Муниципальное казенное учреждение
«Центр поддержки образования»
муниципального образования Динской район

Сборник №4
по подготовке к ГИА по МАТЕМАТИКЕ по теме «Решение задач по геометрии»

ст. Динская, 2019

Содержание

Решение планиметрических задач.
Математика. Профильный уровень

Короткова Елена Евгеньевна,
учитель математики БОУ СОШ №29

Для многих учеников геометрия (особенно 2 часть) на ЕГЭ вызывает большие опасения, скорее всего из-за широчайшего диапазона взаимосвязей между элементами фигур и их комбинаций. Для решения этих задач необходимо научиться искать стороны, отрезки, углы и площади геометрических фигур до автоматизма. Каждая новая комбинация фигур и данных в условии приносит свои подходы к решению, до которого бывает сложно догадаться. Даже если помнить все теоремы наизусть. Приходится набивать руку на решении большого количества задач. Необходимо научиться умению видеть применимость теорем для каждой конкретной задачи.

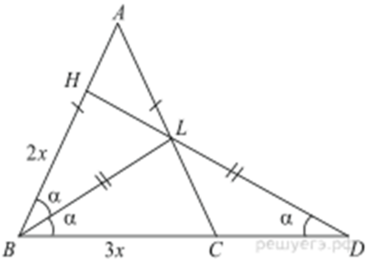
Многоугольники и их свойства

Задача 1. На отрезке BD взята точка C. Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD.

а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.

б) Известно, что $\cos\angle ABC = \frac{3}{4}$. ***В каком отношении прямая DL делит сторону AB?***

Решение.



а) Обозначим $\angle LBC = \angle LBA = \alpha$, тогда [redacted],
поэтому $\angle DLC = 180^\circ - \angle LCD - \angle LDC = \alpha = \angle LDC$ и треугольник LCD — равнобедренный.

б) Пусть DL пересекает AB в точке H. Тогда

$$\angle HLB = 180^\circ - \angle BLC - \angle CLD = 180^\circ - (180^\circ - \angle LBC - \angle LCB) - \angle CLD = 2\alpha,$$

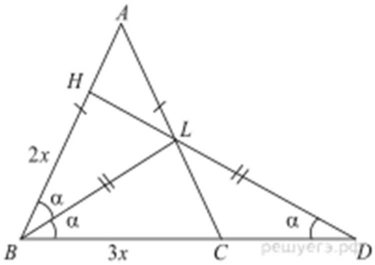
поэтому треугольники HLB и LCB подобны по двум углам. Отсюда $BH = \frac{BL^2}{BC}$.

Поскольку $\cos\angle ABC = \frac{3}{4}$, получаем $BC : AB = 3 : 2$. Пусть тогда $AB = 2x$, $BC = 3x$.
Поскольку $AL : LC = AB : BC$, находим $AL = \frac{4}{5}x$, $CL = \frac{6}{5}x$. Следовательно, $BL = \sqrt{AB \cdot BC - AL \cdot LC} = \frac{3}{5}\sqrt{14}x$.

Значит, $BH = \frac{9 \cdot 14x^2}{25 \cdot 3x} = \frac{42x}{25}$, откуда $\frac{BH}{HA} = \frac{42}{8} = \frac{21}{4}$.

Ответ: 21 : 4 (или 4 : 21).

Приведу 2 способ решения данной задачи

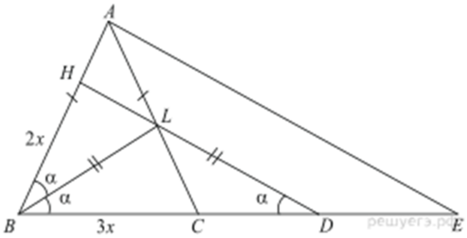


а) Пусть в треугольнике ABC половина угла B равна α (см. рис.). Тогда [redacted] $CD = 0,6c,\ DB = 1,5c + 0,6c = 2,1c.$

В треугольнике ABC по теореме Менелая $\frac{BH}{HA} \cdot \frac{AL}{LC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1.$ Так как $CD = LC$, получаем, что $\frac{BH}{HA} \cdot \frac{AL}{DB} = 1,$ тогда $\frac{BH}{HA} = \frac{DB}{AL} = \frac{2,1c}{0,4c} = \frac{21}{4}.$

Примечание.

Можно привести ещё одно решение пункта б). Воспользуемся результатами, полученными выше:



$$BC = 1,5c,\ AL = 0,4c,\ LC = 0,6c,\ CD = 0,6c,\ DB = 2,1c.$$

Проведём $AE \parallel DL$, и пусть $E \in BD$. В треугольнике DCL: $CD = LC$, в подобном ему треугольнике ECA: $AC = CE$. Значит, $DE = 0,4c$. Тогда по теореме о пропорциональных отрезках: $BK : KA = BD : DE = 2,1c : 0,4c = 21 : 4.$

Приведём еще одно решение пункта б).

Пусть CM биссектриса ABC, тогда по свойству биссектрисы $AM = \frac{2}{5}AB.$ Поскольку HL — биссектриса ALM, тогда $AH = \frac{2}{5}AM = \frac{4}{25}AB$, а значит, $AH : HB = 4 : 21.$

Окружности и системы окружностей

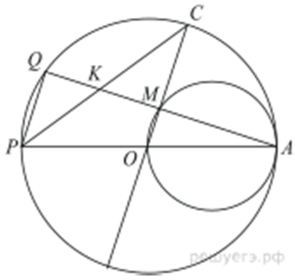
Задача 2. Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причём меньшая окружность проходит через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке M, отличной от A. Лучи AO и AM вторично пересекают большую окружность в точках P и Q

соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку P.

а) Докажите, что прямые PQ и BC параллельны.

б) Известно, что $\sin\angle AOC = \frac{\sqrt{15}}{4}.$ ***Прямые PC и AQ пересекаются в точке K. Найдите отношение*** $QK : KA$.

Решение.



а) Угол AQP опирается на диаметр AP большей окружности, поэтому он прямой. Угол AMO опирается на диаметр AO меньшей окружности, поэтому он прямой. Таким образом, прямые PQ и BC перпендикулярны прямой AQ, значит, они параллельны.

б) Углы AOC и APQ равны, поскольку прямые PQ и BC параллельны. Диаметр BC большей окружности перпендикулярен хорде AQ. Значит, точка C — середина дуги AQ. Следовательно, луч PC является биссектрисой угла APQ прямоугольного треугольника APQ, поэтому $\frac{QK}{KA} = \frac{QP}{PA} = \cos\angle APQ = \cos\angle AOC = \sqrt{1-\sin^2\angle AOC} = \frac{1}{4}.$

Ответ: б) $1:4.$

Окружности и треугольники

Задача 3. Окружность касается стороны AC остроугольного треугольника ABC и делит каждую из сторон AB и BC на три равные части.

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

б) Найдите, в каком отношении высота этого треугольника делит сторону BC.

Решение.

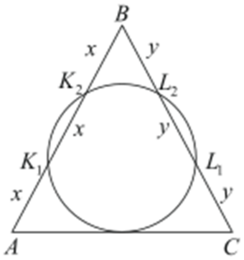


Рис. 1

а) Пусть окружность делит сторону AB на три равные части (рис. 1) $AK_1 = K_1K_2 = K_2B = x$ и делит сторону BC на три равные части $CL_1 = L_1L_2 = L_2B = y.$

Тогда по свойству секущих $BK_1 \cdot BK_2 = BL_1 \cdot BL_2 \Leftrightarrow 2x^2 = 2y^2 \Leftrightarrow x = y,$ откуда получаем: $AB = BC.$

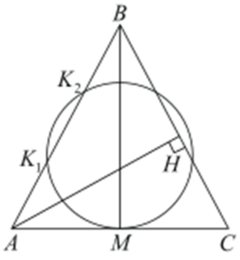


Рис.2

б) Пусть окружность касается стороны AC треугольника ABC в точке M(рис. 2). Поскольку $AM^2 = AK_1 \cdot AK_2 = 2x^2$, получаем: $AM = MC = x\sqrt{2}$.

Пусть AH — высота треугольника, тогда $HC = AC \cdot \cos\angle ACB = \frac{AC \cdot MC}{BC} = \frac{4}{3}x$; $BH = BC - HC = \frac{5}{3}x$. Таким образом, $BH : HC = 5 : 4$.

Ответ: б) 5 : 4.

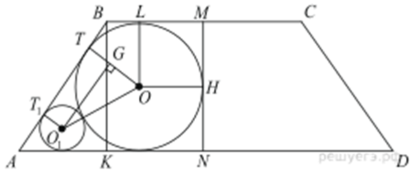
Окружности и четырехугольники

Задача 4. Отрезок, соединяющий середины M и N оснований BC и AD соответственно трапеции ABCD, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция ABCD равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 3, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 8. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB, основания AN трапеции ABMN и вписанной в неё окружности.

Решение.



а) Из описанности трапеций следует, что $BM + AN = AB + MN$ и $MC + ND = CD + MN$. Поскольку $BM = MC$ и $AN = ND$, получаем, что $AB = CD$.

б) Очевидно, при этих условиях отрезок MN является высотой трапеции и имеет длину 6. Пусть $AN=t$, тогда из описанности трапеции $BMNA$, следует, $AB + 6 = t + 4$, откуда $AB = t - 2$. Опуская высоту BK, получим $BK^2 + KA^2 = BA^2$, откуда $(t-4)^2 + 36 = (t-2)^2$. Решая это уравнение получаем $t = 12$ и $AB = 10$.

Обозначим O — центр окружности, вписанной в $BMNA$, центр второй окружности — O_1, их проекции на сторону AB за T и T_1 соответственно, радиус второй окружности обозначим r. Тогда TOO_1T_1 — трапеция, в которой $TO = 3, T_1O_1 = r, OO_1 = 3 + r$.

Опустим из O перпендикуляры OL и OH на BM и MN соответственно. Тогда $OLMH$ — квадрат со стороной 3, поэтому $BT = BL = 4 - 3 = 1$, а $AT = 9$. Из подобия треугольников ATO и AT_1O_1 находим, что $AT_1 = 3r$ и $TT_1 = 9 - 3r$.

Теперь, опустим перпендикуляр O_1G на OT. Тогда $OG = 3 - r, O_1G = T_1T = 9 - 3r$, получаем уравнение:

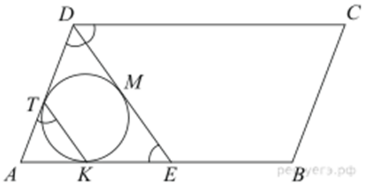
$$(9-3r)^2+(3-r)^2=(r+3)^2 \Leftrightarrow 9r^2-66r+81=0 \Leftrightarrow 3r^2-22r+27=0 \Leftrightarrow r=\frac{11\pm\sqrt{40}}{3}.$$

Из двух корней подходит только меньший, поскольку $r<3$.

Ответ: $\frac{11-2\sqrt{10}}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения:

Задание 1.1



Биссектриса угла *ADC* параллелограмма *ABCD* пересекает прямую *AB* в точке *E*. В треугольник *ADE* вписана окружность, касающаяся стороны *AE* в точке *K* и стороны *AD* в точке *T*.

а) Докажите, что прямые *KT* и *DE* параллельны.

б) Найдите угол *BAD*, если известно, что *AD* = 8 и *KT* = 4.

Задание 1.2

Стороны *KN* и *LM* трапеции *KLMN* параллельны, прямые *LM* и *MN* — касательные к окружности, описанной около треугольника *KLN*.

а) Докажите, что треугольники *LMN* и *KLN* подобны.

б) Найдите площадь треугольника *KLN*, если известно, что *KN* = 3, а á*LMN* = 120°.

Задание 1.3

Точка *O* — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника *ABC*, *I* — центр вписанной в него окружности, *H* — точка пересечения высот. Известно, что $\angle BAC = \angle OBC + \angle OCB$.

а) Докажите, что точка *I* лежит на окружности, описанной около треугольника *BOC*.

б) Найдите угол *OIH*, если $\angle ABC = 55°$.

Задание 1.4

Одна окружность вписана в прямоугольную трапецию, а вторая касается большей боковой стороны и продолжений оснований.

а) Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно большей боковой стороне трапеции.

б) Найдите расстояние от вершины одного из прямых углов трапеции до центра второй окружности, если точка касания первой окружности с большей боковой стороной трапеции делит её на отрезки, равные 2 и 50.

Задание 1.5

К окружности, вписанной в квадрат *ABCD*, проведена касательная, пересекающая стороны *AB* и *AD* в точках *M* и *N* соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника *AMN* равен стороне квадрата.

б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P. В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM : MB = 1 : 3$?

Задание 2.1

Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

Задание 2.2

Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 6 и 2.

Задание 2.3

Хорды AD, BE и CF окружности делят друг друга на три равные части.

а) Докажите, что эти хорды равны.

б) Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$, если точки A, B, C, D, E последовательно расположены на окружности, а радиус окружности равен $2\sqrt{21}$.

Задание 2.4

Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

Задание 2.5

Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, проходящая через точку P, второй раз пересекает первую окружность в точке A, а вторую — в точке D. Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD, второй раз пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C.

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

б) Найдите отношение $CP : PB$, если радиус первой окружности втрое больше радиуса второй.

Задание 3.1

Прямые, содержащие катеты *AC* и *CB* прямоугольного треугольника *ϕи J*, являются общими внутренними касательными к окружностям радиусов 2 и 4. Прямая, содержащая гипотенузу *ϕ J*, является их общей внешней касательной.

а) Докажите, что длина отрезка внутренней касательной, проведенной из вершины острого угла треугольника до одной из окружностей, равна половине периметра треугольника *ϕи J*.

б) Найдите площадь треугольника *ϕи J*.

Задание 3.2

В остроугольном треугольнике *ABC* проведены высоты *AP* и *CQ*.

а) Докажите, что угол *PAC* равен углу *PQC*.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *ABC*, если известно, что *PQ* = 8 и á*ABC* = 60°.

Задание 3.3

В остроугольном треугольнике *KMN* проведены высоты *KB* и *NA*.

а) Докажите, что угол *ABK* равен углу *ANK*.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника *ABM*, если известно, что $KN = 8\sqrt{2}$ и á*KMN* = 45°.

Задание 3.4

Точка ʃ — центр окружности, вписанной в треугольник *ABC*. На продолжении отрезка *AO* за точку ʃ отмечена точка *K* так, что *BK* = *OK*.

а) Докажите, что четырехугольник *ABKC* вписанный.

б) Найдите длину отрезка *AO*, если известно, что радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника *ABC* равны 3 и 12 соответственно, а *OK* = 5.

Задание 3.5

В прямоугольном треугольнике *ABC* с прямым углом *C* известны стороны *AC* = 12, *BC* = 5. Окружность радиуса 0,5 с центром *O* на стороне *BC* проходит через вершину *C*. Вторая окружность касается катета *AC*, гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

а) Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем 0,2 длины катета *AC*.

б) Найдите радиус второй окружности

Задание 4.1.

Окружность с центром *O* проходит через вершины *B* и *C* большей боковой стороны прямоугольной трапеции *ABCD* и касается боковой стороны *AD* в точке *T*. Точка *O* лежит внутри трапеции *ABCD*.

а) Докажите, что угол *BOC* вдвое больше угла *BTC*.

б) Найдите расстояние от точки *T* до прямой *BC*, если основания трапеции *AB* и *CD* равны 4 и 9 соответственно.

Задание 4.2

Дана равнобедренная трапеция *KLMN* с основаниями *KN* и *LM*. Окружность с центром *O*, построенная на боковой стороне *KL* как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H, точка Q — середина MN.

а) Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.

б) Найдите KN, если $\angle LKN = 75°$ и $LM = 1$.

Задание 4.3

Дана равнобедренная трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM. Окружность с центром O, построенная на боковой стороне KL как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H, точка Q — середина MN.

а) Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.

б) Найдите KN, если $\angle LKN = 75°$ и $LM = 2$.

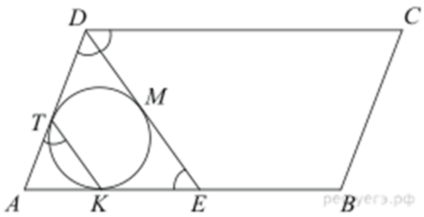
Задание 4.4

Сторона CD прямоугольника $ABCD$ касается некоторой окружности в точке M. Продолжение стороны AD пересекает окружность в точках P и Q, причём точка P лежит между точками D и Q. Прямая BC касается окружности, а точка Q лежит на прямой BM.

а) Докажите, что $\angle DMP = \angle CBM$.

б) Известно, что $CM = 17$ и $CD = 32$. Найдите сторону AD.

Задание 4.5



Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T.

а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны.

б) Найдите угол BAD, если известно, что $AD = 6$ и $KT = 3$.

Ответы к задачам

№ ЗАДАЧИ	ОТВЕТ	№ ЗАДАЧИ	ОТВЕТ
1.1	60	**3.1**	8
1.2	$(3\sqrt{3}):4$	**3.2**	$16: \sqrt{3}$
1.3	175	**3.3**	$4\sqrt{2}$
1.4	$2\sqrt{986}$	**3.4**	14,4
1.5	1:3	**3.5**	2
2.1	3,2	**4.1**	6
2.2	3	**4.2**	3
2.3	$117\sqrt{3}$	**4.3**	6
2.4	3.2	**4.4**	85:3
2.5	1:3	**4.5**	60

Решение стереометрических задач.
Математика. Профильный уровень

Аникеева Елена Николаевна,
учитель математики БОУ СОШ №30

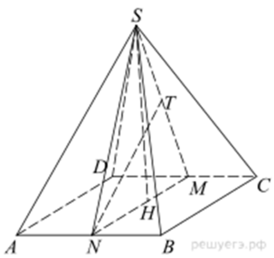
Задание 1.

В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD сторона AB основания равна $2\sqrt{3}$, ***а высота SH пирамиды равна 3. Точки M и N — середины рёбер CD и AB, соответственно, а NT — высота пирамиды NSCD с вершиной N и основанием SCD.***

а) Докажите, что точка T является серединой SM.

б) Найдите расстояние между NT и SC.

Решение.

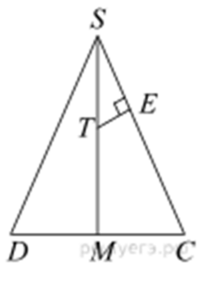


а) Поскольку пирамида *SABCD* правильная, точки *T* и *H* лежат в плоскости *SNM*, перпендикулярной плоскости *ABC* (рис. 1).

$$AH = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \sqrt{6},$$
$$AS = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{15},$$
$$MN = AD = 2\sqrt{3},$$
$$SM = SN = \sqrt{SA^2 - AN^2} = 2\sqrt{3}.$$

Значит, треугольник *SNM* равносторонний, а *NT* — его высота. Следовательно, *T* — середина *SM*.

б) Пусть *E* — основание перпендикуляра, опущенного из точки *T* на прямую *SC*



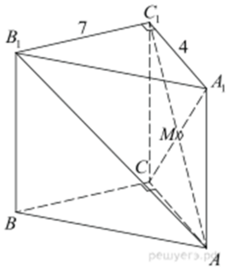
(рис. 2). Прямые *NT* и *TE* перпендикулярны, так как *NT* — высота пирамиды *NSCD*. Поскольку отрезок *TE* перпендикулярен как прямой *SC*, так и прямой *NT*, его длина и есть искомое расстояние. Прямоугольные треугольники *SET* и *SMC* подобны, следовательно, $\frac{ET}{MC} = \frac{ST}{SC}$, откуда $ET = \frac{ST \cdot CM}{SC} = \frac{SM \cdot CD}{4SC} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

Задание 2.

Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Грань ACC_1A_1 является квадратом.
а) Докажите, что прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.
б) Найдите расстояние между прямыми CA_1 и AB_1, если $AC = 4$, $BC = 7$.

Решение.



а) $B_1C_1 \perp C_1A_1$, как катеты прямоугольного треугольника, и $B_1C_1 \perp C_1C$, поскольку призма прямая, тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $B_1C_1 \perp (ACA_1)$.

$A_1C \perp C_1A$, как диагонали квадрата.

Имеем, B_1A- наклонная, AC_1- проекция на плоскость ACA_1, A_1C- прямая в плоскости ACA_1, перпендикулярная проекции, тогда по теореме о трёх перпендикулярах $AB_1 \perp CA_1$, что и требовалось доказать.

б) Пусть M − середина AC_1, тогда искомое расстояние равно расстоянию от точки M до прямой AB_1, поскольку прямая A_1C перпендикулярна AB_1C_1. Это расстояние равно половине высоты прямоугольного треугольника AB_1C_1, проведённой к гипотенузе:

$$\frac{AC_1 \cdot B_1C_1}{2AB_1} = \frac{\sqrt{2}AC \cdot BC}{2\sqrt{2AC^2 + BC^2}} = \frac{14\sqrt{2}}{9}.$$

Ответ: б) $\frac{14\sqrt{2}}{9}$.

Задание 3.
В правильной четырёхугольной пирамиде $PABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 12, боковое ребро PA — $12\sqrt{2}$. Через вершину A проведена плоскость α, перпендикулярная прямой PC и пересекающая ребро PC в точке K.
а) Докажите, что плоскость α делит высоту PH пирамиды $PABCD$ в отношении $2:1$, считая от вершины P.
б) Найдите расстояние между прямыми PH и BK.

Решение.

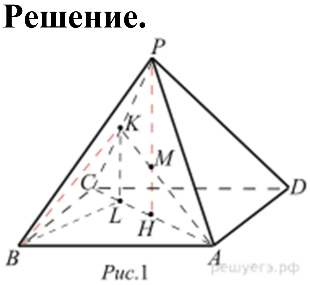


*Рис.*1

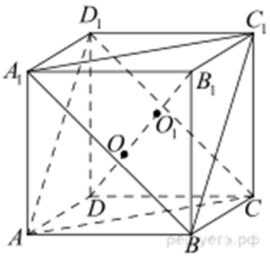
а) Пусть прямая AK пересекает прямую PH в точке M.

Так как $PC\perp\alpha$ и $AK\subset\alpha$, то $PC\perp AK$. Далее имеем: $AC=AB\sqrt{2}=12\sqrt{2}=AP$.
Значит, AK — высота и медиана правильного треугольника PAC. Следовательно, M — точка пересечения медиан этого треугольника, откуда и получаем $PM:MH=2:1$, что и требовалось доказать.
б) Пусть точка L — проекция точки K на плоскость ABC, $L\in AC$. Так как $KL\parallel PH$ и $PK=KC$, то L — середина CH. Отрезок BL — проекция отрезка BK на плоскость ABC. Далее, поскольку $(ABC)\perp PH$, точка H — проекция прямой PH на плоскость ABC. Значит, расстояние между прямыми PH и BK равно расстоянию от точки H до прямой BL, то есть высоте HF треугольника BHL.
Далее имеем:

$$BH=\frac{BD}{2}=\frac{12\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2},\ LH=\frac{AC}{4}=\frac{12\sqrt{2}}{4}=3\sqrt{2},\ BL=\sqrt{BH^2+LH^2}=3\sqrt{10},\ HF=\frac{2S_{\Delta BHL}}{BL}=\frac{BH\cdot LH}{BL}=\frac{6\sqrt{10}}{5}$$

О т в е т : б) $\frac{6\sqrt{10}}{5}$.

Задание 4.
В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 6.
а) Докажите, что угол между прямыми AC и BC_1 равен 60°.
б) Найдите расстояние между прямыми AC и BC_1.
Решение.



а) Прямые BC_1 и AD_1 параллельны, поэтому угол между прямыми AC и BC_1 равен углу CAD_1. Треугольник CAD_1 равносторонний, поэтому все его углы равны 60°.
б) Заметим, что прямые AC и BC_1 содержатся в параллельных плоскостях ACD_1 и BC_1A_1. Значит, искомое расстояние равно расстоянию между этими плоскостями.
Обозначим центры треугольников ACD_1 и BC_1A_1 через точки O и O_1 соответственно. Точка D равноудалена от вершин треугольника ACD_1, поэтому проекция точки D на плоскость ACD_1 совпадает с O. Аналогично проекция точки D на плоскость BC_1A_1 совпадает с O_1, а проекции точки B_1 на плоскости ACD_1 и BC_1A_1 также совпадают с точками O и O_1 соответственно. Значит, прямая DB_1 перпендикулярна плоскостям ACD_1 и BC_1A_1 и содержит точки O и O_1.

Объем тетраэдра $DACD_1$ равен 36 , а площадь его грани ACD_1 равна $AC^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=18\sqrt{3}$.
Значит, высота $DO=2\sqrt{3}$. Аналогично $B_1O_1=2\sqrt{3}$. кроме того, $DB_1=AB\sqrt{3}=6\sqrt{3}$.
Значит, $OO_1=DB_1-B_1O_1-DO=2\sqrt{3}$.
О т в е т : б) $2\sqrt{3}$.

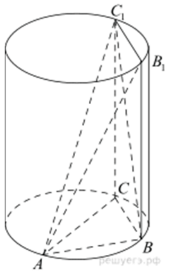
Задание 5. В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки А, В и С, а на

окружности другого основания — точка C_1, причём CC_1 — образующая цилиндра, а AC — диаметр основания. Известно, что $\angle ACB = 30^\circ$, $AB = \sqrt{2},\ CC_1 = 2$.

а) Докажите, что угол между прямыми AC_1 ***и*** BC ***равен*** 45°.

б) Найдите объём цилиндра.

Решение.



а) Пусть BB_1 — образующая цилиндра. Тогда BB_1C_1C — прямоугольник, поэтому угол между прямыми AC_1 и Bи равен углу AC_1B_1.

Угол ABC опирается на диаметр основания цилиндра, поэтому он прямой. Значит, прямая B_1C_1, параллельная прямой Bи, перпендикулярная прямым AB и BB_1. Таким образом, прямая B_1и$_1$ перпендикулярна плоскости ABB_1, а значит, угол AB_1C_1 прямой.

В прямоугольном треугольнике фB_1и$_1$:

$$B_1C_1 = BC = AB\sqrt{3} = \sqrt{6},\ AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{AB^2 + CC_1^2} = \sqrt{6}.$$

Значит, $\angle AC_1B_1 = 45^\circ$.

б) Отрезок AC является диаметром основания цилиндра. Значит, площадь основания цилиндра равна $\dfrac{\pi \cdot AC^2}{4} = \pi \cdot AB^2 = 2\pi.$ Следовательно, объём цилиндра равен $2\pi \cdot BB_1 = 4\pi$.

Ответ: б) 4π.

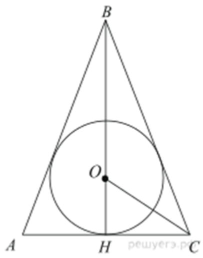
Задание 6.

В конус, радиус основания которого равен 3, вписан шар радиуса 1,5.

а) Изобразите осевое сечение комбинации этих тел.

б) Найдите отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара.

Решение.



а) Осевым сечением является равнобедренный треугольник ABC, боковые стороны которого являются образующими конуса, а основанием — его диаметр, и вписанная в треугольник окружность, радиус которой равен радиусу шара (см. рис.).

б) Введём обозначения как показано на рисунке. Пусть O— центр вписанной окружности, отрезок CO— биссектриса угла ACBи пусть $\widehat{HCO}=\alpha,$имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{OH}{HC}=\frac{1}{2},\quad \operatorname{tg}\widehat{HCB}=\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}.$$

Тогда $BH=HC\operatorname{tg}\widehat{HCB}=4,\quad BC=\sqrt{3^2+4^2}=5.$Для площадей поверхностей конуса и шара имеем: $S_{\text{кон}}=\pi R^2+\pi Rl=9\pi+15\pi=24\pi, S_{\text{ш}}=4\pi r^2=4\pi(1,5)^2=9\pi.$Тем самым, искомое отношение равно $\frac{24}{9}$ или 8:3.

Ответ: 8:3.

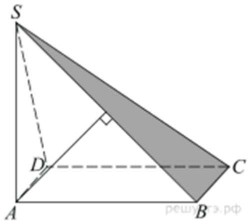
Задание 7.

В основании четырёхугольной пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD со сторонами AB = 12 и $BC=5\sqrt{3}.$Длины боковых рёбер пирамиды SA = 5, SB = 13, SD = 10.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC.

Решение.



а) Заметим, что $AB^2+SA^2=SB^2$и $SA^2+AD^2=SD^2,$поэтому $SA\perp AB, SA\perp AD,$значит, $SA\perp ABC.$

б) Опустим из *A* перпендикуляр на *SB*. Он будет перпендикулярен также *BC*, поскольку $ASB\perp BC(AS,\ AB\perp BC).$ Поэтому его длина и есть расстояние от *A* до *SBC*. Вычислим ее

$$d(A,SB)=\frac{2S_{ASB}}{SB}=\frac{5\cdot 12}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{60}{13}.$$

Ответ: $\frac{60}{13}.$

Задание 8.

В правильной треугольной пирамиде SABC с вершиной S, все рёбра которой равны 4, точка N — середина ребра AC, точка O центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении 3 : 1, считая от вершины пирамиды.

а) Докажите, что прямая NP перпендикулярна прямой BS.

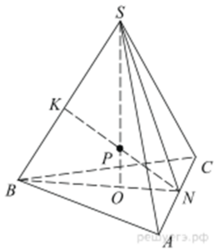
б) Найдите расстояние от точки B до прямой NP.

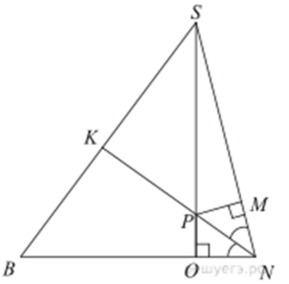
Решение.

а) Точка *O* принадлежит отрезку *BN*, значит, точка *P*, лежащая на отрезке *SO*, находится в плоскости *SBN*. Значит, прямая *NP* также лежит в плоскости *SBN* и пересекает прямую *SB* в точке *K*. Треугольник *SNB* равнобедренный, поскольку отрезки *SN* и *BN* — медианы одинаковых равносторонних треугольников *SAC* и *BAC*. Поэтому *SN* = *BN*. В точке *O* пересекаются медианы основания, значит,

$ON = \frac{1}{3}BN = \frac{1}{3}SN.$ Опустим перпендикуляр из точки P на сторону SN. Пусть он пересекает SN в точке M. Треугольники SPM и SNO подобны, поэтому $\frac{SP}{PM} = \frac{SN}{ON} = 3.$

Значит, $PM = \frac{1}{3}SP = PO.$ Следовательно, треугольники NPO и NPM равны и PN — биссектриса угла SNB. В равнобедренном треугольнике биссектриса является медианой и высотой. Значит, NK с BS.





б) Так как BS перпендикулярно NK, то искомое расстояние равно длине отрезка BK. Так как NK является медианой треугольника SNB, то $BK = \frac{1}{2}BS = 2.$

Ответ: 2.

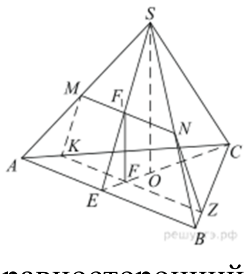
Задание 9.

В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 8. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от точки C.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка C, а основанием — сечение пирамиды SABC плоскостью α.

Решение.



а) В основании правильной треугольной пирамиды лежит равносторонний треугольник. Проекция высоты S пирамиды на основание дает точку O, которая лежит на пересечении медиан. Таким образом, точка O делит медианы в отношении 2 : 1, то есть $OC = \frac{2}{3}CE.$

Рассмотрим высоту SE треугольника SAB. Точка F_1 являеся ее серединой. Следовательно, ее проекция на медиану CE делит отрезок OE пополам. В свою очередь отрезок $OE = \frac{1}{3}CE,$ тогда $EF = OF = \frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{6}.$

В итоге получаем, что точка F делит медиану CE как $CF = \frac{5}{6}CE$ или в соотношении 5 : 1, начиная от точки C. Что и требовалось доказать.

б) Найдем высоту искомой пирамиды $CF = \frac{5}{6}CE.$ Медиану и ɽ найдем по теореме Пифагора из прямоугольного треугольника BCE:

$$CE = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3},\ OC = \frac{2}{3}\cdot 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3},\ CF = \frac{5}{6}\cdot 6\sqrt{3} = 5\sqrt{3}.$$

Вычислим площадь основания пирамиды (площадь трапеции $MNZK$). Отрезок $KZ = \frac{5}{6}\cdot 12 = 10,$ отрезок $MN = \frac{12}{2} = 6$ (так как это средняя линия треугольника ABS), высота трапеции $FF_1 = \frac{1}{2}SO.$ Найдем высоту SO из прямоугольного треугольника SOC:

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{64 - 48} = 4,\ FF_1 = \frac{4}{2} = 2.$$

Площадь трапеции (основания пирамиды) равна $S = \frac{10+6}{2}\cdot 2 = 16.$

Объем пирамиды найдем по формуле $V = \frac{1}{3}S\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 16\cdot 5\sqrt{3} = \frac{80\sqrt{3}}{3}.$

Ответ: б) $\frac{80\sqrt{3}}{3}.$

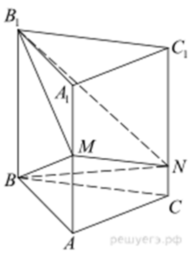
Задание 10.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 6. На рёбрах AA_1 и CC_1 отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = 2$, $CN = 1$.

а) Докажите, что плоскость MNB_1 разбивает призму на два многогранника, объёмы которых равны.

б) Найдите объём тетраэдра $MNBB_1$.

Решение.



Площадь основания призмы равна $9\sqrt{3}$, а объём призмы равен $54\sqrt{3}.$

В четырёхугольной пирамиде $B_1A_1C_1NM$ высота совпадает с высотой основания призмы $A_1B_1C_1$, опущенной на сторону A_1C_1, и равна $3\sqrt{3}.$ Основание A_1C_1NM пирамиды $B_1A_1C_1NM$ является трапецией, площадь которой равна 27. Значит, объём пирамиды $B_1A_1C_1NM$ равен $27\sqrt{3}$, то есть составляет половину объёма призмы. Поэтому объёмы многогранников $B_1A_1C_1NM$ и $ABCMB_1N$ равны.

б) В четырёхугольной пирамиде $BACNM$ высота совпадает с высотой основания призмы ABC, опущенной на сторону AC, и равна $3\sqrt{3}.$ Основание пирамиды $BACNM$ является трапецией, площадь которой равна 9. Объём пирамиды $BACNM$ равен $9\sqrt{3}.$

Многогранник $ABCMB_1N$ состоит из двух частей: $BACNM$ и $MNBB_1$. Значит, объём тетраэдра $MNBB_1$ равен $18\sqrt{3}.$

Ответ: $18\sqrt{3}.$

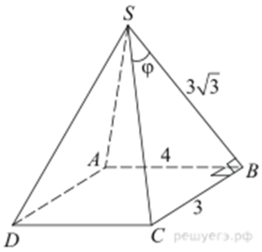
Задание 11.

В основании четырёхугольной пирамиды SABCD лежит прямоугольник ABCD со сторонами AB = 4 и BC = 3. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=\sqrt{11},\ SB=3\sqrt{3},\ SD=2\sqrt{5}.$

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямой SC и плоскостью ASB.

Решение.



а) Рассмотрим треугольник SAB, у которого стороны $SA=\sqrt{11},\ AB=4$ и $SB=3\sqrt{3}.$ Значения этих сторон удовлетворяют равенству $SB^2=SA^2+AB^2,$ следовательно, треугольник SAB прямоугольный, $SA \perp AB$.

Рассмотрим треугольник SAD со сторонами $SA=\sqrt{11},\ AD=3,\ SD=2\sqrt{5}.$ Длины сторон треугольника удовлетворяют равенству $SD^2=SA^2+AD^2,$ то есть он является прямоугольным, $SA \perp AD$.

Из перпендикулярности $SA \perp AB$ и $SA \perp AD$ следует, что $SA \perp (ABC)$ и, следовательно, SA — высота пирамиды.

б) Проекция SC на плоскость SAB будет прямая SB. Таким образом, нужно найти угол между прямыми SC и SB (смотри рисунок), то есть угол $\varphi = \angle CSB$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник SCB. Тангенс угла φ равен

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{CB}{SB}=\frac{3}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=30^\circ.$$

Ответ: 30°.

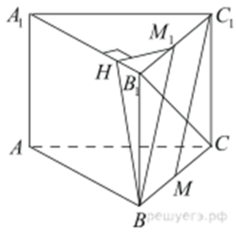
Задание 12.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ известны рёбра: $AB=4\sqrt{2}$, $AA_1=4$. Точка M — середина ребра BC.

а) Докажите, что прямые B_1C и C_1M перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямой C_1M и плоскостью грани ABB_1A_1.

Решение.



а) Поскольку $\operatorname{tg}\angle CMC_1 = \dfrac{CC_1}{CM} = \sqrt{2} = \dfrac{B_1C_1}{CC_1} = \operatorname{tg}\angle B_1CC_1$, получаем $\angle B_1CC_1 = \angle CMC_1 = 90^\circ - \angle MC_1C$, то есть прямые B_1C и C_1M перпендикулярны.

б) Пусть M_1 — середина B_1C_1, тогда угол между прямой C_1M и плоскостью грани ABB_1A_1 равен углу между этой плоскостью и прямой BM_1.

Обозначим через M_1H перпендикуляр, опущенный на A_1B_1. Прямая M_1H перпендикулярна плоскости грани ABB_1A_1, поскольку она перпендикулярна прямым A_1B_1 и BB_1. Поэтому искомый угол равен углу M_1BH.

В прямоугольном треугольнике M_1BH: $M_1B = \sqrt{BB_1^2 + B_1M_1^2} = 2\sqrt{6}$,

[redacted]

Ответ: б) 30°.

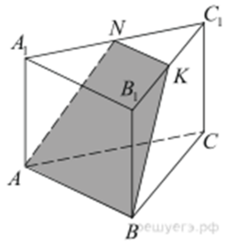
Задание 13.

В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник со стороной 6. Высота призмы равна 4. Точка N — середина ребра A_1C_1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью BAN.

б) Найдите периметр этого сечения.

Решение.



а) Проведём через точку *N* прямую, параллельную прямой *AB*, до пересечения с прямой B_1C_1 в точке *K*. Трапеция *ABKN* — искомое сечение.

б) Имеем $A_1N = 3$, так как точка *N* — середина ребра A_1C_1. Значит, $AN = \sqrt{16+9} = 5$. Аналогично $BK = 5$.

Далее $NK = 3$, как средняя линия треугольника $A_1B_1C_1$. Следовательно, искомый периметр сечения равен $6 + 5 + 5 + 3 = 19$.

Ответ: 19.

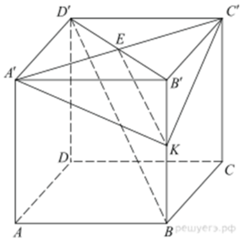
Задание 14.

Основанием прямой четырехугольной призмы ABCDA'B'C'D' является квадрат ABCD со стороной $3\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{7}$. Точка K — середина ребра BB'. Через точки K и C' проведена плоскость α, параллельная прямой BD'.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α.

Решение.



а) Проведём KE — среднюю линию треугольника $BB'D'$. E — середина $B'D'$, следовательно, точка пересечения диагоналей верхнего основания и сечение содержит диагональ $A'C'$. Треугольник $A'C'K$ является искомым сечением по признаку параллельности прямой и плоскости.

Прямоугольные треугольники $A'B'K$ и ~~и~~$'B'K$ равны по двум катетам, поэтому $A'K =$ ~~и~~$'K$, следовательно, треугольник $A'C'K$ — равнобедренный.

б) Далее имеем: $$B'K = \frac{1}{2} \cdot BB_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7} = \sqrt{7},$$

$$A'K = C'K = \sqrt{B'K^2 + B'C_1^2} = \sqrt{\sqrt{7}^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{7+18} = 5,$$

$$A'C' = \sqrt{A'B'^2 + B'C'^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{18+18} = 6,$$ $$P_{A'KC'} = 5 + 5 + 6 = 16.$$

Ответ: б) 16.

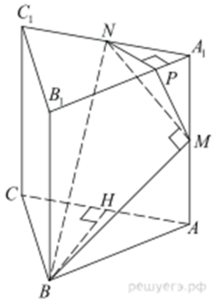
Задание 15.

Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N— середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.

а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1.

Решение.



а) Пусть точка H — середина AC. Тогда $$BN^2 = BH^2 + NH^2 = (3\sqrt{3})^2 + 6^2 = 63.$$

Вместе с тем, $$BM^2 + MN^2 = (3^2 + 6^2) + (3^2 + 3^2) = 63,$$ а тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник BMN является прямоугольным с прямым углом M.

б) Проведём перпендикуляр NP к прямой A_1B_1, кроме нее NP с A_1A. Следовательно, NP с ABB_1. Поэтому MP — проекция MN на плоскость ABB_1.

Прямая BM перпендикулярна MN, тогда по теореме о трёх перпендикулярах BM с MP. Следовательно, угол NMP — линейный угол искомого угла.

Длина NP равна половине высоты треугольника $A_1B_1C_1$, то есть $NP = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$ Поэтому $\sin NMP = \frac{NP}{MN} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}.$ Следовательно, $NMP = \arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}.$

Ответ: б) $\arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}.$

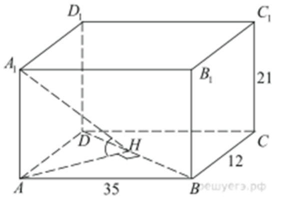
Задание 16.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB = 35$, $AD = 12$, $CC_1 = 21$.

а) Докажите, что высоты треугольников ABD и A_1BD, проведённые к стороне BD, имеют общее основание.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и A_1DB.

Решение.



а) Проведем высоту AH в треугольнике ABD. Поскольку проекция прямой A_1H на плоскость $ABCD$ это прямая AH, то $A_1H \perp BD$ по теореме о трех перпендикулярах. Что и требовалось.

б) Из треугольника ABD находим $AH = \frac{2S_{ABD}}{BD} = \frac{12 \cdot 35}{\sqrt{35^2 + 12^2}} = \frac{420}{37}$

$$\angle(ABC,\ A_1BD) = \angle(AH,\ A_1H) = \operatorname{arctg}\frac{A_1A}{AH} = \operatorname{arctg}\frac{37}{20}.$$

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\frac{37}{20}$.