



Новая задача на векторы в профильном ЕГЭ по математике 2024 года (задание 2)

Виктор Михайлович Кривенко

Кандидат физико-математических наук,
автор пособий издательства «Легион».



ПОД РЕДАКЦИЕЙ Ф.Ф. ЛЫСЕНКО, С.Ю. КУЛАБУХОВА

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

ЕГЭ-2024

40 ТРЕНИРОВОЧНЫХ ВАРИАНТОВ

ПО НОВОЙ ДЕМОВЕРСИИ 2024

- ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ 10 ВАРИАНТОВ
- СБОРНИК ЗАДАЧ
- ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК
- ОТВЕТЫ КО ВСЕМ ВАРИАНТАМ И ЗАДАНИЯМ

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$



ЛЕГИОН

ПОД РЕДАКЦИЕЙ Ф.Ф. ЛЫСЕНКО, С.О. ИВАНОВА

МАТЕМАТИКА

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

ЕГЭ-2024

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ТРЕНИНГ

10-11 КЛАССЫ

- 1800 ЗАДАНИЙ БАЗОВОГО И ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЕЙ
- ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ
- КРАТКАЯ ТЕОРИЯ ПО ВСЕМ ТЕМАМ
- ОТВЕТЫ КО ВСЕМ ЗАДАНИЯМ

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$



ЛЕГИОН-М



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕГИОН

План

Введение

I. Векторы, равенство векторов. Операции над векторами и их свойства.

II. Координаты точки и координаты вектора:

1. Задачи на параллельность векторов;

2. Скалярное произведение векторов. Задачи на перпендикулярность векторов;

3. Скалярное произведение векторов. Задачи на углы между векторами;

4. Скалярное произведение векторов. Длина вектора.

III. Классические примеры применения векторов.

Введение

В соответствие со спецификацией и демоверсией в профильное ЕГЭ 2024 будет включено новое задание под номером 2 по геометрии на векторы.

Учитывая, что открытый банк заданий по этой теме будет формироваться в течение года, рассмотрим различные возможные типы этих заданий. При этом будем учитывать, что они входят в первую часть ЕГЭ и на их решение отводится примерно 5 минут.

Так как в спецификации речь идёт просто о векторах, разумно предполагать, что речь идёт о векторах и на плоскости, и в пространстве. Поэтому для каждого типа задач о векторах на плоскости мы будем рассматривать соответствующие задачи в пространстве.

I. Векторы, равенство векторов. Операции над векторами и их свойства.

Задача 1. На клетчатом листке изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (см. рис. 370). Постройте вектор, равный сумме векторов $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. В ответе укажите длину полученного вектора.

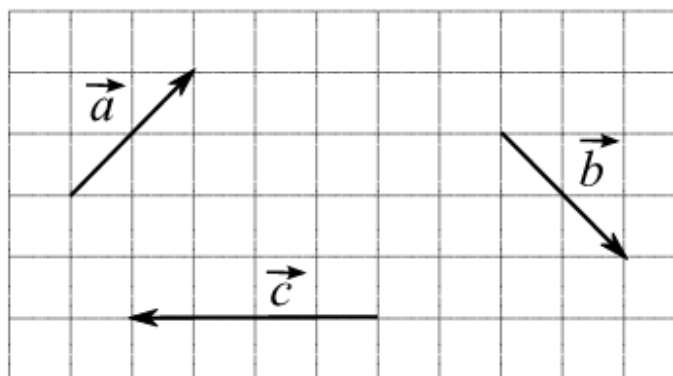


Рис. 370

Решение. Сдвинем одновременно начало и конец вектора $\vec{b}$ сначала на пять клеток влево, а затем на одну клетку вверх. Начало вектора $\vec{b}$ совпадёт с концом вектора $\vec{a}$.

Затем начало и конец вектора $\vec{c}$ одновременно сдвинем сначала на две клетки вверх и одну клетку влево. Конец вектора $\vec{c}$ совпадёт с началом вектора $\vec{a}$ и конец вектора $\vec{b}$ совпадёт с началом вектора $\vec{c}$ (см. рис. 371).

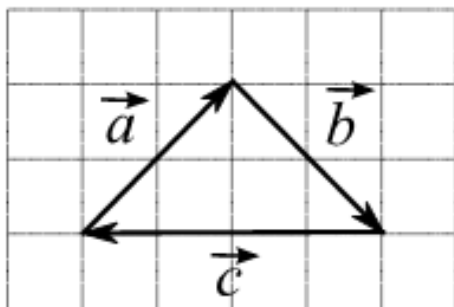


Рис. 371

Получили, что начало и конец вектора $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ совпадают, поэтому $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Его длина равна 0.

Ответ. 0

Задача 2. На рисунке 372 изображён прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{D_1 A} + \overrightarrow{B B_1} + \overrightarrow{A D}$ (см. рис. 372). В ответе укажите длину полученного вектора.

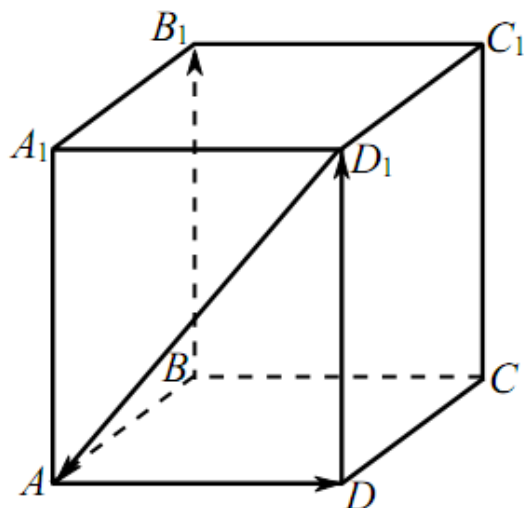


Рис. 372

Решение. $\overrightarrow{D_1 A} + \overrightarrow{B B_1} + \overrightarrow{A D} = \overrightarrow{D_1 A} + \overrightarrow{A D} + \overrightarrow{B B_1} =$
 $= \overrightarrow{D_1 D} + \overrightarrow{B B_1} = \overrightarrow{D_1 D} + \overrightarrow{D D_1} = \overrightarrow{D_1 D_1} = \vec{0}$. Длина $\vec{0}$
 равна 0.

Ответ. 0



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕГИОН

Задача 3. На клетчатом листке изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис. 373). Постройте вектор $\vec{b} - 2\vec{a}$. В ответе укажите на сколько клеток начало этого вектора выше его конца.

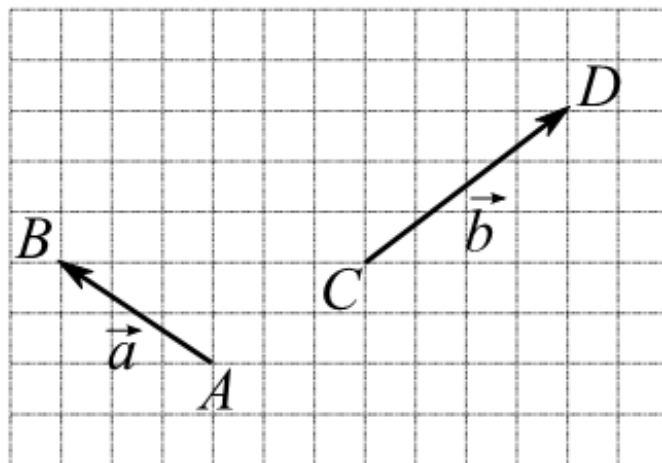


Рис. 373

Решение. Сдвинем одновременно точки A и B сначала на три клетки вправо, а затем на две клетки вверх. Получим соответственно точки C и B_1 (см. рис. 374).

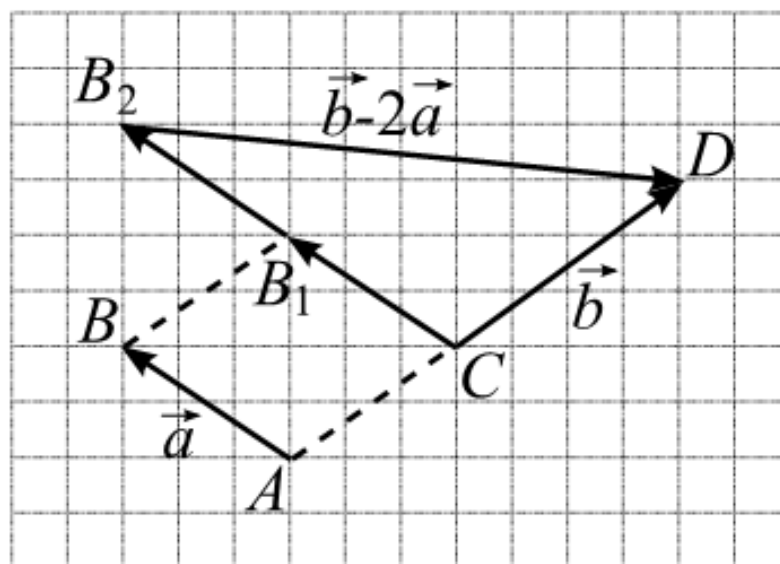


Рис. 374

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{CB_1}$ равны. Далее увеличиваем вектор $\vec{CB_1}$ в два раза. Получим вектор $\vec{CB_2}$, равный $2\vec{a}$. Тогда вектор $\vec{B_2D} = \vec{b} - 2\vec{a}$. По рисунку определяем, что начало этого вектора на одну клетку выше его конца.

Ответ. 1

Задача 4. На рисунке 375 изображён параллелепипед $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8$. Постройте вектор $\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}$.

Из точек, отмеченных на рисунке, найдите начало и конец полученного вектора. В ответе укажите отрицательную разность нижних индексов этих точек.

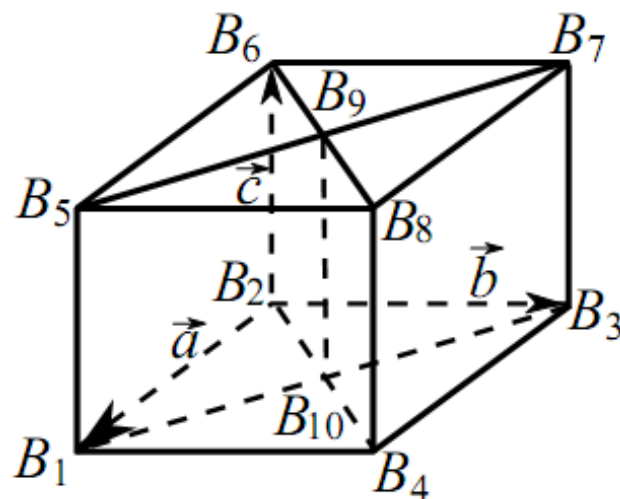


Рис. 375

Решение. Отметим на рисунке 375 необходимые векторы (см. рис. 376).

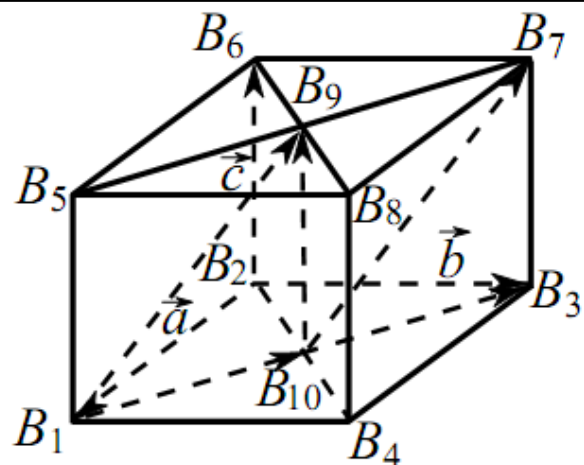


Рис. 376

По определению операций над векторами и их свойствам получаем: $\overrightarrow{B_1B_3} = \vec{b} - \vec{a}$. Тогда $\overrightarrow{B_1B_{10}} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$. Так как $\vec{c} = \overrightarrow{B_1B_5}$, то $\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c} = \overrightarrow{B_1B_{10}} + \overrightarrow{B_1B_5} = \overrightarrow{B_1B_9}$. Разность нижних индексов точек B_1 и B_9 равна $1 - 9 = -8$. Но $\overrightarrow{B_1B_9} = \overrightarrow{B_{10}B_7}$. В таком случае разность нижних индексов равна 3, что ответом не является.

Ответ. -8 .



Задача 5 Найдите такие числа α и β , чтобы выполнялось равенство $\vec{CO} = \alpha \vec{AC} + \beta \vec{AB}$ (см. рис. 377), где N , L и K — середины отрезков AC , CB и AB соответственно. В ответе укажите число 3α .

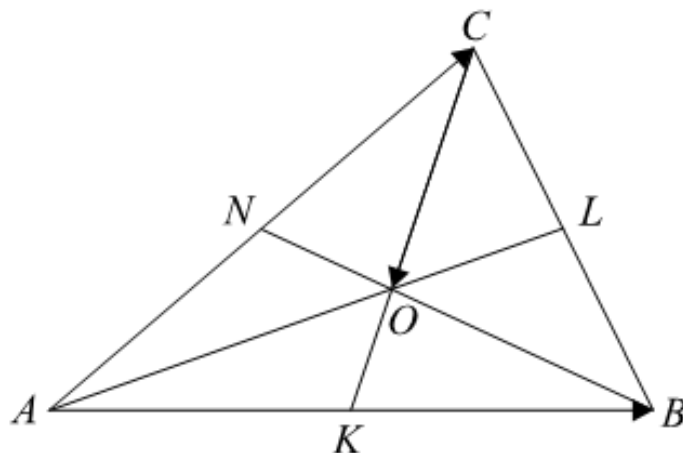


Рис. 377

Решение. Обозначим на рисунке 377 необходимые векторы (см. рис. 378).

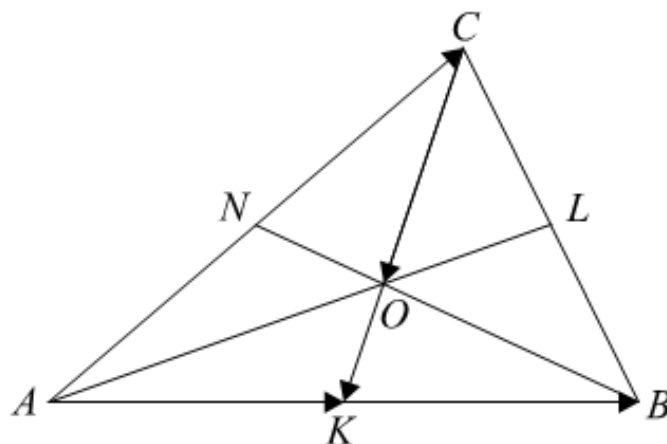


Рис. 378

По свойствам медиан треугольника, определению операций над векторами и их свойствам, получаем:

$$\begin{aligned}\vec{CO} &= \frac{2}{3}\vec{CK} = \frac{2}{3}(\vec{AK} - \vec{AC}) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{AC}\right) = \\ &= \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AC} = -\frac{2}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AB}. \text{ Поэтому } \alpha = -\frac{2}{3}, \\ 3\alpha &= -2\end{aligned}$$

Ответ. -2 .

Задача 6 На рисунке 379 изображена правильная треугольная пирамида $SABC$, SO — её высота. Найдите такие числа α , β и γ , чтобы выполнялось равенство $\overrightarrow{AS} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{SO}$. В ответе укажите число 3β .

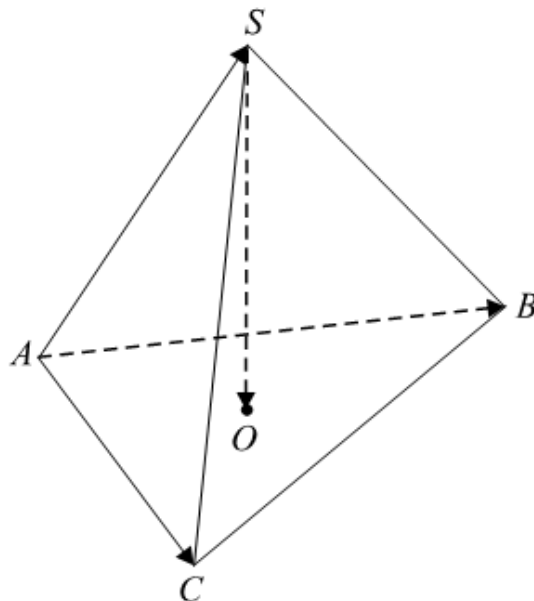


Рис. 379

Решение. Точка O является точкой пересечения медиан (серединных перпендикуляров к сторонам) треугольника ABC (укажем только две (два) из них — AL и BK (см. рис. 380)).



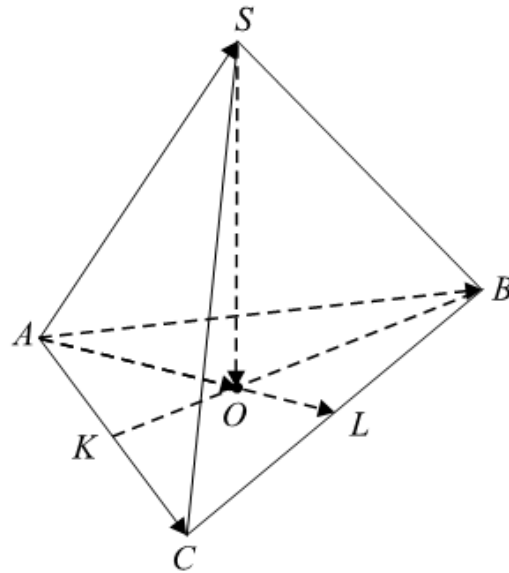


Рис. 380

По свойствам медиан треугольника, определению операций над векторами и их свойствам, получаем:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AS} &= \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{SO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AL} - \overrightarrow{SO} = \frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\right)\right) - \overrightarrow{SO} = \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{SO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{SO}. \beta = \frac{1}{3}, \\ 3\beta &= 1\end{aligned}$$

Ответ. 1.



II. Координаты точки и координаты вектора.

1. Задачи на параллельность векторов.

Задача 7. В системе координат O_{xy} найдите ординату вектора $3\vec{b} - 2\vec{a}$ (см. рис. 381).

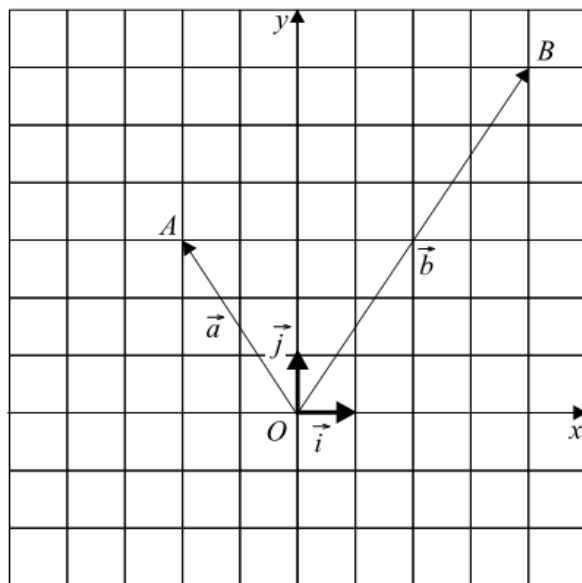


Рис. 381

Решение. По рисунку определяем, что вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OA}(-2; 3)$, а вектор $\vec{b} = \overrightarrow{OB}(4; 6)$. Тогда ордината вектора $3\vec{b}$ равна числу $3 \cdot 6 = 18$, а ордината вектора $-2\vec{a}$ равна числу $(-2) \cdot 3 = -6$. Следовательно ордината вектора $3\vec{b} - 2\vec{a}$ равна числу $18 - 6 = 12$.

Ответ. 12.

Задача 8. В пространстве с заданной системой координат O_{xyz} отмечены две точки: $A(-1; 2; -5)$ и $B(0; 3; -1)$. Найдите аппликату вектора $4\vec{a} - 5\vec{b}$, где $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$.

Решение. Аппликата вектора $4\vec{a}$ равна числу $4 \cdot (-5) = -20$, аппликата вектора $-5\vec{b}$ равна числу $(-5) \cdot (-1) = 5$. Следовательно аппликата вектора $4\vec{a} - 5\vec{b}$ равна числу $-20 + 5 = -15$.

Ответ. -15 .



Задача 9. Найдите ординату вектора с началом в точке $A(-3; 2)$ и концом в точке K , лежащей на оси O_y , сонаправленного с вектором, начало которого в точке $B(2; -2)$, а конец в точке $C(6; 4)$ (см. рис. 382).

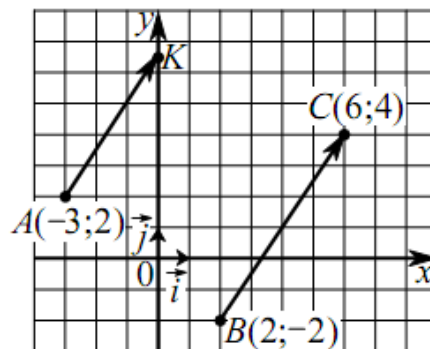


Рис. 382

Решение. Так как точка K лежит на оси O_y , то K имеет координаты $(0; t)$, где t — некоторое число. Тогда $\overrightarrow{AK}(0 - (-3); t - 2)$, $\overrightarrow{BC}(6 - 2; 4 - (-2))$, $\overrightarrow{AK}(3; t - 2)$, $\overrightarrow{BC}(4; 6)$. $\overrightarrow{AK} \parallel \overrightarrow{BC}$, поэтому $\frac{3}{4} = \frac{t - 2}{6}$,

$$t - 2 = \frac{18}{4} = 4,5.$$

Ответ. 4,5.



Задача 10. Найдите абсциссу вектора с началом в точке $A(2; 2; 2)$ и концом в точке K , лежащей на плоскости O_{xy} , сонаправленного с вектором, начало которого в точке $B(1; 3; 4)$ и конец в точке $C(4; 5; 6)$.

Решение. Так как точка K лежит на плоскости O_{xy} , то K имеет координаты $(u; v; 0)$, где u и v — некоторые числа. Тогда $\overrightarrow{AK}(u - 2; v - 2; -2)$, $\overrightarrow{BC}(4 - 1; 5 - 3; 6 - 4)$, $\overrightarrow{BC}(3; 2; 2)$, $\overrightarrow{AK} \parallel \overrightarrow{BC}$, поэтому $\frac{3}{u - 2} = \frac{2}{v - 2} = \frac{2}{-2} = -1$, $u - 2 = -3$.

Ответ. -3 .



Замечание. Вопросы в условии задач 9 и 10 можно немного изменить и получить новые прототипы задач на векторы. А именно, в задаче 9 находить не ординату вектора с заданным началом и указанным концом K , а ординату точки K (соответственно в задаче 8 абсциссу точки K). Заметим, что тогда ответ в задаче 9 будет 6,5 (соответственно в задаче 10 ответ будет -1).

Задача 11. На координатной плоскости отмечены точки $A(2; 3)$, $B(5; 1)$ и $C(-1; 2)$. Найдите сумму координат такой точки M , что вектор $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM}$.

Решение. Пусть $M(x; y)$, тогда $\overrightarrow{AB}(5 - 2; 1 - 3)$, $\overrightarrow{AB}(3; -2)$, $\overrightarrow{CM}(x - (-1); y - 2)$, $\overrightarrow{CM}(x + 1; y - 2)$. Так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM}$, то $x + 1 = 3$, $x = 2$ и $y - 2 = -2$, $y = 0$, $x + y = 2$.

Ответ. 2.



Задача 12. В пространстве с заданной системой координат O_{xyz} отмечены точки $M(4; 1; -1)$, $N(5; 2; 7)$ и $P(1; 2; -1)$. Найдите произведение координат такой точки Q , что вектор $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$.

Решение. Пусть $Q(x; y; z)$ — искомая точка, тогда $\overrightarrow{MN}(5 - 4; 2 - 1; 7 - (-1))$, $\overrightarrow{MN}(1; 1; 8)$, $\overrightarrow{PQ}(x - 1; y - 2; z - (-1))$, $\overrightarrow{PQ}(x - 1; y - 2; z + 1)$. Так как $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$, то $x - 1 = 1$, $y - 2 = 1$, $z + 1 = 8$, $x = 2$, $y = 3$, $z = 7$, $x \cdot y \cdot z = 42$.

Ответ. 42.



Задача 13. Найдите, при каком значении t точки $A(7; -1)$, $B(8; 5)$ и $C(4; t)$ лежат на одной прямой.

Решение. Указанные точки будут лежать на одной прямой, если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ параллельны. $\overrightarrow{AB}(1; 6)$ и $\overrightarrow{AC}(-3; t + 1)$. Тогда $\frac{-3}{1} = \frac{t + 1}{6}$, $-18 = t + 1$, $t = -19$.

Ответ. -19 .



Задача 14. Найдите, при каком значении m точки $A(2; 0; 1)$, $B(0; 2; -1)$ и $C(-2; m; -3)$ лежат на одной прямой.

Решение. Указанные точки будут лежать на одной прямой, если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ параллельны. $\overrightarrow{AB}(-2; 2; -2)$ и $\overrightarrow{AC}(-4; m; -4)$. Тогда $\frac{-4}{-2} = \frac{m}{2} = \frac{-4}{-2}, m = 4$.

Ответ. 4.



2. Скалярное произведение векторов. Задачи на перпендикулярность векторов.

Задача 15. Найдите ординату вектора с началом в точке $A(-3; 2)$ и концом в точке K , лежащей на оси O_y , перпендикулярного вектору, начало которого в точке $B(2; -2)$, а конец в точке $C(6; 3)$ (см. рис. 383).

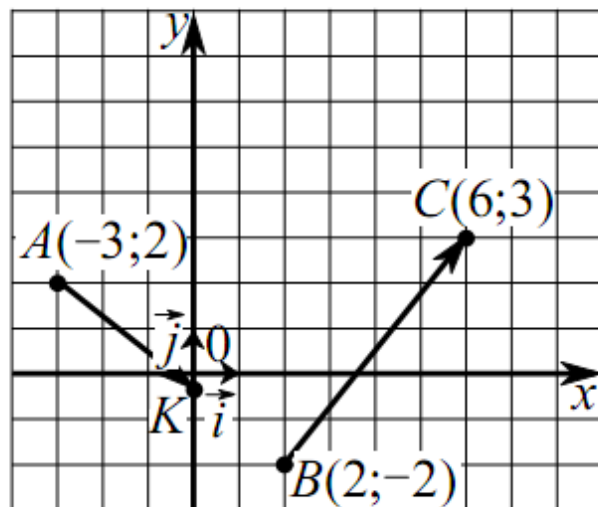


Рис. 383

Решение. Так как точка K лежит на оси O_y , то K имеет координаты $(0; t)$, где t — некоторое число.



Тогда $\overrightarrow{AK}(0 - (-3); t - 2)$, $\overrightarrow{AK}(3; t - 2)$,
 $\overrightarrow{BC}(6 - 2; 3 - (-2))$, $\overrightarrow{BC}(4; 5)$.

Так как $\overrightarrow{AK} \perp \overrightarrow{BC}$, то скалярное произведение
 $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BC} = 0. 3 \cdot 4 + 5 \cdot (t - 2) = 0, t - 2 = -\frac{12}{5} = -2,4$

Ответ. $-2,4$.



Задача 16. Найдите ординату вектора с началом в точке $A(2; 2; 2)$ и концом в точке K , лежащей на оси O_y , перпендикулярного вектору, начало которого в точке $B(1; 3; 4)$ и конец в точке $C(4; 5; 6)$.

Решение. Так как точка K лежит на оси O_y , то K имеет координаты $(0; v; 0)$, где v — некоторое число. Тогда $\overrightarrow{AK}(-2; v - 2; -2)$, $\overrightarrow{BC}(3; 2; 2)$, $\overrightarrow{AK} \perp \overrightarrow{BC}$, поэтому скалярное произведение $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Отсюда $(-2) \cdot 3 + (v - 2) \cdot 2 + (-2) \cdot 2 = 0$, $v - 2 = 5$.

Ответ. 5.



Замечание. Аналогично предыдущим задачам 9 и 10, можно немного изменить вопросы в задачах 15 и 16 и получить новые прототипы задач на векторы. А именно, в задаче 15 находить не ординату вектора с заданным началом и указанным концом K , а ординату точки K (соответственно в задаче 16 тоже ординату точки K). Заметим, что тогда ответ в задаче 9 будет $-0,4$ (соответственно в задаче 10 ответ будет 7).



Задача 17. Найдите абсциссу конца такого вектора с началом в точке B и концом в точке T , принадлежащей прямой $y = \frac{1}{2}x$, чтобы он был перпендикулярен вектору $\overrightarrow{OA}$ (см. рис. 384).

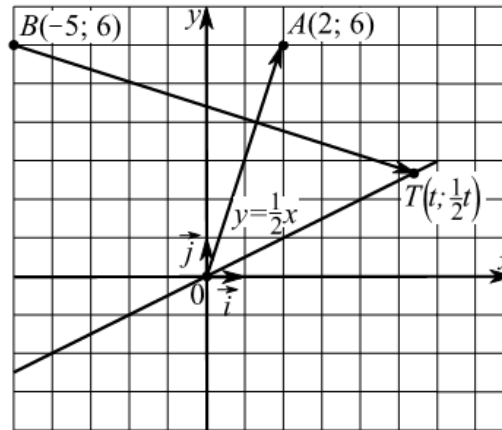


Рис. 384

Решение. Так как точка T принадлежит прямой $y = \frac{1}{2}x$, то $T\left(t; \frac{1}{2}t\right)$, где t — некоторое число.

Отсюда $\overrightarrow{BT}\left(t + 5; \frac{1}{2}t - 6\right)$. Так как $\overrightarrow{BT} \perp \overrightarrow{OA}$, то $\overrightarrow{BT} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$, $2 \cdot (t + 5) + 6 \cdot \left(\frac{1}{2}t - 6\right) = 0$, $2t + 10 + 3t - 36 = 0$, $t = \frac{26}{5} = 5,2$, $t + 5 = 10,2$.

Ответ. 10,2.

Задача 18. Найдите аппликату конца такого вектора с началом в точке $B(1; 2; 2)$ и концом в точке T , принадлежащей прямой $x = y = \frac{1}{2}z$, чтобы он был перпендикулярен вектору $\vec{c}(2; -1; -1)$.

Решение. Так как точка T принадлежит прямой $x = y = \frac{1}{2}z$, то $T(t; t; 2t)$, где t — некоторое число.

Отсюда $\overrightarrow{BT}(t - 1; t - 2; 2t - 2)$. Так как $\overrightarrow{BT} \perp \vec{c}$, то

$$\overrightarrow{BT} \cdot \vec{c} = 0,$$

$$2 \cdot (t - 1) + (-1) \cdot (t - 2) + (-1) \cdot (2t - 2) = 0, \\ -t + 2 = 0, 2t - 2 = 2.$$

Ответ. 2.



3. Скалярное произведение векторов. Задачи на углы между векторами.

Задача 19. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Ответ дайте в градусах (см. рис. 385).

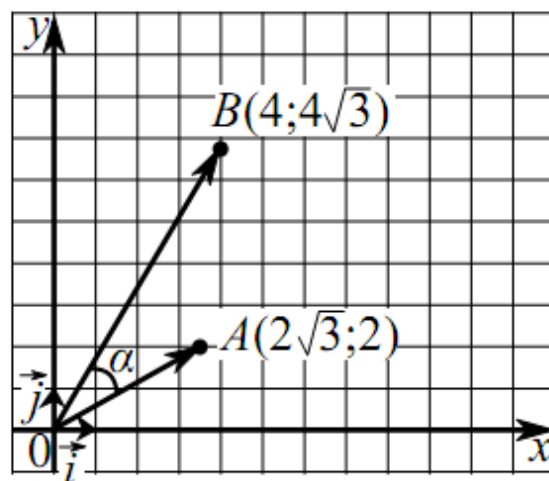


Рис. 385

Решение. Из формулы скалярного произведения векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ получаем: $\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|}$

$$\frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}|} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} \cdot \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2}} =$$

$$= \frac{16\sqrt{3}}{8 \cdot 4} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \alpha = 30^\circ.$$

Ответ. 30.

Задача 20. Найдите угол ψ между векторами $\vec{a}(1; 1; \sqrt{2})$ и $\vec{b}(1; -1; \sqrt{2})$. Ответ дайте в градусах.

Решение. Из формулы скалярного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ получаем: $\cos \psi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

$$\begin{aligned} \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} &= \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (\sqrt{2})^2}} = \\ &= \frac{2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}, \cos \psi = \frac{1}{2}, \psi = 60^\circ. \end{aligned}$$

Ответ. 60.



Задача 21. Найдите, при каком отрицательном значении α вектор $\vec{u}(2; \alpha)$ образует угол 45° с вектором $\vec{b}(5; 0)$.

Первое решение. Пусть φ — угол между векторами $\vec{u}$ и $\vec{b}$ тогда: $\cos \varphi = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{b}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 5 + \alpha \cdot 0}{\sqrt{2^2 + \alpha^2} \cdot \sqrt{5^2 + 0^2}} = \frac{10}{\sqrt{4 + \alpha^2} \cdot 5} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{4 + \alpha^2}}, 4 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4 + \alpha^2}, \alpha^2 = 4, \alpha = \pm 2. \end{aligned}$$

Ответ. -2 .



Второе решение. Вектор $\vec{b}$ имеет направление оси O_x . Значит, при отрицательном значении α вектор $\vec{u}(2; \alpha)$ образует угол 45° с вектором $\vec{b}(5; 0)$ только в том случае, когда конец вектора $\vec{u}$ лежит на биссектрисе $y = -x$. Тогда $\alpha = -2$ (см. рис. 386).

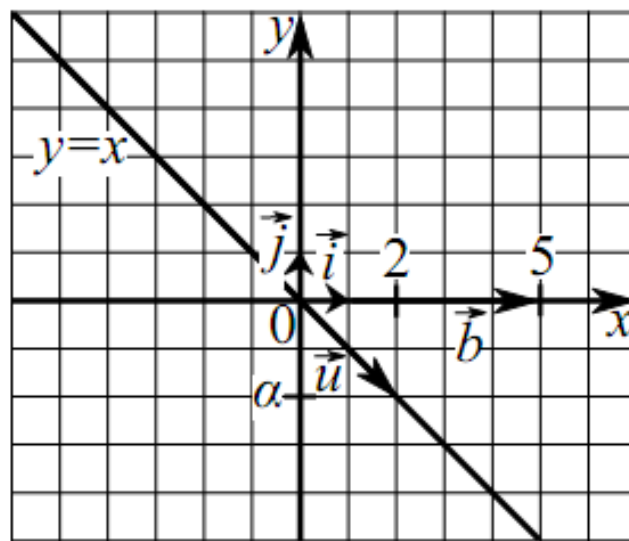


Рис. 386

Задача 22. Найдите, при каком значении α вектор $\vec{a}(2; 2; 0)$ образует угол 45° с вектором $\vec{b}(1; 1; \alpha)$. В ответе укажите α^2 .

Решение. Пусть φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ тогда: $\cos \varphi = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot \alpha}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + \alpha^2}} = \\ &= \frac{4}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2 + \alpha^2}}, 4 = 2\sqrt{2 + \alpha^2}, \sqrt{2 + \alpha^2} = 2, \alpha^2 = 2. \end{aligned}$$

Ответ. 2.



4. Скалярное произведение векторов. Длина вектора.

Задача 23. На стороне AB квадрата $ABCD$ со стороной, равной 1, взята точка M так, что $AM = \frac{1}{3}$. Точка N лежит на стороне CD и $MN^2 = \frac{5}{4}$ (см. рис. 387). Найдите DN . В ответе укажите $6DN$.

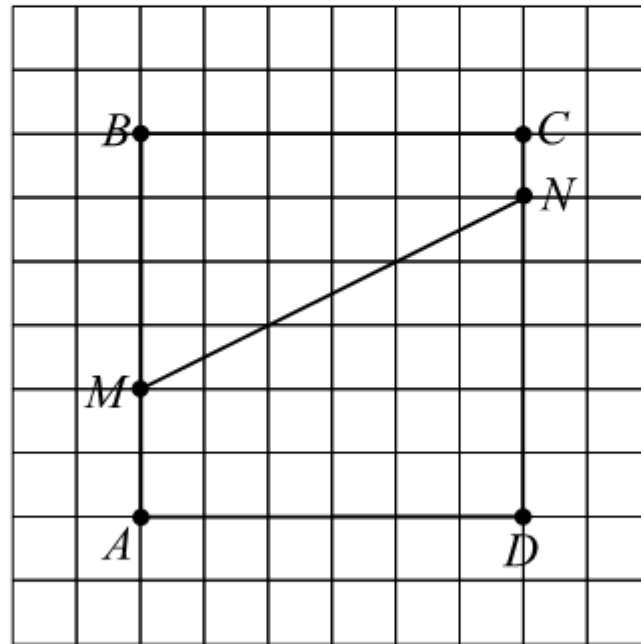


Рис. 387

Решение. Пусть $DN = p$. Рассмотрим систему координат A_{xy} (см. рис. 388).



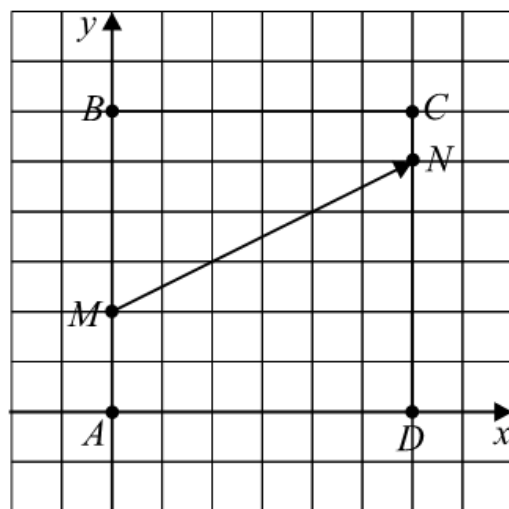


Рис. 388

Находим координаты вектора $\overrightarrow{MN}$. Согласно условию $M\left(0; \frac{1}{3}\right)$, $N(1; p)$, где p — некоторое число ($0 < p < 1$). Тогда $\overrightarrow{MN}\left(1 - 0; p - \frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{MN}\left(1; p - \frac{1}{3}\right)$.
 $MN^2 = |\overrightarrow{MN}|^2 = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MN} = 1 \cdot 1 + \left(p - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{4}$.
 Отсюда $\left(p - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}$, $p - \frac{1}{3} = \pm \frac{1}{2}$. Если $p - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$, то $p = \frac{5}{6}$, $6p = 5$. Если $p - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$, то $p = -\frac{1}{6}$, что невозможно.

Ответ. 5.



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕГИОН

Задача 24. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром, равным 1, точка M расположена на ребре AD . Найдите AM , зная, что $C_1 M^2 = \frac{33}{16}$ (рис. 389).

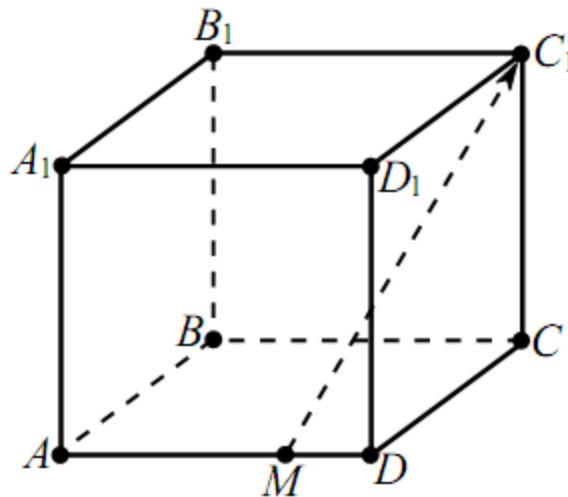


Рис. 389

Решение. Пусть $AM = t$. Рассмотрим систему координат B_{xyz} (см. рис. 390).

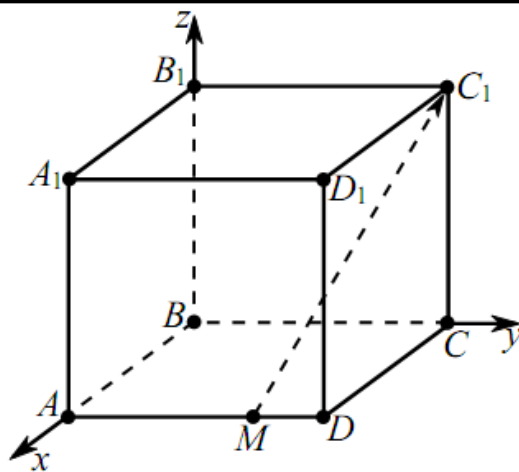


Рис. 390

Находим координаты вектора $\overrightarrow{MC_1}$. Согласно условию $M(1; t; 0)$, где $0 < t < 1$, $C_1(0; 1; 1)$. Тогда $\overrightarrow{C_1M}(1 - 0; t - 1; 0 - 1)$, $\overrightarrow{C_1M}(1; t - 1; -1)$. $C_1M^2 = |\overrightarrow{C_1M}|^2 = \overrightarrow{C_1M} \cdot \overrightarrow{C_1M} = 1 \cdot 1 + (t - 1) \cdot (t - 1) + (-1) \cdot (-1) = \frac{33}{16}$. Отсюда $(t - 1)^2 = \frac{1}{16}$, $t - 1 = \pm \frac{1}{4}$. Если $t - 1 = \frac{1}{4}$, то $t = \frac{5}{4}$, что невозможно. Если $t - 1 = -\frac{1}{4}$, то $t = \frac{3}{4} = 0,75$.

Ответ. 0,75.



III. Классические примеры применения векторов.

Теорема 1. Если a , b и c — стороны треугольника ABC , то медиана m_a , проведённая к стороне a , находится по формуле $m_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$ (см.рис. 391).

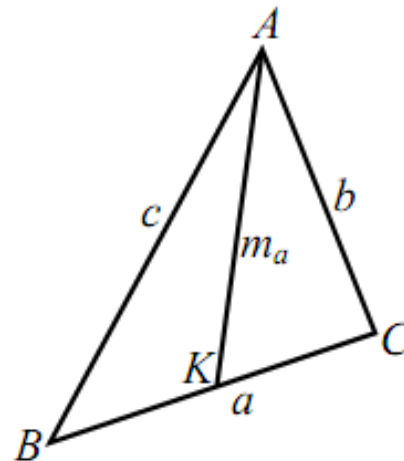


Рис. 391

Доказательство. Рассмотрим векторы: $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$; $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AK} = \vec{m}_a$.



По условию $|\vec{c}| = c$, $|\vec{b}| = b$, $|\vec{a}| = a$, $|\vec{m}_a| = m_a$ и пусть $\angle BAC = \alpha$ (см.рис. 392).

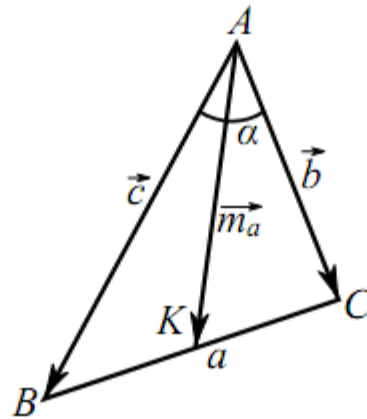


Рис. 392

Заметим, что $\vec{m}_a = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b})$. Тогда

$$m_a = |\vec{m}_a| =$$

$$= \sqrt{\vec{m}_a \cdot \vec{m}_a} = \sqrt{\frac{1}{4}(\vec{c} + \vec{b}) \cdot (\vec{c} + \vec{b})} =$$

$$= \frac{\sqrt{\vec{c} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b}}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{|\vec{c}|^2 + 2|\vec{c}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha + |\vec{b}|^2}}{2}.$$

Но, по теореме косинусов

$$\cos \alpha = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb} = \frac{|\vec{c}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2}{2|\vec{c}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Поэтому $m_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$. Что и требовалось доказать.



Теорема 2. Если прямая l перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости α , то прямая l перпендикулярна плоскости α (см.рис. 393).

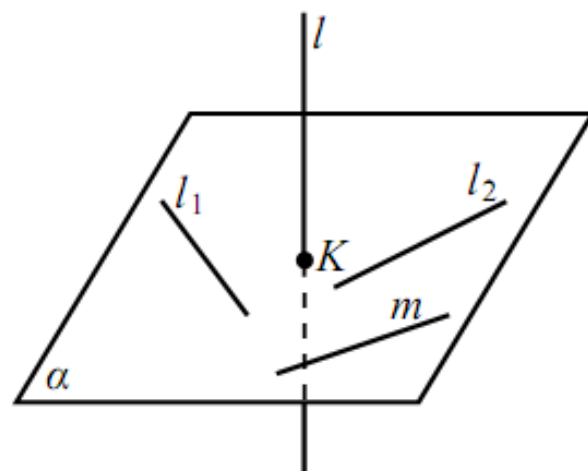


Рис. 393

Доказательство. Необходимо доказать, что прямая l перпендикулярна произвольной прямой m , принадлежащей плоскости α . На каждой прямой построим векторы, как указано на рисунке 394.

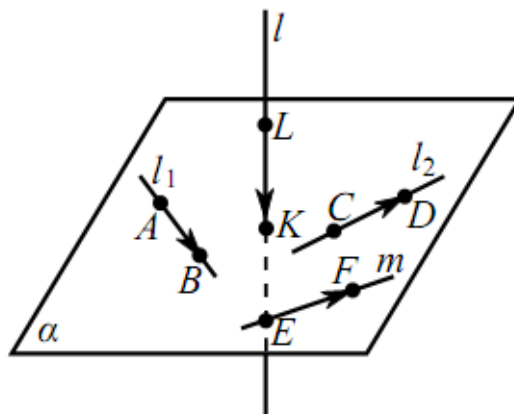


Рис. 394

Так как прямые l_1 и l_2 пересекаются, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ не коллинеарны. Значит, вектор $\overrightarrow{EF}$ выражается через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ в виде $\overrightarrow{EF} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{CD}$, где a и b — некоторые числа. Отсюда скалярное произведение $\overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{LK} \cdot (a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{CD}) = a(\overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{AB}) + b(\overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{CD})$. Так как $\overrightarrow{LK} \perp \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{LK} \perp \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 = \overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{CD}$. Поэтому $\overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$. Следовательно $\overrightarrow{LK} \perp \overrightarrow{EF}$ и l перпендикулярна m . Что и требовалось доказать.





СКИДКА 30%

НА ВСЕ ПОСОБИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ
И ИНФОРМАТИКЕ

Скидка действует
до **15 октября**

При заказе в нашем интернет-
магазине www.legionr.ru ввести код:

ВЕКТОРЫЗАДАЧА2

Где купить?



Официальный интернет-магазин
издательства «Легион» www.legionr.ru

Оплата наличными, банковским переводом,
при получении.

Доставка «Почтой России» или курьерской
службой.

Скидки.

Бесплатная доставка при заказе от **3 000 руб.**



Интернет-магазины
www.ozon.ru, www.labirint.ru



Книжные магазины города

