Методы решений олимпиадных и нестандартных задач, отраженных в заданиях высокого уровня ЕГЭ по математике.

Беребердин Александр Викторович,

педагог доп. образования ЦДО «Эрудит» города-курорта Геленджик, к. пед. н.

Задачи:

- Выделить основные разделы математики, требующие дополнительных методических разработок.
- Выявить наиболее эффективные подходы, методы и педагогические технологии, используемые при изучении этих разделов.
- Создать в помощь педагогу необходимый практикум по этим разделам.

Разделы:

- Делимость.
- Остатки (Сравнения).
- Десятичная запись числа.
- НОД и НОК.
- Уравнения в целых числах.
- **Неравенства и оценки.**
- Элементы теории чисел.
- Последовательности и прогрессии.

Неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, как средство решения олимпиадных задач, оценки значений функций и алгебраических выражений, в 18 и 19 заданиях ЕГЭ по математике».

Беребердин Александр Викторович, к. пед. н.

Оценка + пример.

- Доказательство того, что величина достигает приведённого в ответе значения (обычно это просто пример).
- Доказательство того, что значение величины не может быть больше (соответственно меньше) указанного в ответе. (Оценка).

- *Неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом*. Среднее арифметическое нескольких положительных чисел не меньше их среднего геометрического, т. е. $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}$. Равенство достигается в том и только в том случае, когда все числа равны.

Произведение положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно 1. Докажите, что $(a_1 +1)(a_2 +1)\ldots(a_n +1) \geq 2^n$.

Заметим, что

$$\frac{a_1+1}{2} \geq \sqrt{a_1}, \qquad\qquad a_1 + 1 \geq 2\sqrt{a_1},$$

$$\frac{a_2+1}{2} \geq \sqrt{a_2}, \qquad \Rightarrow \qquad a_2 + 1 \geq 2\sqrt{a_2},$$

.
.
.

$$\frac{a_n+1}{2} \geq \sqrt{a_n}. \qquad\qquad a_n + 1 \geq 2\sqrt{a_n}.$$

=> $(a_1 +1)(a_2 +1)\ldots(a_n +1) \geq 2^n$.

Два положительных неравных числа являются первым и третьим членами некоторой арифметической прогрессии, и они же являются первым и третьим членами некоторой геометрической прогрессии. У какой из этих прогрессий сумма первых трёх членов больше?

Арифметическая прогрессия: $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$.

Геометрическая прогрессия: $a_2 = \sqrt{a_1 . a_3}$.

По неравенству о среднем $\frac{a_1 + a_3}{2} \geq \sqrt{a_1 . a_3}$.

Следовательно S_3 арифметической прогрессии больше чем S_3 геометрической.

Какое наименьшее значение принимает функция

$y = x + \frac{81}{x}$ при положительных значениях x.

Заметим, что

$$\frac{x^2+81}{2} \geq \sqrt{x^2 \cdot 81},$$

$$\frac{x^2+81}{2} \geq x \cdot 9,$$

$$\frac{x^2+81}{x} \geq 18,$$

$$x + \frac{81}{x} \geq 18$$

Докажите, что для любых неотрицательных чисел x, y, z выполняется неравенство (x + y)(y + z)(z + x) ≥ 8xyz

Заметим, что

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y},$$

$$\frac{y+z}{2} \geq \sqrt{y \cdot z},$$

$$\frac{z+x}{2} \geq \sqrt{z \cdot x}.$$

Следовательно:

$$\frac{x+y}{2} \cdot \frac{y+z}{2} \cdot \frac{z+x}{2} \geq \sqrt{x^2 \cdot y^2 \cdot z^2},$$

(x + y)(y + z)(z + x) ≥ 8xyz.

Докажите, что для любого неотрицательного числа x выполняется неравенство $3x^3 + 4 \geq 6x^2$.

$3x^3 + 4 \geq 6x^2$,

$2x^3 + x^3 + 4 \geq 6x^2$

Заметим, что

$\frac{2x^3 + x^3 + 4}{3} \geq \sqrt[3]{8x^6}$.

Следовательно

$3x^3 + 4 \geq 6x^2$.

Спасибо за внимание.