ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН
www.legionr.ru

Ростов-на-Дону
(863) 303-05-50

ЕГЭ по математике профильного уровня в 2024 году: на что обратить особенное внимание при подготовке

Дерезин Святослав Викторович

16 ноября 2023 г.

www.legionr.ru

План вебинара

- Материалы от ФИПИ
- Общие рекомендации
- Некоторые проблемные задачи из Части I (линии 2, 3, 5, 8, 11)
- Задачи с ЕГЭ-2023

Анализ ЕГЭ-2023

Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки
ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений»

ФИПИ

И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, А.В. Семенов

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
для учителей, подготовленные
на основе анализа типичных ошибок
участников ЕГЭ 2023 года

по **МАТЕМАТИКЕ**

Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки
ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
обучающимся
по организации самостоятельной
подготовки к ЕГЭ 2023 года

МАТЕМАТИКА

Профильный уровень

Материалы для ЕГЭ-2023

ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА ПО НАДЗОРУ В СФЕРЕ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

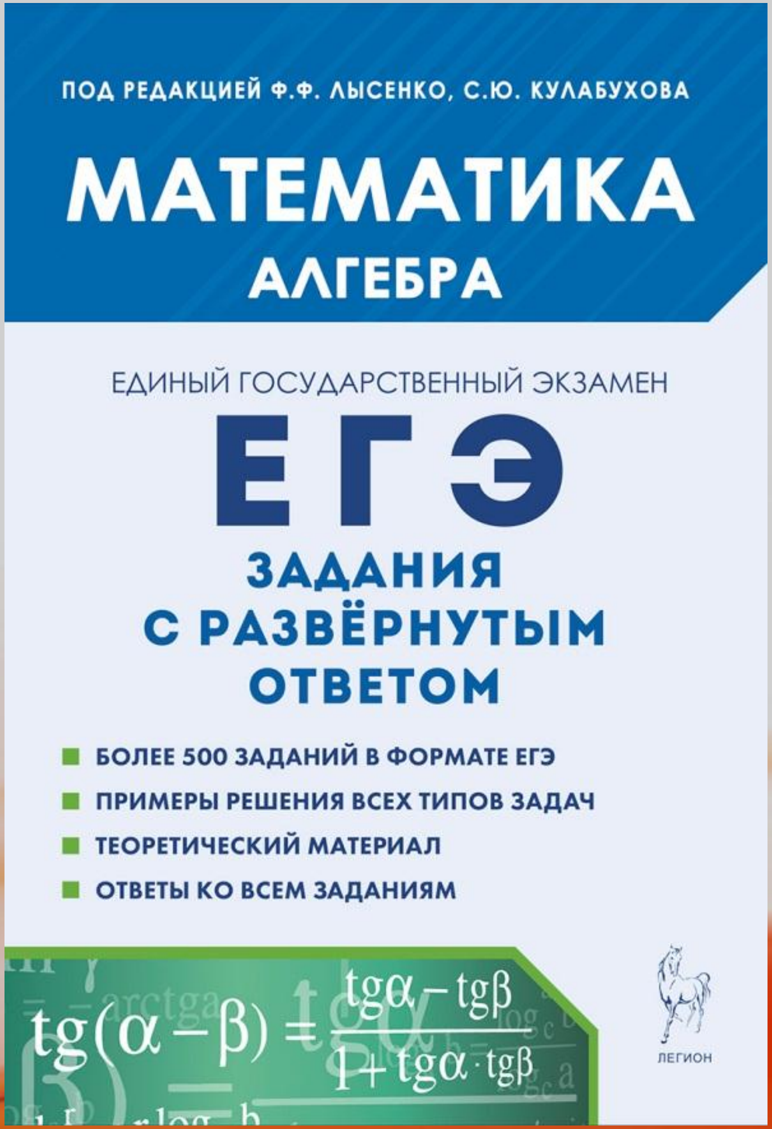
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развёрнутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2023 года

МАТЕМАТИКА

Книги для подготовки

Книги для подготовки



ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН
www.legionr.ru

Книги для подготовки

Ростов-на-Дону
(863) 303-05-50

Промокод

СКИДКА 30%

НА ВСЕ ПОСОБИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

Скидка действует
до 21 ноября 2023 г.(включительно)

При заказе в нашем интернет-магазине
www.legionr.ru ввести код:

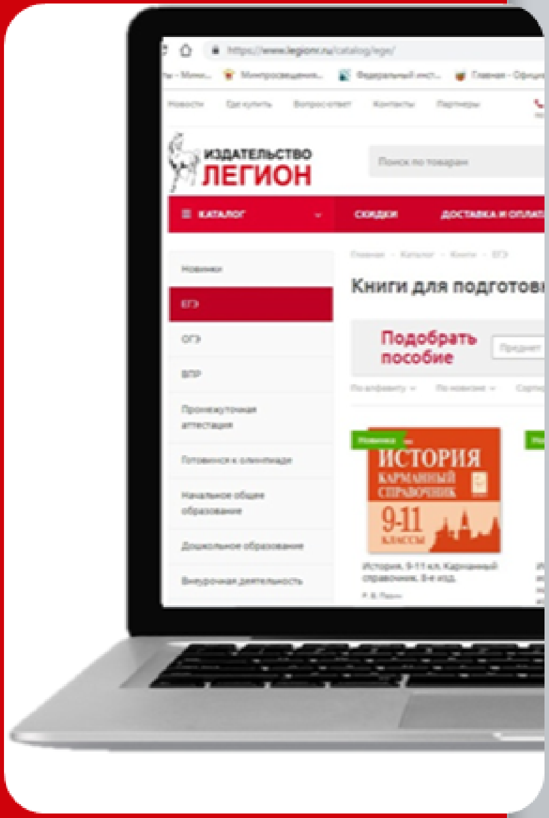
математикапрофиль24

Где купить?

- **Официальный интернет-магазин издательства «Легион» www.legionr.ru**
  Оплата наличными, банковским переводом, при получении.
  Доставка «Почтой России» или курьерской службой.
  Скидки. Бесплатная доставка при заказе от 3 000 руб.

- **Интернет-магазины**
  www.ozon.ru, www.labirint.ru, www.wildberries.ru

- **Книжные магазины города**



ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН

Где купить

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕГИОН

Издательство, отдел оптовых продаж
+7 (863) 303-05-50
legionrus@legionrus.com

Интернет-магазин
+7 (800) 707-37-12
+7 (863) 285-09-77
bookweb@legionrus.com

www.legionr.ru

Новая задача на векторы

Новая задача на векторы

$\boxed{2}$ Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны соответственно 4 и 15, а их скалярное произведение равно 24. Найдите длину вектора $\vec{m}$, если $\vec{m} = \vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$.

Решение:

По свойству скалярного произведения:

$$|\vec{m}|^2 = \left(\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}\right) = \left|\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\left(\vec{a}\cdot\frac{1}{3}\vec{b}\right) + \frac{1}{9}|\vec{b}|^2 =$$

$$= |\vec{a}|^2 - \frac{2}{3}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) + \frac{1}{9}|\vec{b}|^2 = 16 - 16 + 25 = 25.$$

Значит, $|\vec{m}| = 5$.

Ответ: 5.

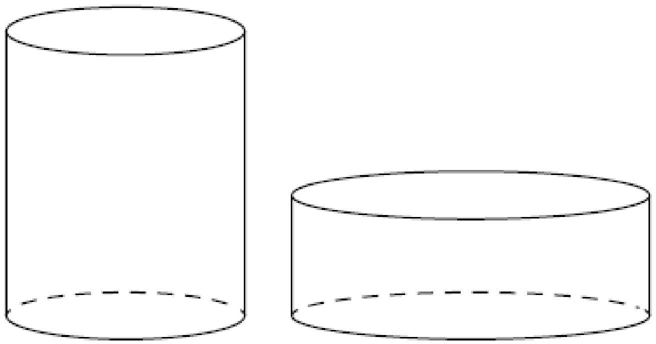
Задание 3

2

Пример 5

Дано два цилиндра. Объём первого цилиндра равен 18. У второго цилиндра высота в 3 раза меньше, а радиус основания в 2 раза больше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра.

Ответ: 24.

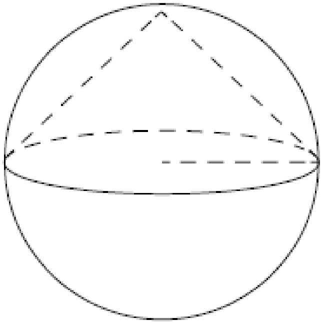


Распространённая ошибка связана с использованием коэффициента в формуле объёма цилиндра без понимания стереометрической конфигурации. Более четверти участников экзамена дали неверный ответ «12» – провели умножение на 2/3, а не на 4/3, так как не учли, что если радиус вдвое больше, то площадь основания больше вчетверо.

Пример 6

Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём конуса равен 24. Найдите объём шара.

Ответ: 96.



Распространённая ошибка связана с использованием коэффициента в формуле объёма конуса без понимания стереометрической конфигурации.

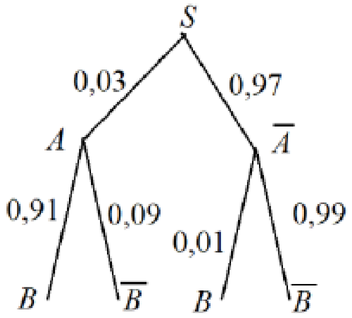
Задание 5

4

Пример 9

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,03. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,91. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Решение. Здесь лучше изобразить полное дерево, в котором отражены события A «батарейка неисправна» и B «батарейка забракована системой контроля», что не одно и то же. Дерево получается такое, как на рисунке.



Искомая вероятность складывается из вероятностей цепей SAB и $S\overline{A}B$ и равна

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(SAB)+\mathrm{P}(S\overline{A}B)=0,03\cdot 0,91+0,97\cdot 0,01=0,037.$$

Ответ: 0,037.

Задание 5

4

Пример 10

Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в две первые мишени и не попадёт в две последние.

Ответ: 0,0576.

В данной задаче дерево сводится к одной цепи, поскольку нас интересует только одно элементарное событие – два успеха и две неудачи подряд. Ненужные ветви дерева можно не изображать.

Пример 11

В торговом центре два одинаковых автомата продают чай. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится чай, равна 0,2. Вероятность того, что в то же время чай закончится во втором автомате, такая же. Вероятность того, что чай закончится одновременно в обоих автоматах, равна 0,18. Найдите вероятность того, что к концу дня чай останется и в первом, и во втором автомате.

Ответ: 0,78.

Пример 12

Игральную кость бросили дважды. Известно, что пять очков не выпало ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков равна 7».

Ответ: 0,16.

Задание 5

4

Пример 10

Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в две первые мишени и не попадёт в две последние.

Ответ: ____________________________

Решение.

Серия из четырёх испытаний Бернулли.

Событие $У = \{\text{стрелок попал в мишень}\}$, $P(У) = 0,6$.

Событие $Н = \{\text{стрелок не попал в мишень}\}$, $P(Н) = 1 - P(У) = 0,4$.

Событие $A = \{УУНН\}$ имеет вероятность $P(A) = 0,6^2 \cdot 0,4^2 = 0,0576$.

Ответ: 0,0576.

Задание 5

Пример 11

4 В торговом центре два одинаковых автомата продают чай. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится чай, равна 0,2. Вероятность того, что в то же время чай закончится во втором автомате, такая же. Вероятность того, что чай закончится одновременно в обоих автоматах, равна 0,18. Найдите вероятность того, что к концу дня чай останется и в первом, и во втором автомате.

Ответ: ____________________________

Решение.

Обозначим события $A=\{$чай закончится в первом автомате$\}$ и $B=\{$чай закончится во втором автомате$\}$; по условию, $P(A)=P(B)=0,2$, $P(A\cap B)=0,18$. Нужно найти вероятность события $\overline{A}\cap\overline{B}$, т.е. $\overline{A\cup B}$.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$, откуда $P(A\cup B)=0,2+0,2-0,18=0,22$.

$P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$, $P(\overline{A\cup B})=1-0,22=0,78$.

Ответ: 0,78.

Задание 5

4

<u>Пример 12</u>

Игральную кость бросили дважды. Известно, что пять очков не выпало ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма выпавших очков равна 7».

Ответ: ____________________________

Решение.

Составим таблицу эксперимента.

1-я \ 2-я	1	2	3	4	5	6
1	✖	✖	✖	✖		✖
2	✖	✖	✖	✖		✖
3	✖	✖	✖	✖		✖
4	✖	✖	✖	✖		✖
5						
6	✖	✖	✖	✖		✖

Событие $B = \{5 \text{ очков не выпало ни разу}\}$, $N(B) = 25$.

Событие $A = \{\text{сумма очков равна } 7\}$, $N(A/B) = 4$.

$$P(A/B) = \frac{N(A/B)}{N(B)} = \frac{4}{25} = 0{,}16.$$

Ответ: 0,16.

Задание 8

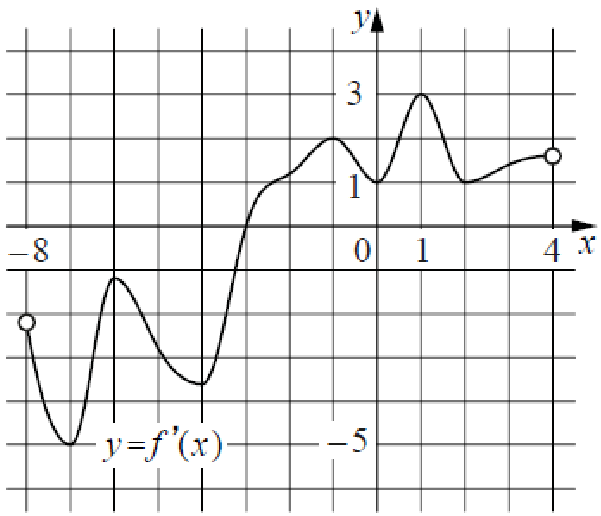
Задания **линии 7** проверяют умение применять производную к исследованию функции. Здесь важно знать геометрический смысл производной функции в точке, правила нахождения производных и производные элементарных функций, а также уметь определить связь между характером монотонности функции и знаком её производной, по графику производной функции охарактеризовать свойства самой функции. Ниже приведены примеры заданий этой линии.

7

Пример 18

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8;\ 4)$. В какой точке отрезка $[-7; -4]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

Ответ: –4.



Проблемы у выпускников возникают из-за невнимательного чтения условия задачи и непонимания связи свойств функции с её производной. Типичным неверным ответом является число –7. Получение неверного ответа связано с тем, что выпускники путали график функции с графиком её производной.

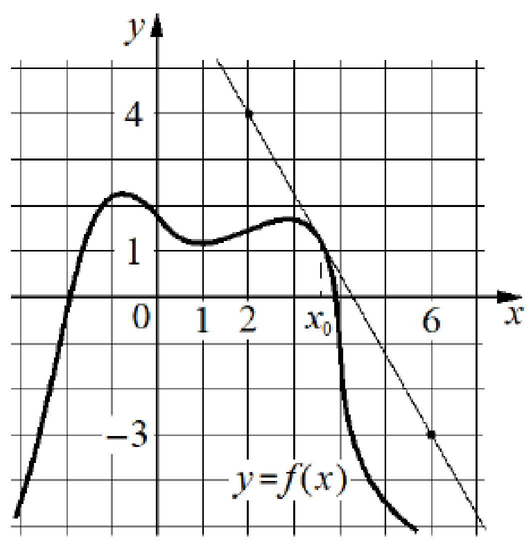
Задание 8

7

Пример 19

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

Ответ: –1,75.

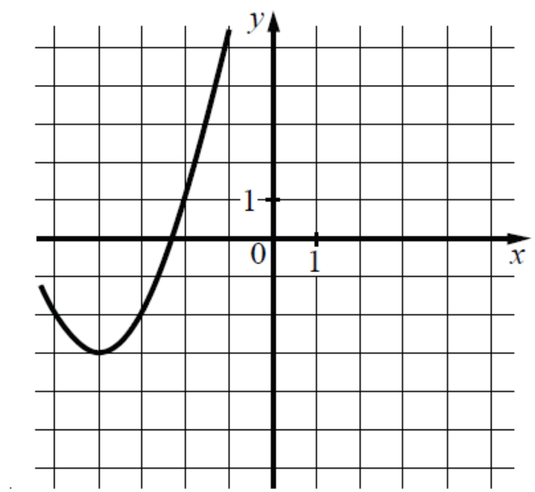


Типичный неверный ответ – «1,75» («потерян» минус). Такая ошибка возникает у тех, кто механически воспроизводит алгоритм поиска производной с помощью прямоугольного треугольника, но не обращает внимания на направление касательной. При выполнении таких заданий нужно разбить решение задачи на два этапа: первый этап – определение знака; второй этап – определение модуля производной.

Задание 11

Линия 10 – задания повышенного уровня сложности с кратким ответом интегрированного характера, для выполнения которых необходимо привлекать знания из разных разделов курса математики: элементарные функции; решение линейных, квадратных, иррациональных, рациональных, логарифмических, показательных уравнений и их систем. Ниже приведены примеры заданий линии 10.

10 На рисунке изображён график функции вида $f(x)=ax^2+bx+c$, где числа a, b и c целые. Найдите значение $f(-12)$.



Ответ: ____________________________

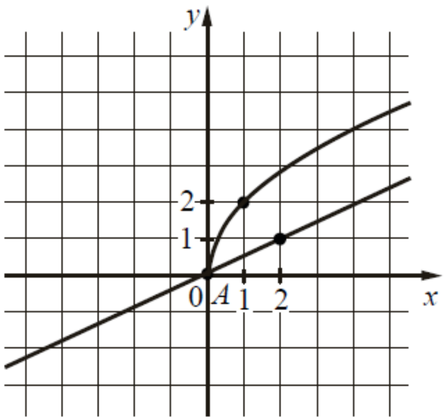
Решение.
График функции $f(x)=ax^2+bx+c$ проходит через точки $(-4;-3)$, $(-3;-2)$, $(-2;1)$, следовательно, $16a-4b+c=-3$, $9a-3b+c=-2$, $4a-2b+c=1$. Решив систему уравнений, получаем: $a=1$, $b=8$, $c=13$, т.е. $f(x)=x^2+8x+13$, тогда $f(-12)=(-12)^2+8\cdot(-12)+$ $+13=61$.
Ответ: 61.

Задание 11

10

Пример 26

На рисунке изображены графики функций видов $f(x)=a\sqrt{x}$ и $g(x)=kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ: ____________________________

Решение.

График функции $f(x)=a\sqrt{x}$ проходит через точку $(1;2)$, следовательно, $a\sqrt{1}=2$, откуда получаем: $a=2$, т.е. $f(x)=2\sqrt{x}$.

График функции $g(x)=kx$ проходит через точку $(2;1)$, следовательно, $k\cdot 2=1$, откуда получаем: $k=\frac{1}{2}$, т.е. $g(x)=\frac{1}{2}x$.

Найдём координаты точек пересечений, решив уравнение $f(x)=g(x)$: $2\sqrt{x}=\frac{1}{2}x$, откуда $x=0$ или $x=16$. Учитывая, что $A(0;0)$, получаем, что $B(16;8)$.

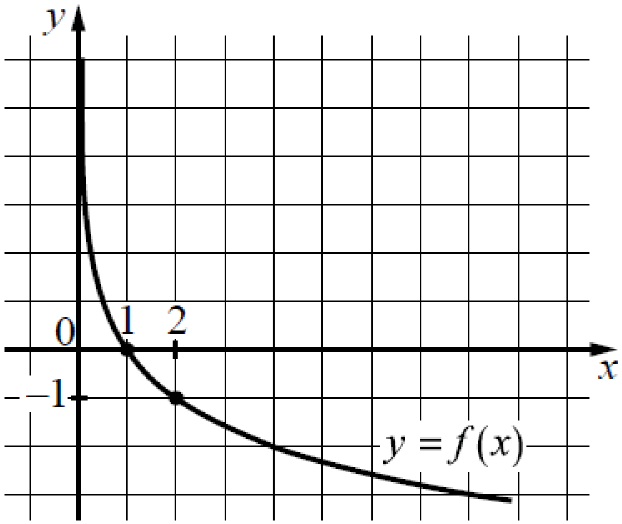
Ответ: 16.

Задание 11

10

Пример 27

На рисунке изображён график функции вида $f(x)=\log_a x$. Найдите значение $f(32)$.



Ответ: ____________________________

Решение.

График функции $f(x)=\log_a x$ проходит через точку $(2;-1)$, следовательно, $\log_a 2=-1$, откуда $a=\frac{1}{2}$, т.е. $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$, тогда $f(32)=\log_{\frac{1}{2}} 32=-5$.

Ответ: –5.

Задание 14

Модель: ЕГЭ-2023

$\boxed{14}$ В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 7$ и $BC = 4$. Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M : MD_1 = 3 : 4$, а точка K — середина ребра DD_1.

а) Докажите, что плоскость MKC параллельна прямой BD.

б) Найдите тангенс угла между плоскостью MKC и плоскостью основания призмы, если $\angle MKC = 90°$, $\angle ADC = 60°$.

Модель: ЕГЭ-2023

Решение:

а) По условию задачи выполним чертёж (см. рис. 1).

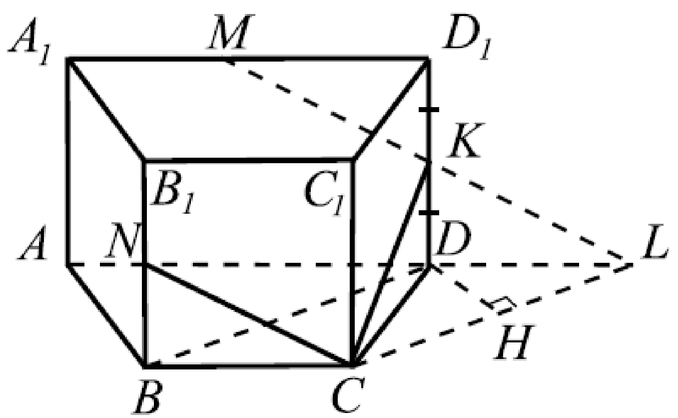


Figure:

Продлим отрезок MK до его пересечения с прямой AD в точке L. Тогда плоскость MKC пересекает нижнее основание призмы по прямой CL.

Модель: ЕГЭ-2023

Прямоугольные треугольники MD_1K и LDK равны, т.к. равны их катеты D_1K и DK и острые углы $\angle MKD_1$ и $\angle LKD$ равны как вертикальные. Тогда $DL = MD_1 = 4$.

Рассмотрим четырёхугольник $BDLC$. В нём $BC \| DL$ как отрезки на основаниях трапеции $ABCD$ и $BC = DL$. Значит, $BDLC$ — параллелограмм и $CL \| BD$.

Таким образом, плоскость MKC пересекает нижнее основание призмы по прямой, параллельной прямой BD. Следовательно, MKC параллельна BD.

Модель: ЕГЭ-2023

б) Боковая грань призмы BB_1C_1C параллельна грани AA_1D_1D. Проведём через вершину C прямую, параллельную KM. Пусть эта прямая пересекает ребро BB_1 в точке N (см. рис. 1).

Прямоугольные треугольники CBN и MD_1K равны, поскольку равны их катеты BC и MD_1, а также острые углы ввиду параллельности соответствующих сторон. Следовательно, $BN = D_1K = \dfrac{BB_1}{2}$.

Пусть высота призмы равна 2x. Тогда $B_1N = BN = DK = x$.

В равнобедренной трапеции с основаниями 7 и 4 и острым углом 60° боковые стороны равны 3, т.е. $AB = CD = 3$.

Из прямоугольных треугольников CBN, CDK и NCK имеем:

$NC^2 = BN^2 + BC^2 = x^2 + 16,\ \ CK^2 = CD^2 + DK^2 = x^2 + 9;$

$NK^2 = NC^2 + CK^2 = x^2 + 16 + x^2 + 9 = 2x^2 + 25.$

Для треугольника CDL имеем по теореме косинусов:

$CL^2 = DL^2 + CD^2 - 2DL \cdot CD \cdot \cos 120^\circ = 37.$

Задание 14

Модель: ЕГЭ-2023

Поскольку $NK = BD = CL$, то $2x^2 + 25 = 37$, $x = \sqrt{6}$.

Тангенс угла между плоскостью MKC и плоскостью основания призмы равен отношению расстояния от прямой NK до плоскости основания к высоте $DH = h$ треугольника CDL, проведённой из вершины D (см. рис. 1).

Найдём площадь треугольника CDL: $S_{CDL} = \dfrac{h \cdot CL}{2} = \dfrac{h\sqrt{37}}{2}$.

С другой стороны, $S_{CDL} = \dfrac{DL \cdot CD \cdot \sin\angle CDL}{2} = 3\sqrt{3}$.

Следовательно, $h = \dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{37}}$, тогда искомый тангенс равен

$$\frac{x}{h} = \frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{37}}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{74}}{6}.$$

Ответ: б) $\dfrac{\sqrt{74}}{6}$.

Задание 16

Модель: ЕГЭ-2023

16 В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 750 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;

— в июле 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— в июле 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1350 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж в 2035 году?

Задание 16

Модель: ЕГЭ-2023

Решение:

Составим математическую модель по условию задачи. Пусть S — сумма, взятая в кредит (S = 750 тыс. рублей); $q = 1 + \frac{r}{100}$ — процентный коэффициент ($q = 1{,}2$); $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ — ежегодные выплаты по кредиту; $X = x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}$ — сумма всех выплат (X = 1350 тыс. рублей). Обозначим через x — разность арифметической прогрессии долгов в июле 2026 — 2030 годов, а через y — разность арифметической прогрессии долгов в июле 2031 — 2035 годов.

Задание 16

Модель: ЕГЭ-2023

Тогда получим следующую схему погашения кредита в 2026 — 2030 и 2031 — 2035 годах:

$$\begin{cases} Sq - x_1 = S - x, \\ (S-x)q - x_2 = S - 2x, \\ \vdots \\ (S-4x)q - x_5 = S - 5x, \end{cases} \quad \begin{cases} (S-5x)q - x_6 = S - 5x - y, \\ (S-5x-y)q - x_7 = S - 5x - 2y, \\ \vdots \\ (S-5x-4y)q - x_{10} = 0. \end{cases}$$

По условию задачи долг должен уменьшаться от S до 0 за 10 лет. Значит, $S - 5x - 5y = 0$.

Чтобы получить второе уравнение относительно x и y, сложим все 10 уравнений из схемы погашения кредита. Получим:

$(10S - 35x - 10y)q - X = 9S - 35x - 10y.$

Задание 16

Модель: ЕГЭ-2023

Итого, имеем $\begin{cases} S = 5x + 5y, \\ (10S - 35x - 10y)q - X = 9S - 35x - 10y. \end{cases}$

Платёж в 2035 году будет $x_{10} = yq$. Найдём y из системы уравнений.

$5x = S - 5y$, $(10S - 7S + 35y - 10y)q - X = 9S - 7S + 35y - 10y$, $(3S + 25y)q - X = 2S + 25y$, $25y(q - 1) = 2S + X - 3Sq$,

$$y = \frac{2S + X - 3Sq}{25(q - 1)}.$$

Подставим числовые данные.

$$y = \frac{1500 + 1350 - 3 \cdot 750 \cdot 1{,}2}{25 \cdot 0{,}2} = \frac{2850 - 2700}{5} = 30 \text{ тыс. рублей.}$$

$x_{10} = yq = 30 \cdot 1{,}2 = 36$ тыс. рублей.

Ответ: 36 тыс. рублей.

Задание 18

Модель: ЕГЭ-2023

$\boxed{18}$ Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x^2 - 5x - y + 3) \cdot \sqrt{x - y + 3} = 0, \\ y = ax + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Задание 18

Модель: ЕГЭ-2023

Решение:

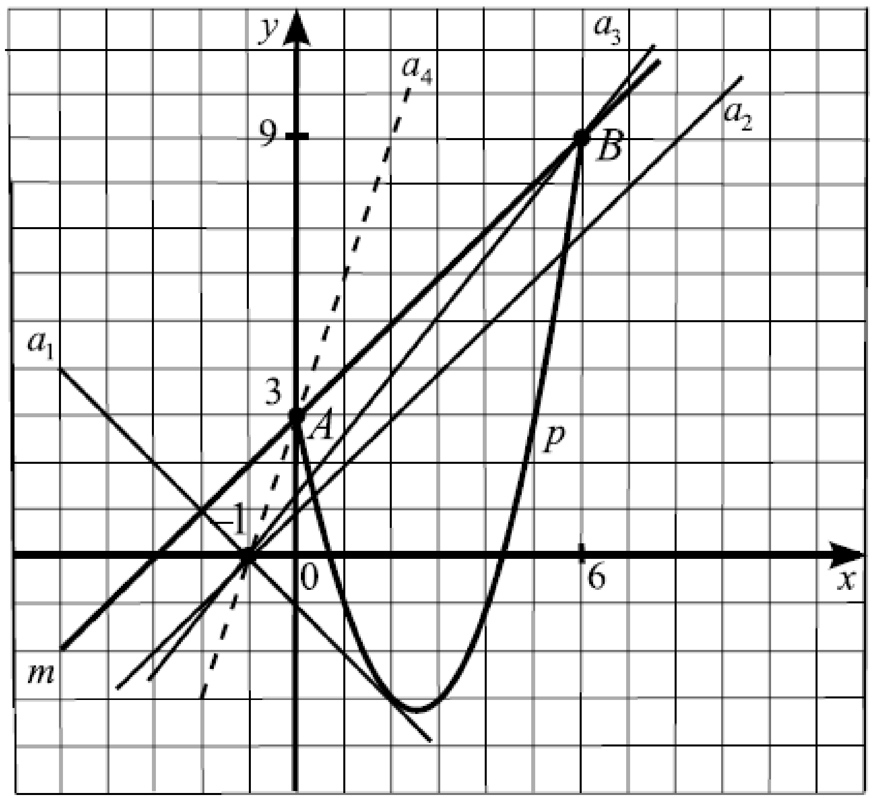
Первое уравнение системы равносильно системе

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 - 5x - y + 3 = 0, \\ x - y + 3 = 0, \end{array}\right. \\ x - y + 3 \geqslant 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = x^2 - 5x + 3, \\ y = x + 3, \end{array}\right. \\ y \leqslant x + 3. \end{cases}$$

Задание 18

Модель: ЕГЭ-2023

Дадим графическую интерпретацию уравнений полученной системы (см. рис. 2).



Задание 18

Модель: ЕГЭ-2023

В системе координат xOy графиком полученной системы будут прямая $m : y = x + 3$ и парабола $p : y = x^2 - 5x + 3$, определённая в полуплоскости $y \leqslant x+3$. Парабола p и прямая m пересекаются в точках $A(0; 3)$ и $B(6; 9)$.

Графиком второго уравнения исходной системы $y = a(x + 1)$ является пучок прямых, проходящих через точку $(-1; 0)$.

Найдём, при каких a прямая из пучка $y = a(x + 1)$ касается параболы p. У квадратного уравнения $x^2 - 5x + 3 = a(x + 1)$, $x^2 - (5 + a)x + 3 - a = 0$ дискриминант D должен быть равен нулю:

$D = (5 + a)^2 - 4(3 - a) = a^2 + 14a + 13 = 0$ при $a = -1; -13$.

Найдём абсциссы точек касания.

При $a = -1$ имеем $x_0^2 - 4x_0 + 4 = (x_0 - 2)^2 = 0$, $x_0 = 2$ — принадлежит полуплоскости $y \leqslant x + 3$. Прямая $y = a(x + 1)$ при $a_1 = -1$ пересекает (касается) кривые m и p ровно в двух точках.

Задание 18

Модель: ЕГЭ-2023

При $a = -13$ имеем $x_0^2 + 8x_0 + 16 = (x_0 + 4)^2 = 0$, $x_0 = -4$ — не принадлежит полуплоскости $y \leqslant x + 3$.

При $a_2 = 1$ прямая $y = x + 1$ будет параллельна прямой m и будет пересекать параболу p ровно в двух точках.

При $a_3 = \dfrac{9}{7}$ прямая $y = \dfrac{9}{7}(x + 1)$ будет проходить через т. B и вторично пересекать параболу p в некоторой точке, принадлежащей полуплоскости $y \leqslant x + 3$.

При $a_4 = 3$ прямая $y = 3(x + 1)$ будет проходить через т. A и вторично пересекать параболу p в некоторой точке, не принадлежащей полуплоскости $y \leqslant x + 3$.

Таким образом, условию задачи удовлетворяют следующие значения параметра $a \in \{-1; 1\} \cup \left[\dfrac{9}{7}; 3\right)$.

Ответ: $\{-1; 1\} \cup \left[\dfrac{9}{7}; 3\right)$.

Задание 19

Модель: ЕГЭ-2023

$\boxed{19}$ Есть контейнеры массой 7 тонн и 2 тонны и корабли грузоподъёмностью 10 тонн.

а) Можно ли увезти за один раз 6 контейнеров массой 7 тонн и 19 контейнеров массой 2 тонны на 9 кораблях?

б) Можно ли увезти за один раз 6 контейнеров массой 7 тонн и 17 контейнеров массой 2 тонны на 8 кораблях?

в) На каком наименьшем количестве кораблей можно ли увезти за один раз 6 контейнеров массой 7 тонн и 29 контейнеров массой 2 тонны?

Задание 19

Модель: ЕГЭ-2023

Решение:

а) Да, можно. На 6 кораблей погрузим по 2 контейнера: семитонный и двухтонный. На 2 корабля погрузим по 5 двухтонных контейнеров, на оставшийся корабль — три оставшихся двухтонных контейнера.

б) Нет, нельзя. Предположим, что мы смогли увезти грузы на 8 кораблях. Заметим, что семитонный контейнер не может находиться на одном корабле с другим семитонным контейнером. Тогда семитонный груз есть на 6 кораблях. На каждый из этих кораблей можно погрузить ещё не более одного двухтонного контейнера, а на пустой корабль — не более пяти двухтонных контейнеров. Тогда всего мы можем погрузить не более $6 + 5 \cdot 2 = 16$ двухтонных контейнеров, а их 17, противоречие. Значит, на 8 кораблях нельзя увезти требуемый груз.

Задание 19

Модель: ЕГЭ-2023

в) Покажем, что меньше чем 11 кораблей не хватит (например, 10). Действительно, никакие 2 семитонных контейнера не могут находиться на одном корабле. Значит, семитоннные контейнеры занимают 6 кораблей. На эти 6 кораблей можно погрузить ещё не более 6 двухтонных контейнеров (по одному на каждый). Останется не более 4 кораблей. На каждом можно разместить не более 5 двухтонных контейнеров. Итого на этих кораблях мы сможем разместить не более $6 + 4 \cdot 5 = 26$ двухтонных контейнеров, а нужно разместить 29. Значит, требуется хотя бы 11 кораблей. Покажем, как увезти контейнеры на 11 кораблях. На 6 кораблей погрузим по 2 контейнера: 1 семитонный и 1 двухтонный. Останется 5 кораблей и 23 двухтонных контейнеров. На 4 корабля погрузим по 5 двухтонных контейнеров, а на оставшийся корабль — ещё 3 двухтонных контейнера.

Ответ: а) да; б) нет; в) 11.

Задание 19

Модель: ЕГЭ-2023

$\boxed{19}$ Из пары натуральных чисел $(a; b)$, где $a > b$, за один ход получают пару $(a + b; a - b)$.

а) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(50; 9)$ пару, большее число в которой равно 200?

б) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(50; 9)$ пару $(408; 370)$?

в) Какое наименьшее a может быть в паре $(a; b)$, из которой за несколько ходов можно получить пару $(408; 370)$?

Задание 19

Решение.

а) Из пары $(50;9)$ за один ход получается пара $(59;41)$, за два хода получается пара $(100;18)$, за три хода получается пара $(118;82)$, а за четыре хода получается пара $(200;36)$.

б) Заметим, что за один ход из пары $(a;b)$ получается пара $(a+b;a-b)$, а за два хода получается пара $(2a;2b)$. Следовательно, из пары $(50;9)$ можно получить только пары $\left(2^k\cdot 50;2^k\cdot 9\right)$ и $\left(2^k\cdot 59;2^k\cdot 41\right)$, где k — неотрицательное целое число. Число 408 не равно $2^k\cdot 50$ и $2^k\cdot 59$, а значит, пару $(408;370)$ невозможно получить за несколько ходов из пары $(50;9)$.

Задание 19

в) Заметим, что пару $(c;d)$ за один ход можно получить только из пары $\left(\frac{c+d}{2};\frac{c-d}{2}\right)$ при условии, что числа c и d одной чётности.

Таким образом, пара $(408;370)$ получается из пары $(389;19)$, которая получается из пары $(204;185)$. Пару $(204;185)$ невозможно получить за один ход ни из какой пары, поскольку числа 204 и 185 имеют разную чётность. Следовательно, наименьшее число a в паре $(a;b)$, из которой за несколько ходов можно получить пару $(408;370)$, равно 204.

Ответ: а) да; б) нет; в) 204.

Задание 19

Модель: ЕГЭ-2022

$\boxed{19}$ Есть три коробки: в первой коробке 64 камня, во второй — 77, а в третьей коробке камней нет. За один ход берут по одному камню из любых двух коробок и кладут в оставшуюся. Сделали некоторое количество таких ходов.

а) Могло ли в первой коробке оказаться 64 камня, во второй — 59, а в третьей — 18?

б) Мог ли в третьей коробке оказаться 141 камень?

в) В первой коробке оказался 1 камень. Какое наибольшее число камней могло оказаться в третьей коробке?

Задание 19

Модель: ЕГЭ-2022

Решение:

а) $64,\ 77,\ 0 \to 64,\ 59,\ 18$

mod 3: $1\ \ 2\ \ 0 \to 1\ \ 2\ \ 0$

Ключевая таблица остатков:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{array}$$

и т.д.

б) $64,\ 77,\ 0 \to 0,\ 0,\ 141$

mod 3: $1\ \ 2\ \ 0 \nrightarrow 0\ \ 0\ \ 0$

в) $64,\ 77,\ 0 \to 1,\ 2,\ 138$

mod 3: $1\ \ 2\ \ 0 \to 1\ \ 2\ \ 0$

Задание 19

Решение.

а) Пусть 12 раз из первых двух коробок переложили камни в третью. Тогда в первой коробке оказалось 52 камня, во второй — 65 камней, а в третьей — 24 камня. Если после этого 6 раз переложить камни из второй и третьей коробок в первую, то в первой коробке окажется 64 камня, во второй — 59, а в третьей — 18.

б) Если в третьей коробке оказался 141 камень, то в первой и во второй коробках не осталось камней.

Пусть в какой-то момент в коробках оказалось a, b и c камней соответственно. Тогда после одного хода в коробках могло оказаться либо $a-1$, $b-1$ и $c+2$ камня, либо $a-1$, $b+2$ и $c-1$ камень, либо $a+2$, $b-1$ и $c-1$ камень соответственно. Заметим, что разность между числами камней во второй и в первой коробках либо не изменилась, либо изменилась на 3. Сначала разность чисел камней во второй и в первой коробках равнялась 13. Следовательно, ни в какой момент она не могла стать равной 0. Значит, в этих двух коробках всегда разное число камней. Следовательно, в третьей коробке не мог оказаться 141 камень.

Задание 19

в) В любой момент разность чисел камней во второй и в первой коробках равна $3k+13$, где k — целое число. Следовательно, если в первой коробке 1 камень, то во второй коробке $3k+14$ камней. Значит, во второй коробке оказалось не меньше 2 камней, а в третьей коробке не больше 138 камней.

Покажем, как в третьей коробке могло оказаться 138 камней. Пусть 64 раза из первых двух коробок переложили камни в третью. Тогда в первой коробке оказалось 0 камней, во второй — 13 камней, а в третьей — 128 камней. Если после этого 4 раза переложить камни из второй и третьей коробок в первую, то в первой коробке окажется 8 камней, во второй — 9, а в третьей — 124. Если после этого 7 раз переложить камни из первых двух коробок в третью, то в первой коробке окажется 1 камень, во второй — 2 камня, а в третьей — 138 камней.

Ответ: а) да; б) нет; в) 138.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН
www.legionr.ru

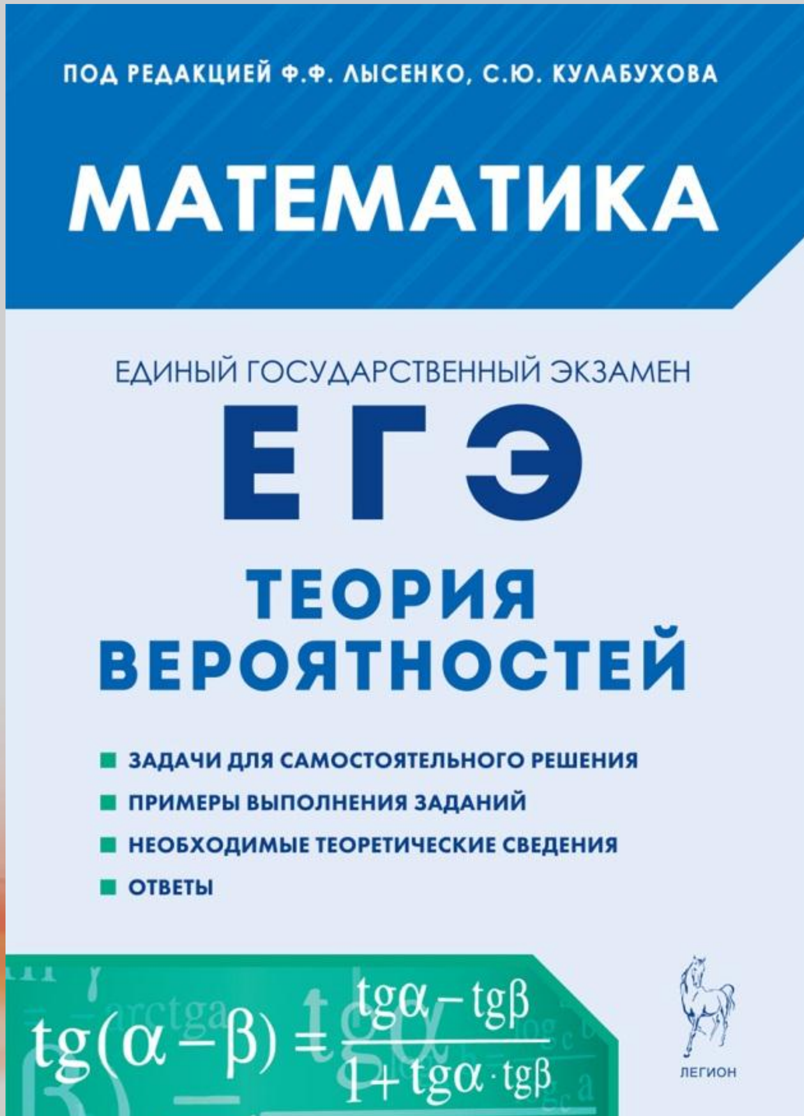
Книги для подготовки

Ростов-на-Дону
(863) 303-05-50

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕГИОН
www.legionr.ru

Книги для подготовки

Ростов-на-Дону
(863) 303-05-50



ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН
www.legionr.ru

Книги для подготовки

Ростов-на-Дону
(863) 303-05-50

Промокод

СКИДКА 30%

НА ВСЕ ПОСОБИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

Скидка действует
до 21 ноября 2023 г. (включительно)

При заказе в нашем интернет-магазине
www.legionr.ru ввести код:

математикапрофиль24

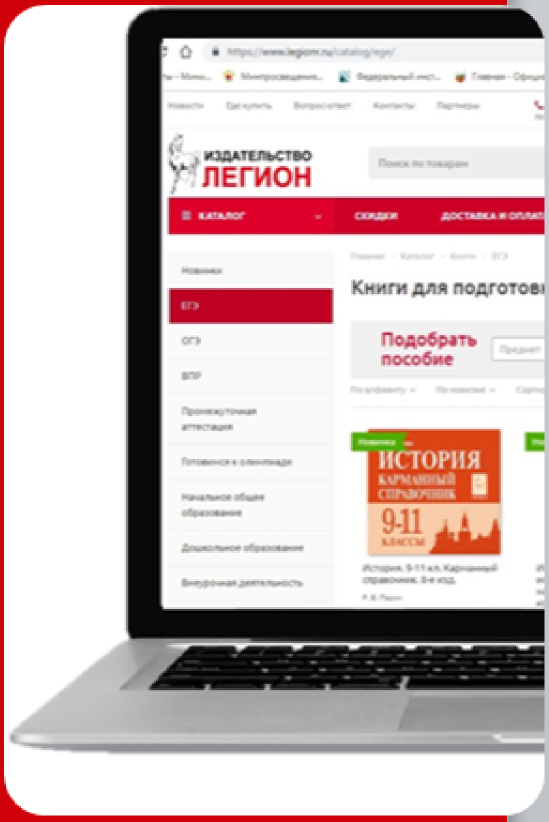
Где купить?

- **Официальный интернет-магазин издательства «Легион» www.legionr.ru**
  Оплата наличными, банковским переводом, при получении.
  Доставка «Почтой России» или курьерской службой.
  Скидки. Бесплатная доставка при заказе от 3 000 руб.

- **Интернет-магазины**
  www.ozon.ru, www.labirint.ru, www.wildberries.ru

- **Книжные магазины города**

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН



Где купить

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН

Издательство, отдел оптовых продаж
+7 (863) 303-05-50
legionrus@legionrus.com

Интернет-магазин
+7 (800) 707-37-12
+7 (863) 285-09-77
bookweb@legionrus.com

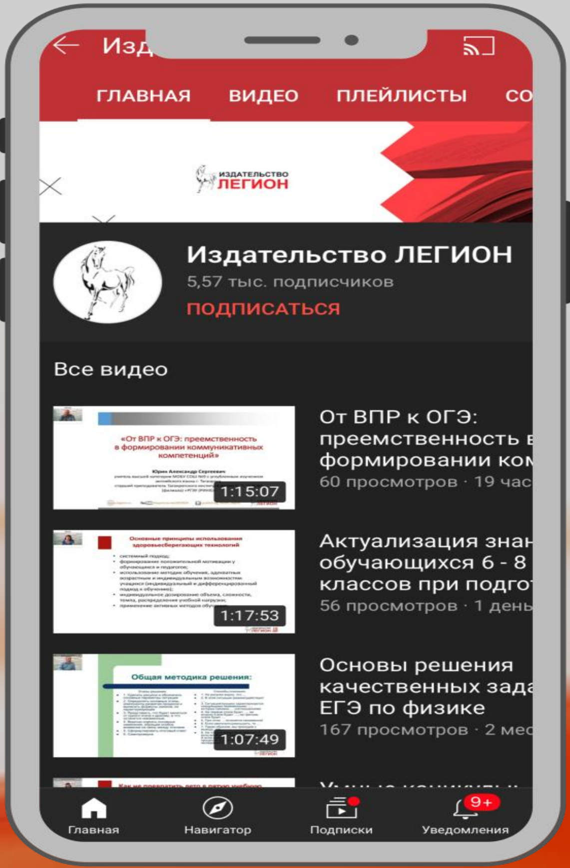
www.legionr.ru

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН™
www.legionr.ru

Ростов-на-Дону
(863) 303-05-50

ОНЛАЙН-ОБУЧЕНИЕ

ВИДЕОУРОКИ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ
подготовка к ЕГЭ и ОГЭ
на канале издательства «Легион»
www.youtube.com



БЕСПЛАТНЫЕ ВЕБИНАРЫ

для учителей и обучающихся
на сайте www.legionr.ru

legionrus@legionrus.com

Вступайте в группу

«Издательство «Легион»

в социальных сетях:

В Контакте

facebook

Видео вебинаров смотрите на YouTube.

Адрес для корреспонденции:

344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!