illegible] sinxÍ0, [illegible] 2sinx. [illegible]:

$$\cos 2x=\cos x$$

$$2\cos^2 x-\cos x-1=0.$$

[illegible] cosx=1 [illegible] $\cos x=-\frac{1}{2}$ [illegible] (tɕɫɧ. 9 [illegible] tɕɫɧ. 10). [illegible] sinx<0 [illegible] $x=\frac{\pi}{3}+´+2´n$, n∈Z.

[illegible]

$$x=\frac{\pi}{3}+2´n,\ n\in Z \quad [illegible] \quad x=\frac{\pi}{3}+´+2´n, n\in Z,$$

[illegible]: $x=\frac{\pi}{3}+´n$, n∈Z.

[illegible]: $x=´n$; $x=\frac{\pi}{2}+2´n$; $x=\frac{\pi}{3}+´n$, n∈Z.

I j b f _ j

Решите уравнение [redacted]

J _ r _ g b _

[illegible]:

$$|\cos x+\sin x|=\sqrt{2}\sin 2x \Leftrightarrow \begin{cases}(\cos x+\sin x)^2=2\sin^2 2x,\\ \sin 2x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+\sin 2x=2\sin^2 2x,\\ \sin 2x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin 2x=1;\\ \sin 2x=-\frac{1}{2},\end{array}\right.\\ \sin 2x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x=1 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+2\pi k \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

[illegible]: $\frac{\pi}{4}+\pi k, k\epsilon$ Z.

Пример 19. 1

Решить уравнение: $|\cos x| = \sin x + \frac{1}{2}.$

J _ r _ g b _

υ tc0ǝdzjdzdj tc0ǝdztsfŋdzıdzts fŋdzj h 0dzdzts? fŋdfŋlsjdzj:

$$\begin{cases} |\cos x|^2 = \left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2, \\ \sin x + \frac{1}{2} \ge 0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} 2\sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0, \\ \sin x \ge -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8 \cdot 3}}{8} = \frac{-1 - \pm\sqrt{7}}{4}.$$

l ts $\frac{-1-\sqrt{7}}{4} < -\frac{1}{2}$ dzj wǝdzwjlsfŋw tcj h jdzdjdz

∫ lsǝjls. $x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{4} + \pi k$.

9 , , , G _ k l Z g ^ Z j l g u _ l j b] h g h f _ l j b q _ k d b _ m j Z \ g _ g b y

B k i h e v a h \ Z g b _ h] j Z g b q _ g g h F k R b ½ [M L m Q g [d p b c

Пример 20

Решить уравнение $\sin 5x - 2\cos 2x = 3$**.**

J _ r _ g b _

ɿ tsfŋ Ɣtsdzı Ɣlz $\sin 5x \le 1$, $-\cos 2x \le 1$, lsts dzjǝ0w ɥ0fŋlsı dzj tƒtcjǝtsfŋ⊐tsнdƒls 3 dƒ tc0ǝdz0 3, jfŋdzdƒ

$$\begin{cases} \sin 5x = 1, \\ \cos 2x = -1. \end{cases}$$

ɾ dzw dz0⊐tsɤнjdzdƒw ldz0ɥjdzdƒ? x, lzнtsǝdzjlsǝtstcw в h dƒ⊐ tsвtsdƒdz lztc0ǝdzjdzdƒwdz, tƒtsfŋlslzƒdƒdz fŋdzjнlz в h dƒdz tsвtc0ıtsdz. ţ j h dƒdz tsнdzts dƒı dzdƒ⊐, ı0lsjdz fŋtcjнdƒ dz0?нjdzdz r ⊐ ldz0ɥjdzdƒ? tslsвjtcjdz lsj, Ɣtslststc r j lzнtsǝdzjlsǝtstcw в ls dƒ нtclzƒtsdzlz.

l 0ɥdzjdz fŋts ǝlststctsƒts: $\cos 2x = -1$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$. ƒtsƒнθ $5x = \frac{5\pi}{2} + 5\pi k$,

$\sin 5x = \sin(\frac{5}{2}\pi + 5\pi k) = \sin(\frac{\pi}{2} + \pi k)$.

ɿ tsdzwlsdzts, ɥlsts dzdƒ h ı нdzw ɥjlsdz r ⊐ k вlzнjls $\sin 5x = 1$.

∫ lsǝjls. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Пример 21

2 Решить уравнение $2\cos\frac{x}{5} = 5^x + 5^{-x}$**.**

J _ r _ g b _

$2\cos\frac{x}{5} \le 2$, $5^x + 5^{-x} \ge 2$. нdzjнtsǝ0lsjdzıdzts, $\begin{cases} 2\cos\frac{x}{5} = 2 \\ 5^x + 5^{-x} = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 0$.

∫ lsǝjls. $x = 0$.

Пример 22

Решить уравнение $\log_2(y+1)+\arcsin(2^{|x|}+y)=\dfrac{\pi}{2}.$

J _ r _ g b _

∫ вtsLдz0цdдз $f(x,y)=\arcsin(2^{|x|}+y)$, ksts¢H0 dL tstfte¢jнjдz¢jдz¢dдw tsвte0ksдztsЭ kste¢dдtsдztsдз¢jkste¢dдцj¢ф£tsЭ Ыkzдz£цdдd $f(x,y)$ dдз¢j¢jдз $-\dfrac{\pi}{2}\le f(x,y)\le\dfrac{\pi}{2}$ d $-1\le 2^{|x|}+y\le 1$.

ъ0£ £0£ $f(x,y)\le\dfrac{\pi}{2}$, ksts dL kzte0эдz¢jдz¢dдw ф¢дz¢jнkz¢jks дz¢jte0э¢jдz¢ф£ksэts $\log_2(y+1)\ge 0$, ks.j. $y\ge 0$. ⅎtsф£tsдz¹£kz $2^{|x|}+y\le 1$ d $y\ge 0$, ksts $2^{|x|}\le 1$ d $|x|\le 0$. ∫ ндz0£ts $|x|\ge 0$ d tfts¹kstsдзkz $x=0$.

[ф¢дz¢d $2^{|x|}+y\le 1$ d $x=0$, ksts $y\le 0$. ъ0£ £0£ te0дz¢jj в ʳ дzts kzф£ks0дztsэдz¢jдzts, цksts $y\ge 0$, ksts $y=0$

∫ ksэ¢jks. $x=0$, $y=0$.

N m g d p b h g Z e v g u _ f _ l h ^ u j _ r _ g b y l j b] h g h f _ l j b q _ k d b c
d h f [b g b j h \ Z g g u o m j Z \ g _ g b c

Пример 23

3Решить уравнение $x^2+(1+x)\sin\dfrac{\pi x}{6}=\dfrac{3+x}{2}.$

J _ r _ g b _

ⅎ te¢jtsвte0LkZ¢jдз d£ф¬tsндztsj kzte0эдz¢jдz¢dдj £ эdнkz: $2x^2+\left(2\sin\dfrac{\pi x}{6}-1\right)x+2\sin\dfrac{\pi x}{6}-3=0$

d te¢j ʰ dдз ¢jдts £0£ £э0нte0ksдztsj tsksдztsф£dksj¢дz¹дzts x. ъtsдH0 tftsдzkцdдз, $\left[\begin{array}{l} x=-\sin\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{3}{2}, \\ x=-1. \end{array}\right.$

[j ʰ dдз tfj¢эtsj kzte0эдz¢jдz¢dдj ф£tsэts£kztfдztsф£ksd. υцksw tsдte0дz¢dдцj¢дz¢дztsф£ks¹ Ыkzдz£цdдd $\sin\dfrac{\pi x}{6}$, tfte¢d¬tsнdдз £ э ʳ эtsнkz, цksts kzte0эдz¢jдz¢dдj дztsкj¢jks dдз¢jks¹ £tste¢jдz¹ ksts¢дz¹£ts дz0 tskste¢jL£j $[\frac{1}{2},\frac{5}{2}]$. ⅠⅠ0 ¹kstsдз tfte¢tsдз¢jкkz£j Ыkzдz£цdw $y=x$ эtsLte0ф£ks0¢jks, 0 Ыkzдz£цdw $y=-\sin\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{3}{2}$ kzв ʳ э0¢jks. ⅎдz¢jнtsэ0ks¢jдz¹дzts, ¢jф£дz¢d ¹kstsдз kzte0эдz¢jдz¢dдj dдз¢jj¢jks £tste¢jдz¹, ksts tsдz ¢jнdдz¢ф£ksэ¢jдz¢дz ʳ Ɜ. ⅎtsнвtstte¢tsдз дz0¬tsнdдз $x=1$.

∫ ksэ¢jks. $x=\pm 1$.

Пример 24.

4 Решить уравнение $\cos(\cos\sqrt{1-x})+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=1+\cos 1.$

J _ r _ g b _

ⅠⅠ0 tsф£дztsэ0дz¢dдd ksj¢tste¢jдз ʳ ts tfte¢tsdLэtsндztsЭ ф£дztsкдztsЭ Ыkzдz£цdдd ʷф£дzts, цksts Ыkzдz£цdw $y=\cos(\cos\sqrt{1-x})$ kzв ʳ э0 ʸ ʰ 0ʷ (Ыkzдz£цdw $y=1-x$ kzв ʳ э0 ʸ ʰ 0ʷ, $y=\sqrt{x}$ эtsLte0ф£ks0 ʸ ʰ 0ʷ, $y=\cos x$ kzв ʳ э0 ʸ ʰ 0ʷ). ∫ ksф£ ʸ н0 tftsдzʷksдzts, цksts Ыkzдz£цdw $F(x)=\cos(\cos\sqrt{1-x})+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tstfte¢jнjдz¢jдz¢дz0ʷ дz0 (0;1], kzв ʳ э0 ʸ ʰ 0ʷ. ⅎtsˡkstsдзkz н0дz¢дztsj kzte0эдz¢jдz¢dдj dдз¢jj¢jks дz¢j вtsдz¢jj tsндztsдzts £tste¢дzʷ. ъ0£ £0£ $F(1)=1+\cos 1$

∫ ksэ¢jks. $x=1$.

Пример 5 25

Решить уравнение $-2\sqrt{3}\pi\sin x = |x+\pi| + |x-2\pi|$.

J _ r _ g b _

[illegible]

0) [illegible] $x < -\pi$. [illegible] $-2\sqrt{3}\pi\sin x = -2x+\pi$. [illegible] $(-\infty;-2\pi]$ [illegible] $-2\sqrt{3}\pi\sin x \le 2\sqrt{3}\pi$, $-2x+\pi \ge 5\pi$, [illegible] $2\sqrt{3}\pi < 5\pi$. [illegible] $(-2\pi;-\pi)$ [illegible] $-2\sqrt{3}\pi\sin x < 0$, [illegible] $-2x+\pi > 3\pi$.

в) [illegible] $-\pi \le x \le 2\pi$. [illegible] $-\sqrt{3}\sin x = 3\pi \Leftarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, [illegible] $[-\pi;2\pi]$ [illegible] $-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

ə) [illegible] $x > 2\pi$. [illegible] $-2\sqrt{3}\pi\sin x = 2x-\pi$., [illegible] $(2\pi;3\pi]$ [illegible] $-2\sqrt{3}\sin x \le 0$, [illegible] $2x-\pi > 3\pi$. [illegible] $(3\pi;+\infty)$ [illegible] $-2\sqrt{3}\pi\sin x \le 2\sqrt{3}\pi$, $2x-\pi > 5\pi$, [illegible] $2\sqrt{3}\pi < 5\pi$.

[illegible] $x = -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

= e Z \ Z L j b] h g h f _ l j b q _ k d b _ g _ j Z \ _ g k l \ Z

Пример 26.

Решите [redacted]

J _ r _ [redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Пример 27.

Решите неравенство: $2\sqrt{\sin^2 x - \sin x - 1} \ge \cos^2 x + \sin x + 3.$

J _ r _ [illegible]

[illegible] обозначим $\sin x = t$, тогда получим $2\sqrt{t^2-t-1} \ge 4-t^2+t$. При $t \in [0;1]$ подкорневое выражение отрицательно, Значит, $t < 0$.

[illegible] пусть $\sqrt{t^2-t-1} = p$, тогда $2p \ge 3-p^2$, откуда $p \ge 1$ (отрицательные p не [illegible]). То есть $t^2-t-1 \ge 1$, откуда $t \le -1$, то есть $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2}+2\pi k$

Ответ: $-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$

I j b f _ j

Решить неравенство $\sqrt[4]{7-\cos 4x} > 2\cos x$

J _ r _ g b _

Решение. Обозначим $\sqrt[4]{7-\cos 4x}=y$, $y\geq 0$, тогда $y^4=7-\cos 4x$ и $y^4>2\cos x$ или $y^4+\cos 4x>2\cos x$.

Решение неравенства $y^4+\cos 4x>2\cos x$ является решением системы неравенств $\begin{cases} y^4+\cos 4x>2\cos x \\ \cos x>0 \end{cases}$.

Преобразуем неравенство $y^4+\cos 4x>2\cos x$ к виду, не содержащему радикалов. Для этого перепишем неравенство (7): $7-\cos 4x>32\cos^4 x$;

$$7-(2\cos^2 2x-1)>32\cos^4 x,$$

$$8-2\cos^2 2x>32\cos^4 x,$$

$$4-(2\cos^2 x-1)^2>16\cos^4 x,$$

$$4-4\cos^4 x+4\cos^2 x-1>16\cos^4 x,$$

$$20\cos^4 x-4\cos^2 x-3<0.$$

Введем $\cos^2 x=t$. Получим $20t^2-4t-3<0$.
Решения $-\frac{3}{10}<t<\frac{1}{2}$. Но $t\geq 0$, поэтому $t\geq 0$, $t<\frac{1}{2}$. Имеем $\cos^2 x<\frac{1}{2}\Leftrightarrow|\cos x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$
Учитывая (6): $\cos x>0$, получаем $-\frac{1}{\sqrt{2}}<\cos x>0$.
Таким образом, 2). Из 1) и 2), получаем $-\frac{1}{\sqrt{2}}<\cos x$.

Пусть точки A и B лежат на окружности (рис. 13), причем дуга AmB

Ответ: $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right), n\in Z$.

= e Z \ Z L j b] h g h f _ l j b q _ k d b _ k b k l _ f u m j Z \ g _ g b c

Решение. Пусть $\sqrt[4]{7-\cos 4x}=y$, $y\geq 0$. Тогда $y^4=7-\cos 4x$ и $y^4+\cos 4x>2\cos x$, $y\geq 0$, $\cos x>0$ (см. рис.), $0\leq x<\frac{\pi}{2}$ и $\cos x\leq 1$. Поэтому $y^4+\cos 4x>2\cos x\geq 2\cos^2 x$.

Решите системы уравнений
Пример 29.

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \cos^2 x - \cos^2 y = -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + y \\ \cos^2(\frac{\pi}{3} + y) - \cos^2 y = -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + y \\ \sin(\frac{\pi}{3} + 2y)\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + y \\ -\sin(\frac{\pi}{3} + 2y)\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\frac{\pi}{3} + 2y) = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + y \\ 2\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{3} + 2y) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + y \\ \sin(\frac{\pi}{3} + 2y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + y \\ \frac{\pi}{3} + 2y = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n;\ n \in z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + y \\ y = (-1)^n\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2};\ n \in z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2};\ n \in z \\ y = (-1)^n\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2};\ n \in z \end{cases}$$

Javab: $((-1)^n\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}; (-1)^n\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}; n \in z)$

Пример 30

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2} \\ \cos 2x + 5\cos y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + y \\ \cos(2(\frac{\pi}{2} + y)) + \cos y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + y \\ \cos(\pi + 2y) + 5\cos y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + y \\ \cos\pi\cos 2y - \sin\pi\sin 2y + 5\cos y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + y \\ -\cos 2y + 5\cos y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + y \\ -2\cos^2 y + 1 + 5\cos y - 3 = 0 \end{cases}$$

$-2\cos^2 y + 5\cos y - 2 = 0$
$2\cos^2 y - 5\cos y + 2 = 0$
Qoy $\cos y = t;\ t \in [-1;1]$
$2t^2 - 5t + 2 = 0$
$D = b^2 - 4ac$
$D = 9 > 0 \Rightarrow 2$

$t_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$t_1 = \dfrac{5+3}{4} = 2$ dzj wɔdzwjlsfŋw tɛj h jdzqʃjdʒ

$t_2 = \dfrac{5-3}{4} = \dfrac{1}{2}$

$\cos y = \dfrac{1}{2}$

$y = \pm \arccos \dfrac{1}{2} + 2\pi n;\ n \in z$

$z_{1,2} = \pm \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in z$

$x = \dfrac{\pi}{2} + z$

$x_1 = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in z$; $x_2 = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in z$

ʃlsɔjls: $(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in z)$; $(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n;\ -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in z)$

K i h k h [u j _ r _ k g b k y l _ f u

Z i h ^ k l Z g b \ i d h Z q e _ g g h _ k e h ` _ g b _ \ u q b l Z g b _ m j Z \ g _ g b c

Пример 31.

$$\begin{cases} \cos x \cos y = 0{,}75 \\ \dfrac{\cos x \cos y = 0{,}75}{\sin x \sin y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \cos y = 0{,}75 \\ \cos x \cos y = 3\sin x \sin y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \cos y = 0{,}75 \\ \sin x \sin y = 0{,}25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \cos y = 0{,}75 \\ \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = 3 \end{cases}$$

$\cos x \cos y + \sin x \sin z = 1$

$\cos(x-y) = 1$

$x-y = 2\pi n;\ n \in z$

$x = 2\pi n + y;\ n \in z$

$\cos x \cos y = 0{,}75$

$\cos(2\pi n + y) \cos y = 0{,}75$

$\cos^2 y = 0{,}75$

$\cos y = \sqrt{\dfrac{75}{100}}$

$\cos y = \dfrac{5\sqrt{3}}{10} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$y = \pm \arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n; n \in z$

$y_{1,2} = \pm \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in z$

$x_{1,2} = \pm \dfrac{\pi}{6} + 4\pi n; n \in z$

ʃlsɔjls: $\pm \dfrac{\pi}{6} + 4\pi n; n \in z$; $\pm \dfrac{\pi}{6} + 4\pi n; n \in z$

[jZ a e h `_ g b _ gZ fg h `b l _ e b ^b_ e h g b _ gm h Z_ \ g _ g b c kb k l _ f u

Пример 32

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x \text{ ï } \cos y = \sqrt{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1 \\ -2\ \sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$-\frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$-\text{ctg}\frac{x-y}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{ctg}\frac{x-y}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{x-y}{2} = arctg(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + \pi n; n \in z$$

$$\frac{x-y}{2} = \frac{2\pi}{3} + \pi n; n \in z$$

$$x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n; n \in z$$

$$\sin(\frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{1} + y) + \sin y = 1$$

$$\sin(\frac{10\pi}{3} + \frac{2\pi}{1} + y) + \sin y = 1$$

$$2\sin\frac{\frac{10\pi}{3} + 2y}{2}\cos\frac{\frac{10\pi}{3}}{2} = 1$$

$$2\sin(\frac{10\pi}{6} + y)\cos\frac{10\pi}{6} = 1$$

$$\sin(\frac{10\pi}{6} + y) = 1$$

$$\frac{10\pi}{6} + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in z$$

$$y = \frac{\pi}{2} - \frac{10\pi}{6} + 2\pi k; k \in z$$

$$y = \frac{-7\pi}{6} + 2\pi k; k \in z$$

$$x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n + y; n \in z$$

$$x = \frac{4\pi}{3} - \frac{7\pi}{6} + 2\pi(n+k); n,k \in z$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n(n+k); n,k \in z$$

∫ ks∂j ks: $(\frac{\pi}{6} + 2\pi n(n+k); -\frac{7\pi}{6} + 2\pi k, n, k \epsilon Z)$

\ a Z f _ig_Z_ f _ g g u o

Пример 33.

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \cos 2x + \cos 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ 1 \text{ ï } 2\sin^2 x + 2\cos^2 y - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \cos^2 y \text{ ï } \sin^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \cos^2 y \text{ ï } \sin^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ (\cos y \text{ ï } \sin x)(\cos y + \sin x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \cos y \text{ ï } \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + 1 + \sin x = 1 \\ \cos y = 1 = \sin x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos y = 1 + \sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n; n \in z \\ \cos y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n; n \in z \\ y = 2\pi k; k \in z \end{cases}$$

∫ ks∂j ks: $(\pi n; 2\pi k, n, k \epsilon Z)$