

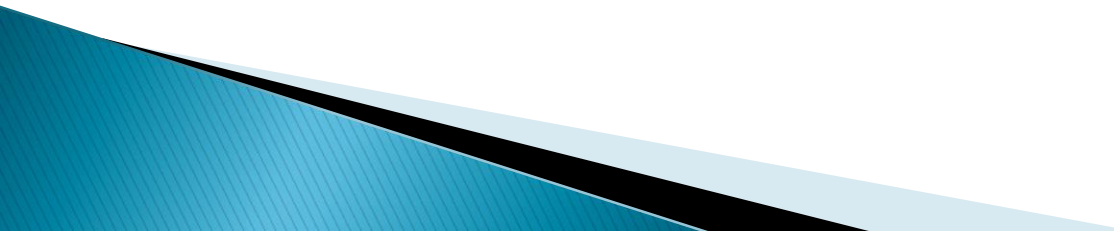
Профильная математика

Задание №8

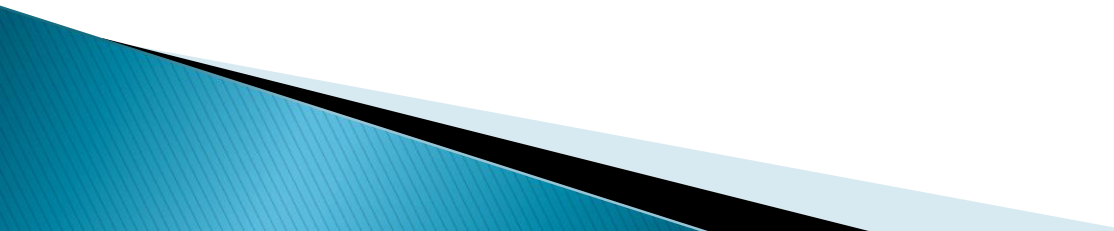
Задачи с прикладным содержанием



Особенности задания №8

- ▶ Задания этого блока проверяют умения использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.
 - ▶ Трудные на первый взгляд задачи, как правило, сводятся к решению простых линейных или квадратных уравнений или неравенств.
 - ▶ Для решения задания №8 требуется применить умения извлекать информацию из зависимостей между величинами, решать уравнения и неравенства.
- 

Алгоритм решения заданий №8

- ▶ 1. Внимательно прочитать условие и, анализируя его, выявить искомую величину.
 - ▶ 2. Выполнить подстановку данных из условия в заданную формулу.
 - ▶ 3. Решить получившееся уравнение или неравенство относительно неизвестной величины.
- 

Задание №1

Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана,, согласно которому

$P = \sigma ST^4$, где P — мощность излучения звезды (в ваттах), $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T — температура (в кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{64} \cdot 10^{20} \text{ м}^2$, а мощность её излучения равна $2,28 \cdot 10^{25} \text{ Вт}$.

Найдите температуру этой звезды в кельвинах.

Указание.

Выразите из формулы значение T . Подставьте числовые значения в полученную формулу.

Решение.

Имеем $T = \sqrt[4]{\frac{P}{\sigma S}}$. Подставив числовые значения в формулу, получим

$$\begin{aligned} T &= \sqrt[4]{\frac{2,28 \cdot 10^{25}}{5,7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{64} \cdot 10^{20}}} = \sqrt[4]{\frac{25,6 \cdot 10^{25}}{10^{-8} \cdot 10^{18}}} = \sqrt[4]{\frac{2,56 \cdot 10^{26}}{10^{10}}} = \\ &= \sqrt[4]{2,56 \cdot 10^{16}} = 0,4 \cdot 10^4 = 4000. \end{aligned}$$

Ответ: 4000

Задание №2

После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 4t^2$, где h – расстояние в метрах, t – время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,9 с.

На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,3 с?

Ответ выразите в метрах.

Решение:

Пусть h_1 – расстояние до воды до дождя, h_2 – расстояние до воды после дождя. После дождя уровень воды в колодце повысится, расстояние до воды уменьшится, и время падения уменьшится, станет равным $t = 0,9 - 0,3 = 0,6$ с. Уровень воды поднимется на $h_1 - h_2$ метров.

$$h_1 - h_2 = 4 \cdot 0,9^2 - 4 \cdot 0,6^2 = 3,24 - 1,44 = 1,8.$$

Ответ: 1,8

Задание №3

Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где

T_1 — температура нагревателя (в кельвинах), T_2 — температура холодильника (в кельвинах).

При какой температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет 22%, если температура холодильника $T_2 = 390\text{K}$?

Решение:

Ответ дайте в кельвинах.

Подставим известные значения в формулу и найдём T_1 .

$$22 = \frac{T_1 - 390}{T_1} \cdot 100$$

$$0,22T_1 = T_1 - 390$$

$$0,22T_1 - T_1 = -390$$

$$0,78T_1 = 390$$

$$T_1 = \frac{390}{0,78}$$

$$T_1 = 500.$$

Ответ: 500

Задание №4. Линейные уравнения и неравенства (и сводящиеся к ним)

При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha \cdot t)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$ – коэффициент теплового расширения, t – температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Решение:

Зависимость $l(t) = l_0(1 + \alpha \cdot t)$ — это функция длины рельса от температуры. Длина рельса зависит от температуры по определенному правилу. Мы помним из физики, что при нагревании тела расширяются, а при охлаждении — сжимаются, и особенно это заметно для металлов. При изменении температуры длина металлического рельса может измениться на несколько миллиметров.

Подставим в эту формулу начальные значения: $l_0 = 10$ м и $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$. Рельс удлинился на 3 мм, то есть в какой-то момент его длина стала на 3 мм больше. Значит, при определенной температуре длина рельса $l(t)$ стала равной 10 м + 3 мм.

Теперь переведем миллиметры в метры. Один миллиметр — это одна тысячная часть метра ($1 \text{ мм} = 0,001 \text{ м} = 10^{-3} \text{ метра}$).

$$l(t) = 10 + 3 \cdot 10^{-3} \text{ (м)}$$

Получим:

$$10 + 3 \cdot 10^{-3} = 10(1 + 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot t)$$

Это линейное уравнение с одной переменной t . Раскроем скобки в правой части

$$10 + 3 \cdot 10^{-3} = 10 + 12 \cdot 10^{-5} \cdot t$$

Находим t :

$$t = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{12 \cdot 10^{-5}} = \frac{1}{4} \cdot 10^2 = \frac{100}{4} = 25.$$

При температуре 25 градусов Цельсия рельс удлинится на 3 мм.

Ответ: 25

Задачи для самостоятельного разбора

№1

При температуре рельс имеет длину l_0 м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l = l_0(1 + \alpha \Delta t)$, где α — коэффициент теплового расширения, t — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Ответ: 25

№2

Некоторая компания продает свою продукцию по цене p руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют v руб., постоянные расходы предприятия F руб. месяц. Месячная операционная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\Pi = (p - v)Q - F$. Определите месячный объем производства (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет равна 300000 руб.

Ответ: 5000

Задание №5.Парабола и квадратные неравенства

Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс.руб.) задаётся формулой $q = 85 - 5p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс.руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 210 тыс.руб. Ответ приведите в тыс.руб.

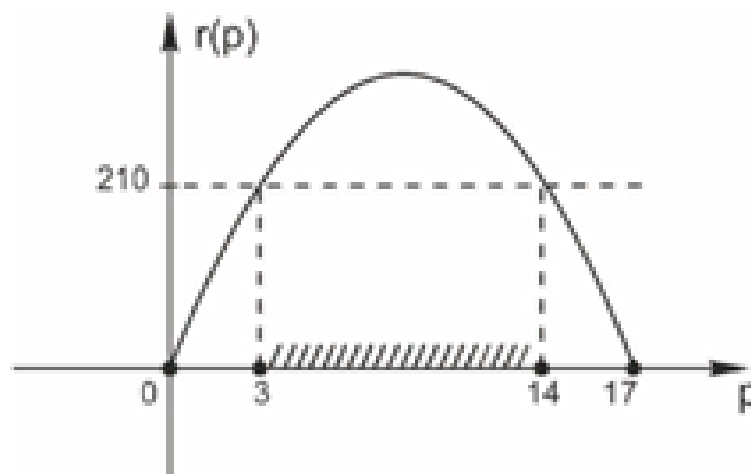
Решение:

Здесь точно придется читать условие. И решать именно неравенство, а не уравнение.

Поскольку месячная выручка **не менее** 210 тысяч рублей,

$$r(p) = q \cdot p = (85 - 5p) \cdot p \geq 210 - 5p^2 + 85p \geq 210$$

График функции в левой части неравенства — квадратичная парабола с ветвями вниз.



$$p^2 - 17p + 42 \leq 0$$

Заметим, что это неравенство не превращается в уравнение $p^2 - 17p + 42 = 0$. Уравнение здесь нужно для того, чтобы найти, при каких значениях p выручка равна 210. Решив его, получим: $p = 3$ или $p = 14$. Решения неравенства:

$$3 \leq p \leq 14$$

Наибольшее значение p равно 14.

Ответ: 14

Задание №6

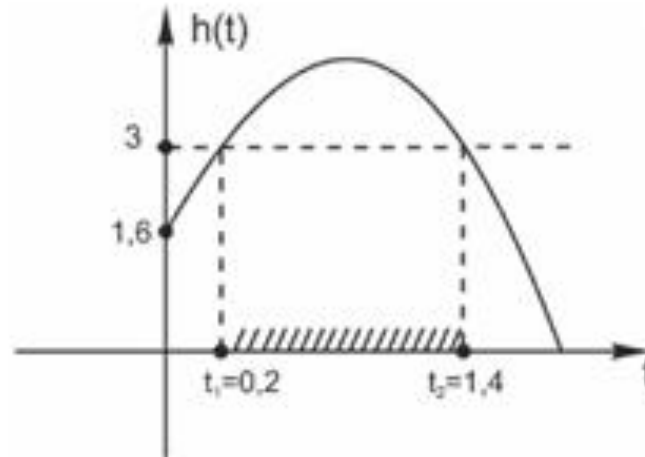
Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1,6 + 8t - 5t^2$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее трёх метров?

Запишем, что $h(t) \geq 3$:

$$1,6 + 8t - 5t^2 \geq 3.$$

Решение:

Построим график функции в левой части — то есть зависимость высоты мяча от времени.



Мы видим, что через t_1 секунд после начала полёта мяч оказался на высоте 3 метра. Мяч продолжал лететь вверх, высота увеличивалась. Затем началось снижение, высота уменьшалась, и в момент времени t_2 снова стала равна трём метрам над землей. Получается, что мяч находился на высоте не менее трёх метров в течение $t = t_2 - t_1$ секунд.

Осталось найти разность $t_2 - t_1$.

Для этого решим квадратичное неравенство $5t^2 - 8t + 1,4 \leq 0$.

Работать с дробными коэффициентами неудобно. Умножим обе части неравенства на 5:

Найдем корни соответствующего уравнения $25t^2 - 40t + 7 = 0$.

$$t_1 = 0,2; \quad t_2 = 1,4.$$

$$\text{Разность } t_2 - t_1 = 1,4 - 0,2 = 1,2.$$

Ответ: 1,2.

Задачи для самостоятельного разбора

№3

Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур определяется выражением $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t - время в минутах, $T_0 = 1400\text{K}$, $a = -10\text{ K/мин}$, $b = 200\text{ K/мин}$. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1760 K прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор. Ответ выразите в минутах.

Ответ: 2

Задание №7

Степенные уравнения и неравенства

При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 3,2 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot \text{м}^3$, где p – давление в газе в паскалях, V – объем газа в кубических метрах, $k = \frac{4}{3}$. Найдите, какой объем V (в куб. м) будет занимать газ при давлении p , равном $2 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

Попробуй решить сам!

Подставим данные в уравнение $pV^k = 3,2 \cdot 10^6$:

$$2 \cdot 10^5 \cdot V^{\frac{4}{3}} = 3,2 \cdot 10^6$$

$$V^{\frac{4}{3}} = 16$$

$$V^{\frac{1}{3}} = 2$$

$$V = 8$$

Задание №8. Показательные уравнения и неравенства

Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^\alpha = \text{const}$, где p (Па) – давление в газе, V – объём газа в кубических метрах, α – положительная константа. При каком наименьшем значении константы α уменьшение вдвое раз объёма газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее, чем в 4 раза?

Решение:

Согласно понятиям термодинамики, в каждом состоянии газ характеризуется определенными параметрами – давлением, объемом, температурой. По условию задачи, газ переходит из одного состояния в другое так, что $pV^\alpha = \text{const}$. Это значит, что

$$p_1 V_1^\alpha = p_2 V_2^\alpha.$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\alpha$$

Объем уменьшился вдвое, то есть $\frac{V_1}{V_2} = 2$.

Поскольку $\frac{p_2}{p_1} \geq 4$, получим, что $2^\alpha \geq 4$. Тогда $\alpha \geq 2$.

Наименьшее значение $\alpha = 2$ записываем в ответ.

Ответ: 2

Задачи для самостоятельного разбора

№4

Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объем и давление связаны соотношением , где (атм.) – давление в газе, – объем газа в литрах. Изначально объем газа равен 1,6 л, а его давление равно одной атмосфере. В соответствии с техническими характеристиками поршень насоса выдерживает давление не более 128 атмосфер. Определите, до какого минимального объема можно сжать газ. Ответ выразите в литрах.

Ответ: 0,05

Задание №9. Логарифмические уравнения и неравенства

8. Водолазный колокол, содержащий $\nu = 5$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1,75$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2 . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 9,7$ – постоянная, $T = 300\text{K}$ – температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атм) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 29100 Дж.

Решение:

Подставим все данные в уравнение для совершенной водой работы:

$$9,7 \cdot 5 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{p_2}{1,75} = 29100$$

$$9,7 \cdot 5 \cdot \log_2 \frac{p_2}{1,75} = 97$$

$$\log_2 \frac{p_2}{1,75} = 2$$

$$\frac{p_2}{1,75} = 4 \Rightarrow p_2 = 7.$$

Ответ: 7

Задачи для самостоятельного разбора

№6

Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени моль воздуха объемом л, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объема Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением (Дж), где — постоянная, а — температура воздуха. Какой объем (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 10 350 Дж?

Ответ: 2

Задание №10. Тригонометрические уравнения и неравенства

При нормальном падении света с длиной волны $\lambda = 400$ нм на дифракционную решетку с периодом d нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом острый угол φ (отсчитываемый от перпендикуляра к решётке), под которым наблюдается максимум, и номер максимума k связаны соотношением $d \sin \varphi = k\lambda$. Под каким минимальным углом φ (в градусах) можно наблюдать третий максимум на решетке с периодом, не превосходящим 2400 нм?

Решение:

Запишем условие задачи в виде неравенства. Заметим, что нам нужен третий максимум, то есть номер максимума $k = 3$.

$$2400 \cdot \sin \varphi \geq 3 \cdot 400$$

$$\sin \varphi \geq \frac{1}{2}$$

Поскольку угол φ – острый, $\varphi_{\min} = 30^\circ$

Ответ: 30.

Задачи для самостоятельного разбора

№6

Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полета мяча (в секундах) определяется по формуле $T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полета составит 3 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Ответ: 30

*Успехов вам в сдачи ЕГЭ!
У вас все получится!*

