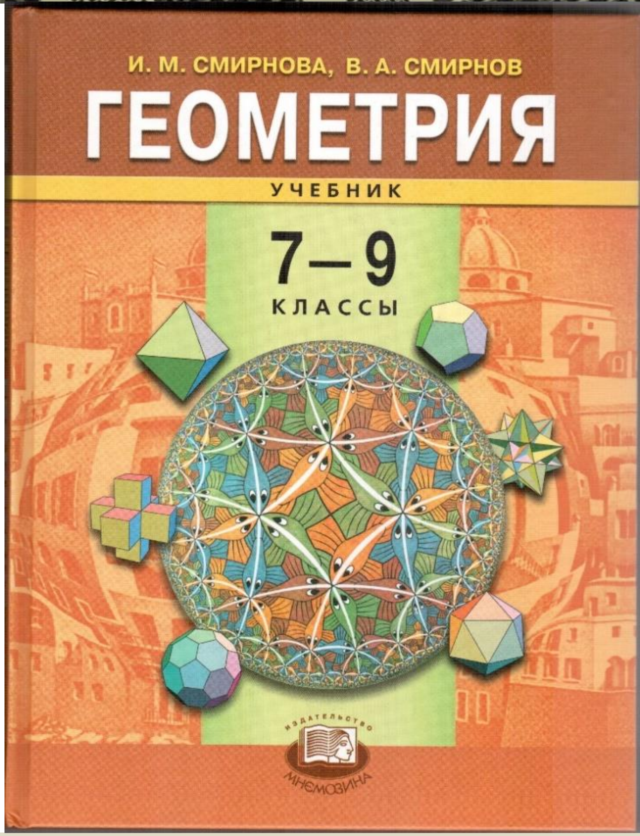
издательство Мнемозина

ВЕБИНАРЫ

ПОДГОТОВКА К ОГЭ. СРЕДНИЕ ЛИНИИ

Презентация к учебнику «Геометрия. 8 класс» И.М. Смирновой и В.А. Смирнова



ВЕДУЩИЙ: **Смирнов Владимир Алексеевич**, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой элементарной математики МПГУ, автор учебников по геометрии для 5-6, 7-9 и 10-11 классов.

E-mail: v-a-smirnov@mail.ru Сайт: vasmirnov.ru

Авторский сайт: vasmirnov.ru

Этот сайт представляет современный учебно-методический комплект по геометрии для 5-11 классов

Авторы:

Смирнова Ирина Михайловна – доктор педагогических наук, профессор кафедры элементарной математики Московского педагогического государственного университета.

Смирнов Владимир Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой элементарной математики Московского педагогического государственного университета

Учебно-методический комплект по геометрии

Программа и тематическое планирование по геометрии для 7-9 классов

Программа и тематическое планирование по геометрии для 10-11 классов

Программа по геометрии для 5-6 классов

Дидактические материалы
7-9 классы
7 класс (новые)
8 класс (новые)
9 класс (новые)

Уроки геометрии с "Power Point"
5-6 классы
7-9 классы
10-11 классы

Геометрия с "GeoGebra".

Элементарная математика для студентов педагогических вузов

Статьи и пособия о преподавании геометрии в школе

Видеолекции и вебинары

Подготовка к ОГЭ

Подготовка к ЕГЭ

Вопросы, отзывы и пожелания присылайте по адресу: v-a-smirnov@mail.ru

Подготовка к ОГЭ

Проблема с подготовкой к ОГЭ по геометрии заключается в том, что, с одной стороны, старые учебники геометрии были написаны до введения ОГЭ и не были рассчитаны на подготовку к ОГЭ, с другой стороны, разработчики заданий ОГЭ не ориентируются на учебники геометрии, а составляют задания по своему усмотрению.

Выход из этого положения состоит в том, чтобы при обучении геометрии мы ориентировались не только на прохождение учебника геометрии, но и на получение результатов обучения, подготовку к ОГЭ.

Для этого учебники должны иметь модульную структуру, объединяющую в один модуль близкие по содержанию темы со своими результатами обучения.

Сами модули должны располагаться от простого к сложному

Здесь мы рассмотрим теоремы и задачи, связанные со средними линиями треугольника и трапеции, теоремами Фалеса и о пропорциональных отрезках.

В учебнике геометрии Л.С. Атанасяна и др. теорема о средней линии треугольника помещена в главу VII. Подобные треугольники, относящейся к концу 8-го класса.

Теорема

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

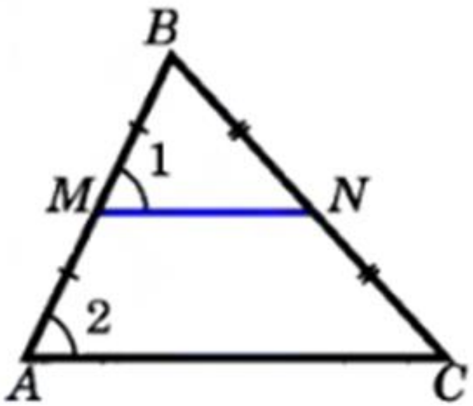


Рис. 195

Доказательство

Пусть MN — средняя линия треугольника ABC (рис. 195). Докажем, что $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$.

Треугольники BMN и BAC подобны по второму признаку подобия треугольников ($\angle B$ — общий, $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{1}{2}$), поэтому $\angle 1 = \angle 2$ и $\frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}$. Из равенства $\angle 1 = \angle 2$ следует, что $MN \parallel AC$ (объясните почему), а из второго равенства, — что $MN = \frac{1}{2}AC$. **Теорема доказана.**

Средняя линия трапеции расположена в главе IX «Векторы», относящейся к 9-му классу.

Теорема

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

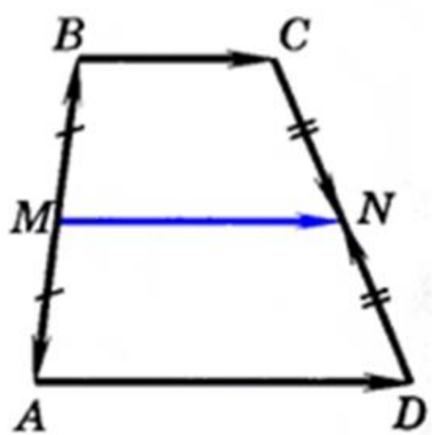


Рис. 266

Доказательство

Пусть MN — средняя линия трапеции $ABCD$ (рис. 266). Докажем, что $MN \parallel AD$ и $MN = \frac{AD+BC}{2}$.

По правилу многоугольника $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$ и $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$. Сложив эти равенства, получим:

$2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN})$.

Но M и N — середины сторон AB и CD, поэтому $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN} = \vec{0}$. Следовательно, $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$, откуда

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

Так как векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ сонаправлены, то векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AD}$ также сонаправлены, а длина вектора $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ равна $AD + BC$. Отсюда следует, что $MN \parallel AD$ и $MN = \frac{AD+BC}{2}$. **Теорема доказана.**

Теорема Фалеса помещена в задачи параграфа 2 главы V. Четырёхугольники, относящейся к началу 8-го класса.

385 Докажите **теорему Фалеса**[1]: если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки.

Решение

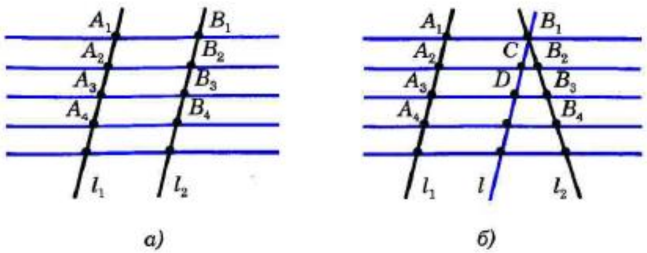


Рис. 165

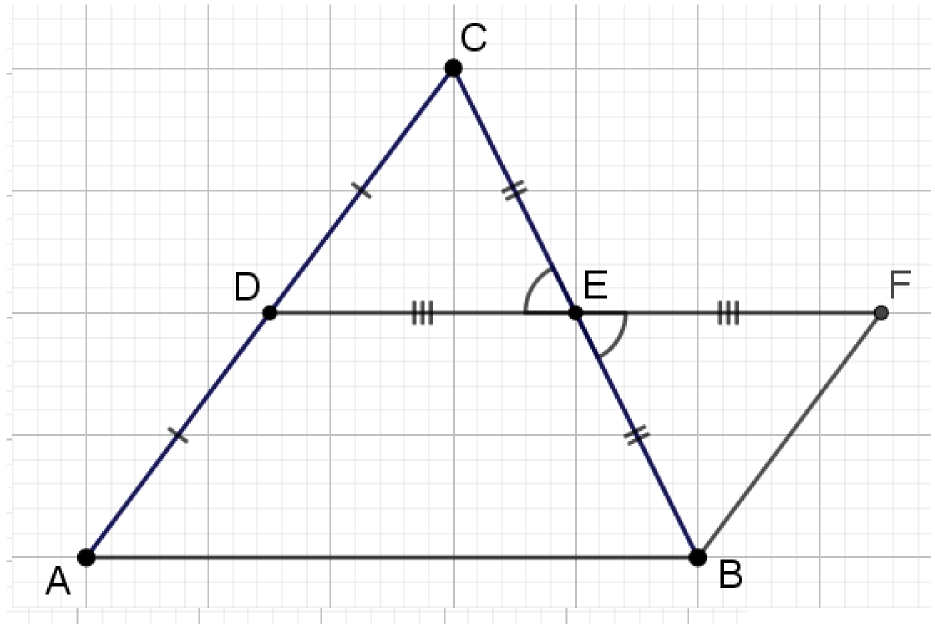
Пусть на прямой l_1 отложены равные отрезки A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... и через их концы проведены параллельные прямые, которые пересекают прямую l_2 в точках B_1, B_2, B_3, B_4, ... (рис. 165). Требуется доказать, что отрезки B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, ... равны друг другу. Докажем, например, что $B_1B_2=B_2B_3$.

Рассмотрим сначала случай, когда прямые l_1 и l_2 параллельны (рис. 165, *а*). Тогда $A_1A_2=B_1B_2$ и $A_2A_3=B_2B_3$ как противоположные стороны параллелограммов $A_1B_1B_2A_2$ и $A_2B_2B_3A_3$. Так как $A_1A_2=A_2A_3$, то и $B_1B_2=B_2B_3$. Если прямые l_1 и l_2 не параллельны, то через точку B_1 проведем прямую l, параллельную прямой l_1 (рис. 165, *б*). Она пересечет прямые A_2B_2 и A_3B_3 в некоторых точках C и D. Так как $A_1A_2=A_2A_3$, то по доказанному $B_1C=CD$. Отсюда получаем $B_1B_2=B_2B_3$ (задача 384). Аналогично можно доказать, что $B_2B_3=B_3B_4$ и т. д.

В нашем учебнике геометрии 8-го класса средняя линия треугольника, средняя линия трапеции, теорема Фалеса и теорема о пропорциональных отрезках объединены в один модуль и помещены в главу I. Четырёхугольники, относящейся к началу 8-го класса.

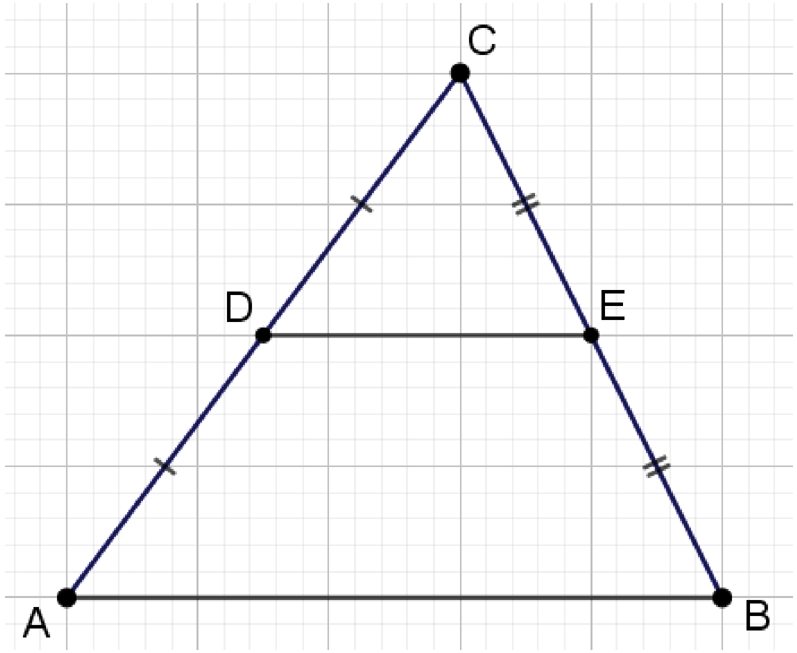
ГЛАВА I. ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ

Теорема. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна её половине.



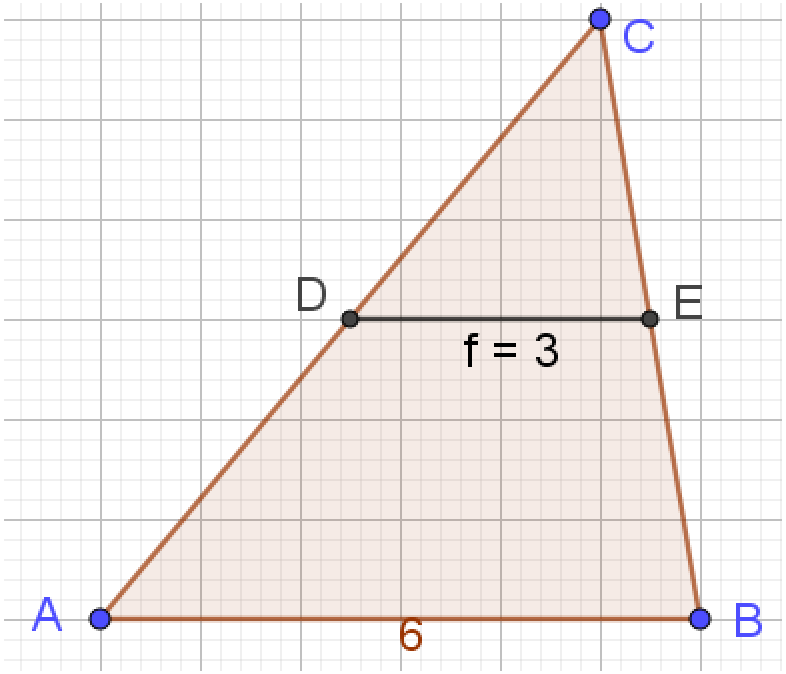
Доказательство. Пусть *DE* – средняя линия треугольника *ABC*. Отложим на прямой *DE* отрезок *EF* = *DE* и соединим отрезком точки *B* и *F*. Треугольники *ECD* и *EBF* равны по первому признаку равенства треугольников. Следовательно, *BF* = *CD* = *AD*. Так как угол 2 равен углу 2’, то прямые *AC* и *BF* параллельны. Таким образом, стороны *AD* и *BF* четырёхугольника *ABFD* равны и параллельны. Следовательно, этот четырёхугольник – параллелограмм. Значит, стороны *AB* и *DF* равны и параллельны. Средняя линия *DE* равна половине стороны *DF* и, следовательно, параллельна стороне *AB* и равна её половине.

Следствие. Если прямая проходит через середину одной стороны треугольника и параллельна другой его стороне, то она проходит через середину третьей стороны этого треугольника.



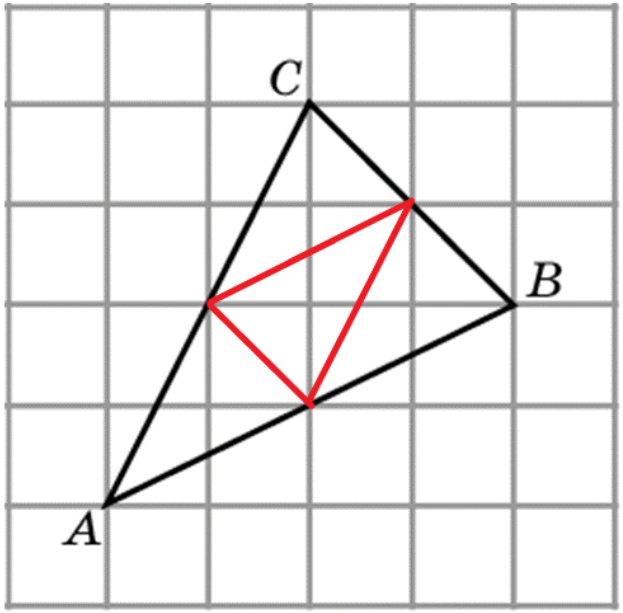
Доказательство. Пусть прямая проходит через середину D стороны AC и параллельна стороне AB треугольника ABC. Так как средняя линия DE также параллельна стороне AB, то она должна лежать на данной прямой. Следовательно, середина E стороны BC принадлежит этой прямой.

Иллюстрация в программе GeoGebra



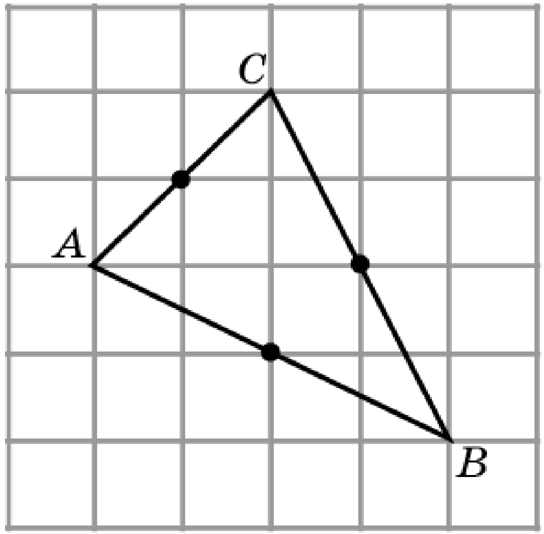
Упражнения

1. Проведите средние линии треугольника *ABC*, изображенного на рисунке.



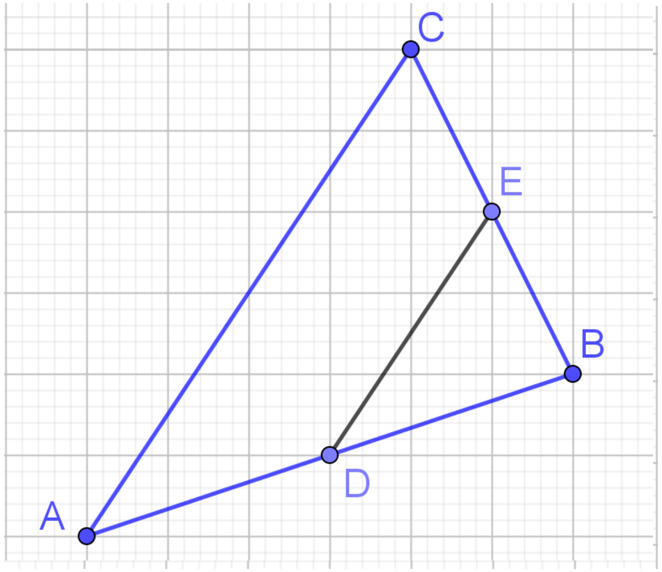
Ответ.

2. Изобразите треугольник, середины сторон которого отмечены на рисунке.



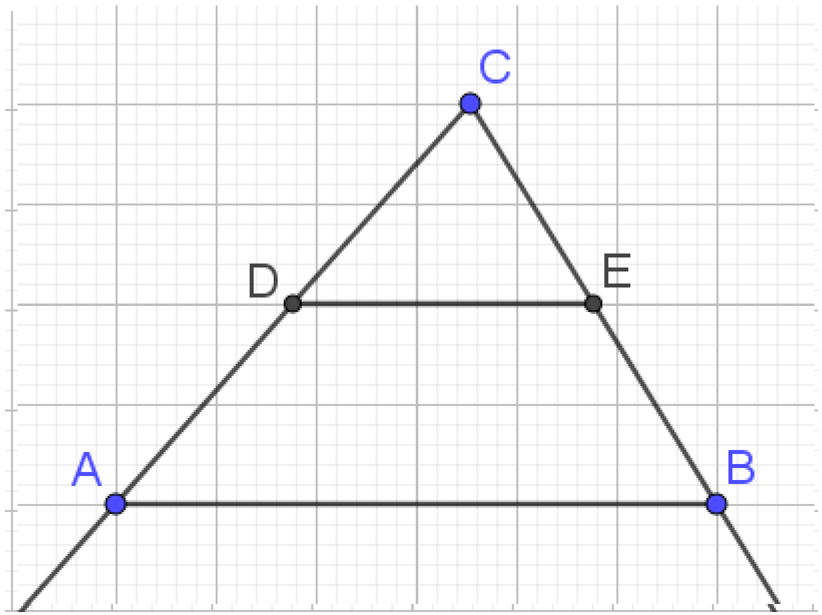
Ответ:

3. На рисунке изображена вершина и средняя линия треугольника. Изобразите сам треугольник.



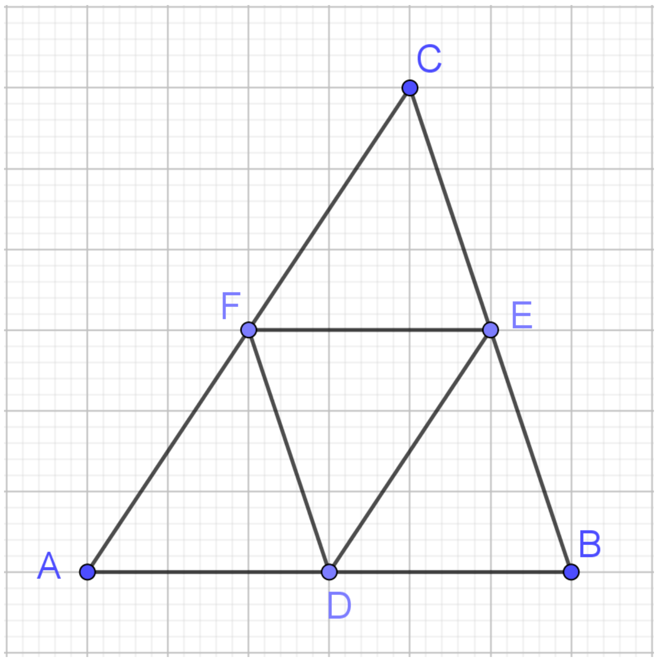
Ответ:

4. Найдите длину отрезка *DE*. Стороны клеток равны 1



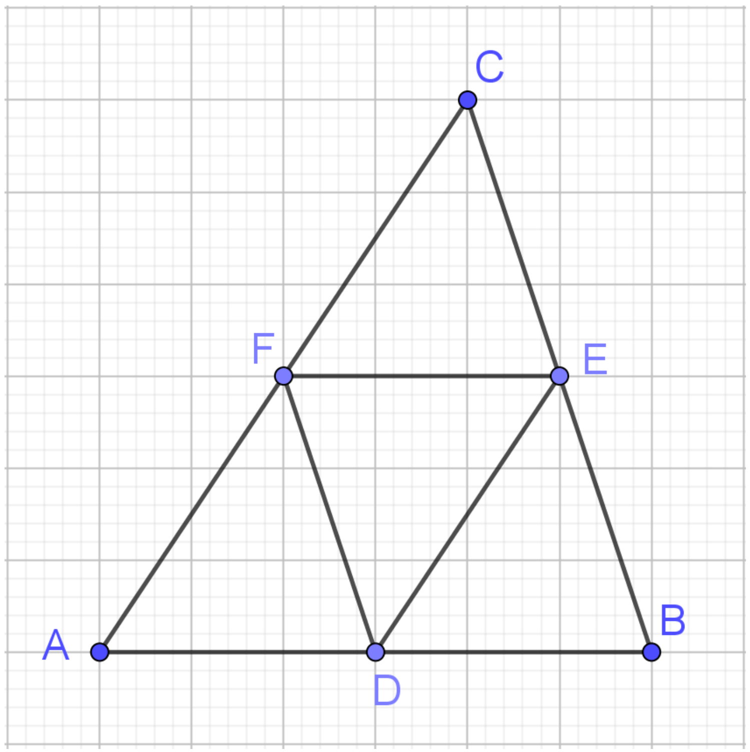
Ответ. 3.

5. Стороны треугольника равны 8 см, 10 см и 12 см. Найдите стороны треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.



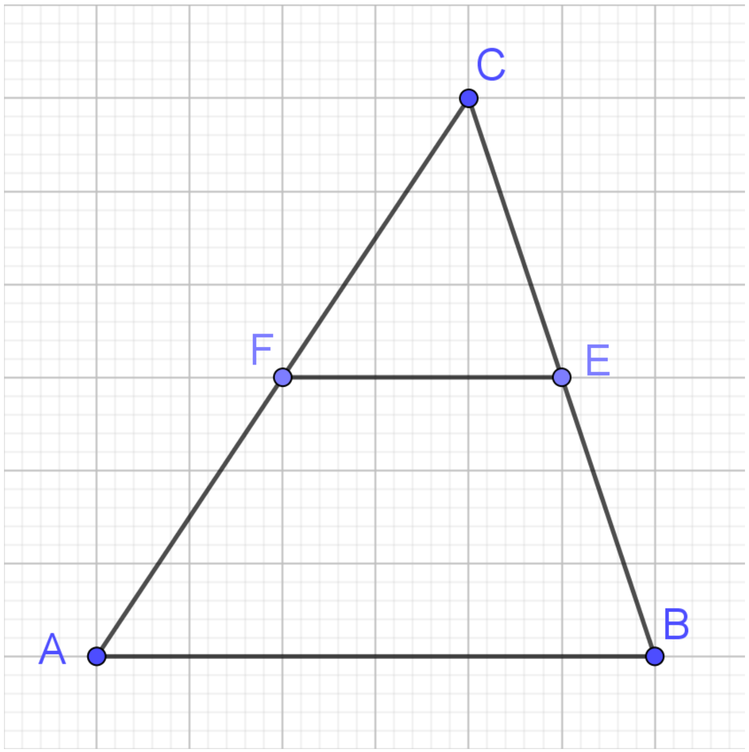
Ответ: 4 см, 5 см и 6 см.

6. Стороны треугольника *DEF* равны 2 см, 3 см и 4 см. Его вершины являются серединами сторон второго треугольника *ABC*. Найдите периметр второго треугольника.



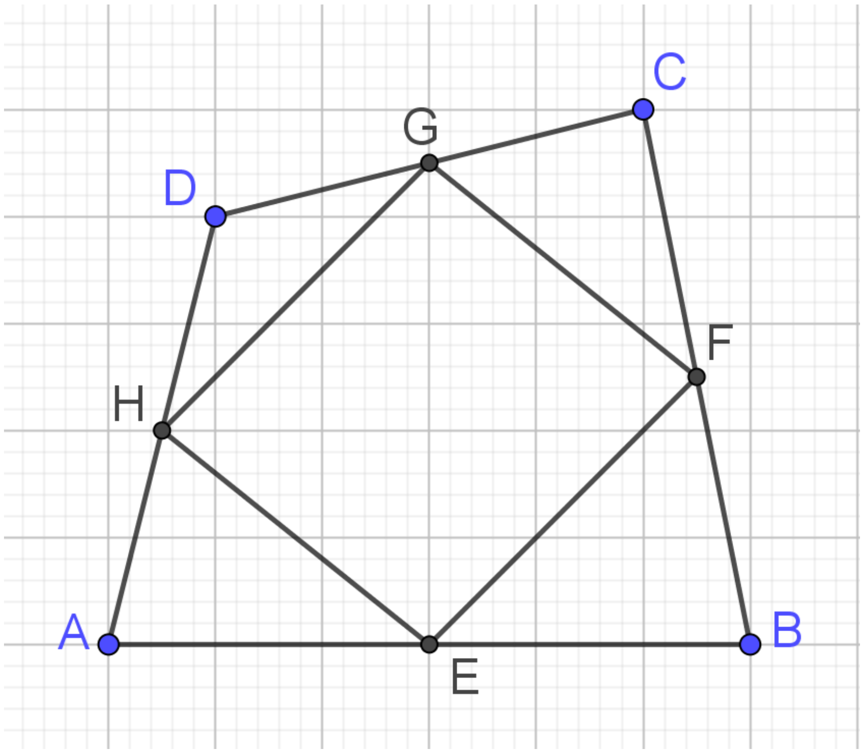
Ответ: 18 см.

7. Какую часть площади данного треугольника составляет площадь треугольника, отсекаемого его средней линией?

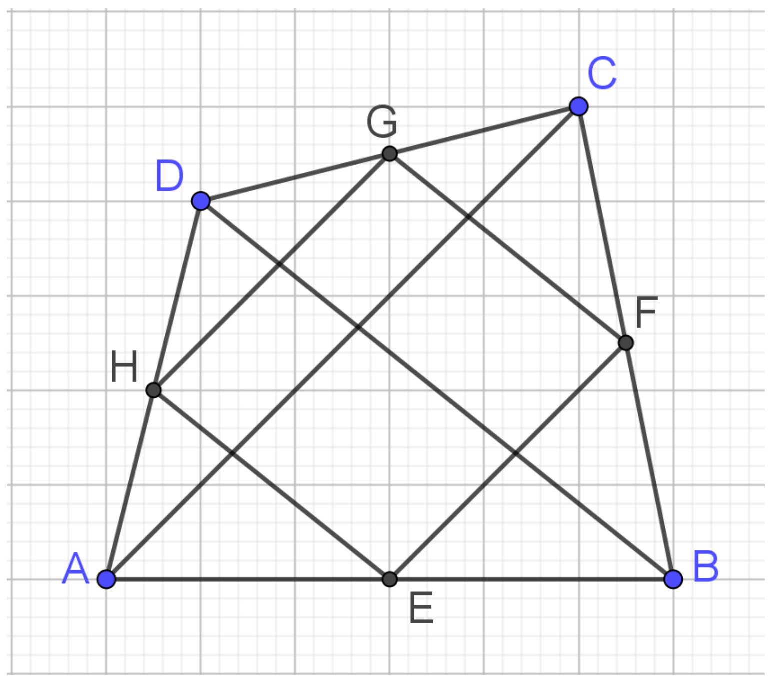


Ответ: $\frac{1}{4}$.

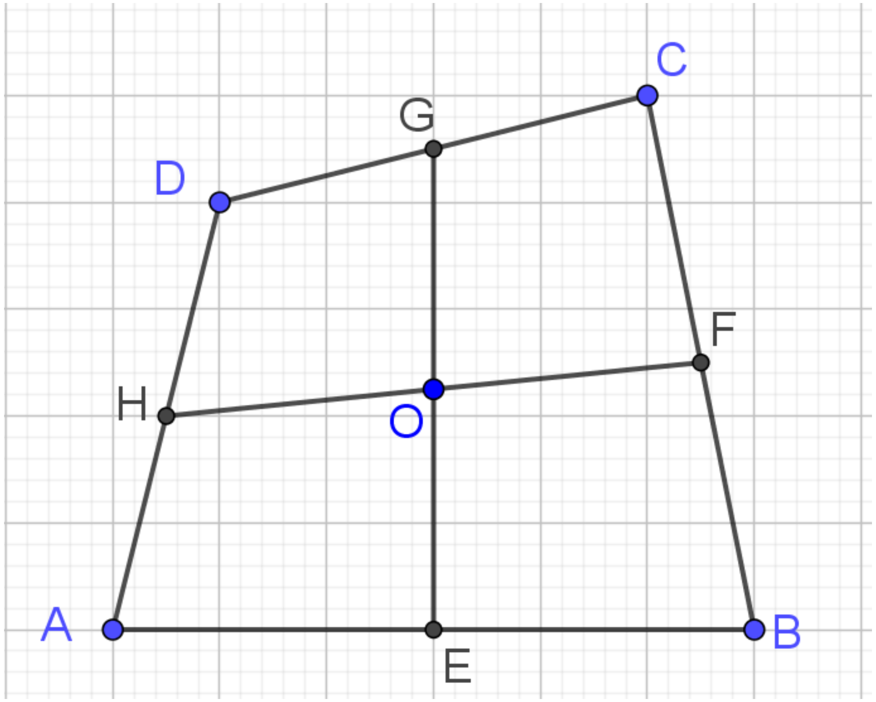
8. Докажите, что середины сторон четырёхугольника являются вершинами параллелограмма. Найдите площадь этого параллелограмма, если площадь исходного четырёхугольника равна 1.



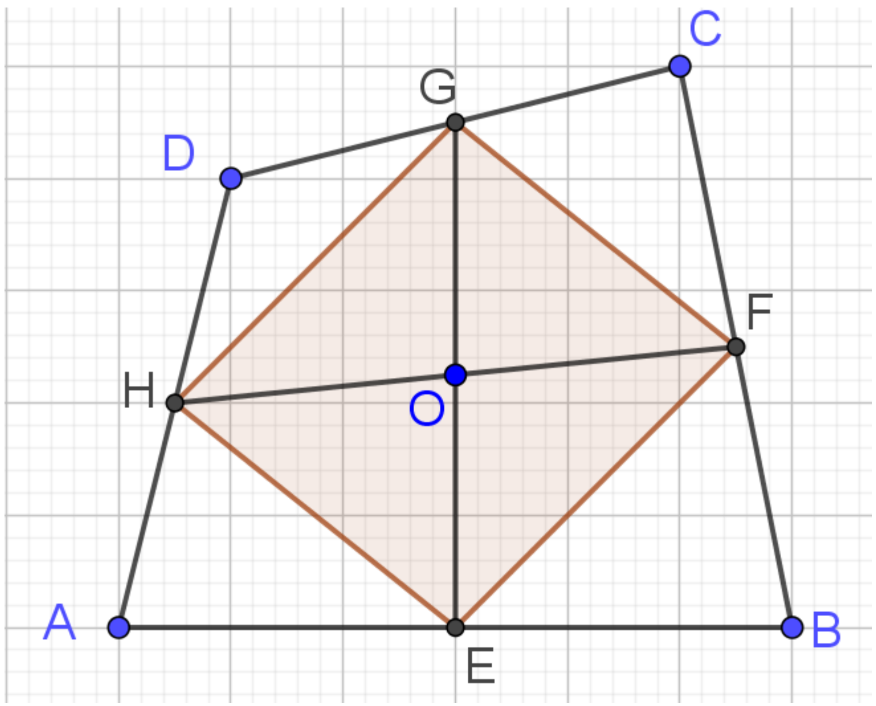
Решение. Пусть *E*, *F*, *G*, *H* – середины соответствующих сторон четырёхугольника *ABCD*. Проведем диагонали *AC* и *BD*. Отрезок *EF* является средней линией треугольника *ABC*. Следовательно, он параллелен диагонали *AC* и равен её половине. Отрезок *HG* также параллелен диагонали *AC* и равен её половине. Следовательно, стороны *EF* и *HG* четырёхугольника *EFGH* равны и параллельны. Значит, этот четырёхугольник – параллелограмм. Его площадь равна половине площади четырёхугольника *ABCD*.



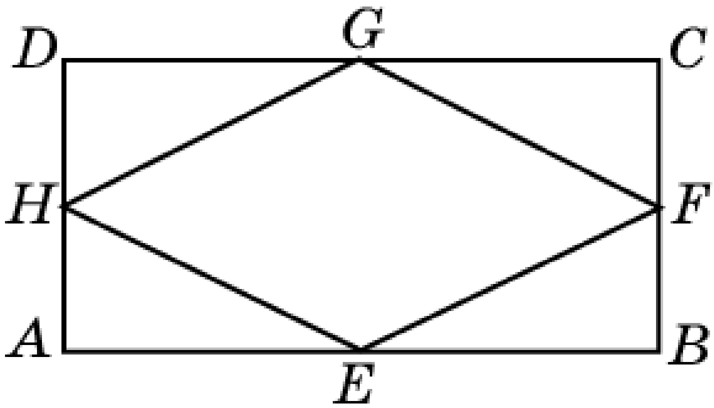
9. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника, делят друг друга пополам.



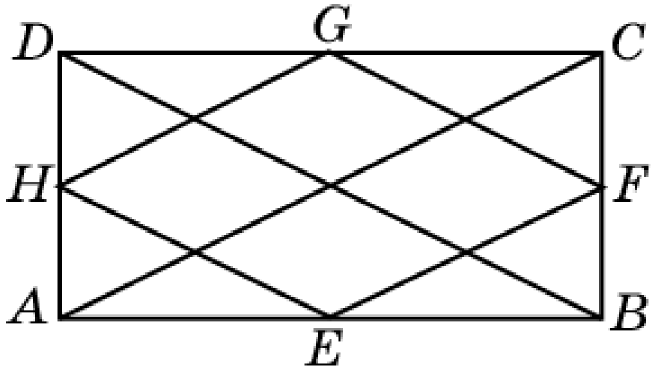
Решение. Четырёхугольник *EFGH* является параллелограммом. Следовательно, его диагонали делятся в точке пересечения пополам.



10. Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба.

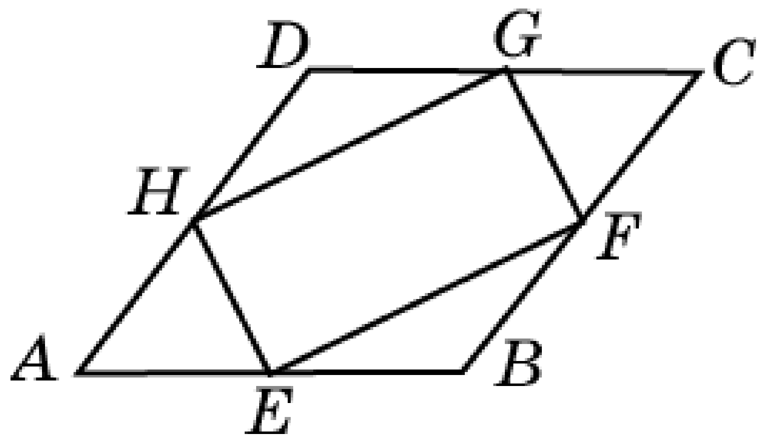


Решение. Пусть $ABCD$ – прямоугольник, E, F, G, H – середины соответствующих сторон. Проведем диагонали AC и BD.

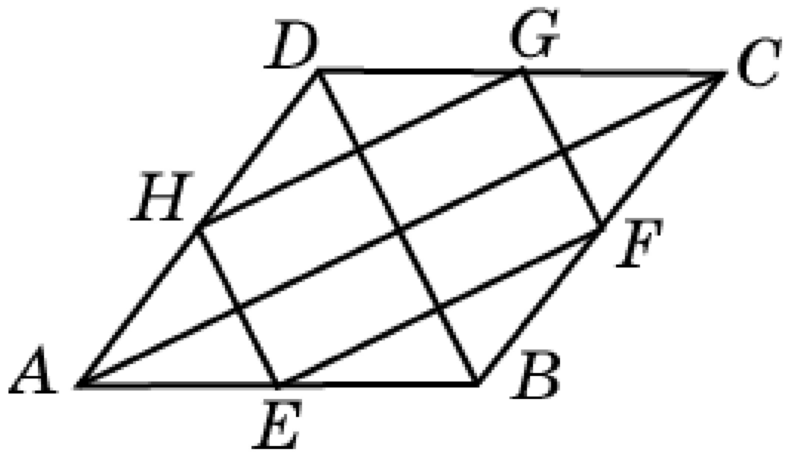


Отрезок EF является средней линией треугольника ABC, следовательно, он равен половине диагонали AC. Аналогично, остальные стороны четырехугольника $EFGH$ равны половинам соответствующих диагоналей. Так как диагонали прямоугольника равны, то равны и стороны этого четырехугольника, т.е. он является ромбом.

11. Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

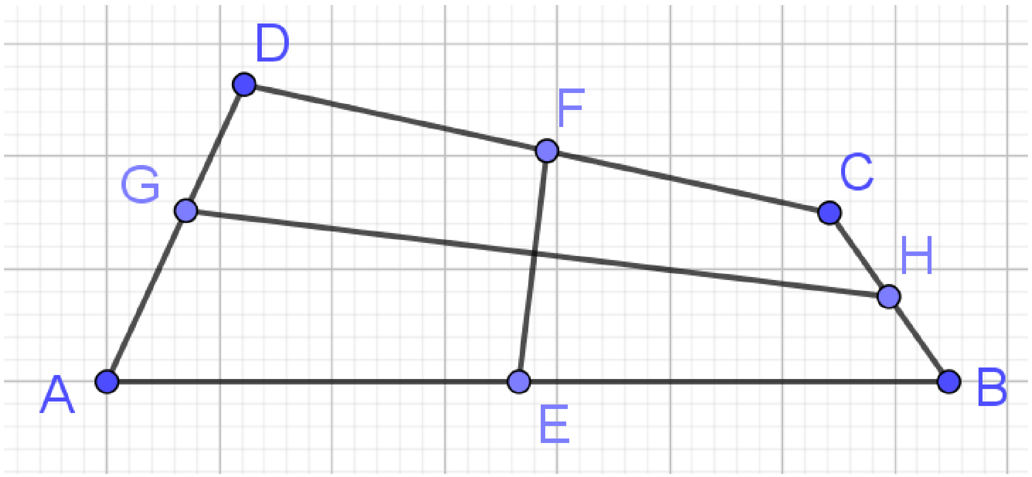


Решение. Пусть $ABCD$ – ромб, E, F, G, H – середины соответствующих сторон. Проведем диагонали AC и BD.

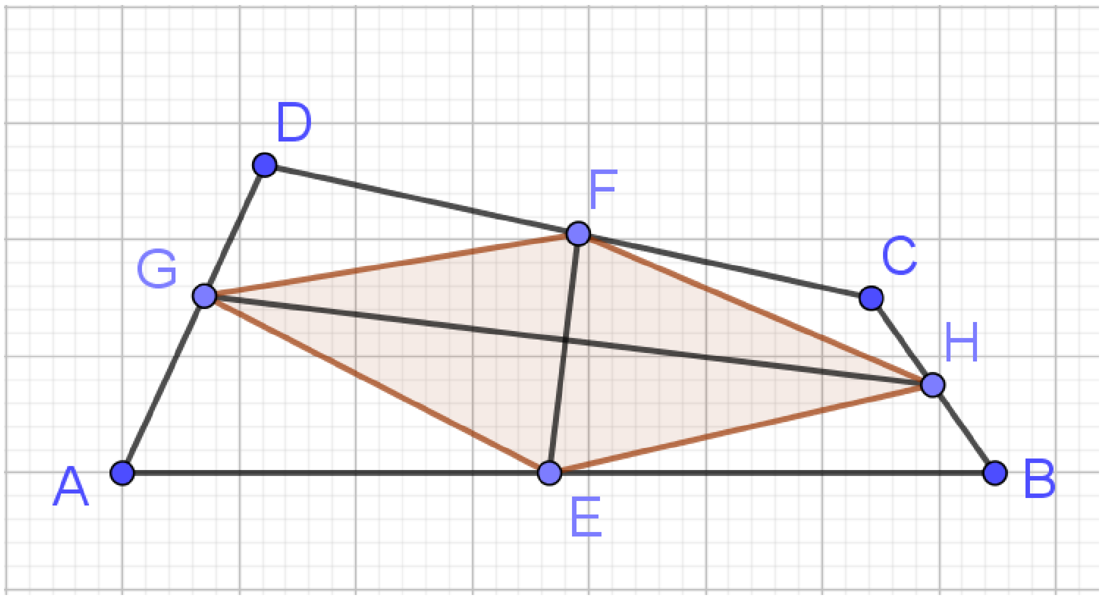


Отрезок EF является средней линией треугольника ABC, следовательно, он параллелен диагонали AC. Аналогично, остальные стороны четырехугольника $EFGH$ параллельны соответствующим диагоналям. Так как диагонали ромба перпендикулярны, то перпендикулярны и соседние стороны этого четырехугольника, т.е. он является прямоугольником.

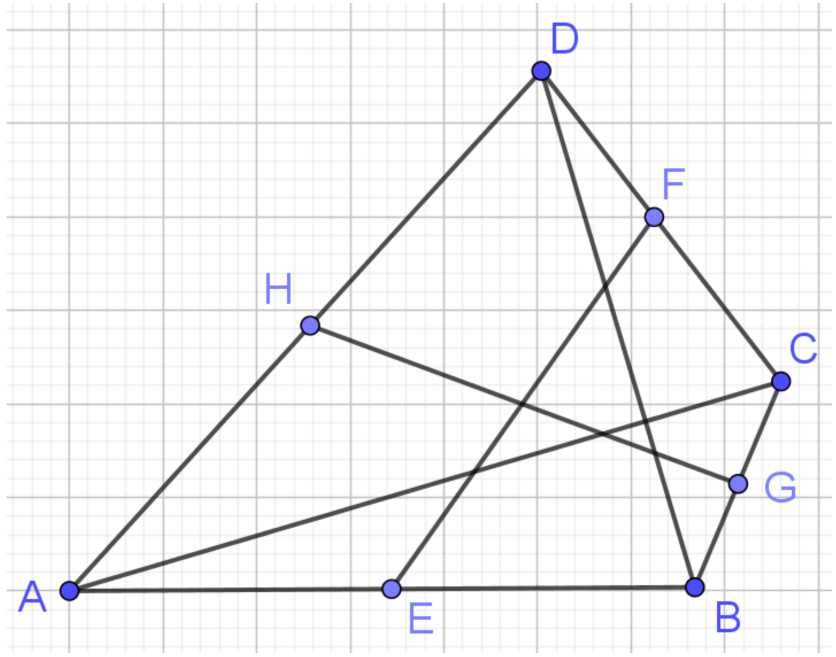
12. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$, взаимно перпендикулярны и равны 2 и 7. Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.



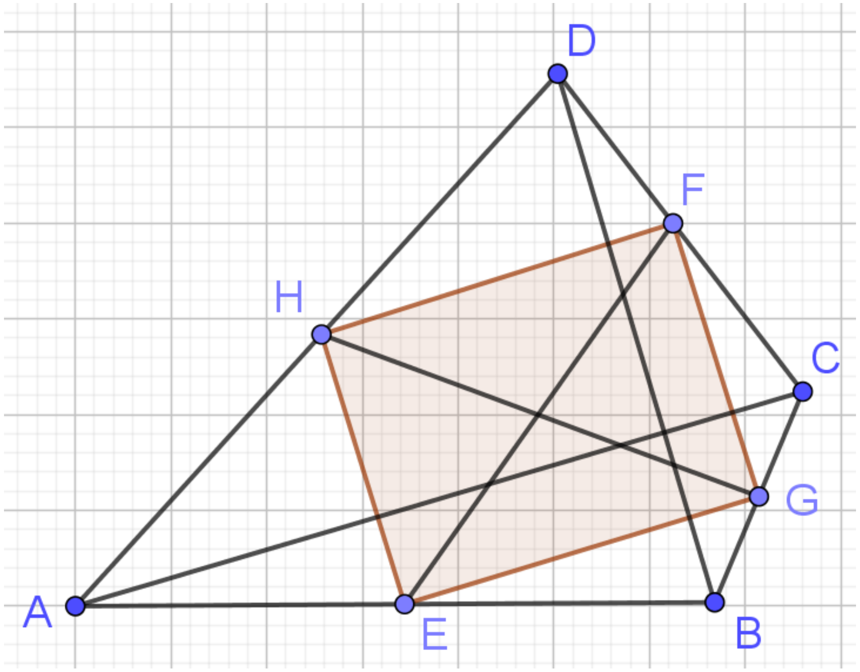
Решение. Четырёхугольник *EHFG* является ромбом. Его площадь равна 7. Она равна половине площади четырёхугольника *ABCD*. Следовательно, площадь четырёхугольника *ABCD* равна 14.



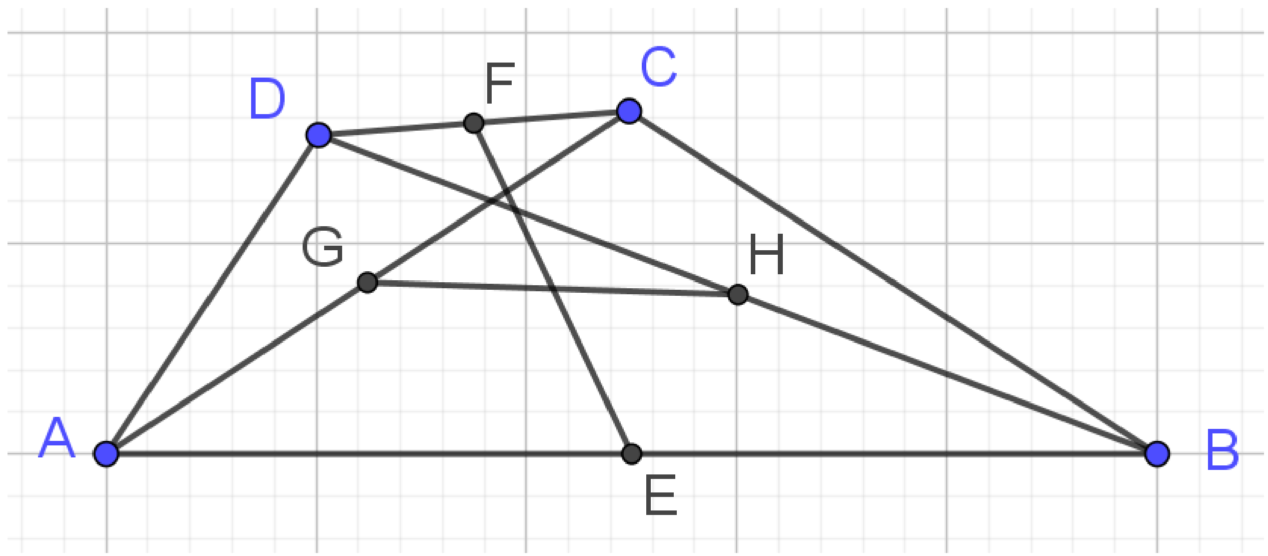
13. Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника *ABCD*, равны между собой. Найдите площадь четырёхугольника, если его диагонали равны 8 и 12.



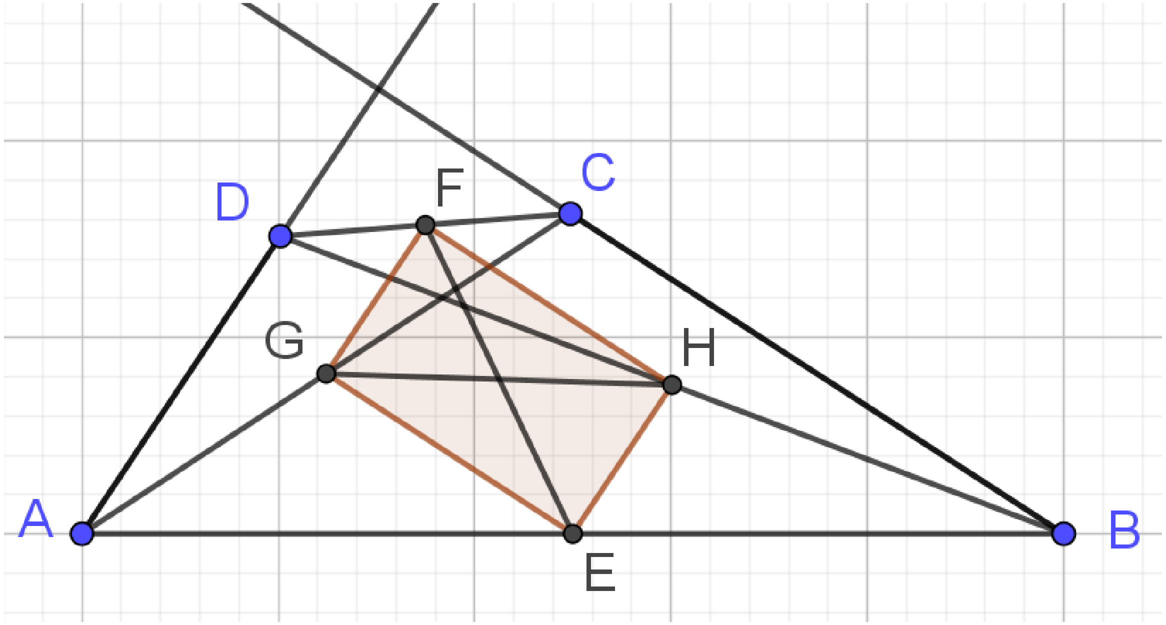
Решение. Четырёхугольник $EGFH$ является прямоугольником. Следовательно, диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны. Площадь четырёхугольника $ABCD$ равна половине произведения диагоналей, т. е. равна 48.



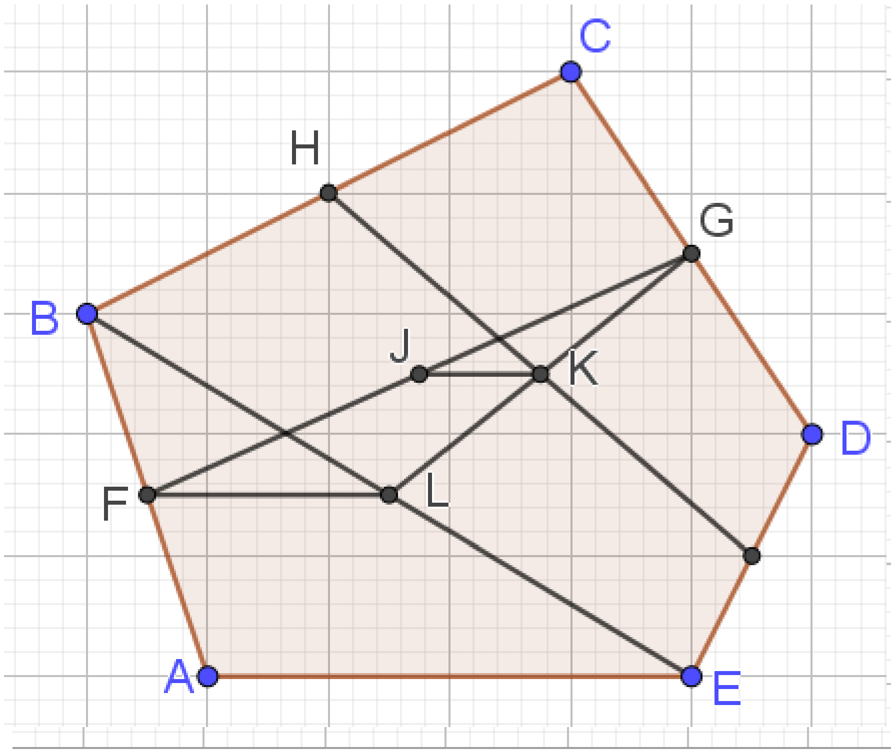
14. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен отрезку, соединяющему середины сторон AB и CD. Найдите угол, образованный продолжениями сторон AD и BC.



Решение. Четырёхугольник $EHFG$ является прямоугольником. Следовательно, $\angle HFG = 90°$. Отрезки HF и FG являются средними линиями треугольников соответственно BCD и ACD. Значит, прямые AD и BC перпендикулярны. Искомый угол равен 90°.

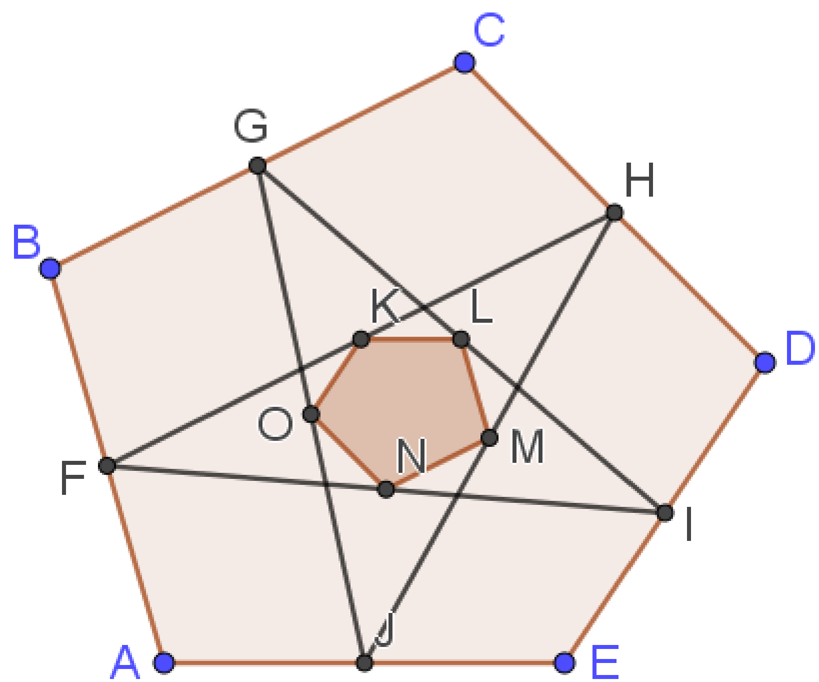


15. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $AE = 4$. Середины сторон AB и CD, BC и ED соединены отрезками. Середины J и K этих отрезков снова соединены отрезками. Найдите длину отрезка JK.



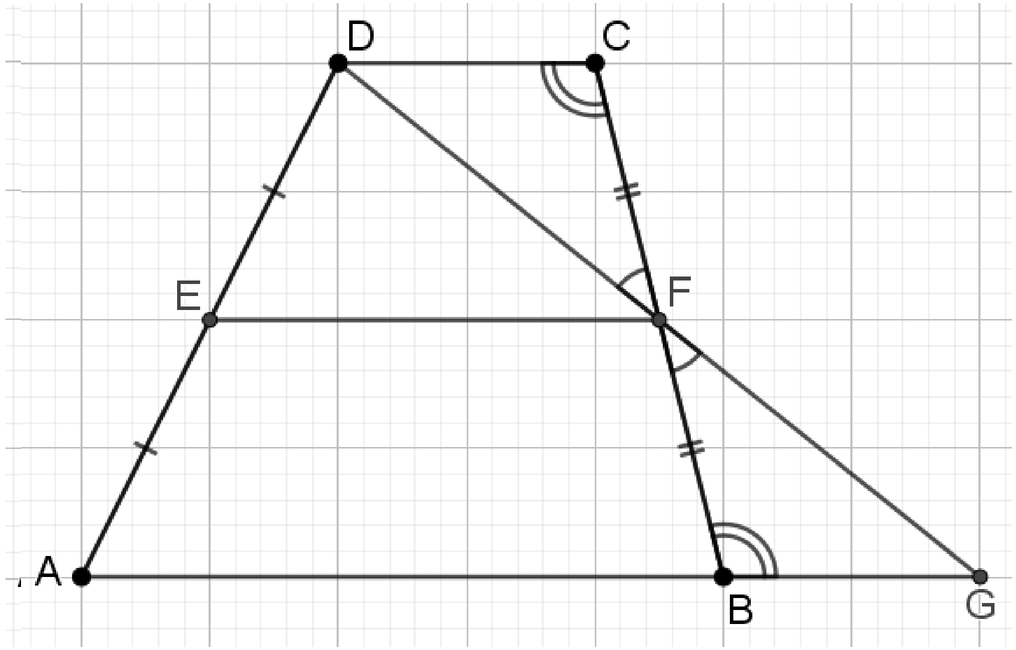
Ответ: 1.

16. Точки F, G, H, I, J – середины сторон пятиугольника $ABCDE$. Точки K, L, M, N, O – середины отрезков FH, GI, HJ, FI, GJ. Найдите площадь пятиугольника $KLMNO$, если площадь пятиугольника $ABCDE$ равна 32.



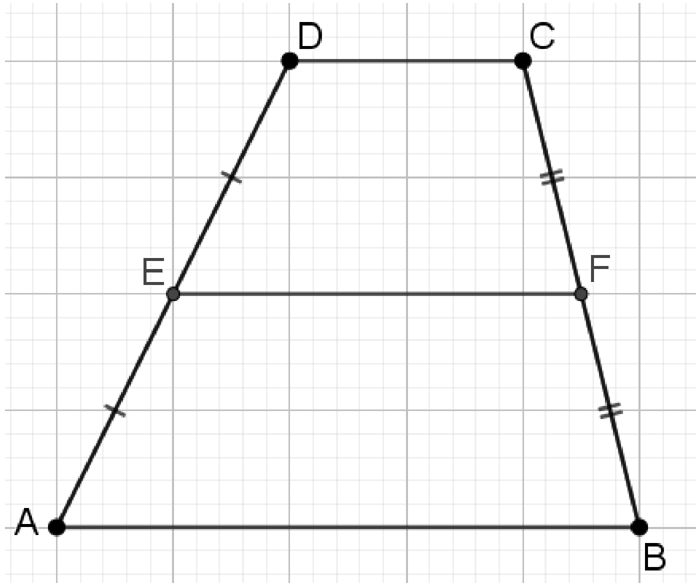
Ответ: 2.

Теорема. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.



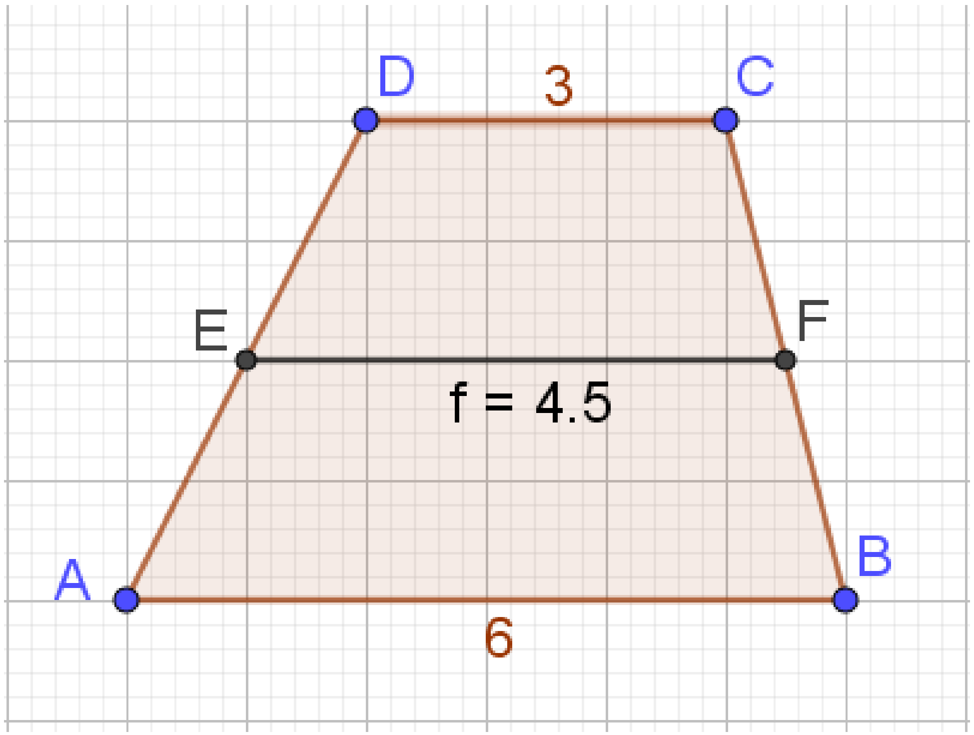
Доказательство. Рассмотрим трапецию $ABCD$ ($AB \parallel CD$) и её среднюю линию EF. Проведём прямую DF. Обозначим G её точку пересечения с прямой AB. Треугольники DFC и GFB равны по второму признаку равенства треугольников. Следовательно, равны отрезки DF и GF. Значит, EF - средняя линия треугольника AGD. Из теоремы о средней линии треугольника получаем, что отрезок EF параллелен AB и равен половине отрезка AG. Так как $AB \parallel CD$, то отрезок EF будет параллелен обоим основаниям трапеции. Так как отрезок AG равен сумме оснований трапеции, то отрезок EF будет равен полусумме оснований трапеции.

Следствие. Если прямая проходит через середину одной боковой стороны и параллельна основанию трапеции, то она проходит через середину второй боковой стороны этой трапеции.



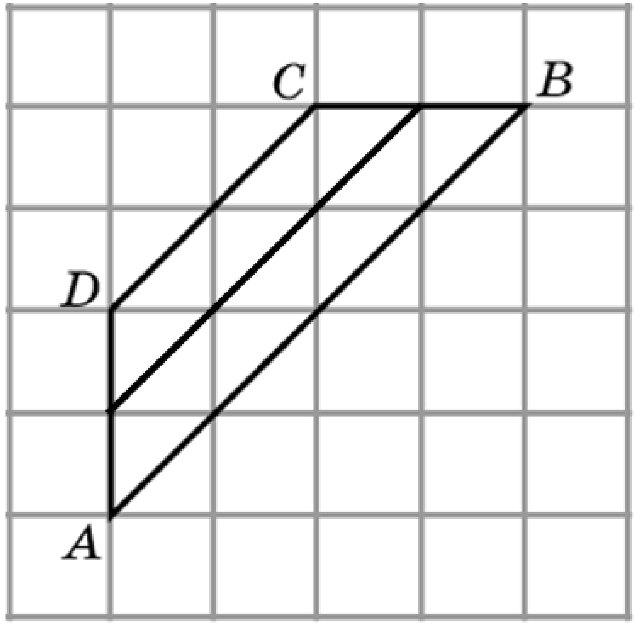
Доказательство. Пусть прямая проходит через середину E стороны AD и параллельна стороне AB трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Так как средняя линия EF также параллельна стороне AB, то она должна лежать на данной прямой. Следовательно, середина F стороны BC принадлежит этой прямой.

Иллюстрация в программе GeoGebra



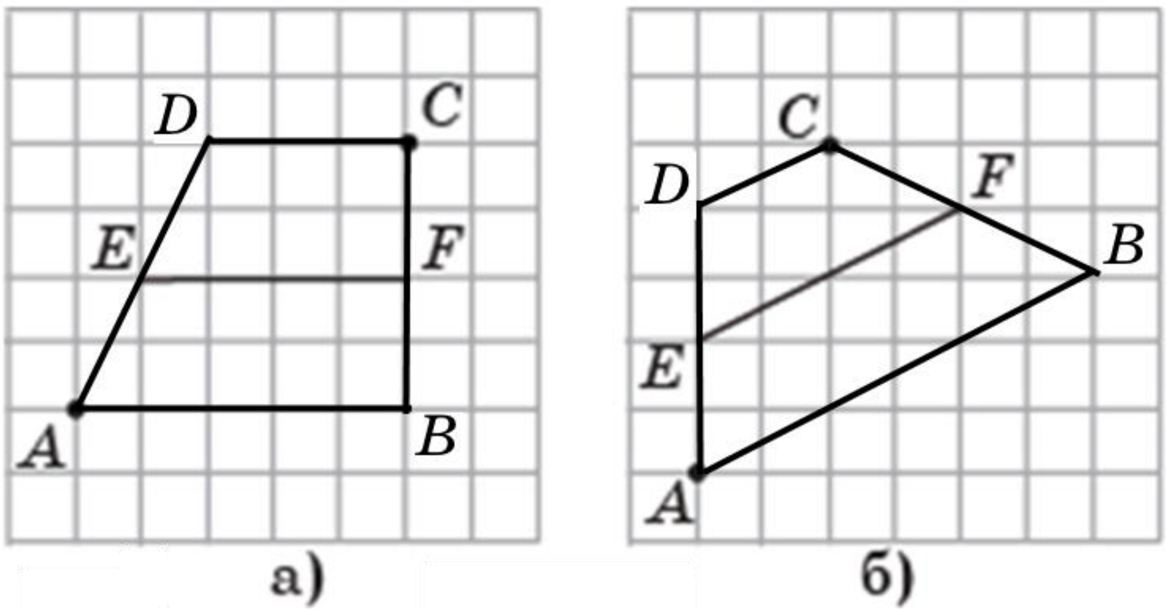
Упражнения

1. Проведите среднюю линию трапеции, изображенной на рисунке.



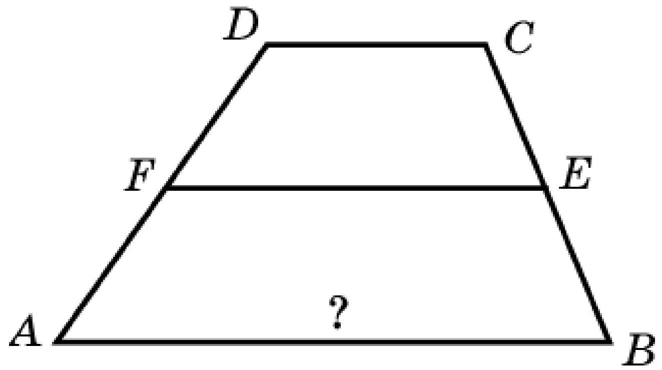
Ответ.

2. Изобразите трапецию, если заданы две её вершины A, C и средняя линия EF



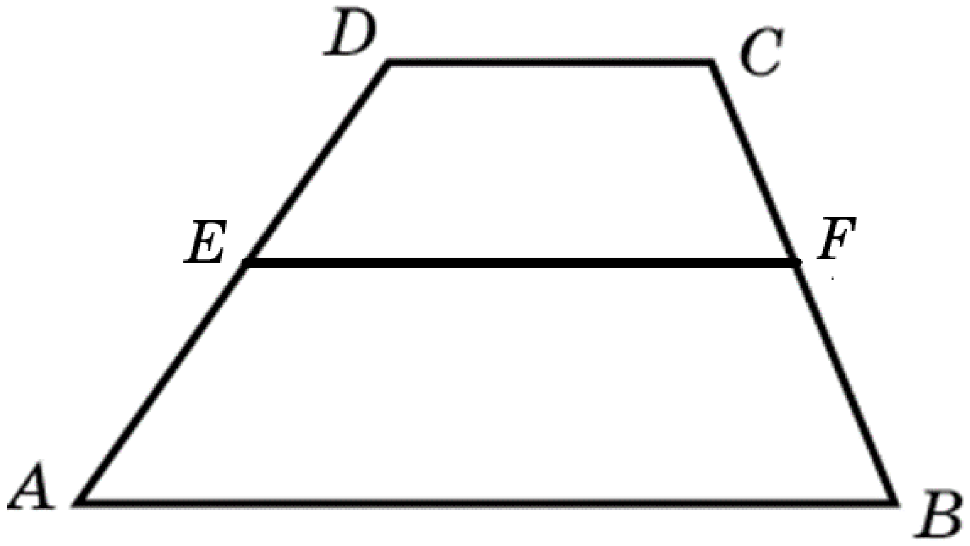
Ответ.

3. Средняя линия трапеции равна 30 см, а меньшее основание равно 20 см. Найдите большее основание.



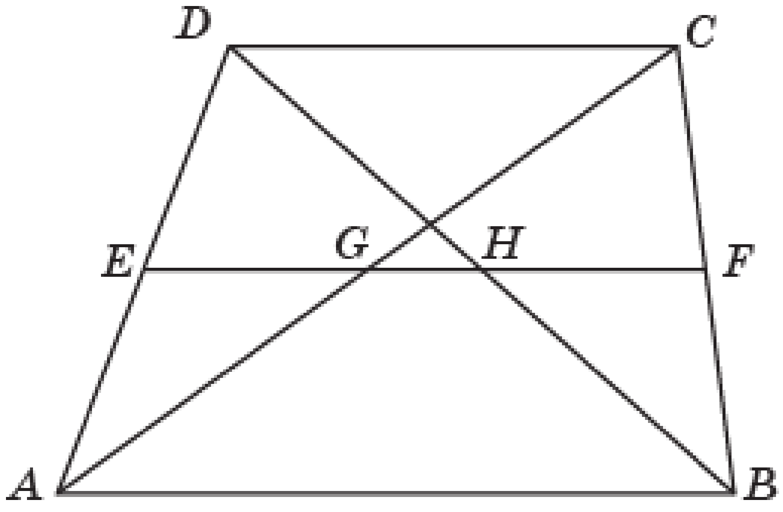
Ответ: 40 см

4. Основания трапеции относятся как 5:2, а их разность равна 18 см. Найдите среднюю линию трапеции.



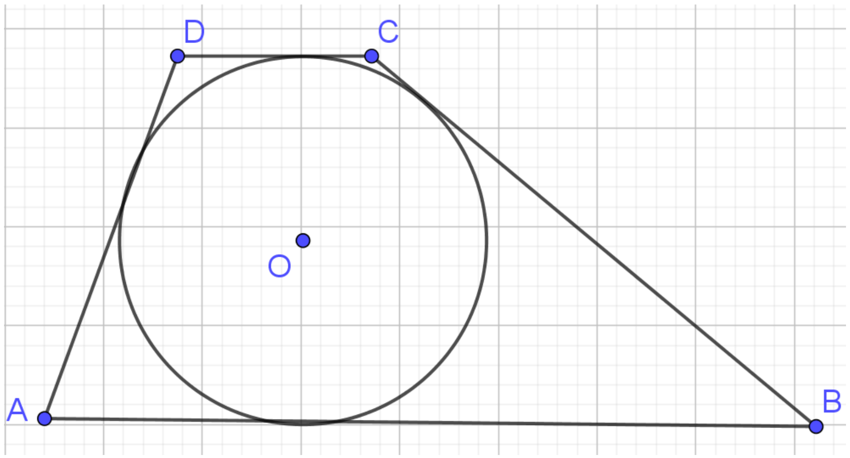
Ответ: 21 см.

5. Основания трапеции *ABCD* равны 6 и 4. Найдите отрезки, на которые диагонали этой трапеции делят её среднюю линию *EF*.



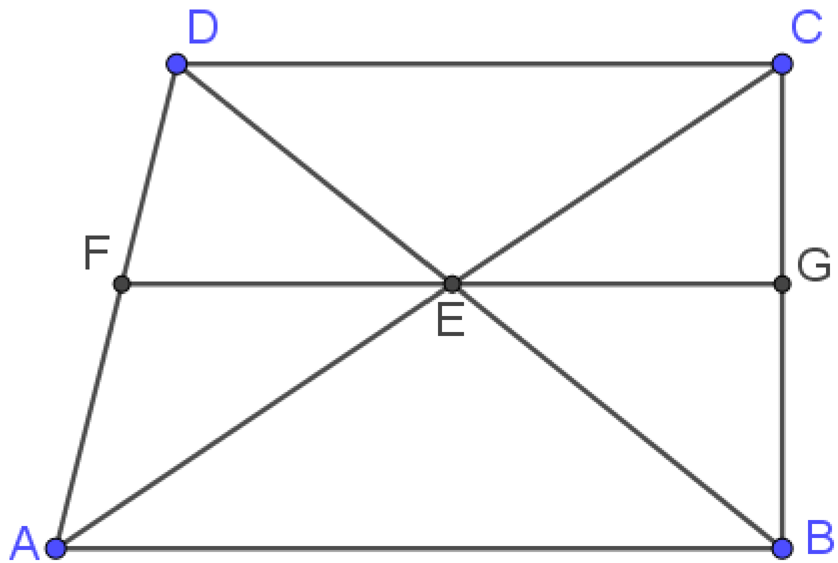
Ответ: 2, 1, 2.

6. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 4 и 6. Найдите среднюю линию этой трапеции.



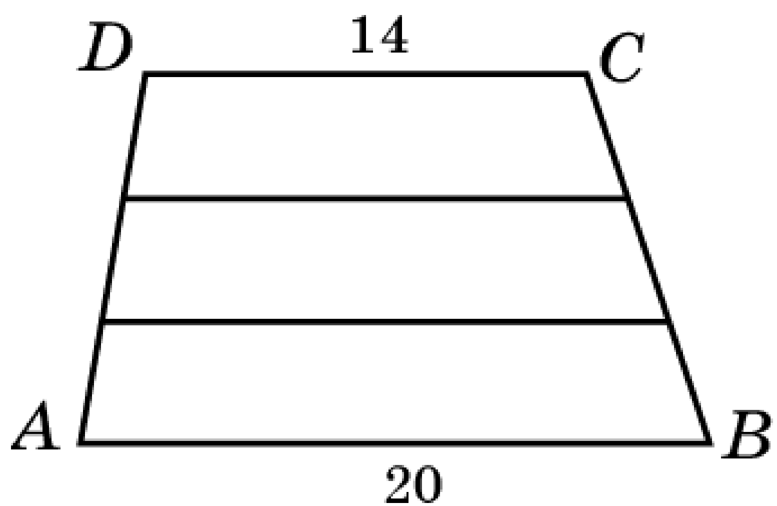
Ответ: 5.

7. Может ли средняя линия трапеции пройти через точку пересечения диагоналей?



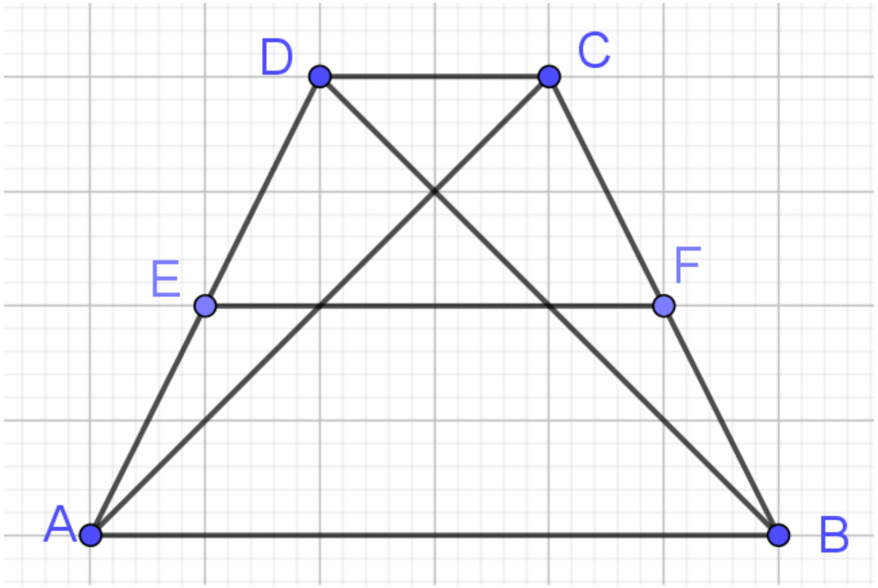
Решение. Нет. Действительно, пусть $ABCD$ – трапеция, E – точка пересечения диагоналей, FG – средняя линия. Предположим, что средняя линия проходит через точку E. Тогда FE – средняя линия треугольника ABD, следовательно, равна половине AB. EG – средняя линия треугольника ABC, следовательно, равна половине AB. Значит средняя линия FG равна стороне AB. В этом случае четырёхугольник $ABCD$ был бы параллелограммом.

8. Основания трапеции равны 14 см и 20 см. Одна из боковых сторон разделена на три равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям трапеции. Найдите отрезки этих прямых, заключенные внутри трапеции.

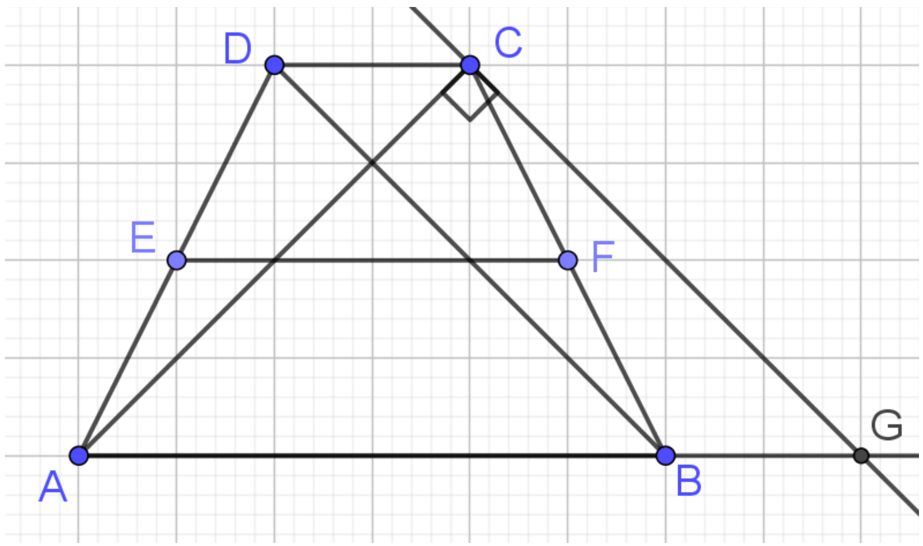


Ответ: 16 и 18.

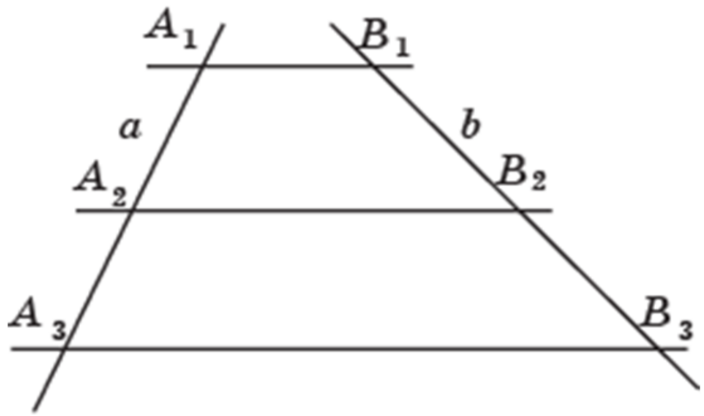
9. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найдите площадь этой трапеции, если её средняя линия равна 4.



Решение. Через вершину C проведём прямую, параллельную прямой BD. Обозначим G точку её пересечения с прямой AB. Треугольник BGC равен треугольнику CDB. Площадь треугольника ABD равна площади треугольника ABC. Следовательно, площадь трапеции равна площади равнобедренного прямоугольного треугольника AGC, гипотенуза которого равна 8. Значит, искомая площадь равна 16.

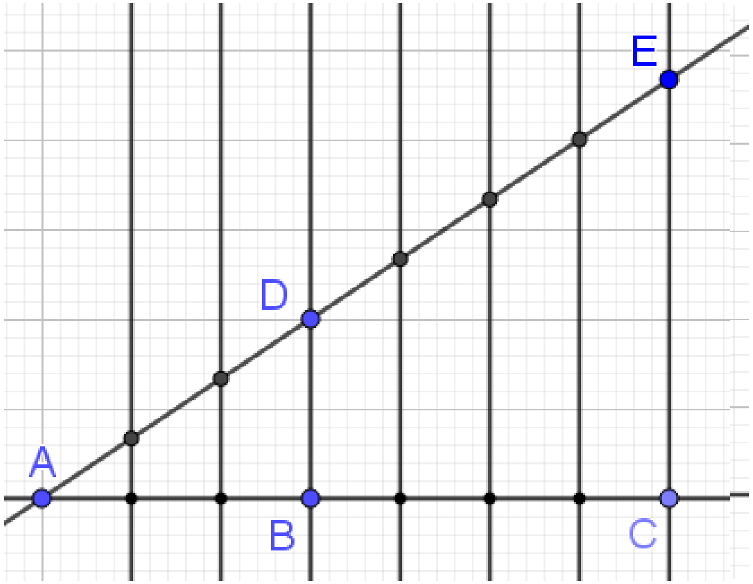


Теорема (Фалеса). Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.



Доказательство. Пусть три параллельные прямые пересекают стороны a и b этого угла соответственно в точках A_1, A_2, A_3 и B_1, B_2, B_3. Если отрезки A_1A_2 и A_2A_3 равны, то A_2B_2 – средняя линия трапеции $A_1A_3B_3B_1$. Следовательно, равны и отрезки B_1B_2 и B_2B_3.

Следствие. Если две параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне отрезки, отношение которых равно m:n то они отсекают отрезки с таким же отношением и на другой его стороне.

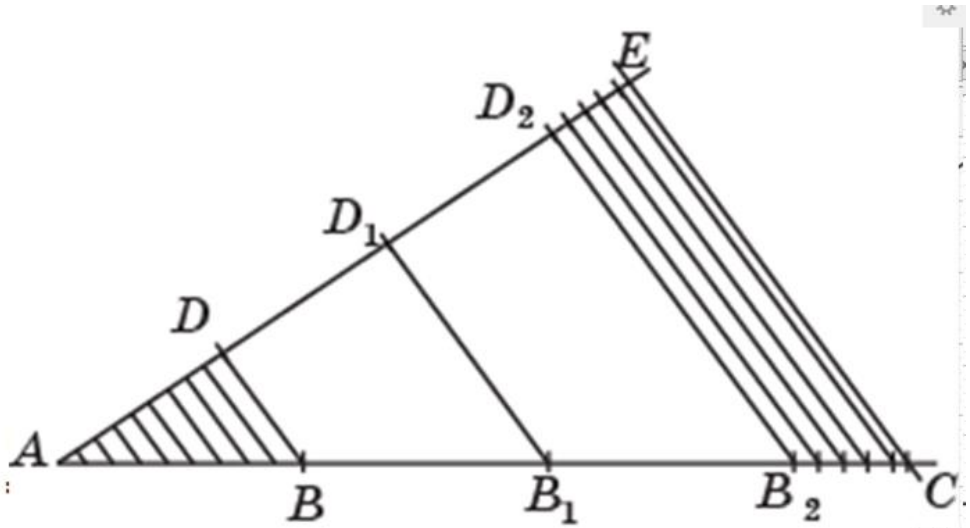


Доказательство. Пусть две параллельные прямые пересекают стороны угла A в точках соответственно B, C и D, E. Если отношение AB:BC равно m:n, то это означает, что отрезок AC можно разделить на $m + n$ равных частей так, что отрезок AB состоит из m частей, а отрезок BC – из n частей.

Тогда прямые, проходящие через точки деления, параллельные данным прямым, будут делить отрезок AE на равные части так, что отрезок AD будет состоять из m частей, а отрезок DE – из n частей. Следовательно, отношение AD:DE будет равно m:n.

Теорема о пропорциональных отрезках

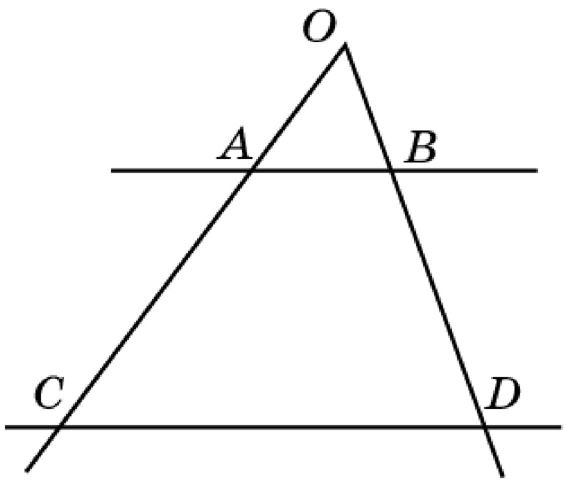
Теорема. (О пропорциональных отрезках.) Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки, $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}$.



Доказательство*. Прямые, параллельные BD, переводят равные отрезки на прямой AC в равные отрезки на прямой AE. Отрезку AB соответствует отрезок AD. Одной десятой части отрезка AB соответствует одна десятая часть отрезка AD и т. д. Таким образом, если отрезок AB и его части укладываются в отрезке AC k раз, то отрезок AD и его части будут укладываться в отрезке AE также k раз, т. е. $\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD} = k$.

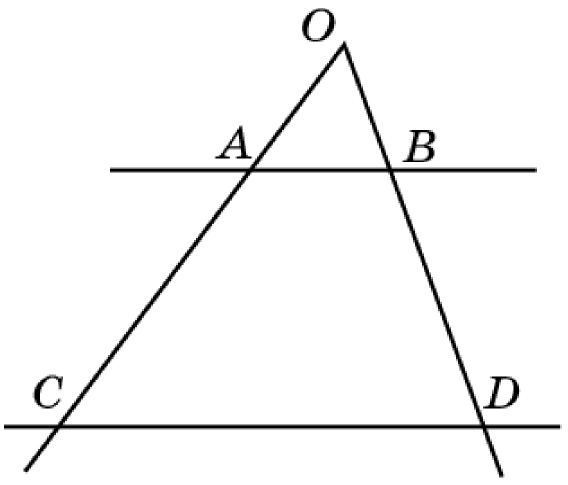
Упражнения

1. Стороны угла с вершиной O пересечены двумя параллельными прямыми в точках A, C и B, D соответственно. Найдите BD, если $OA = 6$, $AC = 12$ и $OB = 5$.



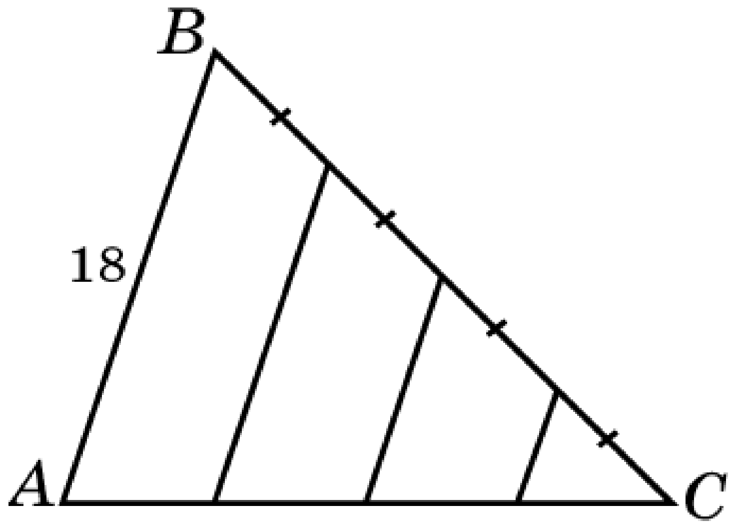
Ответ. 10.

2. Стороны угла с вершиной O пересечены двумя параллельными прямыми в точках A, C и B, D соответственно. Найдите OA, если $OC = 24$ и $OB : OD = 2 : 3$.



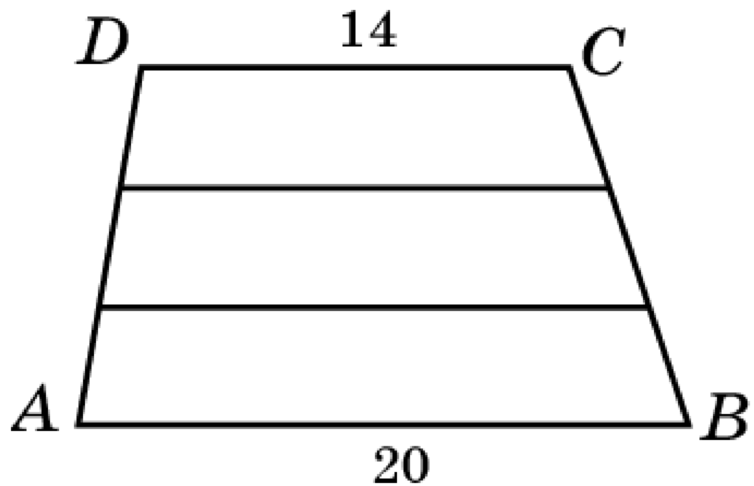
Ответ. 16.

3. В треугольнике ABC сторона BC разделена на четыре равные части и через полученные точки деления проведены прямые, параллельные стороне AB, равной 18 см. Найдите отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника.



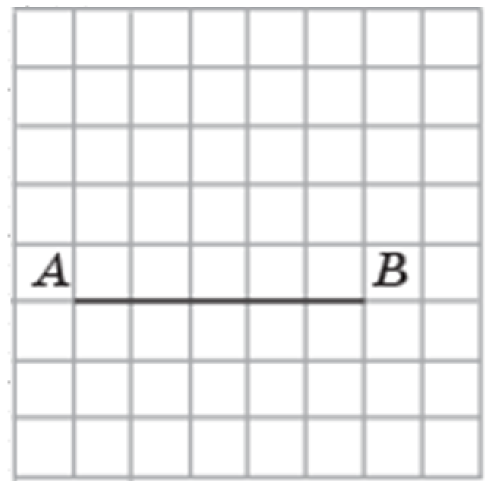
Ответ. 4,5, 9, 13,5.

4. Основания трапеции равны 14 см и 20 см. Одна из боковых сторон разделена на три равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям трапеции. Найдите отрезки этих прямых, заключенные внутри трапеции.

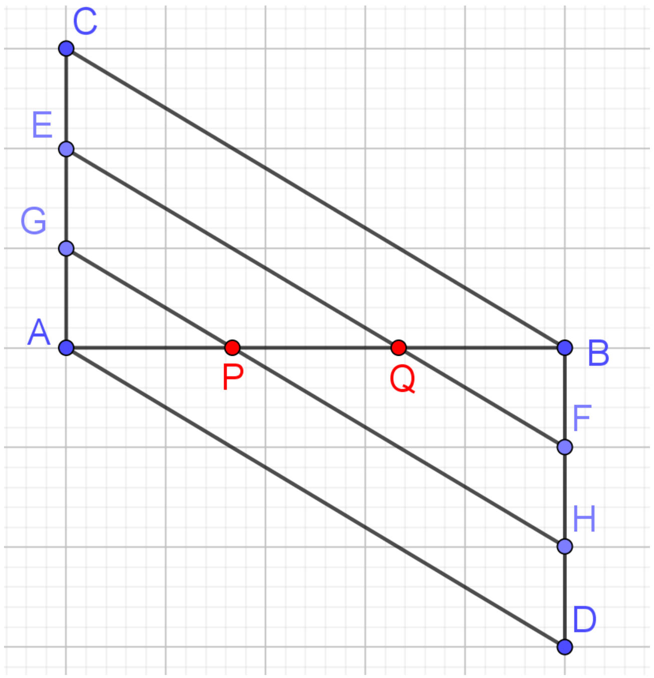


Ответ. 16, 18.

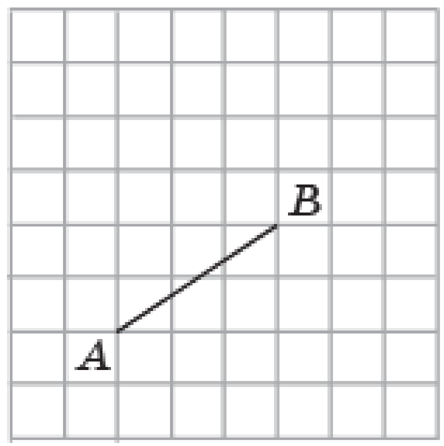
5. С помощью линейки разделите отрезок AB на три равные части.



Ответ.



6. С помощью линейки разделите отрезок AB на пять равных частей.



Ответ.

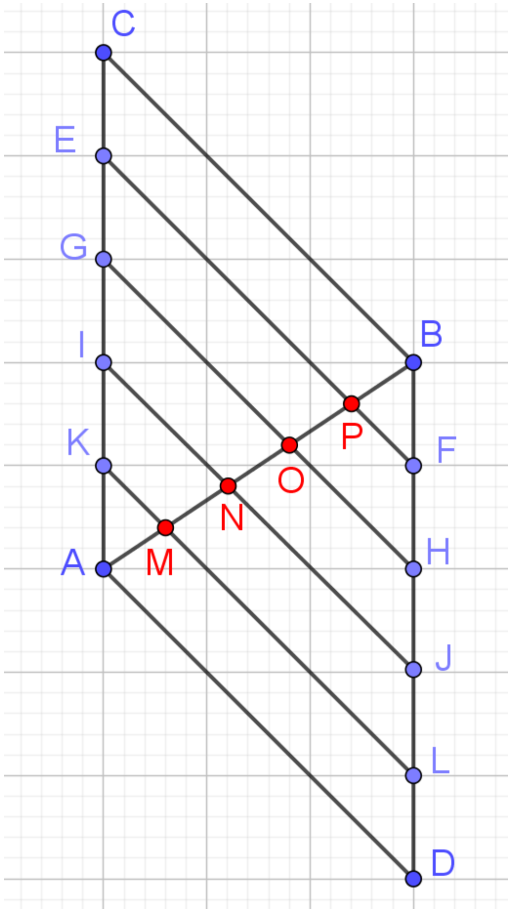
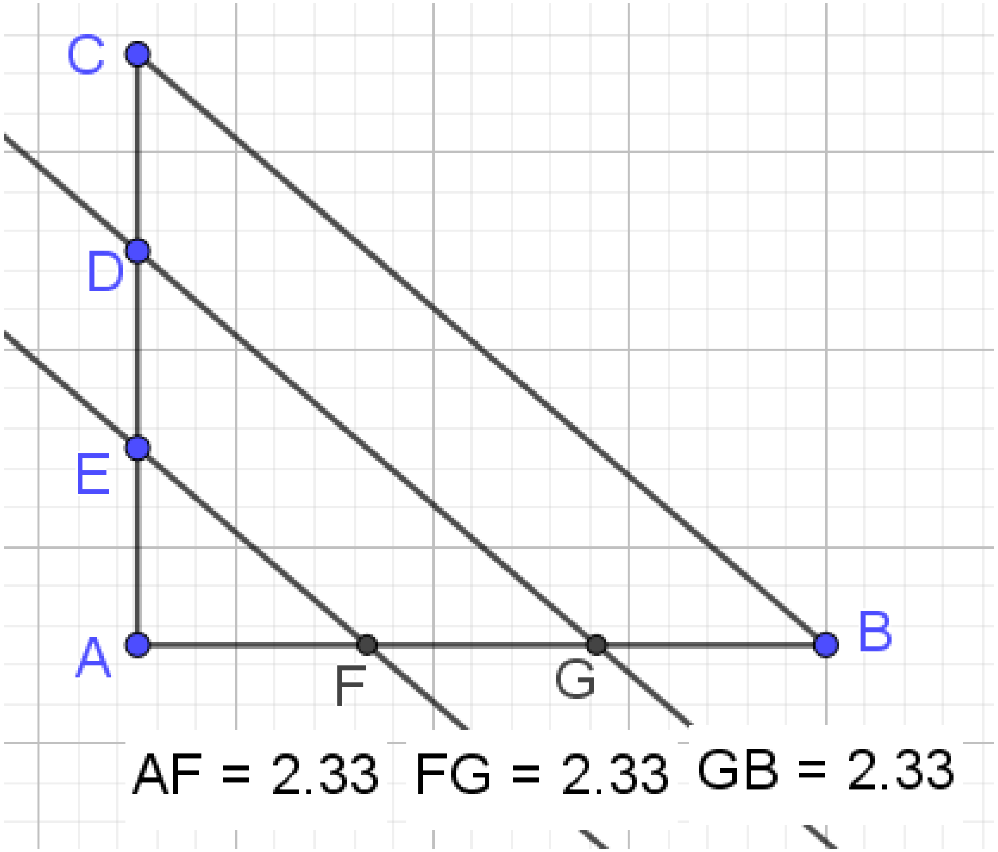
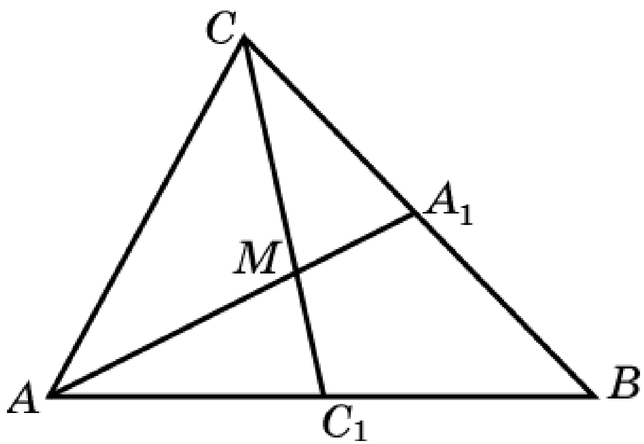
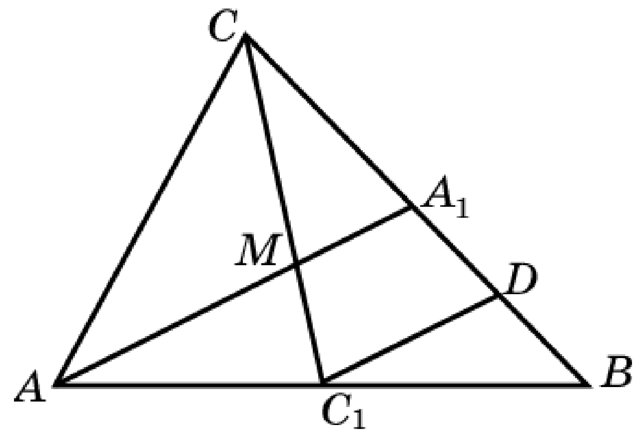


Иллюстрация в программе GeoGebra



Теорема. Медианы треугольника точкой их пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины.

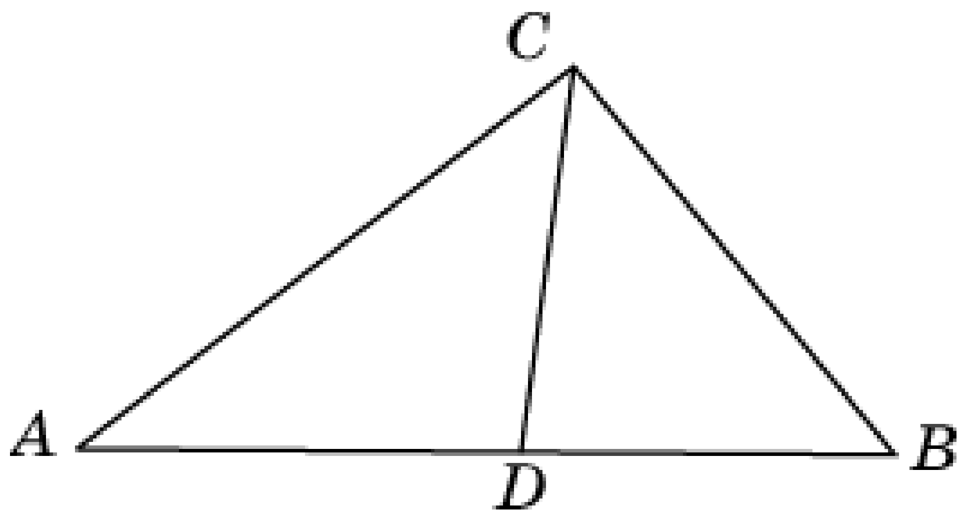




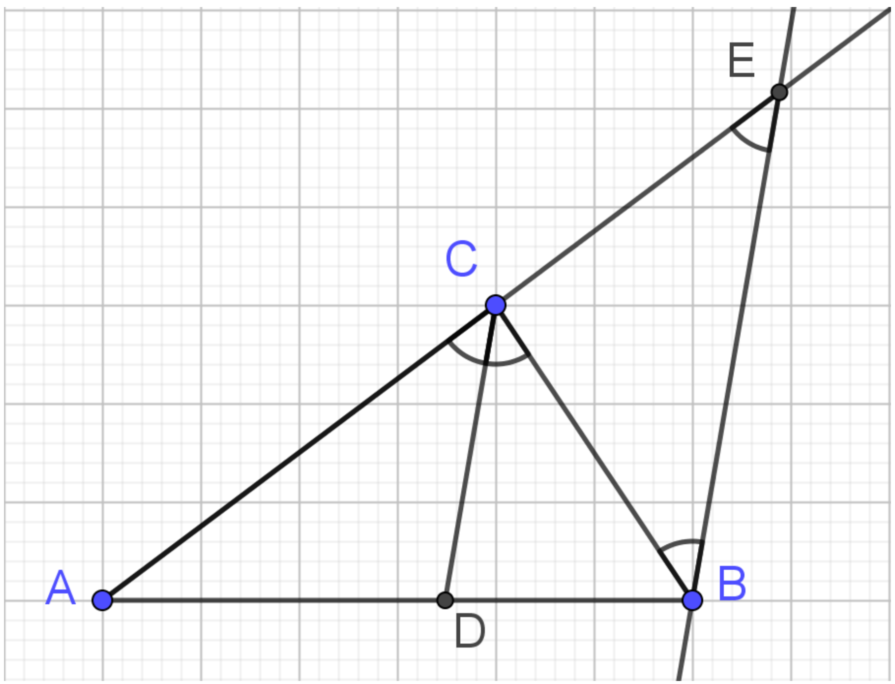
Решение. Через точку C_1 проведём прямую, параллельную AA_1, и обозначим D её точку пересечения со стороной BC. C_1D – средняя линия треугольника ABA_1, следовательно, $BD = DA_1$. Так как $CA_1 = A_1B$, то $CA_1 = 2A_1D$. Из теоремы о пропорциональных отрезках следует, что $CM = 2MC_1$, т. е. $CM : MC_1 = 2 : 1$.

Следствие. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2:1, считая от вершин.

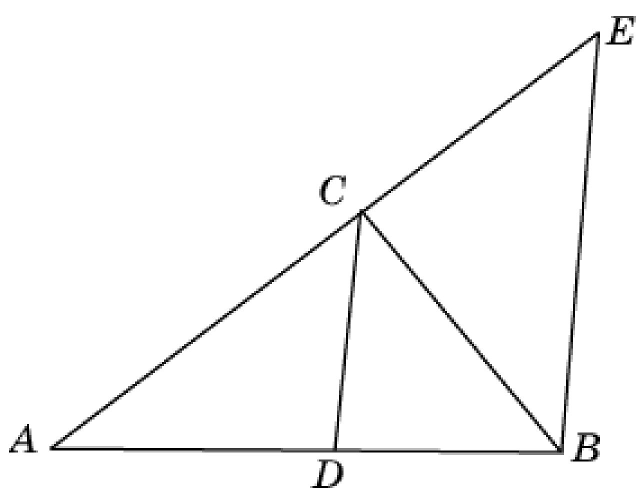
Теорема. Биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, т. е. если CD – биссектриса треугольника ABC, то $AD : DB = AC : BC$.



Доказательство: Пусть CD – биссектриса треугольника ABC. Через точку B проведём прямую, параллельную прямой CD. Обозначим E её точку пересечения с прямой AC. Тогда $\angle CBE = \angle BCD = \angle ACD = \angle CEB$. Следовательно, треугольник BEC равнобедренный, $BC = EC$. По теореме о пропорциональных отрезках, имеем: $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CE} = \frac{AC}{BC}$, значит, $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}$.

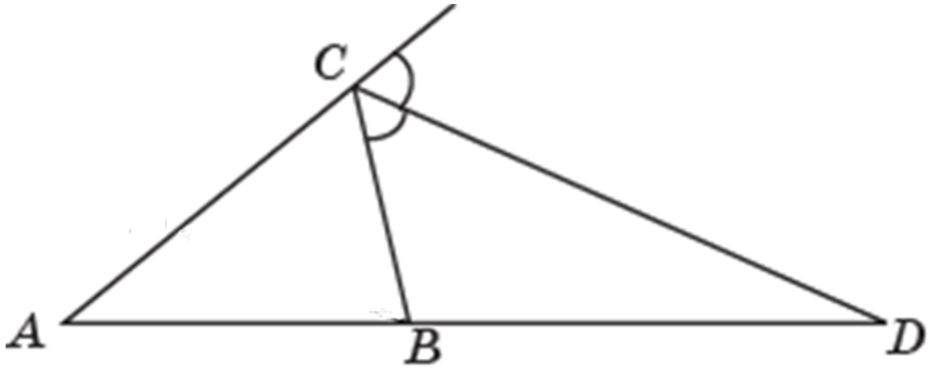


Теорема (обратная). Если луч, проведенный из вершины угла треугольника, делит противоположную сторону на части, пропорциональные сторонам треугольника, прилежащим к лучу, то этот луч является биссектрисой угла треугольника.

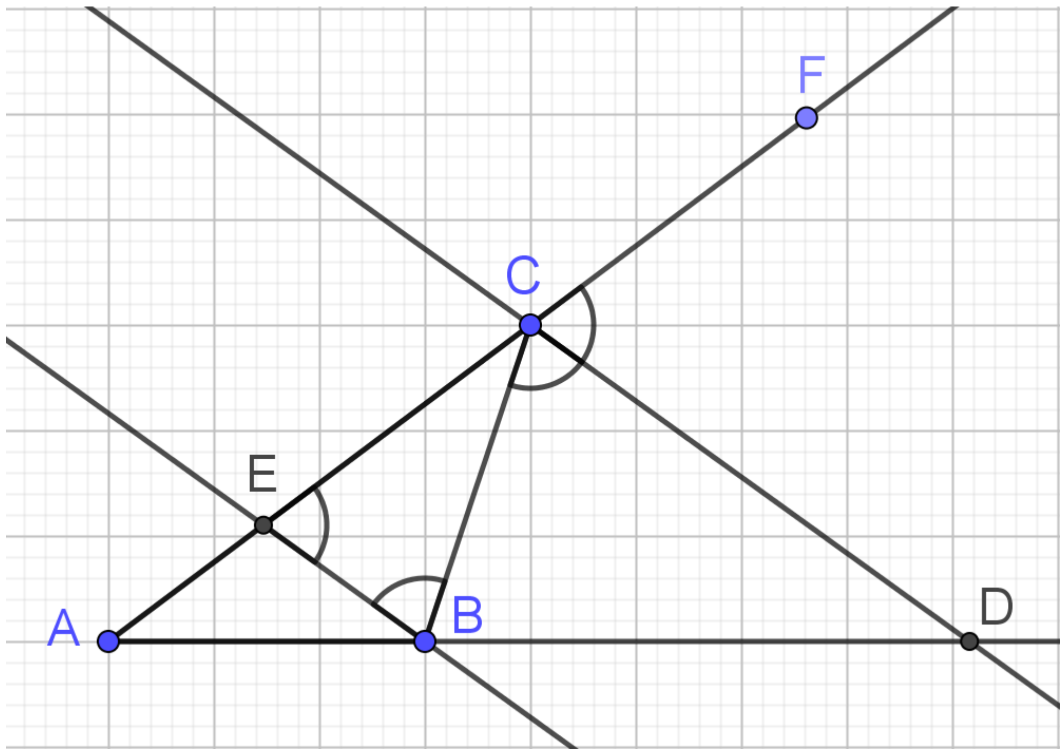


Доказательство: Пусть для луча *CD* выполняется равенство *AD* : *DB* = *AC* : *BC*. Проведем прямую *BE*, параллельную *CD*. По теореме о пропорциональных отрезках, *AD* : *DB* = *AC* : *CE*. Сравнивая эти два равенства, получаем равенство *BC* = *CE*, из которого следует равенство углов *CBE* и *BEC*. Но угол *CBE* равен углу *BCD*, а угол *BEC* равен углу *ACD*. Значит, *CD* – биссектриса треугольника *ABC*.

Теорема. Биссектриса *CD* внешнего угла *C* треугольника *ABC* делит продолжение противоположной стороны *AB* на части, пропорциональные прилежащим сторонам, т.е. выполняется равенство $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC}$.

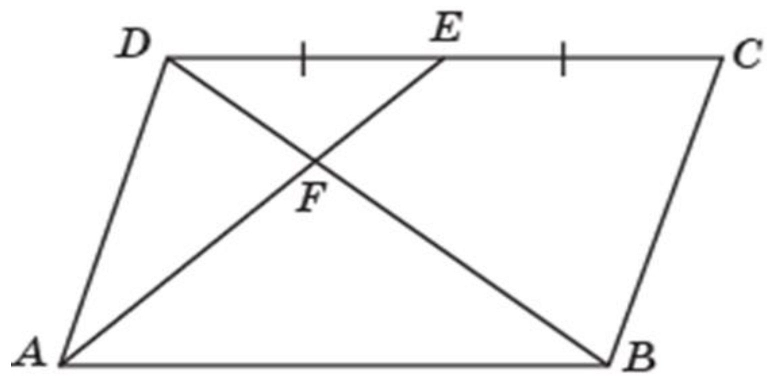


Доказательство. Через точку B проведём прямую, параллельную прямой CD. Обозначим E её точку пересечения с прямой AC. Тогда $\angle CBE = \angle BCD = \angle FCD = \angle CEB$. Следовательно, треугольник BEC равнобедренный, $BC = EC$. По теореме о пропорциональных отрезках, имеем: $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{EC} = \frac{AC}{BC}$, значит, $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$.

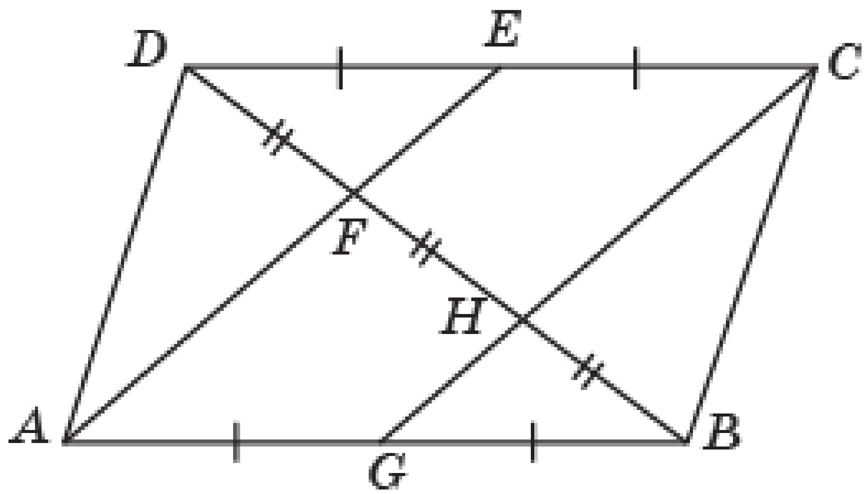


Упражнения

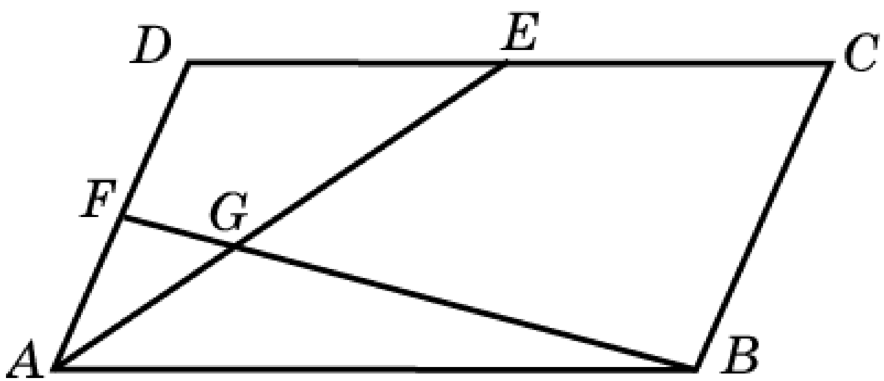
1. В параллелограмме $ABCD$ точка E – середина стороны CD. Отрезок AE пересекает диагональ BD в точке F. Найдите отношение $DF : FB$. Найдите площадь треугольника ADF, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1.



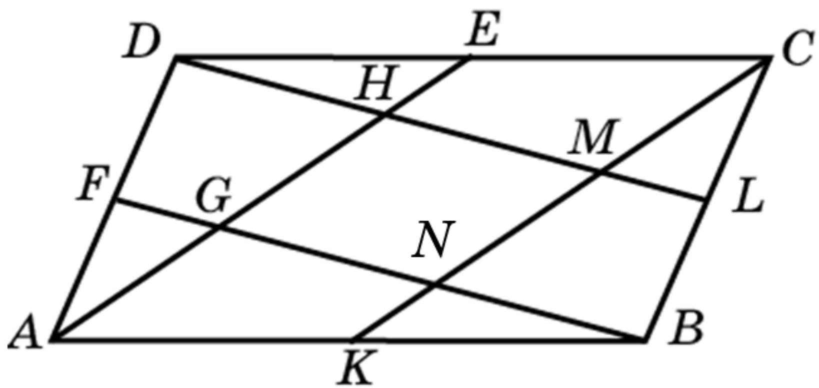
Решение. Через точку C и середину G стороны AB проведем прямую. Обозначим H её точку пересечения с прямой BD. Прямые EA и CG параллельны. Следовательно, $DF = FH = HB$. Значит, $DF : FB = 1 : 2$. Площадь треугольника ADF равна $\frac{1}{6}$.



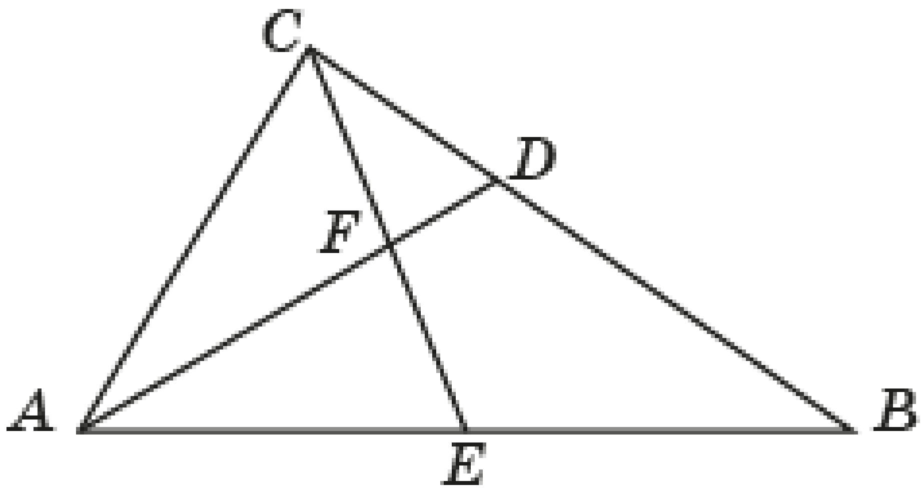
2. В параллелограмме $ABCD$ точки E и F – середины сторон соответственно CD и AD. Отрезки AE и BF пересекаются в точке G. Найдите отношение $AG : GE$.



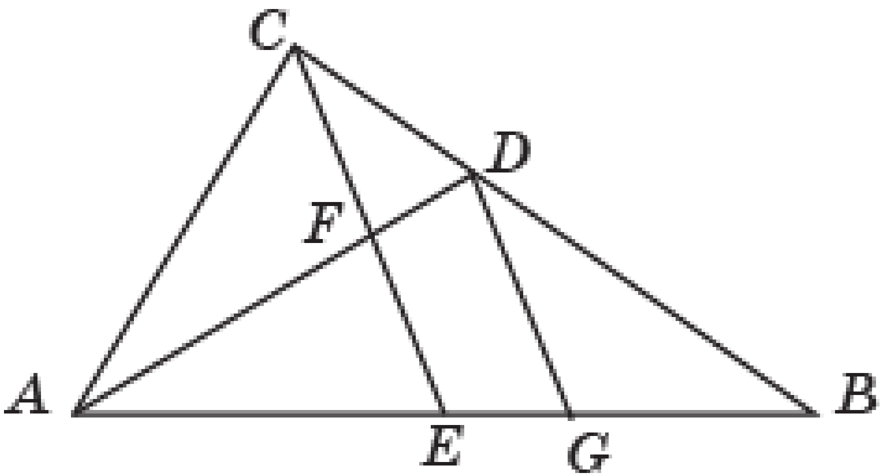
Решение. Через точку C и середину K стороны AB проведем прямую. Через точку D и середину L стороны BC проведем прямую. Обозначим M, N и H соответствующие точки пересечения. Прямые FB и DL параллельны. Следовательно, $AG = GH$, $NM = MC$, $HE = \frac{1}{2}MC$. Значит, $AG : GE = 2 : 3$.



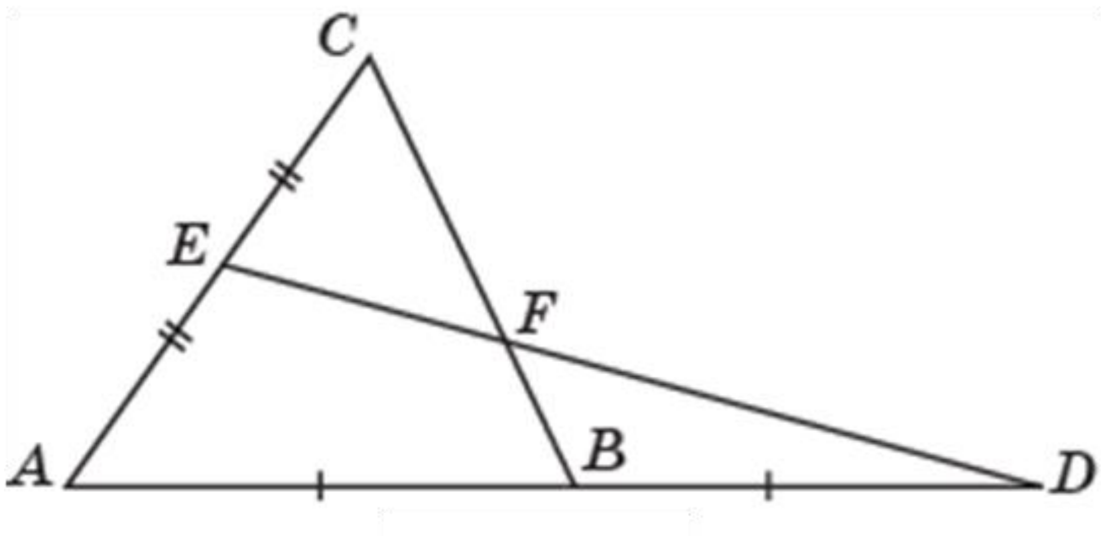
3. В треугольнике ABC $AB = 2AC$. В каком отношении медиана CE делит биссектрису AD?



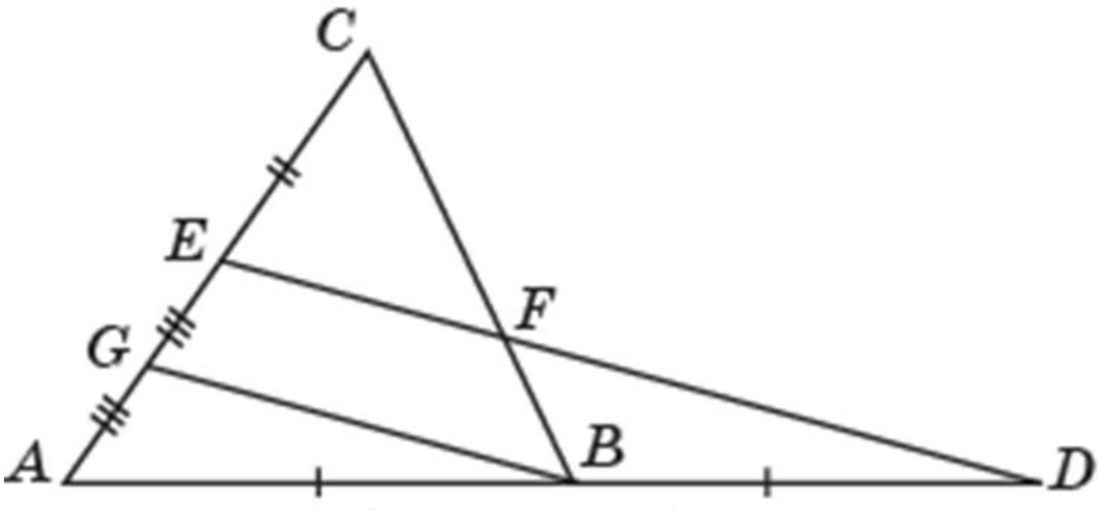
Решение. Через точку D проведём прямую, параллельную CE. Тогда $\frac{EG}{GB} = \frac{CD}{DB} = \frac{1}{2}$. Так как $AE = EB$, то $\frac{AF}{FD} = \frac{AE}{EG} = \frac{3}{1}$.



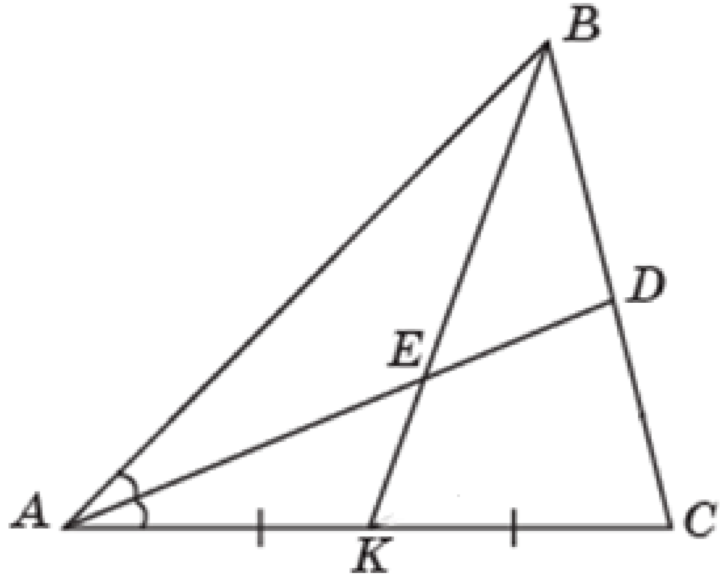
4. На продолжении стороны AB треугольника ABC взята точка D, $AB = BD$. Через неё и середину E стороны AC проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке F. Найдите отношение $CF : FB$. Найдите площадь треугольника CEF, если площадь треугольника ABC равна 1.



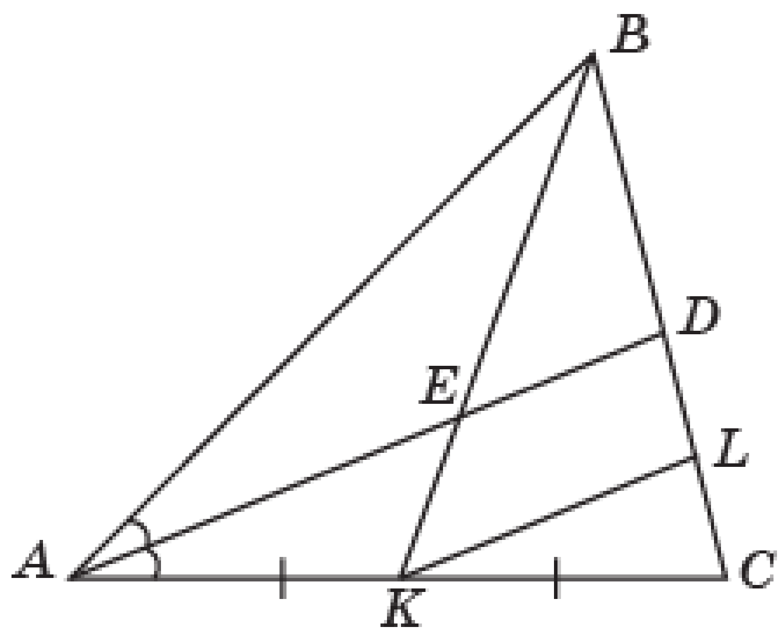
Решение. Через точку B проведём прямую, параллельную DE. Обозначим G её точку пересечения со стороной AC. Тогда $CF : FB = CE : EG = 2 : 1$. Площадь треугольника CEF равна $\frac{1}{3}$.



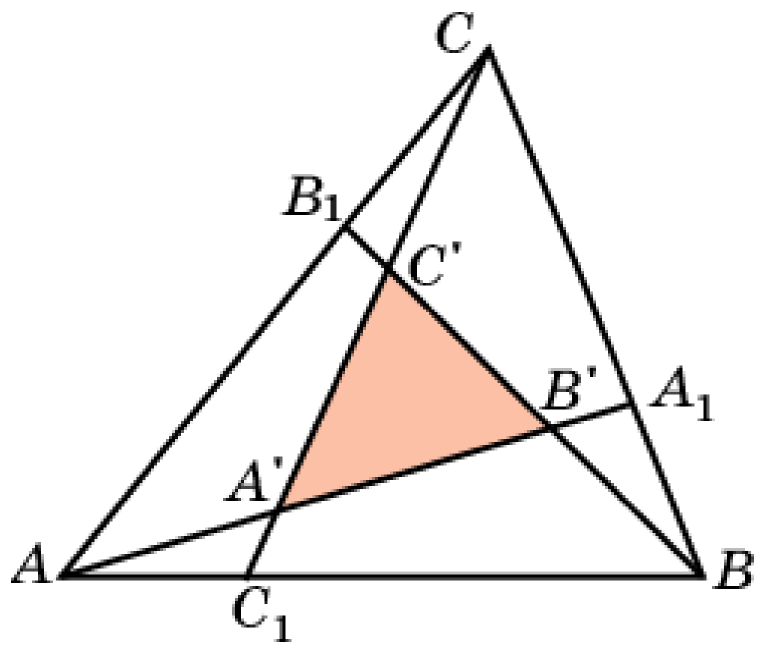
5 (ОГЭ). Площадь треугольника ABC равна 40. Биссектриса AD пересекает медиану BK в точке E, при этом $BD : DC = 3 : 2$. Найдите площадь четырёхугольника $EDCK$.



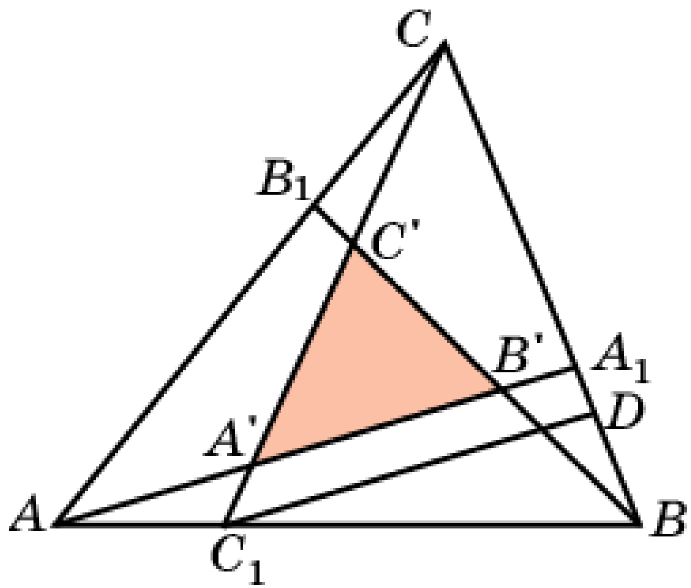
Решение. Через точку K проведём прямую, параллельную AD. Обозначим L её точку пересечения со стороной BC. Тогда $BD : DL = 3 : 1$. Следовательно, $BE : EK = 3 : 1$. Площадь треугольника BDE равна $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$ площади треугольника BCK, т. е. равна 9. Значит, площадь четырёхугольника $EDCK$ равна 11.



6. (Олимпиада). Точки A_1, B_1, C_1 делят соответственно стороны BC, CA, AB треугольника ABC в отношении 1:2. Найдите площадь треугольника $A'B'C'$, ограниченного прямыми AA_1, BB_1, CC_1, если площадь треугольника ABC равна 1.



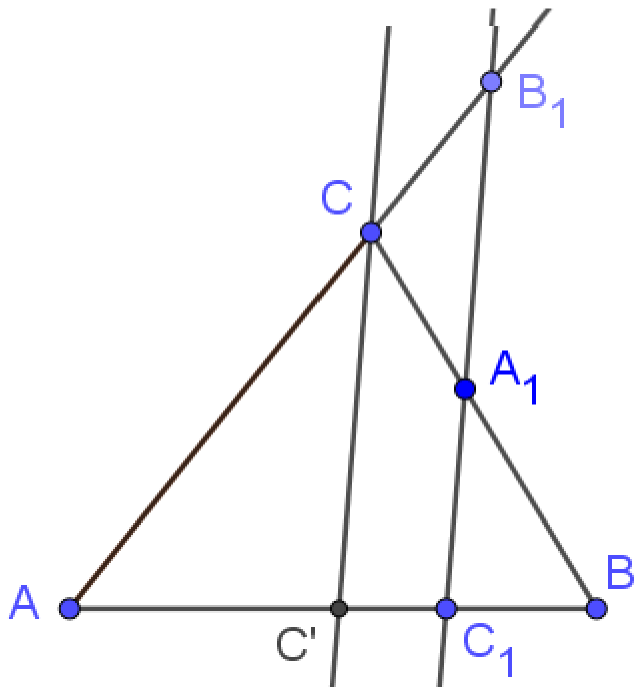
Решение. Площадь треугольника $A'B'C'$ равна площади треугольника ABC минус площади треугольников $AB'B$, $BC'C$, $CA'A$. Для нахождения площади треугольника $CA'A$ проведем отрезок C_1D параллельный прямой AA_1.



Тогда $A_1D : DB = AC_1 : C_1B = 1:2$, $CA_1 : A_1D = 6 : 1$, следовательно, $CA' : A'C_1 = 6:1$. Значит, площадь треугольника $CA'A$ равна $\frac{6}{7}$ площади треугольника ACC_1 и равна $\frac{2}{7}$. Треугольники $AB'B$ и $BC'C$ имеют такую же площадь. Следовательно, площадь треугольника $A'B'C'$ равна $\frac{1}{7}$.

Теорема Менелая. Пусть на сторонах AB, BC и продолжении стороны AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1. Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$(*)\ \frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

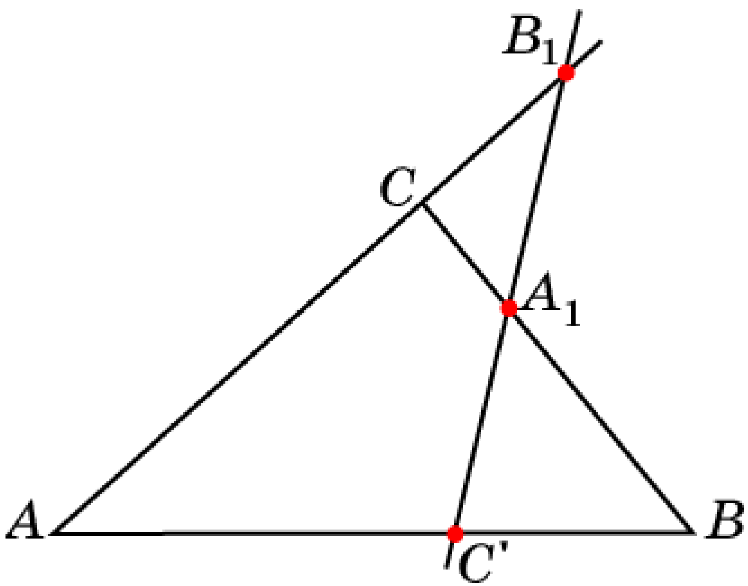


Доказательство: Пусть точки A_1, B_1, C_1 принадлежат одной прямой a. Через вершину C проведём прямую, параллельную прямой a. Обозначим C' её точку пересечения с прямой AB. По теореме о пропорциональных отрезках $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BC_1}{C_1C'}$, $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{C'C_1}{C_1A}$. Перемножая эти равенства, получим равенства

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{BC_1}{C_1C'}\cdot\frac{C'C_1}{C_1A}=\frac{BC_1}{C_1A}.$$

из которых непосредственно следует требуемое равенство.

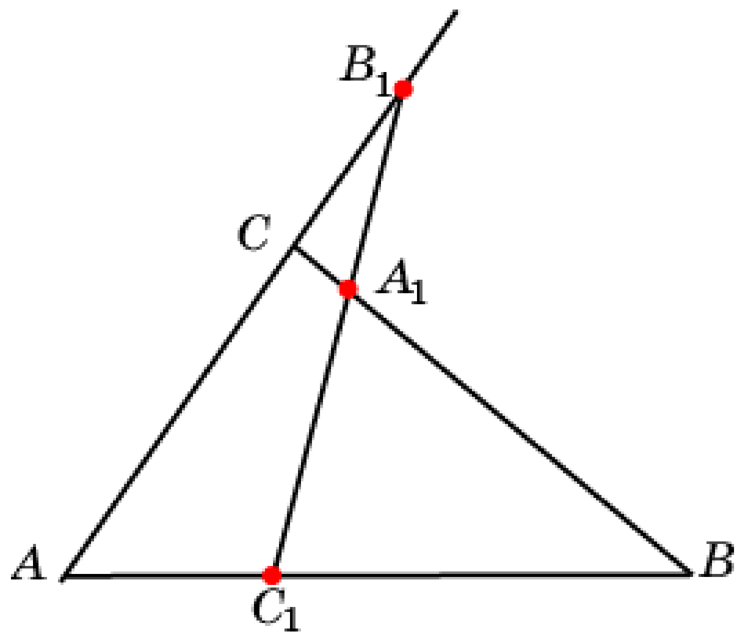
Докажем обратное. Пусть на сторонах AB, BC и продолжении стороны AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1, для которых выполняется равенство (*). Предположим, что прямая A_1B_1 пересекает прямую AB в некоторой точке C'. По доказанному, выполняется равенство $\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.



Учитывая равенство (*), получаем равенство $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC_1}{C_1B}$. Прибавим к его обеим частям единицу и приведем к общему знаменателю. Получим равенство $\frac{AB}{C'B} = \frac{AB}{C_1B}$, из которого следует, что C' и C_1 совпадают. Следовательно, точки A_1, B_1, C_1 принадлежат одной прямой.

Пример

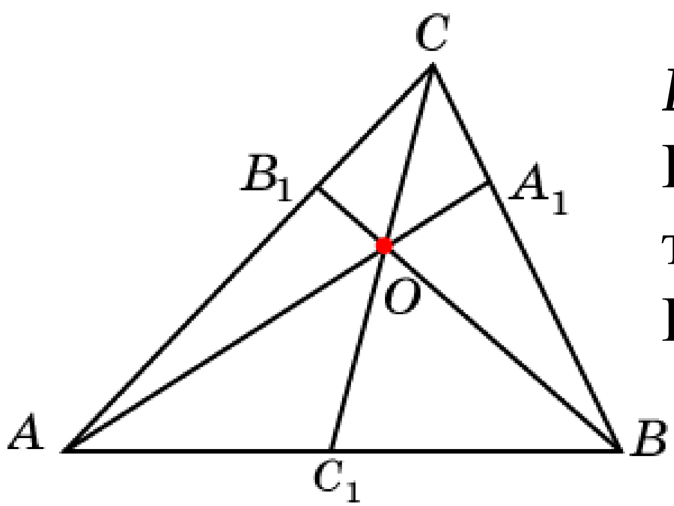
Точка C_1 делит сторону AB треугольника ABC в отношении 1:2. Точка B_1 лежит на продолжении стороны AC и $AC = 2CB_1$. В каком отношении делит прямая B_1C_1 сторону BC?



Решение: По условию $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{1}{2}$, $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{1}{3}$. Используя теорему Менелая, находим $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{6}{1}$.

Теорема Чевы. Пусть на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$(*) \qquad \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$



Доказательство. Пусть прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Применим теорему Менелая к треугольнику BCC_1 и прямой AA_1. Получим

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CO}{OC_1} \cdot \frac{C_1A}{AB} = 1.$$

Аналогично, применяя теорему Менелая к треугольнику AC_1C и прямой BB_1, получим

$$\frac{C_1O}{OC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AB}{BC_1} = 1.$$

Перемножая эти два равенства, получим искомое равенство (*).

Докажем обратное. Пусть на сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1, для которых выполняется равенство (*). Предположим, что прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Проведем прямую CO и обозначим C' ее точку пересечения со стороной AB. Докажем, что C' совпадает с C_1.

Для точек A_1, B_1, C' выполняется равенство $\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$

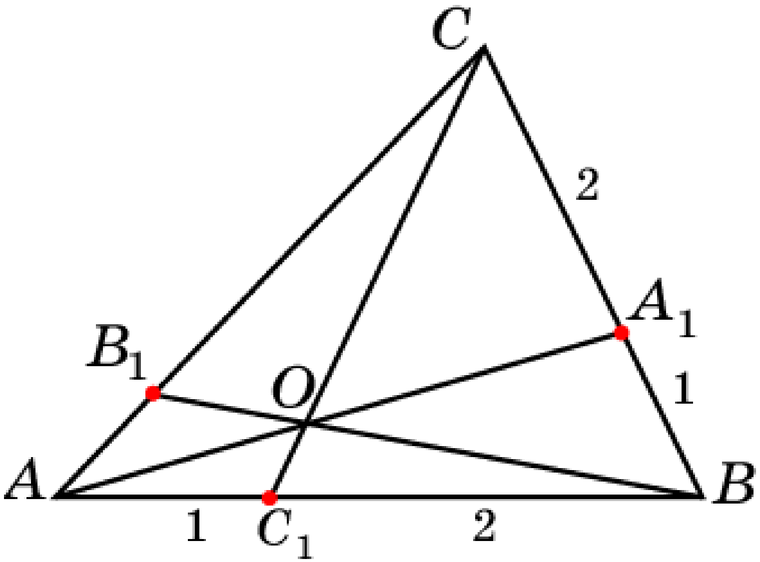
Учитывая равенство (*), получаем равенство $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC_1}{C_1B}$, из которого следует, что точки C' и C_1 совпадают, значит, прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

Для точек A_1, B_1, C' выполняется равенство $\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$

Учитывая равенство (*), получаем равенство $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC_1}{C_1B}$, из которого следует, что точки C' и C_1 совпадают, значит, прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

Пример 1

Точки C_1 и A_1 делят стороны AB и BC треугольника ABC в отношении 1:2. Прямые CC_1 и AA_1 пересекаются в точке O. Найдите отношение, в котором прямая BO делит сторону CA.

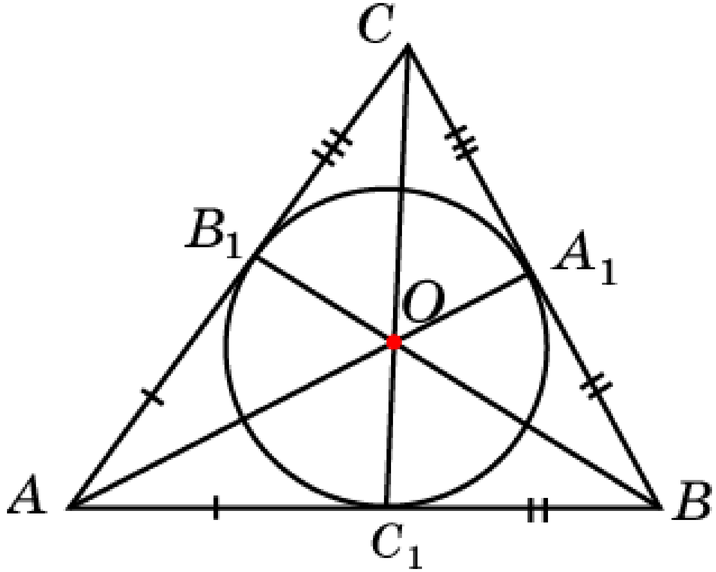


Решение: По условию $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{1}{2}$. Используя теорему Чевы, находим

$$\frac{CB_1}{B_1A} = 4.$$

Пример 2

Докажите, что прямые, проходящие через вершины треугольника и точки касания вписанной окружности пересекаются в одной точке, называемой точкой Жергонна.



Решение: Пусть окружность касается сторон треугольника ABC соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Тогда $AB_1 = AC_1$, $BC_1 = BA_1$, $CA_1 = CB_1$. Следовательно, $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$. По теореме Чевы, прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

Контактная информация

Издательство «Мнемозина»:
105043, Москва, ул. Волочаевская, 40Г, строение 4, этаж 3
Тел.: 8 (495) 181-68-88
E-mail: ioc@mnemozina.ru
Сайт: mnemozina.ru

Интернет-магазин: shop.mnemozina.ru

Торговый дом:
E-mail: td@mnemozina.ru
E-mail для бюджетных закупок: tender@mnemozina.ru
Тел.: 8 (495) 640–93–99

Электронные формы учебников и пособий представлены на сайте **«Школа в кармане»**: pocketschool.ru
E-mail для оптовых закупок: zakaz@ars-edu.ru