Издательство «Легион»

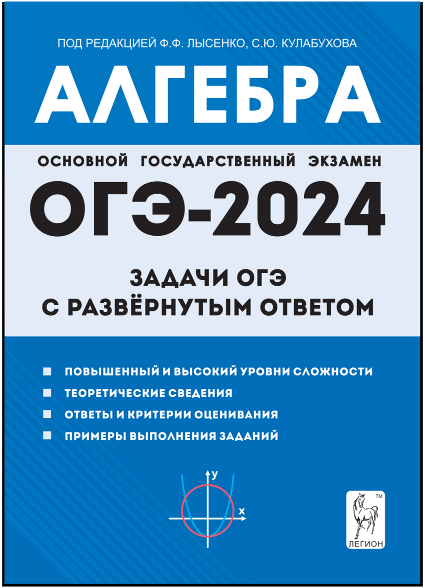
Алгебраические задачи с развёрнутым ответом на ОГЭ по математике (задания 20–22).

Докладчик: Иванов Сергей Олегович

20. Алгебраические выражения, уравнения, неравенства и их системы
21. Текстовая задача на движение, совместную работу, смеси
22. Задание с параметром, построение графика

Алгебра, повышенный уровень: книга

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН www.legionr.ru



Подготовительные задания

- Действия со степенями (20)
- Разложение многочленов на множители, формулы сокращённого умножения (20, 22)
- Проценты и части (21)
- Область допустимых значений выражения (22, 20)
- Свойства арифметического корня (20, 22)
- Уравнения и системы уравнений (20, 21)
- Свойства неравенств (20, 21)
- Графики: прямая, парабола, гипербола (22)
- Модуль, его свойства и график (22)
- Средняя скорость, движение по реке (21)

Задача 1. Сократите дробь

$$\frac{5^{n-1}+5^{n+2}}{6\cdot 5^n}.$$

Решение.

$$\frac{5^{n-1}+5^{n+2}}{6\cdot 5^n}=\frac{5^n\cdot 5^{-1}+5^n\cdot 5^2}{6\cdot 5^n}=$$

$$=\frac{5^n\cdot(5^{-1}+5^2)}{6\cdot 5^n}=\frac{\frac{1}{5}+25}{6}=\frac{25{,}2}{6}=4{,}2.$$

Ответ. 4,2.

Задание 20. Пример 1 (продолжение)

Задача 1. Сократите дробь $\dfrac{5^{n-1}+5^{n+2}}{6\cdot 5^n}$.

$$\frac{5^{n-1}+5^{n+2}}{6\cdot 5^n} = \frac{5^n\cdot 5^{-1}+5^n\cdot 5^2}{6\cdot 5^n} = \frac{\cancel{5^n}(5^1+5^2)}{6\cdot \cancel{5^n}} = \frac{5^1+5^2}{6} = \frac{5+25}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

Комментарий. За выполненное решение выставляется 1 балл, так как была допущена одна описка, ответ получен неправильный.

Задача 1. Сократите дробь $\dfrac{5^{n-1}+5^{n+2}}{6\cdot 5^n}$.

$$\frac{5^{n-1}+5^{n+2}}{6\cdot 5^n}=\frac{5^{n-1+n+2}}{6\cdot 5^n}=\frac{5^{2n+1}}{6\cdot 5^{\cancel{n}}}=\frac{\cancel{5}^{n+1}}{\cancel{30}_6}=\frac{n+1}{6}$$

Комментарий. За выполненное решение выставляется 0 баллов, так как были допущены ошибки в действиях со степенями.

Задача 2. Известно, что $f(x) = \left(7x - \frac{4}{x}\right)\left(4x - \frac{7}{x}\right)$.

Найдите значение выражения $\dfrac{f(t)}{f\left(\frac{1}{t}\right)}$.

Решение.

$f(t) = \left(7t - \frac{4}{t}\right)\left(4t - \frac{7}{t}\right)$, $f\left(\frac{1}{t}\right) = \left(\frac{7}{t} - 4t\right)\left(\frac{4}{t} - 7t\right)$,

тогда

$$\frac{f(t)}{f\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{\left(7t - \frac{4}{t}\right)\left(4t - \frac{7}{t}\right)}{\left(\frac{7}{t} - 4t\right)\left(\frac{4}{t} - 7t\right)} = \frac{-\left(\frac{4}{t} - 7t\right)\left(4t - \frac{7}{t}\right)}{-\left(4t - \frac{7}{t}\right)\left(\frac{4}{t} - 7t\right)} = 1.$$

Задача 3. Найдите значение выражения $\dfrac{49x-81y}{7\sqrt{x}+9\sqrt{y}}+2\sqrt{y}$ при $\sqrt{x}-\sqrt{y}=14$.

Решение.

$$\frac{49x-81y}{7\sqrt{x}+9\sqrt{y}}+2\sqrt{y}=$$

$$=\frac{(7\sqrt{x}-9\sqrt{y})(7\sqrt{x}+9\sqrt{y})}{7\sqrt{x}+9\sqrt{y}}+2\sqrt{y}=$$

$$=7\sqrt{x}-9\sqrt{y}+2\sqrt{y}=7\sqrt{x}-7\sqrt{y}=$$

$$=7(\sqrt{x}-\sqrt{y})=98.$$

Задача 4. Решите уравнение
$(x-4)^2(x+10)=15(x-4)$.

Решение.

$(x-4)^2(x+10)-15(x-4)=0$. Вынесем за скобку общий множитель $(x-4)$.

$(x-4)((x-4)(x+10)-15)=0$,

$(x-4)(x^2-4x+10x-40-15)=0$,

$(x-4)(x^2+6x-55)=0$.

Если $x-4=0$, то $x=4$; если $x^2+6x-55=0$, то $D=6^2+4\cdot 55=256=16^2$,

$x_1=\dfrac{-6-16}{2}=-11$; $x_2=\dfrac{-6+16}{2}=5$.

Ответ: -11; 4; 5.

Задание 20. Пример 4 (продолжение)

Задача 4. Решите уравнение
$(x-4)^2(x+10) = 15(x-4)$.

w21

$(x-4)^2(x+10)=15(x-4)$ $\qquad$ $x-4=0$

$(x-4)(x+10)=15$ $\qquad$ $x=4$

$x^2-4x-4\cdot10+10x=15$

$x^2+6x-40-15=0$

$x^2+6x-55=0$

$6-4\cdot(-55)=36+220=256 = \sqrt{16^2}$

$x_1=\frac{-6-16}{2}=-11$

$x_2=\frac{-6+16}{2}=5$. $\qquad$ Отв: $4, -11, 5$

Комментарий. За верно выполненное решение можно выставить 2 балла, несмотря на описку (6 вместо 6^2).

Задание 20. Пример 4 (окончание)

Задача 4. Решите уравнение
$(x-4)^2(x+10)=15(x-4)$.

$$(x-4)^2(x+10)=15(x-4)$$

$$(x-4)(x+10)=15$$

$$x^2-4x-4\cdot 10+10x=15$$

$$x^2+6x-55=0$$

$$6-4\cdot(-55)=36+220-56$$

$$\frac{-6-16}{2}=-11 \qquad \frac{-6+16}{2}=5$$

Комментарий. За выполненное решение выставляется 0 баллов, так как ход решения неверный (при делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее переменную, был потерян корень).

Задача 5. Решите уравнение
$x^2+\sqrt{3-2x}=3x+\sqrt{3-2x}+10.$

Решение.

Найдём область допустимых значений уравнения: $3-2x\geqslant 0,\ x\leqslant 1{,}5.$

Упростим уравнение: $x^2-3x-10=0.$

Тогда $x_1=-2, x_2=5.$

С учётом ОДЗ, $x=-2$ — корень уравнения.

Ответ: $-2.$

Задание 20. Пример 5 (продолжение)

Задача 5. Решите уравнение
$x^2 + \sqrt{3-2x} = 3x + \sqrt{3-2x} + 10.$

21

$x^2 + \sqrt{3-2x} = 3x + \sqrt{3-2x} + 10,$

$x^2 = 3x + 10,$

$x^2 - 3x - 10 = 0,$

$x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{49}}{2}$

$x_1 = 5, \quad x_2 = -2.$

Ответ: $5, -2.$

Комментарий. За выполненное решение выставляется 0 баллов, так как не учитывается область допустимых значений уравнения.

Задание 20. Пример 5 (окончание)

Задача 5. $x^2 + \sqrt{3-2x} = 3x + \sqrt{3-2x} + 10.$

$x^2 + \sqrt{3-2x} = 3x + \sqrt{3-2x} + 10$

ОДЗ: $3-2x \geqslant 0$, $x \leq \frac{3}{2}$

$x^2 - 3x - 10 = 0$ $\quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{\mathcal{D}}}{2 \cdot 1}$

$\mathcal{D} = 9 + 40 = 49$

$x_1 = \frac{3+49}{2} = 26$, $26 \not\geqslant \frac{3}{2}$

$x_2 = \frac{3-49}{2} = -23$, $-23 < \frac{3}{2}$

Отв. -23

Комментарий. При решении квадратного уравнения допущена ошибка (ученик не извлёк корень из дискриминанта, но общая формула написана верно). Вычислительная ошибка, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно. Выставляется 1 балл.

Задача 6. Решите уравнение $(2x+24)^2 = x^4$.

Решение.

$x^4 - (2x+24)^2 = 0$. Разложим на множители, используя формулу разности квадратов:

$(x^2)^2 - (2x+24)^2 = 0,$

$(x^2 - (2x+24))(x^2 + (2x+24)) = 0,$

$(x^2 - 2x - 24)(x^2 + 2x + 24) = 0.$

Произведение будет равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю:

$x^2 + 2x + 24 = 0$, действительных корней нет.

$x^2 - 2x - 24 = 0$, $x_1 = 6$, $x_2 = -4$.

Ответ: $-4; 6$.

Задача 7. $\begin{cases} (x-3y)^2 = 4x, \\ (x-3y)^2 = 4y. \end{cases}$

Решение. Заменим одно из уравнений системы на разность уравнений. Получим:

$$\begin{cases} (x-3y)^2 = 4x, \\ 4x = 4y; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-3y)^2 = 4x, \\ x = y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y, \\ (-2x)^2 = 4x; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y, \\ 4x(x-1) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y, \\ x = 0, x = 1. \end{cases}$$

Решения системы: $(0;0)$, $(1;1)$.

Ответ: $(0;0)$, $(1;1)$.

Задание 20. Пример 8 (начало)

Задача 8. Решите неравенство

$$\frac{-14}{(x-7)^2-5} \geqslant 0.$$

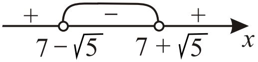
Решение. $(x-7)^2-5<0,\ x^2-14x+44<0.$

Найдём нули левой части.

$$x^2-14x+44=0,\quad x_{1,2}=\frac{14\pm\sqrt{20}}{2}=7\pm\sqrt{5},$$

$$x_1=7-\sqrt{5},\quad x_2=-7+\sqrt{5}.$$

На рисунке изображены знаки левой части неравенства.



Решение неравенства: $(7-\sqrt{5};7+\sqrt{5})$.

Задание 20. Пример 8 (окончание)

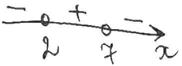
Задача 8. $\dfrac{-14}{(x-7)^2-5} \geqslant 0.$

$\dfrac{-14}{(x-7)^2-5} \geqslant 0$, $(x-7)^2-5 \neq 0$

$(x-7)^2 \neq 5$, $x-7 \neq \pm\sqrt{5}$

$x-7 \neq 5$ $\quad$ $x-7 \neq -5$

$x \neq 12$ $\quad$ $x \neq 2$



$2 < x < 7$

Отв: $2 < x < 7$.

Комментарий.

За выполненное решение выставляется 0 баллов, так как была допущена одна вычислительная ошибка (забыли извлечь корень при нахождении корней уравнения) и описка при переносе чисел на ось, ход решения верный, но ответ получен неправильный.

Задание 20. Пример 9

Задача 9. $\begin{cases} \dfrac{5-3x}{1+(2-x)^2} \leqslant 0, \\ 1-2x \geqslant 4(2x-5). \end{cases}$

Решение. Решим первое неравенство системы. Знаменатель дроби положителен при любом значении x, поэтому первое неравенство равносильно неравенству

$5-3x \leqslant 0$, то есть $-3x \leqslant -5$, $x \geqslant \dfrac{5}{3}$.

Решим второе неравенство системы.
$1-2x \geqslant 4(2x-5)$,
$1-2x \geqslant 8x-20$, $-10x \geqslant -21$, $x \leqslant 2{,}1$.

Решим систему $\begin{cases} x \geqslant \dfrac{5}{3}, \\ x \leqslant 2{,}1. \end{cases}$

Получаем: $\left[1\dfrac{2}{3}; 2{,}1\right]$.

Задание 21. Пример 10 (начало)

Задача 10. По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют электропоезд и товарный поезд, скорости которых равны соответственно 55 км/ч и 25 км/ч. Длина товарного поезда равна 1600 метрам. Найдите длину электропоезда, если время, за которое он прошёл мимо товарного поезда, равно 4,5 минуты.

Решение. Относительная скорость поездов равна $55 - 25 = 30$ км/ч $= 30\,000$ м/ч. За 4,5 минуты, то есть $\dfrac{4{,}5}{60} = \dfrac{3}{40}$ ч, поезд относительно электрички проедет

$30\,000 \cdot \dfrac{3}{40} = 2250$ м, это расстояние составляет суммарную длину поездов. Длина пассажирского поезда равна $2250 - 1600 = 650$ м.

Ответ: 650 м.

Задание 21. Пример 10 (окончание)

Задача 10.

1 — 55 км/ч - элек.

2 — 25 км/ч - товар

1600 м

1) 55 км/ч $\cdot$ $4{,}5$ минуты $=$

$= 55$ км/ч $\cdot$ $0{,}075 = 4125$ метров

2) 1600 м $+$ 4125 м $=$ 5725 метров

Ответ: 5725 метров

Комментарий. За выполненное решение выставляется 0 баллов, так как ход решения неверный, ответ получен неправильный.

Задание 21. Пример 11

Задача 11. Первые 270 км товарный поезд ехал со скоростью 60 км/ч, следующие 120 км — со скоростью 40 км/ч, а последние 125 км — со скоростью 50 км/ч. Найдите среднюю скорость поезда на протяжении всего пути.

Решение. Средняя скорость поезда на протяжении всего пути равна отношению пройденного пути к затраченному времени.

Поезд проехал путь $270 + 120 + 125 = 515$ километров за время $\frac{270}{60} + \frac{120}{40} + \frac{125}{50} = 10$ часов.

Средняя скорость равна $515 : 10 = 51{,}5$ км/ч.

Ответ: 51,5 км/ч.

Задача 12. Два автомобиля одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы. Спустя 45 мин автомобиль, который двигался со скоростью 85 км/ч, впервые догнал второй автомобиль. Найдите скорость второго автомобиля, если известно, что длина круговой трассы равна 21 км.

Решение. За 45 минут (то есть $\dfrac{45}{60} = \dfrac{3}{4}$ часа) первый

автомобиль проедет $85 \cdot \dfrac{3}{4} = 63{,}75$ км.

Второй автомобиль за это время проедет на круг, то есть на 21 км, меньше. Значит, пройденное вторым автомобилем расстояние равно $63{,}75 - 21 = 42{,}75$ км.

Скорость второго автомобиля равна $42{,}75 : \dfrac{3}{4} = 57$ км/ч.

Задание 21. Пример 13 (начало)

Задача 13. Моторная лодка прошла против течения реки 48 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч.

Решение. Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна x км/ч.

По течению: $\dfrac{48}{x+3}$ ч. Против течения: $\dfrac{48}{x-3}$ ч.

$$\frac{48}{x-3}-\frac{48}{x+3}=4, \quad \frac{12}{x-3}-\frac{12}{x+3}=1,$$

$$\frac{72}{(x-3)(x+3)}=1, x^2=81, \ x_1=-9, \ x_2=9.$$

Выбираем значение, превышающее скорость течения.

Скорость лодки в неподвижной воде равна 9 км/ч.

Задание 21. Пример 13 (продолжение)

x – скорость

$$\frac{48}{x+3} - \frac{48}{x-3} = 4$$

$x \neq \pm 3$

$$\frac{48(x-3)}{(x+3)(x-3)} - \frac{48(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{4(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+3)}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times\ 3 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\frac{-144 + 48x - 48x - 144}{(x+3)(x-3)} = \frac{4(x^2-9)}{(x-3)(x+\ )}$$

$$288 = 4x^2 - 36$$

$$4x^2 = 324$$

$$x^2 = 81$$

$x = -9$ – не подходит

$x = 9$

Ответ: 9 км/ч.

Комментарий. Интересное решение. Ответ получен правильный. Отсутствие числа 3 в скобках в последнем дробно-рациональном уравнении можно считать за описку, не приводящую к ошибочному ответу. Но при проверке обнаруживаются две ошибки:
1) при составлении уравнения вычитается из меньшего большее, при этом получен положительный ответ;
2) при приведении подобных слагаемых потерян знак «минус» у числа 288.
Сделаны две ошибки, нужно выставлять 0 баллов.

Задание 21. Пример 14

Задача 14. Три девочки написали за день вместе 350 сообщений. Известно, что первая девочка написала в 3 раза больше сообщений, чем вторая, и на 42 сообщения больше, чем третья. На сколько сообщений меньше написала вторая девочка, чем третья?
Решение. Примем число сообщений, написанных за день второй девочкой, за x. Тогда первая девочка написала $3x$ сообщений, а третья — на 42 сообщения меньше, то есть $(3x - 42)$.
Втроём девочки написали $x + 3x + 3x - 42 = 7x - 42$ сообщения, что по условию равно 350.
Из уравнения $7x - 42 = 350$ легко найти $x = 56$.

Вторая написала 56 сообщений, а третья

$3x - 42 = 3 \cdot 56 - 42 = 126$ сообщений, разность равна 70.

Задача 15. Свежие фрукты содержат 75 % воды, а высушенные — 15 %. Сколько требуется свежих фруктов для приготовления 6 кг высушенных фруктов?
Решение. Предположим, что фрукты состоят из воды и «сухого остатка». В свежих фруктах $100\,\% - 75\,\% = 25\,\%$ «сухого остатка», в сушёных — $100\,\% - 15\,\% = 85\,\%$ «сухого остатка». В 6 кг сушёных фруктов содержится $6 \cdot 0{,}85 = 5{,}1$ кг «сухого остатка». В свежих, из которых приготовили сушёные, этого остатка было столько же, но в процентах это составляет уже 25 %.

Если 5,1 кг — это 25 %, то 100 % это

$5{,}1 : 25 \cdot 100 = 20{,}4$ кг.

Задача 16. Имеется два сосуда, содержащих 30 кг и 42 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получим раствор, содержащий 40 % кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 37 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится во втором растворе?

Задание 21. Пример 16 (продолжение)

Задача 16. 1-й: 30 кг, 2-й: 42 кг. Смесь: 40 % кислоты. Смесь равных масс: 37 %. Кислоты во 2-м — ? (кг)

Решение. В первом сосуде x кг, а во втором — y кг. Если их слить вместе, то получим раствор массой $30 + 42 = 72$ кг, содержащий 40 %, то есть $72 \cdot 0{,}4 = 28{,}8$ кг кислоты. Значит, $x + y = 28{,}8$.

Концентрации: 1) $\dfrac{x}{30} = \dfrac{100x}{30}\,\%$, 2) $\dfrac{y}{42} = \dfrac{100y}{42}\,\%$.

Сольём вместе по 30 литров каждого раствора. Будет $60 \cdot 0{,}37 = 22{,}2$ кг кислоты, при этом в первом растворе кислоты было x кг, а во втором $30 \cdot \dfrac{y}{42} = \dfrac{5}{7}y$ кг.

Получаем: $x + \dfrac{5}{7}y = 22{,}2$. $\begin{cases} x + y = 28{,}8, \\ x + \dfrac{5}{7}y = 22{,}2; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 23{,}1, \\ x = 5{,}7. \end{cases}$

Во втором растворе содержится 23,1 кг кислоты.

Задание 22. Типы

Можно условно разбить все задачи 23 на два типа:

- требуется построить график и затем найти значения параметра;
- требуется найти значения параметра и затем построить график.

В свою очередь, задания на построение графика тоже можно разбить на несколько групп:

- построить график дробно-рациональной функции;
- построить график кусочно-заданной функции;
- построить график функции, содержащей модуль.

Задача 17. Постройте график функции $y = -2 - \dfrac{x+4}{x^2+4x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком общих точек.

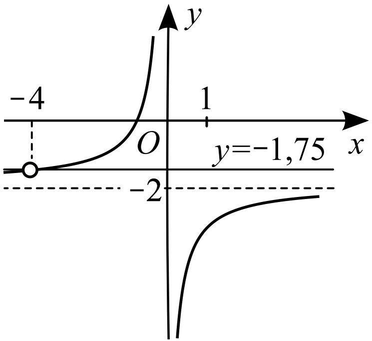
Решение. Преобразуем уравнение функции, разложив на множители числитель и знаменатель дроби.

$-2 - \dfrac{(x+4)}{(x^2+4x)} = -2 - \dfrac{(x+4)}{x(x+4)} = -2 - \dfrac{1}{x}$, значит,

$y = -2 - \dfrac{1}{x}$, если $x \neq -4$ и $x \neq 0$.

Если $x = -4$, то функция не определена. Заметим, что при $x = -4$ выполняется $-2 - \dfrac{1}{x} = -2 - \dfrac{1}{-4} = -1{,}75$.

Задание 22. Пример 17 (продолжение)



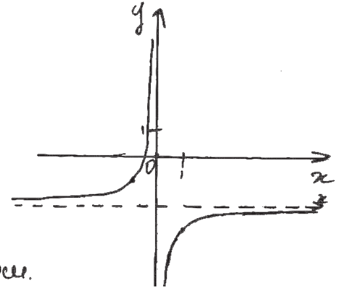
Графиком заданной функции является гипербола $y = -\dfrac{1}{x}$, сдвинутая на 2 единицы вниз, с выколотой точкой $(-4; -1{,}75)$.

Прямая $y = m$ — горизонтальная прямая, пересекающая ось ординат в точке $(0; m)$. Она не имеет с графиком общих точек при $m = -2$ и $m = -1{,}75$.

Задание 22. Пример 17 (окончание)

$$y = -2 - \frac{x+4}{x^2+4x} = -2 - \frac{\cancel{x+4}}{x\cancel{(x+4)}} = -2 - \frac{1}{x}$$

график получен смещением графика функции $y = -\frac{1}{x}$ на 2 ед. вниз вдоль оси ординат.
При $y = -2$ прямая не будет иметь общих точек с графиком.



Комментарий. За выполненное решение выставляется 0 баллов, так как график построен неправильно, не учтено, что область допустимых значений не включает в себя точку $x = -4$.

Задание 22. Пример 18 (начало)

Задача 18. Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2-3x+2)(x^2+x-12)}{(x^2-4x+3)}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение. Преобразуем уравнение функции, разложив на множители числитель и знаменатель дроби.

$x^2 - 3x + 2 = 0,$

$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$

$x^2 + x - 12 = 0,$

$x_1 = -4,\ x_2 = 3,\ x^2 + x - 12 = (x+4)(x-3).$

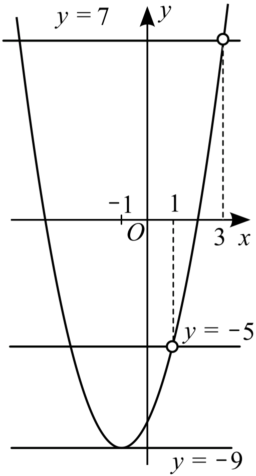
$x^2 - 4x + 3 = 0,$

$x_1 = 1,\ x_2 = 3,\ x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3).$

$y = \dfrac{(x-1)(x-2)(x+4)(x-3)}{(x-1)(x-3)};\ y = (x-2)(x+4);$

$y = x^2 + 2x - 8$ при условии $x \neq 1, x \neq 3.$

Задание 22. Пример 18 (продолжение)



Графиком функции является парабола с вершиной в точке $(-1; -9)$, из которой выброшены точки $(1; -5)$ и $(3; 7)$.
Прямая $y = m$ — горизонтальная прямая, параллельная оси абсцисс. Такая прямая имеет с графиком функции ровно одну общую точку при $m = -9, m = -5$ и $m = 7$.

Задание 22. Пример 19 (начало)

Задача 19. Постройте график функции

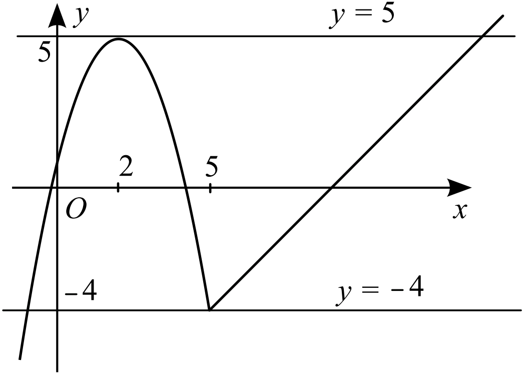
$$y = \begin{cases} x - 9, \text{ при } x \geqslant 5, \\ 1 + 4x - x^2, \text{ при } x < 5 \end{cases}$$ и определите,

при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Решение. При $x \geqslant 5$ график является лучом с началом в точке $(5; -4)$.

При $x < 5$ график является частью параболы с вершиной $(2; 5)$.

Задание 22. Пример 19 (продолжение)



Ровно две общие точки прямая $y = m$ имеет с графиком при $m = -4$ и $m = 5$, одну общую точку — при $m < -4$ и $m > 5$. Ровно три общие точки прямая $y = m$ имеет с графиком при $-4 < m < 5$.

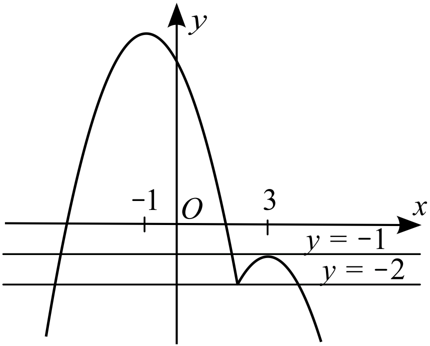
Задача 20. Постройте график функции $y = 4|x-2| - x^2 + 2x - 2$ и определите, при каких значениях q прямая $y = q$ имеет с графиком не менее трёх общих точек.

Решение. Если $x - 2 \geqslant 0$, то есть $x \geqslant 2$, то $y = -x^2 + 6x - 10$ — часть параболы с вершиной $(3; -1)$, $y(2) = -2$.

Если $x - 2 < 0$, то есть $x < 2$, то

$y = -x^2 - 2x + 6$ — часть параболы с вершиной $(-1; 7)$.

Задание 22. Пример 20 (продолжение)



$y = q$ — прямая, параллельная оси абсцисс или совпадающая с ней.

По рисунку видно, что не менее трёх общих точек графики имеют при $-2 \leqslant q \leqslant -1$.

Задача 20. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x - 3, \text{ при } x < -2, \\ -2{,}5x - 5{,}5, \text{ при } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1{,}5x - 5{,}5, \text{ при } x > 0 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

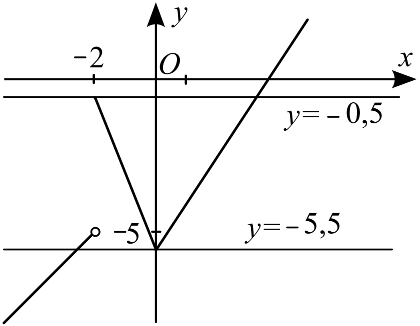
Решение. Рассмотрим промежуток $x < -2$ и вычислим значение в граничной точке и ещё в какой-нибудь точке промежутка: $x = -2$; $y = -2 - 3 = -5$; $x = -3$; $y = -6$. График является лучом (частью прямой $y = x - 3$) с выколотым началом в точке $(-2; -5)$.

При $-2 \leqslant x \leqslant 0$ вычисляем значения в граничных точках: $y(-2) = -2{,}5 \cdot (-2) - 5{,}5 = -0{,}5$,
$y(0) = -2{,}5 \cdot 0 - 5{,}5 = -5{,}5$.

График является отрезком с концами в точках $(-2; -0{,}5)$ и $(0; -5{,}5)$.

Задание 22. Пример 20 (продолжение)

При $x > 0$ найдём значение в граничной точке $x = 0$.
$y(0) = 1{,}5 \cdot 0 - 5{,}5 = -5{,}5$.
В точке $x = 2$ $y = 1{,}5 \cdot 2 - 5{,}5 = -2{,}5$. График является лучом с началом в точке $(0; -5{,}5)$.
В точке $x = 0$ значения совпали, точку не нужно выделять специально. В точке $x = -2$ значения не совпали, точку $(-2; -5)$ нужно нарисовать выколотой.



Ровно две общие точки прямая $y = m$ имеет с графиком при $m = -5{,}5$ и $-5 \leqslant m \leqslant -0{,}5$

Промокод для магазина www.legionr.ru

Скидка 30 % на все пособия по математике и информатике

Действует до 09.11.2023.

При оформлении заказа на сайте издательства «Легион» ввести код:

алгебраОГЭ

www.legionr.ru