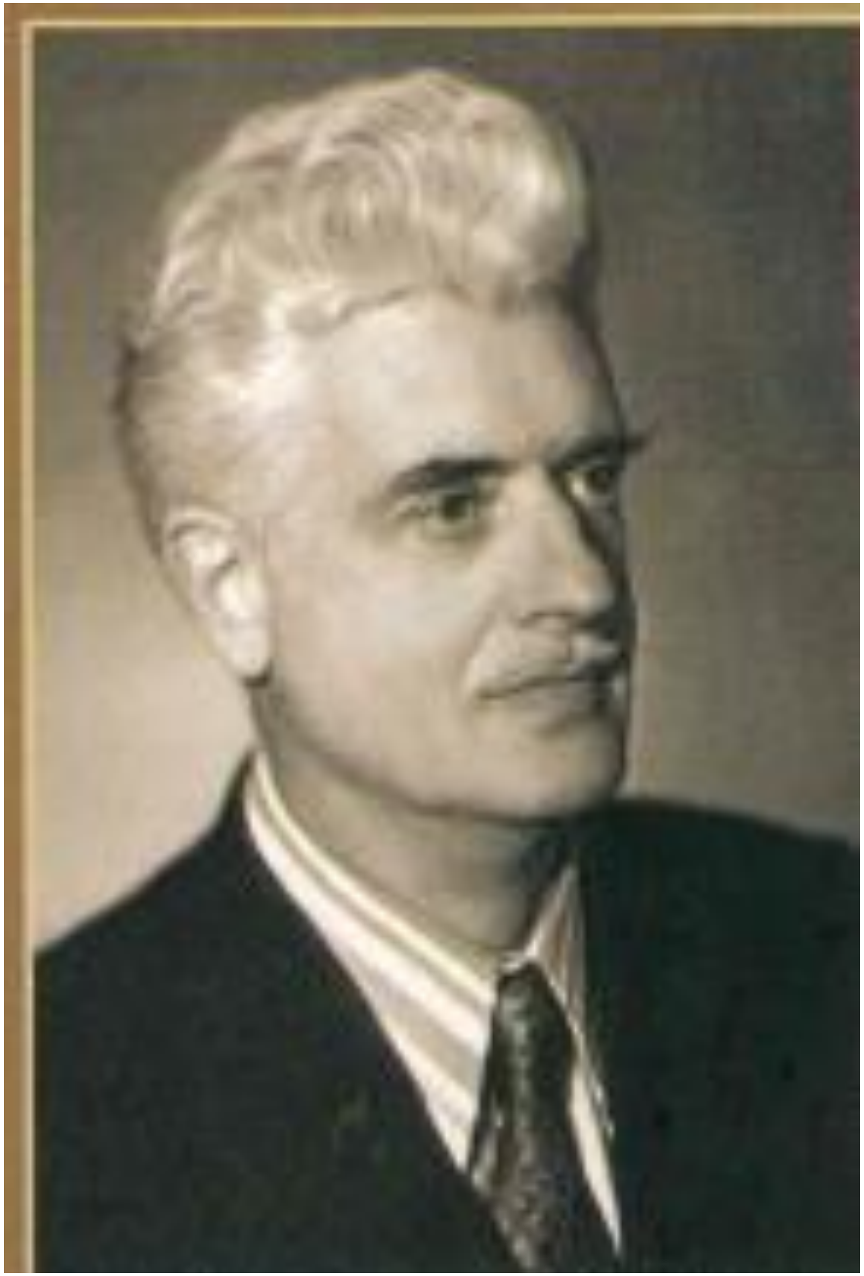
Использование книг по математике В.В. Мадера при организации внеурочной деятельности в основной и средней школе. Часть 1

Вебинар ведёт
Генералова Марина Владимировна
руководитель методического отдела издательства «Мнемозина»,
награждена медалью «За заслуги в образовании»
generalova@mnemozina.ru

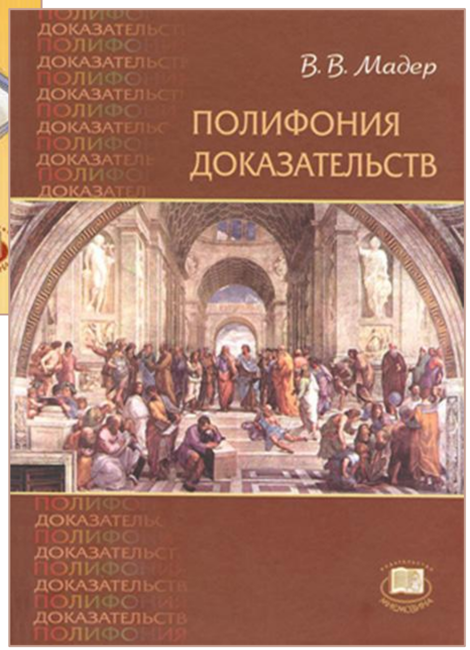
Об авторе



Виктор Викторович Мадер – профессор математики, автор нескольких десятков научных работ.

Около 40 лет В.В. Мадер проработал в Нижнетагильском Педагогическом институте.
Читал курсы математической логики, математического анализа, числовых систем, историю математики.
Несколько лет заведовал кафедрой математического анализа.
Руководил научным обществом учащихся, вёл большую работу с учителями математики.

Книжная полка: книги Виктора Викторович Мадера



Мир неделимых

Эвристика
и искусство
суммирования

О методах решения логических задач:

1. графический
2. табличный
3. с помощью диаграмм Эйлера-Венна

ГЛАВА 1. ПОИСК ИСТИНЫ

История с телефонными звонками

Слава детектива пришла к Шерлоку Холмсу после истории с телефонными звонками. Эта история произошла с учениками одного класса.

Однажды Андрей, Борис, Володя, Даша и Галя договорились вечером пойти в кино. Выбор кинотеатра и сеанса они решили согласовать по телефону. Было также решено, что если кому-то с кем-то созвониться не удастся, то поход в кино отменяется. Вечером у кинотеатра собрались не все, и поэтому посещение кино сорвалось. На следующий день стали выяснять, кто кому звонил. Оказалось, что Андрей звонил Борису и Володе, Володя звонил Борису и Даше, Борис звонил Андрею и Даше, Даша звонила Андрею и Володе, а Галя звонила Андрею, Володе и Борису.

Холмс во время этого разговора нарисовал какую-то схему, а потом сказал: «Все ясно! У кинотеатра собрались Андрей, Борис и Володя, так как они созвонились со всеми, а Галя и Даша не смогли созвониться и поэтому в кино не пришли».

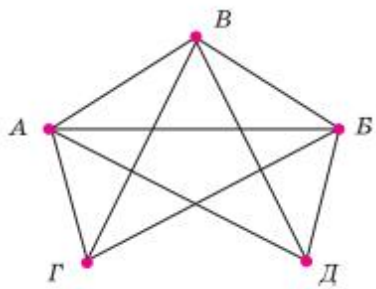


Рис. 1

Ребята удивились: «Как ты это узнал?»

Холмс ответил: «Все просто. Смотрите: я нарисовал пять точек и обозначил их буквами *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д* (рис. 1). Это первые буквы ваших имен. Затем я соединил те точки, которые соответствуют именам созвонившихся ребят. Например, Андрей созвонился с Борисом и Володей, поэтому я провел отрезки *АБ* и *АВ*. После того как я начертил все такие отрезки, получился рисунок, который вы видите.

Кто принес цветы?

Однажды рано утром кто-то принес букет цветов и поставил его в вазу на учительском столе. Когда ребята собрались, учительница спросила: «А знаете ли вы, кто принес цветы?» Ребята стали гадать. Были высказаны различные предположения: цветы принесли Андрей и Борис, Андрей и Даша, Андрей и Сергей, Борис и Даша, Борис и Володя, Володя и Галя, Галя и Даша. Учительница сказала, что в одном из этих предположений одно имя названо правильно, а второе — неправильно. Во всех же остальных предположениях оба имени названы неправильно. Холмс в это время чертил какую-то схему и после короткого раздумья сказал: «Цветы принес Сергей».

Конечно, всем было интересно узнать, как Холмс пришел к такому выводу, и поэтому ему пришлось выйти к доске и дать соответствующие объяснения. Он нарисовал на доске шесть точек и обозначил их буквами *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д*, *С*. Этими буквами (как и в прошлый раз) он обозначил тех ребят, имена которых были упомянуты в различных предположениях. Затем, так как в каждом предположении были названы два имени, Холмс соединил соответствующие точки отрезками. После этого получился рисунок (рис. 2).

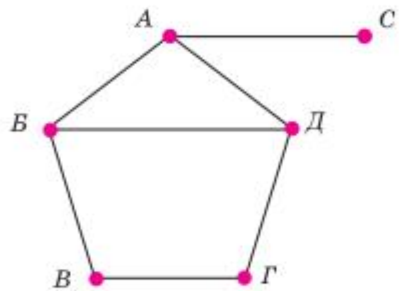


Рис. 2

«Заметим теперь,— сказал Холмс,— что из всех сделанных вами предположений заслуживает внимания только то, в котором одно из указанных имен названо правильно. Это значит, что мы должны найти такой отрезок, одному из концов которого соответствует правильно названное имя. Но этот конец не может быть общим концом нескольких отрезков, так как правильно названное имя содержится только в одном-единственном предположении.

Значит, на нашем рисунке надо искать такую точку, которая является концом одного-единственного отрезка. На рисунке только одна такая точка — это точка *С*. Значит, правильно было названо имя Сергей».

1—12

ЗАДАЧИ

1. Как-то раз мы отправились в лес по грибы. На следующий день все только об этом и говорили. Холмс спросил, разводили ли мы костер. Кто-то ответил: «Конечно, разводили! Мы решили так: пусть двое заготовят хворост, разведут костер и вскипятят чай, а остальные пусть собирают грибы». Холмс спросил: «Кто же разводил костер?» И тут ребята закричали: «Пусть он сам вычислит наших костровых. Мы назовем ему несколько имен и посмотрим, сможет ли он узнать, какие ребята на самом деле были костровыми». Это предложение всем понравилось, и Холмсу было названо пять вариантов костровых. Были названы Андрей и Борис, Андрей и Володя, Андрей и Галя, Галя и Даша, Даша и Сергей.

Холмс сказал, что этих сведений недостаточно. Тогда наш староста сказал, что в четырех вариантах одно имя названо правильно, а одно — неправильно, а в одном варианте оба имени названы неверно.

После этого Холмс сразу же назвал наших костровых. Кого же он назвал?

2. В нашем классе было принято устраивать приятные сюрпризы. Одним из таких сюрпризов была стенгазета, выпущенная к 1 Мая. В стенгазете было написано, что редколлегия (два человека) надеется быть узнанной.

Всем, конечно, хотелось узнать, кто же подготовил эту газету. Были высказаны следующие предположения: газету выпустили Андрей и Борис, Борис и Володя, Володя и Галя, Володя и Сергей, Сергей и Галя, Сергей и Даша, Галя и Даша. Учительница сказала, что в пяти из этих предположений одно имя названо правильно, одно — неправильно, а в двух предположениях оба имени названы неверно. Кроме того, выяснилось, что Борис не мог участвовать в выпуске газеты.

Ребята спросили Холмса, может ли он по этим данным узнать, кто выпустил стенгазету. Вместо ответа Холмс назвал этих ребят. Кого же он назвал?

3. В театре готовились к постановке новой пьесы, и мы решили пойти на премьеру. Кому-то даже было поручено заблаговременно купить билеты. Когда же дата премьеры была объявлена, оказалось, что мы забыли, кому это было поручено. Ребята высказали ряд догадок. Возникли следующие предположения: билеты должны были купить Андрей и Борис, Борис и Володя, Борис и Галя, Володя и Галя, Володя и Даша, Даша и Галя, Сергей и Даша.

Пока ребята спорили, староста достал план культурных мероприятий и установил, кто должен был купить билеты. Но староста не стал называть никаких имен. Он сказал только, что в двух из обсуждаемых догадок одно имя названо правильно, а другое — неправильно; во всех же остальных догадках оба имени названы неверно. После этого ребята под руководством Холмса довольно быстро установили, кому было поручено приобретение

билетов. Староста подтвердил, что названное решение правильное. Кому же было поручено приобретение билетов?

4. У Гали на дне рождения были пять ее одноклассниц. Спустя несколько дней подружки стали вспоминать, в каком порядке они сидели за столом. Галя сказала: «Лена сидела справа от меня». Лена вспомнила, что справа от нее сидела Нина, а Нина утверждала, что она сидела справа от Гали. Вера сказала, что слева от нее сидела Ася. Ася считала, что справа от нее сидела Даша. Даша же думала, что она сидела слева от Веры.

Холмс внимательно слушал этот разговор. После короткого раздумья он сказал, что первые три утверждения несовместны и последние три утверждения тоже несовместны. Девочки посовещались и признали, что Холмс прав. Они сказали, что две девочки ошиблись, а утверждения всех остальных девочек истинны. После этого Холмс нарисовал круглый стол и показал, в каком порядке девочки сидели за этим столом. Как выглядел этот рисунок?

5. Девочки решили провести в нашем классе соревнования по художественной гимнастике. В соревнованиях должны были участвовать Галя, Даша, Лена, Ася и Вера. Мальчики стали обсуждать возможный исход соревнований.

Были высказаны следующие предположения.

Володя сказал, что Лена будет первой, а Вера — второй. Андрей сказал, что первой будет Даша, а Галя будет четвертой. Борис сказал, что Ася будет третьей, а Лена — пятой. Сергей сказал, что Даша будет второй, а Вера — третьей. После окончания соревнований оказалось, что все девочки заняли разные места, а относительно наших предположений выяснилось, что каждый из мальчиков сделал одно правильное и одно неправильное заявление. Холмсу рассказали об этом, и он быстро сообразил, как распределились места. Каким же было это распределение?

6. Как-то летом Холмс отдыхал в Сочи. На пляже он познакомился с четырьмя мальчиками, которых звали Арташ, Отар, Сурен и Гурам. Холмс побеседовал с каждым в отдельности и узнал следующее.

Арташ сказал, что, по его мнению, Сурен из Еревана, а Гурам из Тбилиси. Отар же сказал, что ему кажется, что Сурен из Тбилиси, а Арташ из Баку. Когда же Холмс спросил Сурена, тот сказал, что Арташ из Сочи, а Отар из Тбилиси. Холмс записал все эти сведения и показал их Гураму. Тот рассмеялся и сказал, что все мальчики действительно из разных городов; что же касается высказанных предположений, то каждый из мальчиков прав только наполовину. После этого Холмс быстро определил, откуда кто приехал. Что же выяснил Холмс?

7. Через несколько дней Холмс снова встретил на пляже Отара, Сурена и Арташа. Гурама не было, его ждали, и поэтому разговор невольно зашел о нем. Отар сказал, что он слышал, будто Гурам учится в десятом классе и имеет собственную лодку. Сурен сказал, что он слышал совсем другое: что Гурам учится в девятом классе и никакой лодки у него нет. А Арташ от

ГЛАВА 2. КТО ЕСТЬ КТО?

Холмс распутал много сложных дел. При этом довольно часто проблема сводилась к необходимости ответить на вопрос: кто есть кто? О делах именно такого рода я сейчас и расскажу.

У кого какая профессия?

Это дело началось с того, что Холмс познакомился с группой строителей. Их было пять человек: Андреев, Борисов, Иванов, Петров и Сидоров. Профессии у них были разные: один из них — маляр, другой — плотник, третий — штукатур, четвертый — каменщик, пятый — электрик. Они рассказали о себе следующее.

Петров и Иванов никогда не держали в руках малярной кисти. Петров и Борисов живут в одном доме со штукатуром. Андреев и Петров подарили электрику красивую вазу. Борисов и Петров помогали плотнику строить гараж. Борисов и Сидоров по субботам встречаются у электрика, а штукатур по воскресеньям приходит в гости к Андрееву.

После этого они спросили, может ли Холмс по этим данным узнать, у кого из них какая профессия. Холмс ответил, что сейчас попробует это сделать. Он нарисовал следующую таблицу:

Фамилия	Профессия				
	Маляр	Плотник	Штукатур	Каменщик	Электрик
Андреев			—		—
Борисов		—	—		—
Иванов	—				●
Петров	—	—	—	●	—
Сидоров					—

Затем он рассказал, как рассуждал. Из первого условия видно, что Петров и Иванов не маляры. Значит, в столбце «Маляр» против этих фамилий ставим прочерки. Из второго условия следует, что Петров и Борисов не штукатуры. Значит, в столбце «Штукатур» против этих фамилий тоже ставим прочерки. Аналогично ставим прочерки, соответствующие всем остальным условиям. Теперь видно, что в столбце «Электрик» есть только одна свободная клетка. Значит, электрик — это Иванов. В соответствующей клетке ставим точку. Нетрудно заметить, что в строке «Петров» тоже есть только одна свободная клетка. Значит, Петров — каменщик. В соответствующей клетке ставим точку. Мы получим картину, зафиксированную в нашей таблице.

Поскольку Иванов — электрик, то все остальные специальности — не его профессии, и поэтому в строке «Иванов» мы везде (кроме клетки с точкой) ставим прочерки; так как каменщик — Петров, то и в столбце «Каменщик» прочеркиваем пустые клетки.

После этого в строке «Борисов» окажется только одна свободная клетка. Значит, Борисов — маляр. Ставим точку в этой клетке и прочеркиваем все остальные клетки столбца «Маляр». Поступая дальше аналогичным образом, узнаем, что Андреев — плотник, а Сидоров — штукатур.

Таким образом, действительно удалось узнать, кто есть кто.

ГЛАВА 3. ТРУДНЫЙ ВОПРОС: СКОЛЬКО?

Вопросы, интересовавшие доктора Ватсона

Ребята из нашего класса посещали три кружка: математический, физический и химический. Списки членов этих кружков хранились у Холмса, так как он был почетным членом всех трех кружков. Однажды Ватсон решил организовать еще и кружок юных медиков. В этот кружок он решил пригласить только тех ребят, которые пока ни в какие кружки еще не были записаны. Чтобы узнать, сколько таких ребят, Ватсон обратился к Холмсу.

Холмс сказал, что всего в классе 36 человек, а кружки посещают: математический — 18 человек, физический — 14 человек, химический — 10 человек.

Ватсон удивился: «Как же это может быть? Ведь 18 + 14 + 10 = 42, а в классе только 36 человек». Холмс объяснил, что дело просто в том, что некоторые ребята ходят в два, а возможно, и в три кружка. Ватсон согласился и спросил: «А как же мы узнаем, сколько человек не посещает никаких кружков?» Холмс ответил: «Чтобы это узнать, нужно сначала взять списки математического и физического кружков и подсчитать, сколько ребят посещает оба кружка. Потом нужно сделать то же самое и с другими списками».

Через некоторое время Ватсон получил следующие данные: все три кружка посещают 2 человека, математический и физический — 8, математический и химический — 5, физический и химический — 3.

— Теперь,— сказал Холмс,— посмотри на картинку, которую я нарисовал. Она нам поможет ответить на вопрос, который тебя интересует. На этой картинке большой круг изображает множество всех учеников нашего

класса. Внутри этого круга расположены три круга меньшего диаметра: эти круги изображают соответственно множества членов математического, физического и химического кружков. Для ясности эти круги обозначены буквами $М$, $Ф$, $Х$.

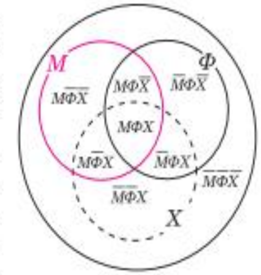


Рис. 13

Общей части всех трех кругов соответствует множество ребят, посещающих все три кружка. Поэтому эту часть я обозначил буквами $МФХ$, а ту область, которая изображает множество ребят, посещающих математический и физический кружки, но не посещающих химический кружок, — буквами $МФ\overline{Х}$. Аналогичным образом обозначены и все остальные области (рис. 13).

Следует заметить, что в математике рисунки подобного рода используются очень давно. Распространению этого метода во многом способствовал знаменитый математик Леонард Эйлер. Поэтому круги, изображаемые на рисунках подобного рода, часто называют **кругами Эйлера**.

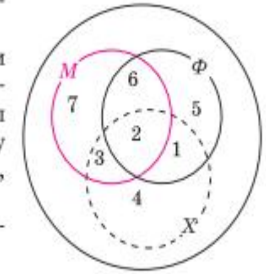
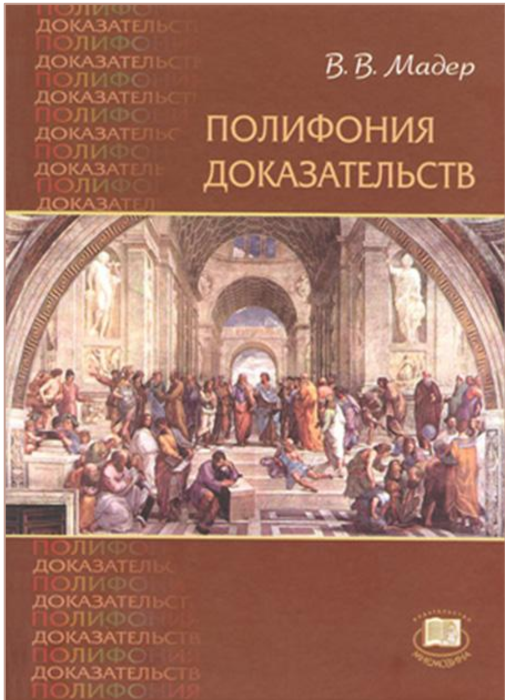


Рис. 14

Теперь обратимся к числовым данным и перейдем к рисунку 14.

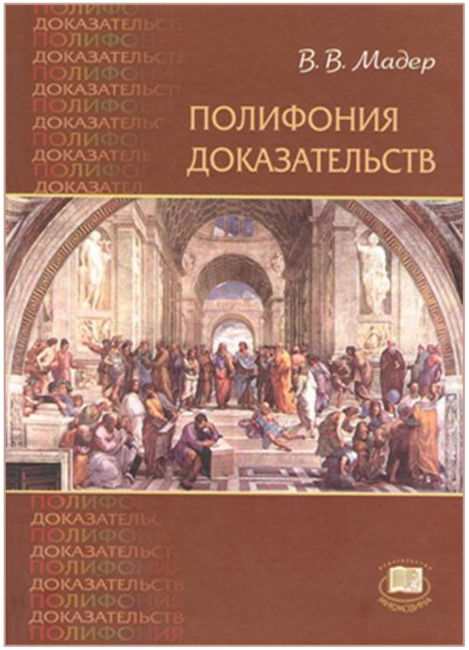
В область $МФХ$ впишем число 2, так как все три кружка посещают 2 человека. Далее, известно, что ребят, посещающих математический и физический кружки, всего 8. Значит, в область $МФ$ надо вписать число 8. Но область $МФ$ состоит из двух частей: $МФХ$ и $МФ\overline{Х}$, причем в $МФХ$ входят 2 человека. Значит, на долю $МФ\overline{Х}$ остается 6. Теперь рассмотрим область $МХ$, на которую приходится 5 человек. Эта область тоже состоит из двух частей. На $МФХ$ приходится 2. Значит, на $М\overline{Ф}Х$ приходится 3.

ОГЛАВЛЕНИЕ



О чем эта книга

Как показывает название книги, речь в ней идет о теоремах планиметрии, большинство из которых доказано несколькими способами, основанными на разных идеях и разных эвристических соображениях. Такое многообразие оправдано тем, что в ходе каждого доказательства непременно обнаруживаются и раскрываются какие-то новые связи рассматриваемого материала с исходной системой знаний. В результате теорема каждый раз видится по-новому, и ее понимание становится более полным, более глубоким. Кроме того, каждое отдельное доказательство имеет еще и свою особенность — свое специфическое «звучание», а в совокупности эти звучания перерастают в многоголосую полифонию. Именно поэтому книга и названа «Полифония доказательств». Чтобы лучше понять природу и целесообразность этой полифонии, пофантазируем немного и представим себе чудо-город «Планиметрия», в котором каждый дом, дворец, крепость, храм — это только хранилище какой-то теоремы, а логические связи между ними представлены множеством улиц, переулков, арок, переходов, мостов и туннелей. Чтобы доказать теорему, т. е. подтвердить, что она действительно существует, надо найти в этом городе дорогу (логическую цепочку переходов, мостов, улиц), ведущую через промежуточные здания-теоремы к искомой теореме. Дорог таких может быть несколько, и чем больше мы их находим, тем лучше ориентируемся в этом городе, тем лучше его узнаем. Именно поэтому и нужна «Полифония доказательств».



1.8. Теорема о катете, лежащем в прямоугольном треугольнике против угла в 30°

Предварительные эвристические соображения, полезные при поиске доказательства сформулированной выше теоремы

Поиск доказательства любой теоремы начинается с вопросов, с чего начать; что предпринять? И эти вопросы вполне правомерны, так как в самой формулировке теоремы никаких указаний на этот счет не содержится. Поэтому нужны какие-то идеи, какие-то эвристические соображения, какие-то советы, позволяющие сдвинуться с мертвой точки. Рассмотрим некоторые из этих советов.

1. Можно попытаться достроить данную фигуру (фигуры) до более симметричного вида и воспользоваться затем свойствами этой новой фигуры. В данном случае, когда дан прямоугольный треугольник с углом в 30°, удобно пристроить к нему такой же треугольник так, чтобы у них был общий катет, тогда получится равносторонний треугольник. Но можно второй треугольник приложить так, чтобы общей стала гипотенуза, и тогда получится прямоугольник.

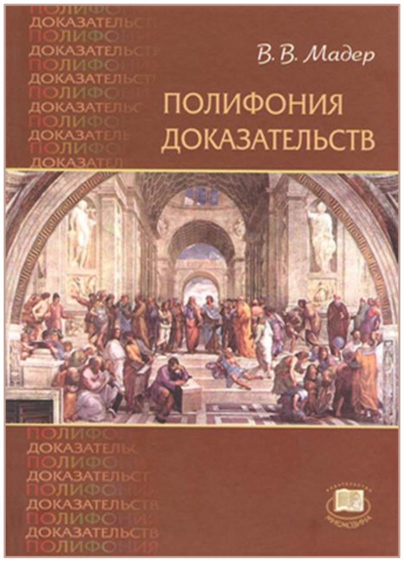
2. Можно подумать и о возможности использования описанной окружности. А так как мы в данном случае имеем дело с прямоугольным треугольником, то это сразу наводит на мысль об окружности Фалеса, описанной как раз около прямоугольного треугольника.

3. Если в теореме утверждается, что какие-то элементы находятся в определенном отношении, то можно подумать о том, в какой теореме говорится о таком же отношении. Если, например, речь идет об отношении 2 : 1, то естественно вспомнить теорему о медианах, которые, пересекаясь, делятся в отношении 2 : 1.

4. Если в теореме речь идет о равенстве отрезков, то полезной может оказаться *идея поиска посредника*. Рассматриваемые отрезки могут, например, оказаться соответственными сторонами двух треугольников. Тогда эти треугольники являются посредниками: доказав их равенство, мы убедимся и в равенстве отрезков. Посредником может быть и какой-то новый отрезок. Доказав тогда, что каждый из рассматриваемых отрезков равен посреднику, мы приходим к выводу о равенстве данных отрезков.

5. Поскольку в рассматриваемой теореме речь идет о прямоугольном треугольнике с углом в 30°, то второй острый угол этого треугольника будет равен 60°. А это значит, что можно попытаться сделать такое дополнительное построение, чтобы образовался равносторонний треугольник, одним из углов которого является именно этот угол.

Теорема. Если в прямоугольном треугольнике один из острых углов равен 30°, то катет, лежащий против этого угла, равен половине гипотенузы.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$.

Доказать: $AC = \frac{1}{2}AB$.

Доказательство 1. Сделаем дополнительное построение: к данному треугольнику ABC пристроим такой же треугольник BCK (рис. 23). В треугольнике ABC $\angle B = 30°$, $\angle C = 90°$, поэтому $\angle A = 60°$. Так как $\triangle ABC = \triangle BCK$, то $\angle K = 60°$. К тому же и $\angle ABK = 30° + 30° = 60°$. Значит, все углы треугольника ABK равны 60°. Следовательно, это равносторонний треугольник и поэтому $AB = AK$. Но $AK = 2AC$ и, значит, $AC = \frac{1}{2}AB$. ■

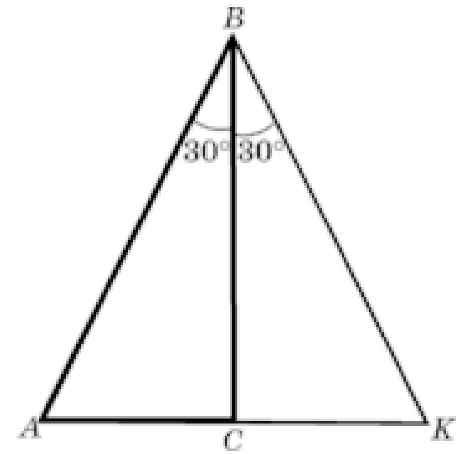
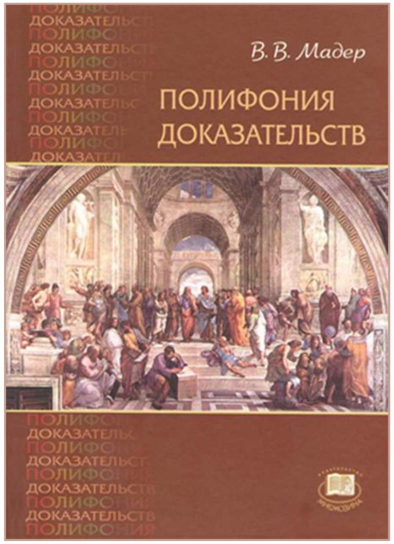


Рис. 23



Доказательство 2. Обозначим $AC = a$ (рис. 24). На гипотенузе AB отложим отрезок AK, равный AC, т. е. равный a; соединим точки K и C. Мы получили равнобедренный треугольник, в котором $AC = AK = a$. Значит, $\angle 1 = \angle 2$. А так как $A = 60°$, то на долю углов 1 и 2 остается 120° и, значит, $\angle 1 = \angle 2 = 60°$.

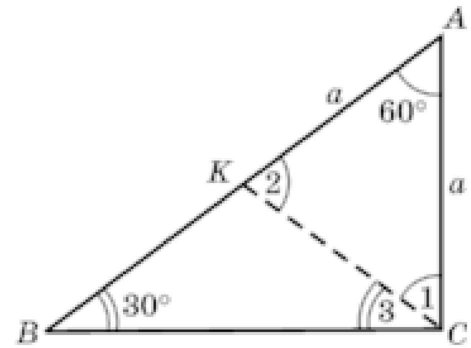
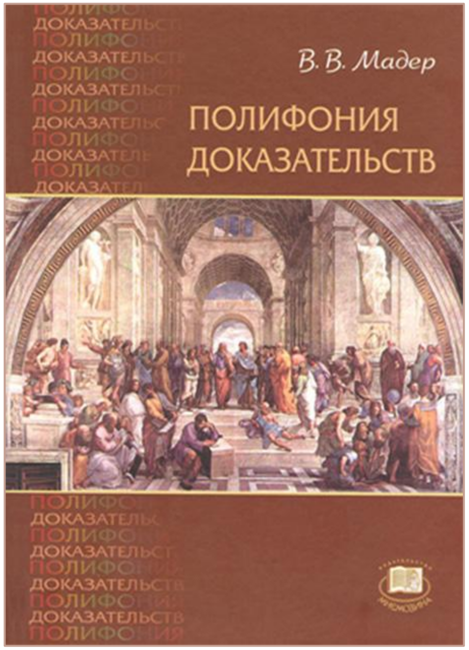


Рис. 24

Таким образом, оказалось, что все три угла треугольника AKC равны 60°. Значит, это равносторонний треугольник и, следовательно, $KC = a$. $\angle BKC$ смежный с углом 2, поэтому $\angle BKC = 180° - 60° = 120°$. В треугольнике BKC теперь известны два угла: $\angle BKC = 120°$ и $\angle B = 30°$. Значит, на долю третьего угла остается тоже $30° : \angle 3 = 30°$. Оказалось, что в треугольнике BKC оба угла при основании равны 30°. Следовательно, это равнобедренный треугольник: $BK = KC = a$. Теперь видно, что

$AB = 2a$. Так как $AC = a$, то $AC = \frac{1}{2}AB$. ■



Доказательство 3. Около прямоугольного треугольника ABC опишем окружность (рис. 25). Ее центр K согласно теореме Фалеса лежит на середине гипотенузы AB. Значит, $AK = KB = R$. По следствию из теоремы Фалеса медиана, проведенная к гипотенузе, тоже равна радиусу, т. е. $KC = R$. Значит, треугольник AKC равнобедренный и $\angle 1 = \angle A = 60°$. Тогда на долю третьего угла тоже приходится 60°. Поэтому треугольник AKC равносторонний и $AC = AK = R$. Теперь видно, что $AC = R$, $AB = 2R$ и поэтому $AC = \frac{1}{2}AB$. ■

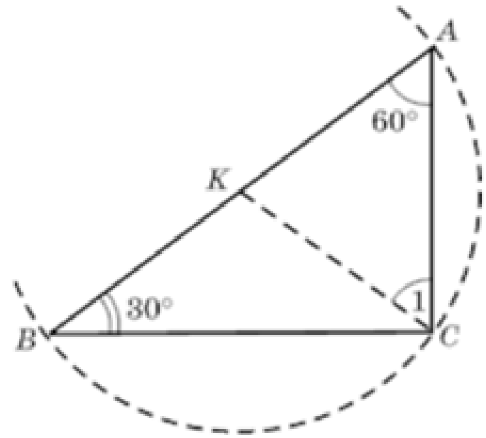
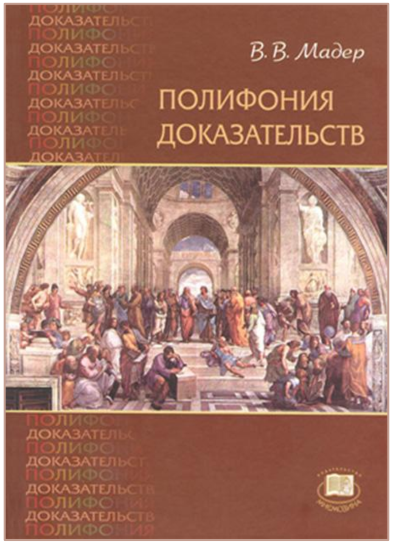


Рис. 25



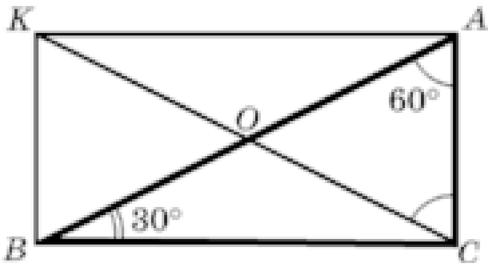
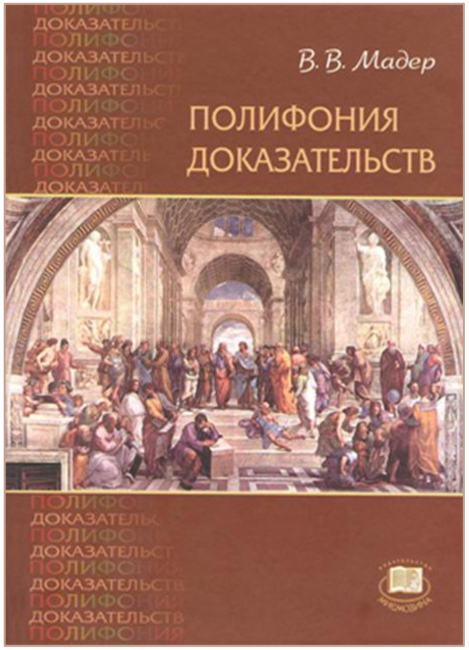


Рис. 26

Доказательство 4. Достроим треугольник ABC до прямоугольника $AKBC$ и проведем диагональ KC (рис. 26). $\triangle ABC = \triangle CKA$ (по катетам). Из равенства этих треугольников следует: $\angle ACK = \angle CAB$. А так как $\angle CAB = 60°$, то и $\angle ACK = 60°$. Но тогда в треугольнике OAC на долю третьего угла при точке O тоже приходится $60°$. Поэтому треугольник OAC равносторонний и $AC = OA$. А так как диагонали прямоугольника, пересекаясь, делятся пополам, то $OA = OB$ и, следовательно, $AC = \frac{1}{2}AB$. ■



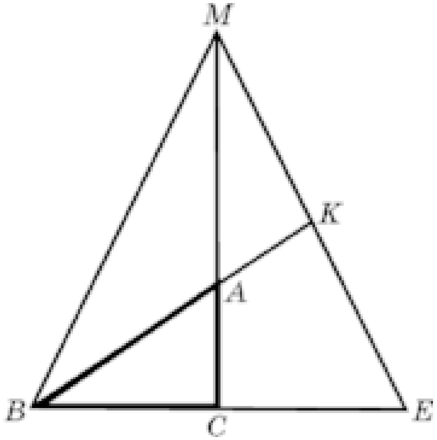
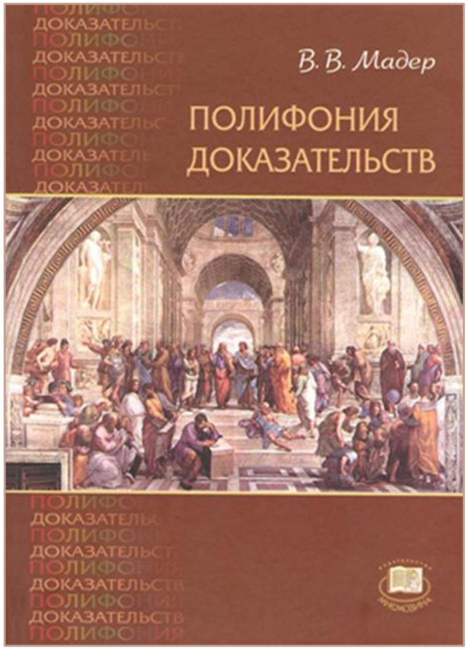


Рис. 27

Доказательство 5. Представим себе данный прямоугольный треугольник ABC как часть объемлющего его равностороннего треугольника BME (рис. 27) и построим сначала именно этот равносторонний треугольник BME. Проведем в нем медианы BK и MC, пересекающиеся в точке A. Так как треугольник BME равносторонний, то медиана BK будет и биссектрисой, поэтому $\angle ABC = 30°$. Из того, что треугольник BME равносторонний следует также, что медиана MC будет высотой. Поэтому $\angle MCB = 90°$. Таким образом, частью треугольника BME оказался как раз наш прямоугольный треугольник ABC с углом в 30°. И нам теперь надо доказать, что $AC = \frac{1}{2}AB$.

Медианы BK и MC, пересекаясь, делятся в отношении $1 : 2$. Значит, $AC = x$, $AM = 2x$. А так как в равностороннем треугольнике медианы равны, то и вторая медиана BK состоит из таких же частей: $AK = x$, $AB = 2x$. Теперь видно, что $AC = x$, $AB = 2x$ и, значит, $AC = \frac{1}{2}AB$. ■



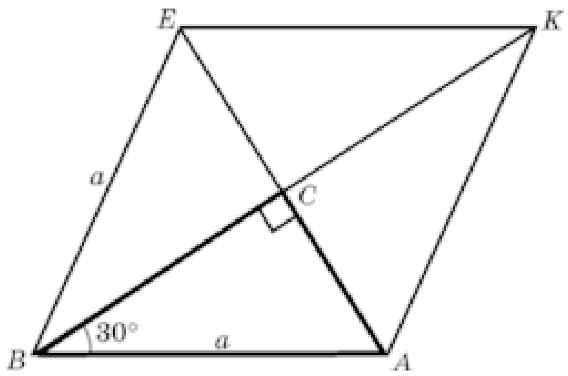
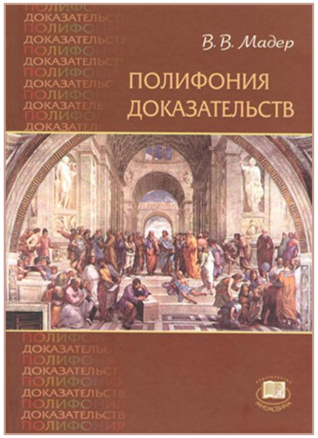


Рис. 28

Доказательство 6. Опять рассмотрим прямоугольный треугольник ABC как часть некоторой объемлющей фигуры. Этой объемлющей фигурой будет ромб $ABEK$ (рис. 28), который получится из двух равных равносторонних треугольников ABE и AEK. Проведем диагональ ромба BK, пересекающую AE в точке C. Треугольник ABE равносторонний. Поэтому $AB = BE = AE = a$. А так как диагонали ромба в точке пересечения делятся пополам, то $AC = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}a$. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов. Поэтому $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle ABE$. Но $\angle ABE = 60°$ как угол равностороннего треугольника ABE, значит, $\angle ABC = 30°$. Теперь видно, что в прямоугольном треугольнике ABC против угла в $30°$ лежит катет $AC = \frac{1}{2}a$. Вспоминая, что гипотенуза $AB = a$. Значит, $AC = \frac{1}{2}AB$. ■



Доказательство 7. Отметим на середине гипотенузы AB точку M (рис. 29). Тогда $AM = MB = a$. Проведем $MK \parallel BC$. Теперь видно, что угол BAC пересечен параллельными прямыми, которые отсекают на стороне AB равные отрезки $AM = MB$. Поэтому, в силу теоремы Фалеса, и на другой стороне этого угла отсекутся равные отрезки: $AK = KC$. А это значит, что MK — медиана треугольника AMC. Так как треугольник ABC прямоугольный, то $BC \perp AC$. Поскольку $MK \parallel BC$, то и $MK \perp AC$, а это значит, что MK — высота треугольника AMC. Таким образом, оказалось, что MK является и высотой, и медианой, и поэтому треугольник AMC равнобедренный, следовательно, $\angle MCA = \angle A$. Так как $\angle A = 60°$, то и $\angle MCA = 60°$. Но тогда на долю третьего угла AMC тоже приходится $60°$ и, следовательно, треугольник AMC равносторонний. Поэтому $AC = AM = a$. Теперь видно, что $AC = a$, $AB = 2a$ и, значит, $AC = \frac{1}{2}AB$. ■

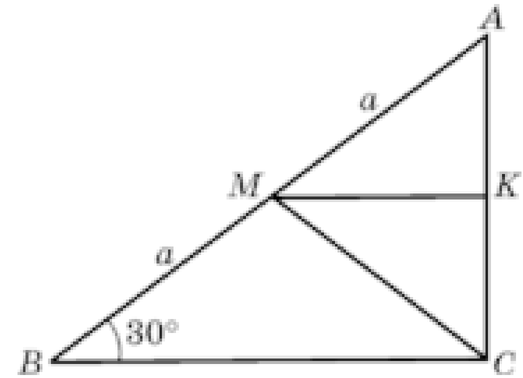
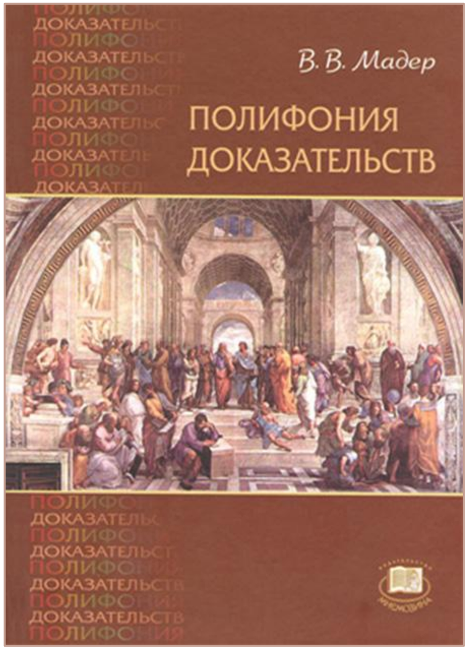


Рис. 29



Доказательство 8. Мы сейчас воспользуемся эвристическим советом, который гласит: начните с конца. При доказательстве теорем это значит, что надо начинать не с того, что дано, а с того, что требуется доказать. Нам, в частности, надо доказать, что катет, лежащий против угла в $30°$, равен половине гипотенузы. С этого утверждения мы и начнем. Наряду с данным треугольником ABC построим вспомогательный прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 30), в котором катет $A_1C_1 = AC = a$, а гипотенуза $A_1B_1 = 2a$, т. е. катет равен половине гипотенузы. Впритык к этому вспомогательному треугольнику построим такой же треугольник $B_1C_1K_1$, в котором $C_1K_1 = a$, $B_1K_1 = 2a$. В результате получился равносторонний треугольник $A_1B_1K_1$, в котором все стороны равны $2a$. Этот треугольник будет и равноугольным и все его углы равны $60°$. Значит, и $\angle A_1B_1K_1 = 60°$, а так как он состоит из двух равных углов, одним из которых является $\angle A_1B_1C_1$, то $\angle A_1B_1C_1 = 30°$. Теперь видно, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (по катету и углу в $30°$). Из равенства этих треугольников следует: $AB = A_1B_1$. Значит, $AC = a$, $AB = 2a$, т. е. $AC = \frac{1}{2}AB$. ■

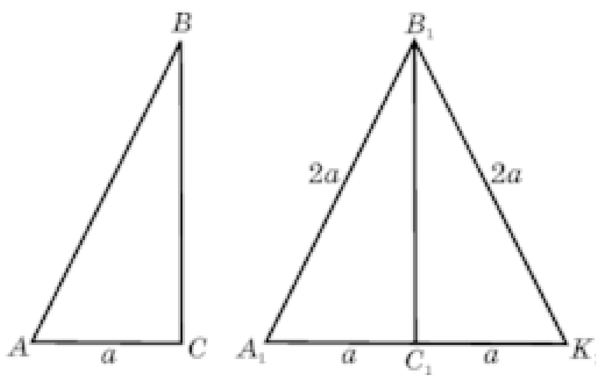
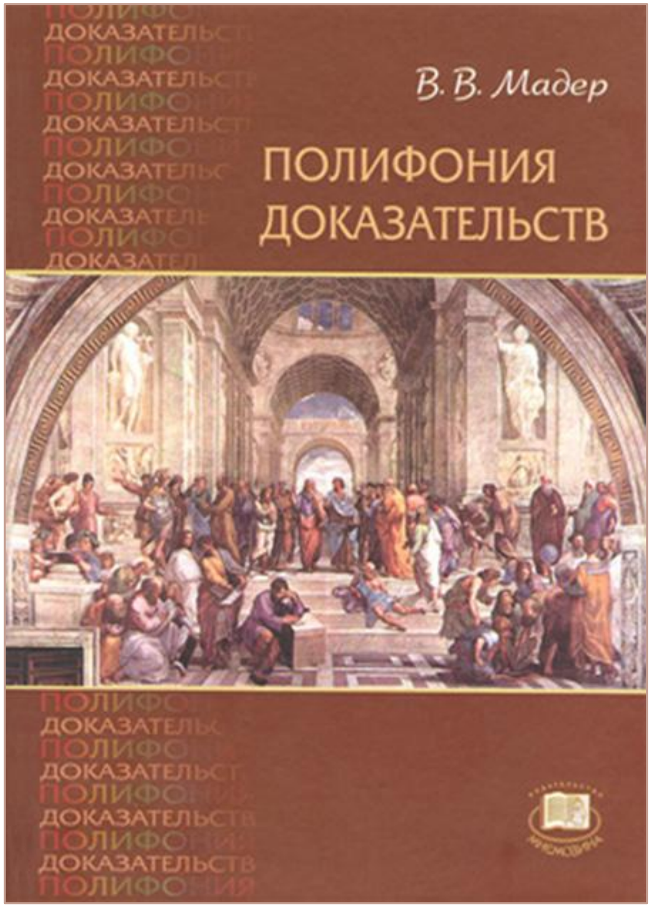
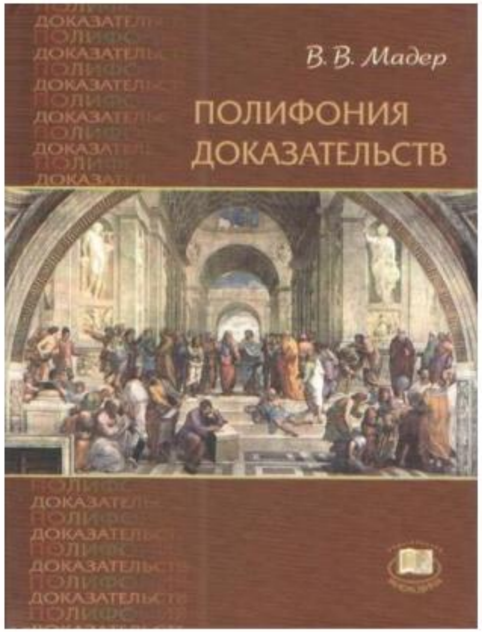


Рис. 30

ОГЛАВЛЕНИЕ


В. В. Мадер
ПОЛИФОНИЯ
ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Мадер В.В. "Полифония доказательств." Пособие для учащихся.



Артикул: 106.607.14.09

209 ₽/шт

Много

1 В корзину

Цена действительна только для интернет-магазина и может отличаться от цен в розничных магазинах

Школа в кармане
ЭЛЕКТРОННЫЕ ИЗДАНИЯ

Легко... со «ШКОЛОЙ В КАРМАНЕ»

Марина [generalova@mnemozina.ru]

Корзина
Ваша корзина пуста

Подбор издания

Поиск на сайте | Найти

Уровень образования

Общее

Класс

1 2 3 4 5 6
7 8 9 10 11

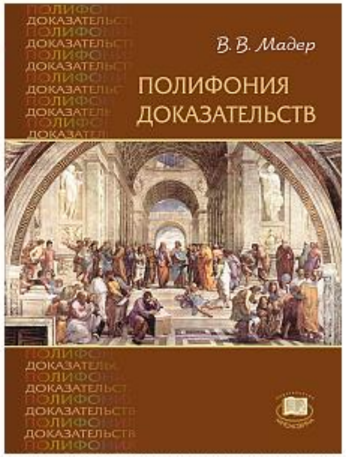
Предметы

- Алгебра
- Биология
- География
- Геометрия
- Изобразительное искусство
- Литература
- Математика
- Музыка
- Обществознание
- Окружающий мир
- Основы религиозных культур и светской этики
- Русский язык
- Технология
- Физика
- Физическая культура
- Химия

Подробнее об издании

Мадер В.В.

Полифония доказательств. Учебное пособие



Предмет: математика
Вид издания: учебное пособие
Класс: 7—11
Количество частей: 1
Издательство: Мнемозина
Год выпуска: 2009
Объём: 22,6 Мб (344 с.)
Операционная система: Windows, iOS, Android
Возрастные ограничения: нет

Цена: 99 руб.
Период: 365 дней

КУПИТЬ

Мадер В.В.
Полифония доказательств. Учебное пособие

Данная книга адресована учителям и учащимся школ с углублённым изучением математики. Но большая ее часть может быть использована и в обычных школах. Приведённые в пособии теоремы планиметрии доказываются различными способами; во многих случаях приведено до десяти доказательств. При этом обсуждаются и некоторые проблемы эвристики, приводятся интересные историко-математические сведения и рассказывается о жизни и деятельности великих математиков.

Книга может быть использована и для стимулирования самостоятельной творческой деятельности учащихся. Она будет полезна также студентам математических отделений педагогических вузов.


Скоро
в продаже!
РУССКИЙ ЯЗЫК
9
8
ГЕОМЕТРИЯ
7
МАТЕМАТИКА
5
6
Русский язык
9
лгебра
9

Мир неделимых

В.В. Мадер

Краткое содержание

1. Первая глава посвящена обзору традиционной школьной теории геометрических величин. Этот обзор показывает, каким тернистым и сложным был путь построения этой теории, сколько выдумки и фантазии потребовалось, чтобы пробиться к желаемой цели. В обзор включена и проблема научного обоснования этой теории, которая оказалась не менее сложной.

2. Вторая глава книги посвящена описанию драматических событий, связанных с открытием мира неделимых, и с построением на его основе необычной «нестандартной» теории геометрических величин. Она так и называется: «От идеи неделимых к теории геометрических величин». Эта часть книги представляет собой широкое историко-математическое повествование, непосредственно связанное с философской гносеологической проблематикой. По ходу повествования затронуты и некоторые вопросы эвристики и методики преподавания математики.

3. Третья глава книги посвящена решению интересной задачи, заключающейся в корректном построении аксиоматической теории геометрических величин, основанной на всё той же идее неделимых. Эта часть книги играет роль эпилога. В ней речь идёт о том, чем всё завершилось, к какой простой и красивой теории привели все те исследования и поиски.

Теория измерения длин отрезков

В теории измерения длин отрезков предполагается, что процесс измерения протекает в идеализированных условиях с абсолютной точностью и без каких-либо погрешностей. Этот процесс состоит из последовательности отдельных шагов.

1. Устанавливается, сколько раз единица измерения укладывается в измеряемом отрезке. Если остаётся остаток, то переходят ко второму шагу.
2. Берётся десятая доля единицы измерения и устанавливается, сколько раз она укладывается в остатке. Если снова остаётся остаток, то переходят к следующему шагу.
3. Берётся соответственно сотая доля единицы измерения и каждый раз устанавливается, сколько раз эта доля укладывается в предыдущем остатке.

Процесс измерения может иметь два исхода:
-либо на каком-то шаге остатка не остаётся и процесс измерения на этом заканчивается,
- либо всё время остаются все новые и новые остатки и конец процесса измерения можно себе представить только в области трансфинитного.

В первом случае результатом измерения будет конечная десятичная дробь. Во втором же случае мы имеем дело с бесконечным процессом, и его результатом будет бесконечная десятичная дробь.

Такова вкратце теория измерения длин отрезков.

Теория измерения площадей многоугольников

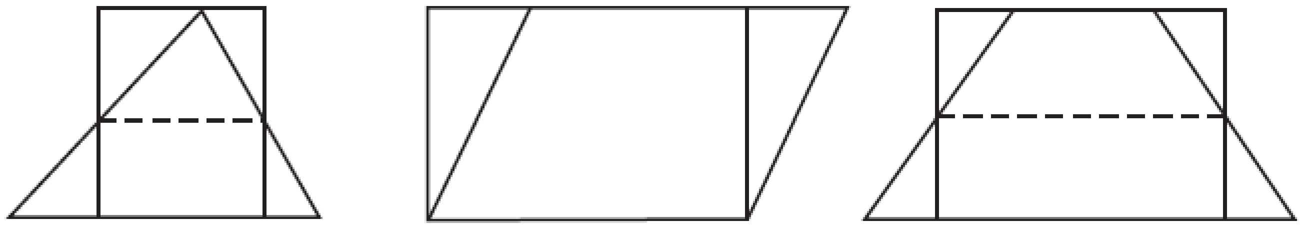
В случае прямоугольника приходится рассматривать три случая.

1. Если *a и b (длина и ширина прямоугольника) выражаются целыми* числами, то число *a одновременно показывает, сколько единичных* квадратов поместилось в одном ряду, а число *b показывает число получившихся рядов*. Значит, произведение *ab будет общим числом всех единичных* квадратов, уместившихся в прямоугольнике, — а это как раз и есть площадь этого прямоугольника.

2. Если *a и b рациональные числа, то выбирается вспомогательная* более мелкая единица измерения, и тогда длина и ширина прямоугольника, измеренные этой вспомогательной единицей, будут выражаться целыми числами и всё сведётся к предыдущему случаю.

3. Если *a и b иррациональные числа, то можно построить две возраст*ающие последовательности , *такие, что их пределы будут равны a и b*. Тогда прямоугольник длины *an и* ширины *bn* будет лишь немного меньше данного, а с увеличением числа *n* эта разница неуклонно будет уменьшаться. Значит, произведение *anbn* будет приближенным значением площади данного прямоугольника. В пределе же снова получится произведение *ab,* которое и принимается за величину площади этого прямоугольника.

Дальнейшее построение теории площадей многоугольников протекает довольно гладко. В случае треугольника, параллелограмма и трапеции строится равносоставленный прямоугольник, способ измерения площади которого уже известен. В случае многоугольника более сложного вида его разрезают на треугольники и тогда площадь многоугольника находят, как сумму площадей составляющих его треугольников



Теория измерения длин кривых линий и площадей криволинейных фигур

Теорема. Отношение длины окружности к диаметру есть величина постоянная, не зависящая от выбора окружности.

Для доказательства рассматривают две окружности радиусов R и r, в каждую из которых вписан правильный многоугльник со сторонами a_n и b_n соответственно. Периметры многоугольников обозначены через P_n и p_n, где $P_n = na_n$, $p_n = nb_n$.

Из подобия треугольников, выделенных на рисунке 2, следует, что $\frac{a_n}{R} = \frac{b_n}{r}$. Значит, $\frac{na_n}{2R} = \frac{nb_n}{2r}$, то есть $\frac{P_n}{2R} = \frac{P_n}{2r}$.

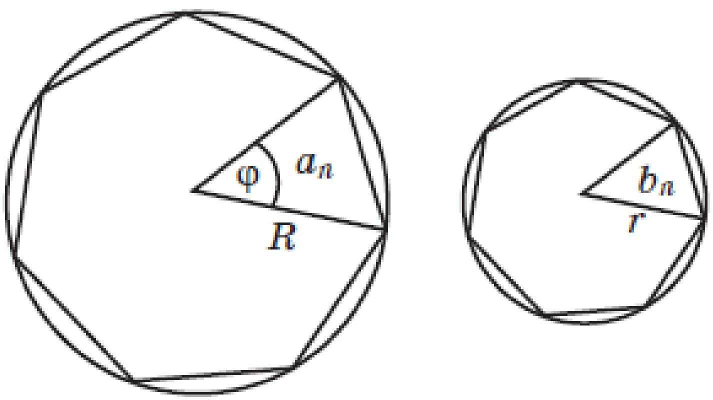


Рис. 2

Переходя к пределу и обозначая длины окружностей соответственно через C и c, получим: $\frac{C}{2R} = \frac{c}{2r}$.

Отношение длины окружности к диаметру оказалось одинаковым у обеих окружностей. Значит, это отношение действительно является постоянной величиной, которую принято обозначать буквой π. Следовательно

$$\frac{C}{2R} = \pi$$

и, значит, длина любой окружности $C = 2\pi R$.

Лемма. $\lim\limits_{a \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.$

Из рисунка 3 видно, что

$$AC < \cup AKC < AD + DC.$$

Разделив все члены этого неравенства на 2, получим:

$$AB < \cup AK < AD.$$

Положим теперь, что $OA = 1$, тогда

$$OB = \cos\alpha,\ AB = \sin\alpha,\ AD = \\ = \operatorname{tg}\alpha,\ \cup AK = \alpha$$

и наше неравенство примет вид

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha.$$

Разделив его почленно на $\sin\alpha$, получим

$$1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}.$$

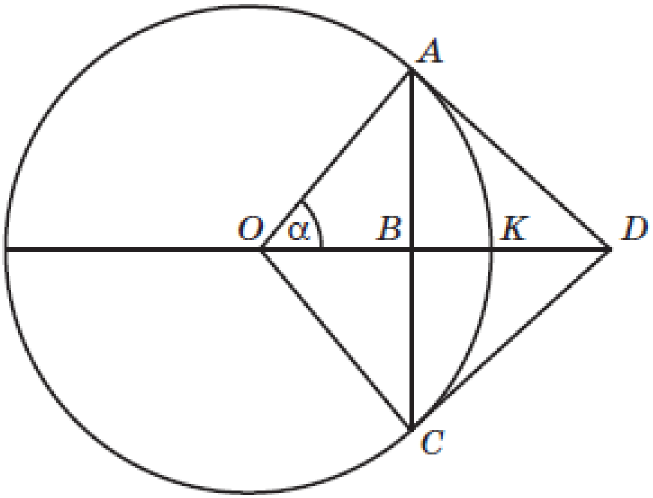


Рис. 3

Заметим теперь, что $\lim\limits_{\alpha \to 0} \cos\alpha = 1.$ Значит, величина $\frac{\alpha}{\sin\alpha}$ заключена между 1 и переменной величиной, также стремящейся к 1. Следовательно, и сама эта величина должна стремиться к 1. Поэтому $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{\sin\alpha} = 1$, а значит, и $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$, т. е. лемма доказана.

Теорема. Площадь круга равна πR^2.

Обратимся снова к рисунку 2. Многоугольник, вписанный в круг, состоит из n треугольников, один из которых изображён на нашем рисунке. Площадь этого треугольника равна $\frac{1}{2}R^2 \sin\varphi$, где $\varphi = \frac{2\pi}{n}$. Значит, площадь многоугольника равна $n \cdot \frac{1}{2}R^2 \sin\frac{2\pi}{n}$. Следовательно, площадь круга S равна:

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \frac{1}{2}R^2 \sin\frac{2\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{nR^2}{2} \cdot \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} \cdot \frac{2\pi}{n}\right).$$

Заметим теперь, что в силу леммы $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = 1$, и следовательно,

$S = \frac{nR^2}{2} \cdot \frac{2\pi}{n} = \pi R^2.$

К вопросу о традиционной школьной теории измерения геометрических величин

Лемма. Если в наклонной плоскости находится треугольник площади S и если эта плоскость наклонена к горизонтальной плоскости под углом α, то площадь проекции этого треугольника равна $S\cos\alpha$.

Теорема. Площадь эллипса с полуосями a и b равна πab.

Сначала докажем, что если в наклонной плоскости помещен круг радиуса a, а угол наклона α выбран так, что $\cos\alpha = \frac{b}{a}$, то проекцией этого круга будет эллипс с полуосями a и b.

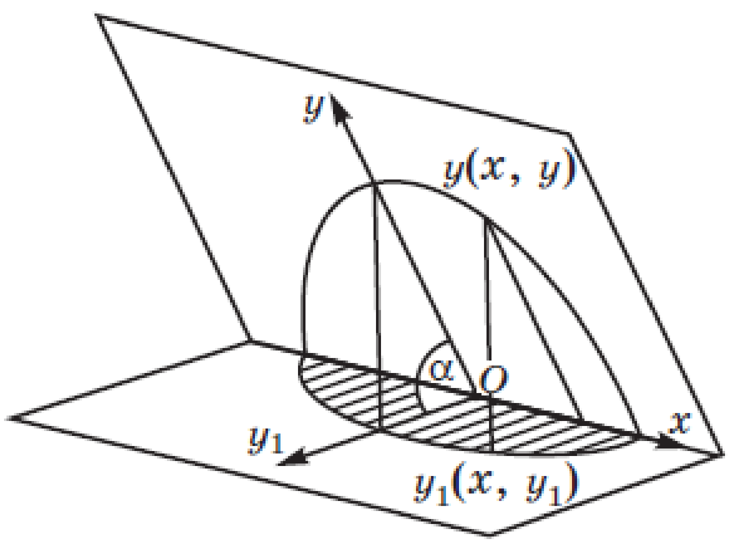


Рис. 4

На рисунке 4 в наклонной плоскости изображен полукруг радиуса a, а в горизонтальной плоскости — его проекция. Уравнение окружности $x^2 + y^2 = a^2$. На окружности выбрана точка $A(x, y)$. Её проекция — точка A_1 имеет ту же абсциссу (x_1), но её ордината y_1 немного меньше: $y_1 = y\cos\alpha$. Так как $\cos\alpha = \frac{b}{a}$, то $y_1 = y\frac{b}{a}$. Значит, $y = \frac{ay_1}{b}$.

Подставим значения x и y в уравнение окружности: $x_1^2 + \left(\frac{ay_1}{b}\right)^2 = a^2$. Разделив обе части этого равенства на a^2, получим уравнение эллипса:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Значит, проекцией круга действительно является эллипс с полуосями a и b.

Приступим теперь к вычислению площади этого эллипса. Для этого впишем в круг n-угольник и обозначим его площадь через S_n. Проекцией этого n-угольника будет многоугольник, вписанный в эллипс; его площадь обозначим через σ_n. В силу леммы $\sigma_n = S_n \cos\alpha$. Переходя к пределу, получим

$$S_{\text{эл}} = S_{\text{кр}} \cdot \cos\alpha = \pi a^2 \cdot \frac{b}{a} = \pi ab.$$

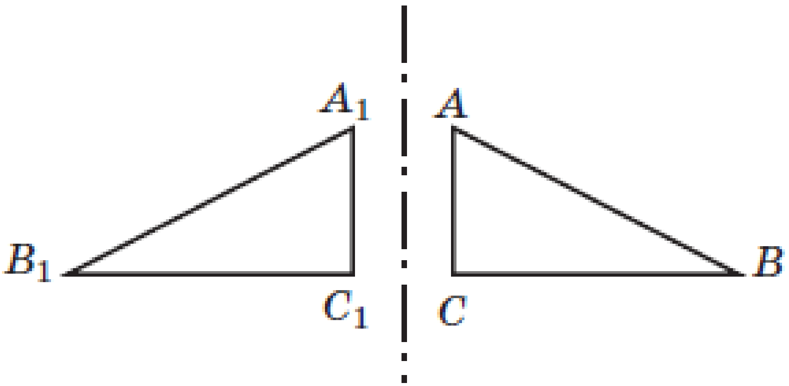


Рис. 5

Приведём несколько примеров.

1. На рисунке 5 изображены два треугольника, симметрично расположенные относительно данной оси. Оставаясь в плоскости рисунка, их нельзя совместить друг с другом. Но если допустить выход за пределы плоскости, то можно повернуть одну из полуплоскостей вокруг оси симметрии на 180° и тогда эти треугольники всё же совместятся.

2. Совершенно очевидно, что в нашем трёхмерном мире, в котором мы живем, правый и левый ботинок существенно отличаются друг от друга — их нельзя совместить друг с другом. Мы не можем правый ботинок сделать левым. Но то, что невозможно в трёхмерном пространстве, вполне осуществимо в четырёхмерном. Для этого надо взять правый ботинок, выйти в четырёхмерное пространство и вернуть оттуда ботинок симметрично отображённым. Впервые до этого додумался в 1827 году Август Фердинанд Мёбиус (1790—1868).

3. Совершенно очевидно, что два тела различного объёма не могут быть равносоставленными. Но если принять более общую теоретико-множественную точку зрения и рассматривать каждое тело как точечное множество, а частями этого тела считать точечные подмножества произвольного вида, то можно доказать, что любые два тела различного объёма тем не менее состоят из конечного числа одинаковых частей. А это значит, что они равносоставлены в теоретико-множественном смысле. Эту удивительную, парадоксальную теорему доказали Стефан Банах (1892—1945) и Альфред Тарский (1901—1983). Она теперь так и называется: теорема Банаха — Тарского.

Следует, однако, заметить, что в школьном курсе математики обо всем этом можно рассказать разве что в обзорном порядке. Нужно учитывать особенности психологии ученика. Поэтому в школе принят совсем другой, более элементарный уровень строгости: критерием правильности и верности математических построений считается их интуитивная ясность и наглядная убедительность, а логические тонкости воспринимаются как «архитектурные излишества».

Несколько слов о методике изучения темы «Площадь фигуры»

Мне представляется, что она должна быть следующей.

1. Сначала даётся исходное эмпирическое определение площади как числа, показывающего, сколько раз единица измерения площади или её доли укладываются в данной фигуре.

2. Исходя из этого определения доказывается, что площадь прямоугольника равна произведению его сторон. При этом рассматриваются три случая: когда длина сторон выражается целыми, дробными и иррациональными числами.

3. Рассматривается площадь треугольника, при этом целесообразно разобрать пример двух различных преобразований данного треугольника, приводящих к построению двух разных по форме прямоугольников, которые тем не менее равновелики одному и тому же данному исходному треугольнику (рис. 11). Тут же возникнут вопросы: Откуда мы знаем, что получившиеся прямоугольники будут иметь одинаковую площадь? На чем основана эта уверенность? Каковы те скрытые, «очевидные» предпосылки, которые являются основой этой уверенности?

4. В ходе эвристической беседы выявляется, что использованы два свойства площади: аддитивность (А) (мы убеждены, что площадь всей фигуры равна сумме площадей ее частей) и инвариатность (И) относительно

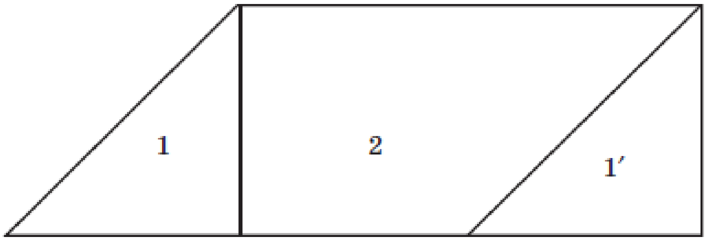


Рис. 11

движений (мы убеждены, что при перемещении фигуры с одного места на другое её площадь не меняется). Далее выявляются ещё два свойства: Нормированность (Н) (заранее должна быть указана единица измерения и для всех измерений она должна оставаться одной и той же) и положительность (П) (площадь не может быть отрицательной, так как это привело бы к парадоксальному выводу, что площадь какой-то части фигуры больше площади всей фигуры).

5. Подводится итог. Отмечается, что понятие площади предполагает наличие соответствия: каждой фигуре соответствует некоторое вполне определённое число, выражающее величину площади этой фигуры. Но наличие такого однозначного соответствия означает, что площадь — это

функция. Кроме того, как выяснилось в ходе эвристической беседы, эта функция должна обладать свойствами аддитивности, инвариантности, нормированности и положительности. Существенно также (и это было доказано), что указанные свойства определяют эту функцию вполне однозначным образом. А это означает, что существует только одна единственная функция, обладающая этими свойствами; и именно поэтому можно определить площадь как функцию, обладающую свойствами аддитивности, инвариантности, нормированности и положительности.

6. В приведённом определении сказано, что площадь — это функция. Но о том, каков функциональный закон — каков конкретный способ вычисления отдельных значений этой функции, — об этом в этом определении ничего не сказано. И это ведь не случайно! Хорошо известно же, что для одной и той же функции могут существовать несколько способов вычисления её значений, т. е. может существовать несколько эквивалентных друг другу функциональных законов, которые приводят к одинаковым результатам. Вот, например, $y = x^2 + x + 1$, $y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$, $y = (x + 1)^2 - x$ — это одна и та же функция, но задана она с помощью различных функциональных законов, которые воспринимаются как имена этих функций. На самом же деле это просто разные имена одной и той же функции (но то, что это действительно одна и та же функция, конечно, должно быть доказано).

То же самое относится и к функциональным законам, с помощью которых вычисляются значения площади. Есть две возможности.

1) Роль функционального закона могут выполнить непосредственные измерительные и вычислительные процедуры, которые обычно и применяются. Но если быть абсолютно корректным, то надо доказать, что при этом выполнены условия аддитивности, инвариантности, нормированности и положительности — только они гарантируют, что результат вычислений — площадь, а не значение какой-либо другой функции. (Соответствующее доказательство есть, например, в книге Анри Лебега «Об измерении величин».

2) Роль функционального закона могут выполнить и опосредованные вычисления и измерения: мы можем измерять не площадь фигуры, а неделимые этой фигуры и, пользуясь затем аксиомой Кавальери, найти этим окольным путём и площадь самой фигуры. Но чтобы быть уверенным, что на этом пути найдены подлинные значения площади, надо проверить, что выполнены условия А, И, Н, П.

Поскольку с помощью функционального закона вычисляются значения функции, то описание этого закона можно считать и определением функции. Поэтому если в рассмотренных случаях 1 и 2 будут даны корректные описания вычислительных процедур, то эти описания можно принять за два определения площади. А поскольку в обоих случаях условия аддитив-

2 ГЛАВА
ОТ ИДЕИ НЕДЕЛИМЫХ К ТЕОРИИ ИЗМЕРЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

2.1. В начале пути. Вопрос о природе сущего. Идея первоматерии

Древние греки-ахейцы основали на малоазиатском побережье ряд городов, крупнейшим из которых был Милет. Этот город стал одним из торговых и культурных центров древнего мира и прославился своими философами. Первым в ряду этих философов был Фалес (ок. 625—548 до н. э.)[1]. Он родился в Финикии, обосновался затем в Милете, был удачливым купцом, много путешествовал и, будучи весьма любознательным, узнал многое о науке, культуре, быте и нравах других народов. Он заметил, что одни и те же явления разными народами воспринимаются и оцениваются по-разному и что именно это затем и приводит к возникновению различных систем знаний и различных культур. Большие различия были и в математических знаниях. У греков, египтян и вавилонян были даже различные системы счисления и различные правила счёта. Они пользовались и различными эмпирическими формулами. В Вавилоне, например, считали, что площадь круга равна $3r^2$, а в Египте считали, что она равна $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$, где r и d соответственно радиус и диаметр круга. Кто же прав и как убедиться в истинности того или другого утверждения?

Размышляя над этими вопросами, Фалес пришёл к мысли о необходимости доказательств. Он понял, что истинным может быть только то, что может быть доказано, — и что это касается даже самых простых «очевидных» утверждений.

Необходимость в строгих чётких доказательствах Фалес ощущал и во время публичных дискуссий, когда ему приходилось отстаивать правоту своих утверждений.

Однажды, например, произошло следующее событие. В Милет пришёл корабль. На берегу собралась небольшая группа местных жителей, среди которых был и Фалес. Собравшиеся пытались угадать, откуда этот корабль прибыл и что он привёз. А поскольку судно стояло довольно далеко от берега, то возник и вопрос о том, каково же расстояние до него. Высказывались самые различные мнения, и чтобы разрешить спор, собравшиеся

Мысли Фалеса текли по определённому руслу. Они в значительной мере направлялись теми особенностями мировоззрения и мышления — теми установками и привычками, которые были характерны для людей того времени.

Одна из этих особенностей состояла в естественном стремлении к наглядности и образности, и, в частности, к использованию сравнений и аналогий. Сравнения в самом деле служат весьма удобной формой выражения мыслей. Когда, например, о каком-либо предмете спрашивают, какой он, как он себя проявляет, как он существует, то часто ответ дают прибегая к сравнениям и аналогиям. О твёрдом предмете говорят «как камень», о жидком — «как вода», о круглом — «как мяч» и т. д. Точно так же поступали древние греки, когда их спрашивали о людях — какие они? О сильном они говорили — «как Геракл», о быстроногом — «как Ахиллес», о хромом — «как Гефест».

Сравнения и аналогии были использованы людьми и при формировании первых числительных. О множестве из двух предметов люди говорили: «как глаза» или «как уши». В китайском языке, кстати, слово «пу» (уши) одновременно означает «два». О множестве из пяти предметов люди говорили «как рука». В русском языке слово «пять» тоже происходит от старославянского «пясть» — кулак (совокупность пяти пальцев).

Названия геометрических фигур появились тоже благодаря сравнениям. Фигуры были названы именами тех предметов, на которые они были похожи:

конус (лат. conus, от греч. konos) — χονοσ (сосновая шишка)
цилиндр (лат. cylindrus, от греч. kylindros — χυλινδρσ (валик, каток)
шар (globus) — σφαιρα (мяч)
трапеция (от греч. rapezion — буквально столик) — τραπεσιον (столик для трапезы)
центр (от греч. kentran — остриё лат. centrum) — χεντρον (палка с заостренным концом — ножка циркуля).

Из приведённых примеров видно, что сравнения и аналогии — это удобный, наглядный и естественный способ ответа на вопрос, когда спрашивают: какой? как? каким образом? Поэтому и первые философы в своих размышлениях о природе всего сущего тоже обращались к сравнениям и аналогиям.

2.2. Неделимые Демокрита

В атомарном строении твердых предметов Демокрит различал три вида структур: линейные, плоские и пространственные.

Линейные структуры — это цепочки атомов, т. е. нити; состоящие из тесно примыкающих друг к другу неделимых. Они похожи на ожерелья, где место бусинок занимают крохотные атомы.

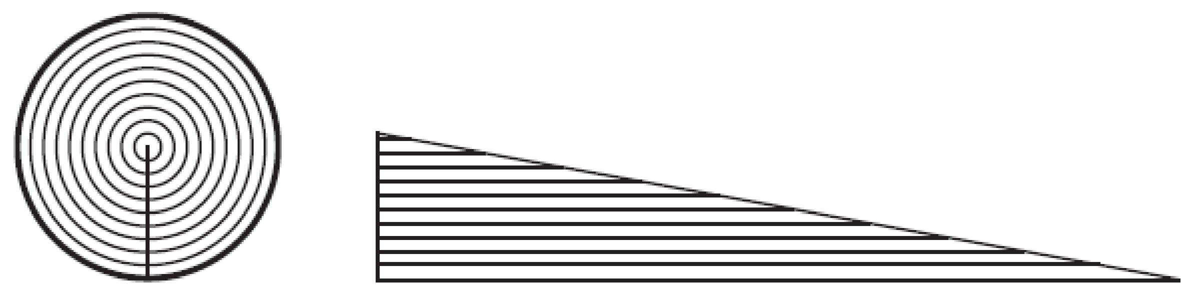
Плоские структуры — это поверхности, сотканные из нитей. Эти нити могут быть расположены либо параллельно друг другу, либо в виде концентрических окружностей. Нечто подобное можно наблюдать в разрезах ствола дерева: в продольных разрезах можно увидеть параллельные нити, а в поперечных — систему концентрических окружностей.

Пространственные структуры — это тела, сложенные из тончайших слоёв, каждый из которых представляет собой плоскую структуру. Тела, таким образом, похожи на книги, состоящие из тоненьких листочков.

Идея Демокрита о тканеобразных поверхностях и слоистых телах была, конечно, интересна сама по себе, но ещё удивительней было то, что из этой идеи сразу же удалось получить целый ряд интереснейших следствий.

1. Рассмотрим круг, состоящий из концентрических нитей. Если разрезать этот круг по радиусу от периметра до центра, а затем распрямить все нити, то мы увидим то, что изображено на рисунке 17. Из распрямленных нитей получился треугольник. Основание треугольника — это наружная нить круга, это выпрямленная окружность, ранее ограничивавшая круг, а высота треугольника — это радиус.

Круг и треугольник составлены из одних и тех же нитей. Значит, у них должна быть и одинаковая площадь. Но площадь треугольника равна $\frac{1}{2}CR$, где C — длина окружности, а R — радиус. Поэтому и площадь круга выражается той же формулой.



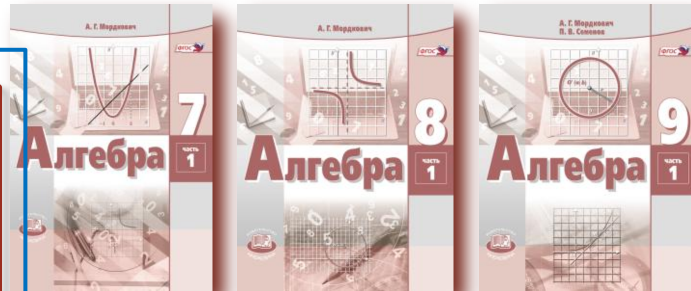
ОГЛАВЛЕНИЕ

ФПУ: МАТЕМАТИКА, АЛГЕБРА , ГЕОМЕТРИЯ, АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

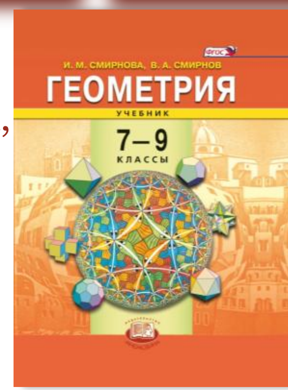
Издательство Мнемозина

Н.Я. Виленкин
В.И.Жохов
А.С.Чесноков
С.И. Шварцбурд
5/6 ч. в неделю

А.Г. Мордкович (баз.)



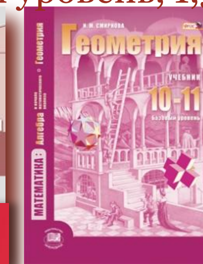
И.М. Смирнова,
В.А. Смирнов



А.Г. Мордкович,
Н.П. Николаев
(угл.)

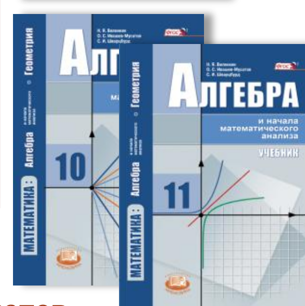
А.Г.Мордкович
(базовый
уровень, 2,5 ч)

И.М. Смирнова
(базовый уровень, 1,5 ч)



А.Г. Мордкович,
И.М. Смирнова
(базовый уровень,
2,5/1,5 ч)

А.Г.Мордкович, Н.П. Николаев
(базовый и углублённый уровни, 4/2 ч)



Н.Я. Виленкин,
О.С. Ивашев-Мусатов,
С.И. Шварцбурд (углублённый уровень,
5/3 ч)

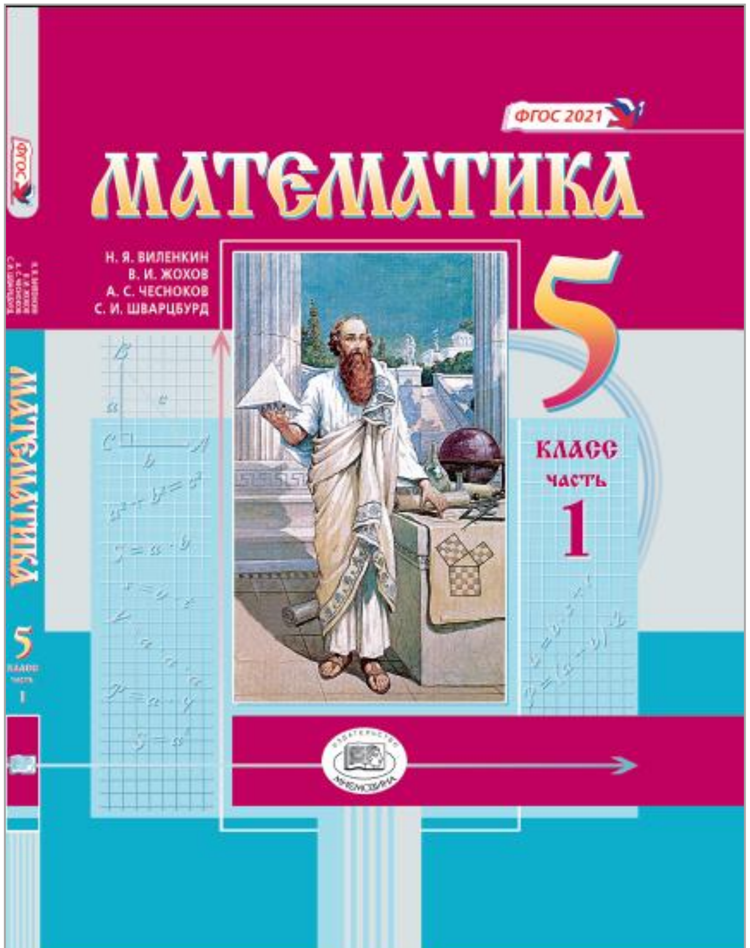
И.М. Смирнова,
В.А. Смирнов
(базовый и
углублённый уровни,
2-3 ч)

Учебные пособия издательства «Мнемозина»


Скоро
в продаже!
Русский язык
Геометрия
Математика
Русский язык
лгебра

Математика . 5 класс. Учебное пособие в 2-х частях. *Издание 1-е*

Авторы: Наум Яковлевич Виленкин
Владимир Иванович Жохов
Чесноков Александр Семенович
Семен Исаакович Шварцбурд



Математика . 5 класс. Учебное пособие в 2-х частях . Часть 1. Издание 1-е

СОДЕРЖАНИЕ

Математика . 5 класс. Учебное пособие в 2-х частях. Часть 2. Издание 1-е

СОДЕРЖАНИЕ

Математика . 5 класс. Учебное пособие в 2-х частях. Издание 1-е

Подмножество

Пересечение множеств

Вместо «часть множества» говорят также «**подмножество**», а вместо «общая часть» — «**пересечение множеств**», потому что, например, общая часть прямой и окружности на рисунке 100 состоит из двух точек, в которых пересекаются эти линии. Если два множества не имеют общих элементов, то говорят, что они не пересекаются, и пишут: $A \cap B = \varnothing$. Условились считать, что *пустое множество является частью любого множества* A, то есть $\varnothing \subset A$, а также что само множество A является одной из своих частей, то есть $A \subset A$.

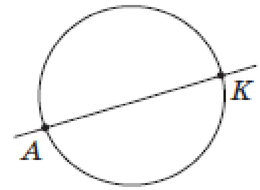


Рис. 100

Множество фигур на рисунке 99 состоит из двух частей — треугольников и четырёхугольников, причём эти части не пересекаются. Говорят, что множество фигур на рисунке 99 разбито на две части. Его можно разбить и по-другому: на зелёные, синие и красные фигуры.

Рассмотрим другие примеры множеств и их подмножеств.

Числа 8, 16, 24 делятся на 8, а число 17 не делится на 8. Говорят, что число 16 кратно числу 8, а 17 не кратно числу 8.

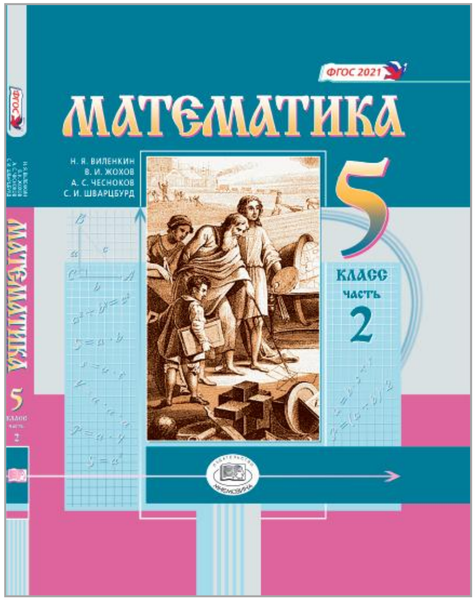
Кратное

Кратным числа a называется число, которое делится без остатка на a.

Число 8 имеет сколько угодно кратных. Говорят: «Множество чисел, кратных 8, бесконечно». $\{0, 8, 16, 24, 32\}$ — подмножество множества чисел, кратных 8.

Число 0 кратно любому натуральному числу, так как 0 делится без остатка на любое натуральное число.

Математика . 5 класс. Учебное пособие в 2-х частях. Издание 1-е



916. На 10 делятся только числа, состоящие из полных десятков:

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110 и т. д.

Запись всех этих чисел кончается цифрой 0.

Если запись числа оканчивается цифрой 0, то это число делится на 10; если запись числа оканчивается любой другой цифрой, то число не делится на 10.

Это утверждение в математике называют **признаком делимости на 10**.

A — множество натуральных чисел от 100 до 300, кратных 10. Запишите его подмножество *B* чисел, кратных 50.

917. Запишите множество чисел от 100 до 230, делящихся на 10. Выберите из него подмножество чисел, кратных 15.

923. Выпишем первые десять натуральных чисел, кратных двум:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20.

Запись всех этих чисел оканчивается одной из цифр 0, 2, 4, 6, 8. Будем для краткости называть эти цифры чётными, а цифры 1, 3, 5, 7, 9 — нечётными.

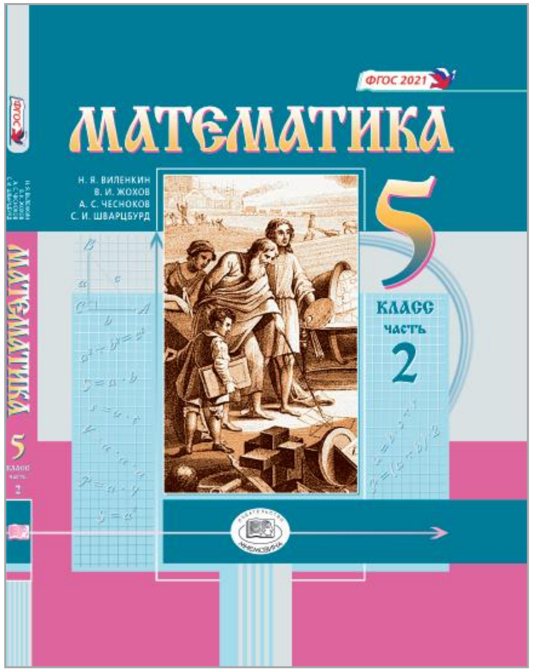
Если запись числа оканчивается чётной цифрой, то число делится на 2; если запись числа оканчивается нечётной цифрой, то число не делится на 2.

Это утверждение называют **признаком делимости на 2**.

Выпишите натуральные числа между 70 и 80. Соберите из них множество чисел, оканчивающихся чётной цифрой, и множество чисел, оканчивающихся нечётной цифрой. Проверьте на элементах этих множеств данное утверждение.

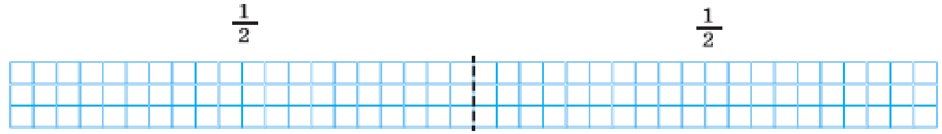
924. Найдите двузначное число, сумма цифр которого равна 13 и при этом цифра единиц больше цифры десятков на 2.

925. Найдите двузначное число, если известно, что сумма его цифр равна 11, а разность цифр — 3. Сколько двузначных чисел удовлетворяют условию задачи?

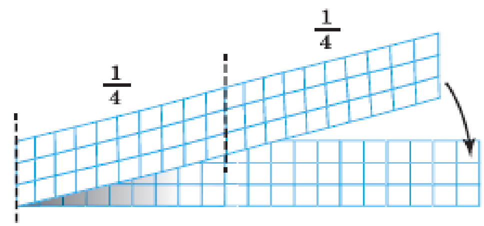


47. Приведение дробей к новому виду

Вырежем из листа тетради в клетку полоску шириной 3 клетки и длиной 40 клеток. Отметим середину полоски пунктирной линией.



Полоска разделилась на две половины. Одну из половинок также разделим пополам пунктиром. Получилось две четверти полоски. Согнём полоску по середине.



Две четверти полоски наложились на её половину и совпали с ней. Значит, одна вторая часть полоски равна двум её четвёртым частям. Говорят, что дробь $\frac{1}{2}$ равна дроби $\frac{2}{4}$. Это можно записать так:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}, \text{ или } \frac{2}{4} = \frac{2:2}{4:2} = \frac{1}{2}, \text{ или } \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4}.$$

С помощью такого опыта с полоской можно убедиться, что одна пятая равна четырём двадцатым, три десятых равны шести двадцатым и т. д.

Вообще, если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится равная ей дробь.

Основное свойство дроби

Это свойство дроби называют **основным**.

Например, разделим числитель и знаменатель дроби $\frac{20}{35}$ на 5:

$$\frac{20}{35} = \frac{20:5}{35:5} = \frac{4}{7}, \quad \frac{20}{35} = \frac{4}{7}.$$

Используя основное свойство дроби, можно приводить её к новому виду (получать дробь, равную данной, но с другим знаменателем).

Математика . 5 класс. Учебное пособие в 2-х частях. Издание 1-е

48. Множество дробей с разными знаменателями

При помощи основного свойства дроби можно приводить дробь к удобному для вычислений виду.

Например, у дроби $\frac{30}{45}$ можно уменьшить числитель и знаменатель, если разделить их на 15:

$$\frac{30 : 15}{45 : 15} = \frac{2}{3}, \quad \frac{30}{45} = \frac{2}{3}.$$

Несократимая дробь

Мы разделили числа 30 и 45 на 15. Это самый большой их делитель. Дробь $\frac{30}{45}$ сократилась. Для чисел 2 и 3 уже нельзя найти хоть один общий делитель, отличный от 1. Дробь $\frac{2}{3}$ сократить больше нельзя. Она **несократимая**.

Сокращение дроби

Деление числителя и знаменателя дроби на одно и тоже натуральное число, отличное от 1, называют **сокращением дроби**.

При сокращении дробей используют **признаки делимости** (см. задачи к пп. 45—47).

Пример 1. Сократим дробь $\frac{125}{325}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби оканчиваются на 5. Значит, эти числа можно разделить на 5:

$$\frac{125 : 5}{325 : 5} = \frac{25}{65}.$$

Дробь $\frac{25}{65}$ можно ещё раз сократить на 5:

$$\frac{25 : 5}{65 : 5} = \frac{5}{13}.$$

Математика . 5 класс. Пособие в 2-х частях. Издание 1-е

987. В 70—90-е годы прошлого столетия позвонить в другой город чаще всего можно было с пункта междугородней телефонной связи. На пунктах стояли кабины с телефонами-автоматами (см. фото). Телефонисты соединяли абонентов из разных городов страны ручным и полуавтоматическим способом через специальный аппарат под названием «коммутатор». Одна минута разговора с абонентом из другого города стоила 15 копеек.

У Серёжи было несколько монет по 10 копеек каждая. Для того чтобы позвонить по междугороднему телефону, он их все разменял на монеты по 15 копеек. Таких монет у него оказалось на две меньше, чем было. Сколько десятикопеечных монет было у Серёжи?

Математика . 5 класс. Пособие в 2-х частях. Издание 1-е

Математический диктант № 1

1. Запишите цифрами число:

а) сто восемьдесят девять;

б) семь тысяч пятьсот девяносто три;

в) десять тысяч триста два;

г) сто двадцать миллионов семьсот две тысячи пять.

2. Запишите самое большое пятизначное число.

3. Как читается число, которое записывается тройкой с шестью последующими нулями?

4. Верно ли высказывание (ответьте «да» или «нет»):

а) 0 — самое маленькое натуральное число;

б) миллиард — это тысяча тысяч?

Математический диктант № 2

1. Запишите цифрами число:

а) сорок тысяч восемь;

б) двадцать девять миллионов сто семь тысяч двадцать;

в) 47 млрд 15 млн 8 тыс.

2. Верно ли высказывание (ответьте «да» или «нет»):

а) за числом одна тысяча девятьсот девяносто девять следующее натуральное число — две тысячи;

б) число, на единицу меньшее семи тысяч, — шесть тысяч?

3. Запишите математические термины:

ц..фра, мног..угол..ник, мил..имет..р, к..нц.. ..трезка, н..чало луча, к..орд..ната точки, дв..йное н..равен..во, то..на.

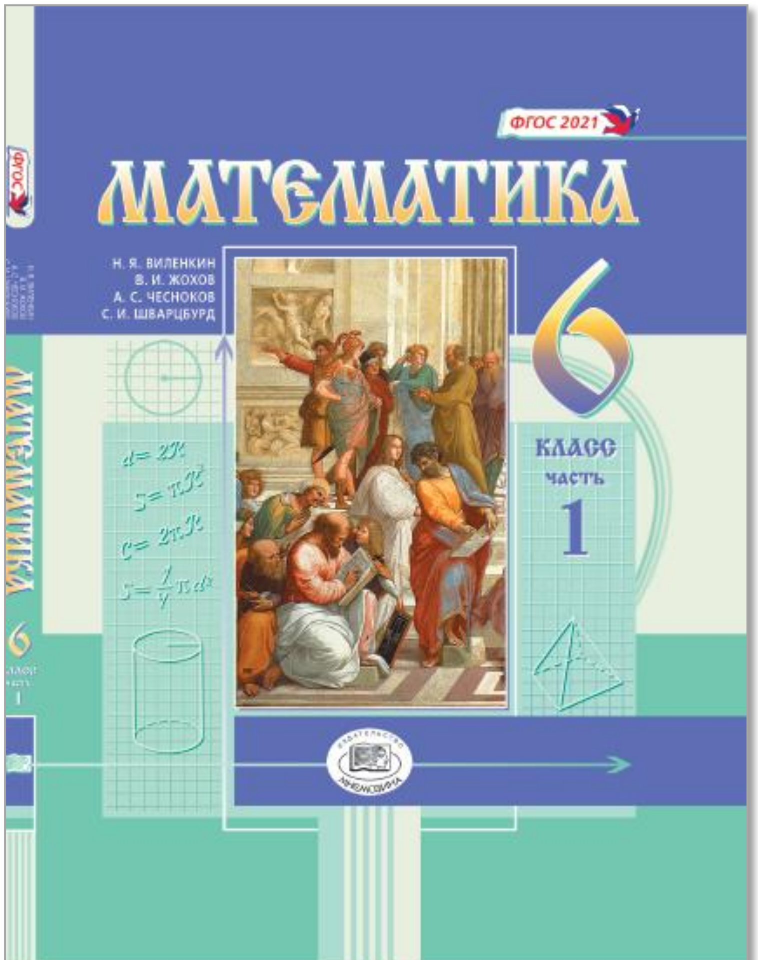
4. Верно ли высказывание (ответьте «да» или «нет»):

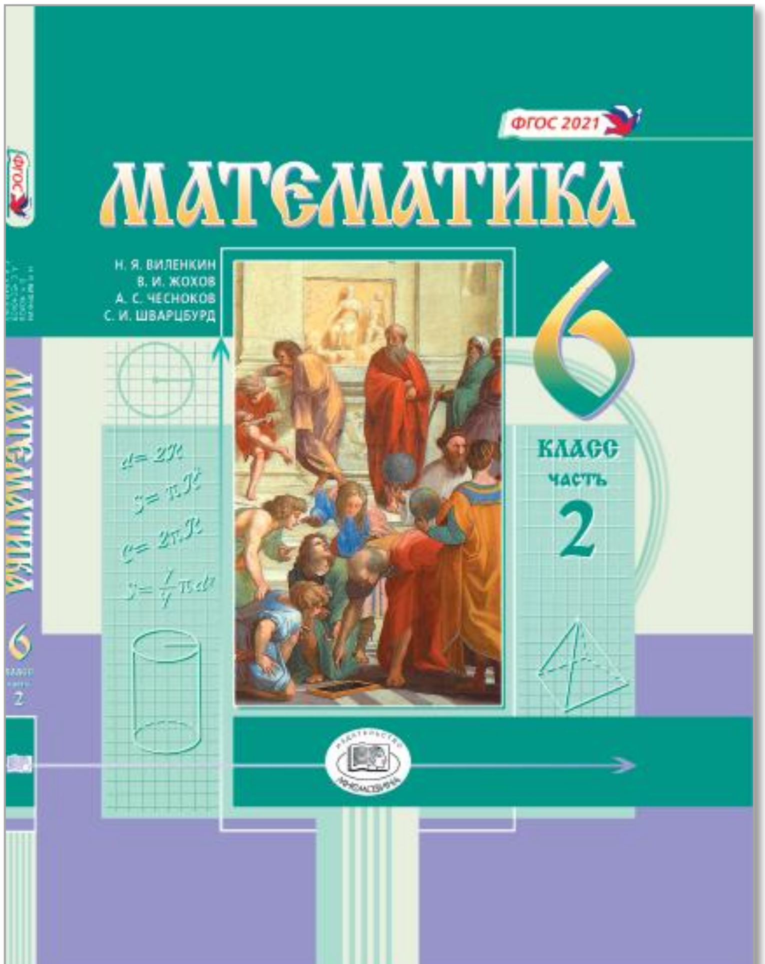
а) в одном дециметре сто сантиметров;

б) в одном метре десять тысяч миллиметров?

Математика . 6 класс. Пособие в 2-х частях. Издание 1-е

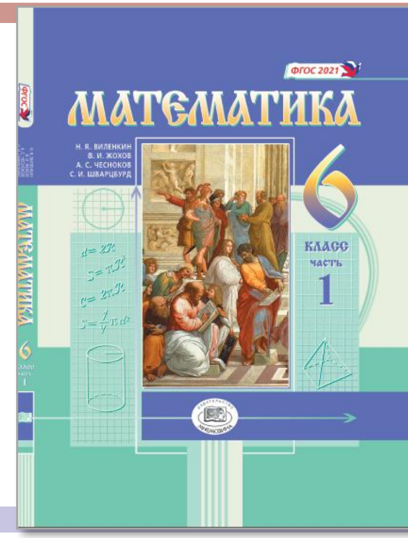
Авторы: Наум Яковлевич Виленкин
Владимир Иванович Жохов
Чесноков Александр Семенович
Семен Исаакович Шварцбурд



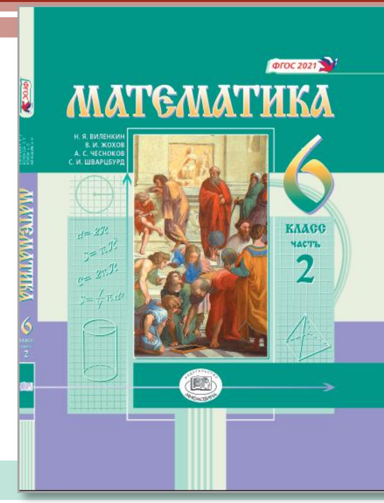


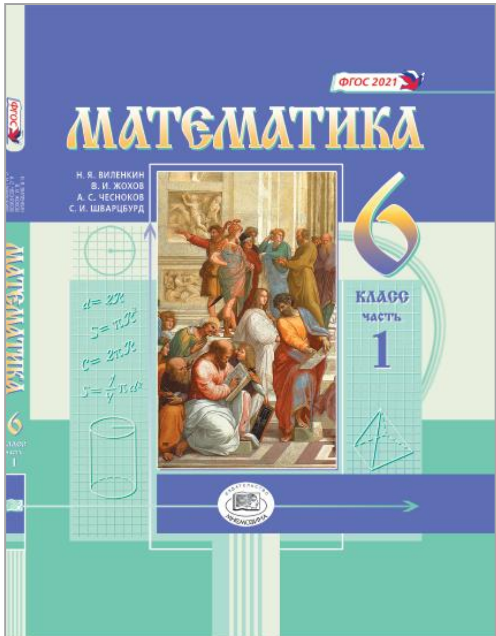
Математика . 6 класс. Пособие в 2-х частях. Часть 1. Издание 1-е

СОДЕРЖАНИЕ



СОДЕРЖАНИЕ

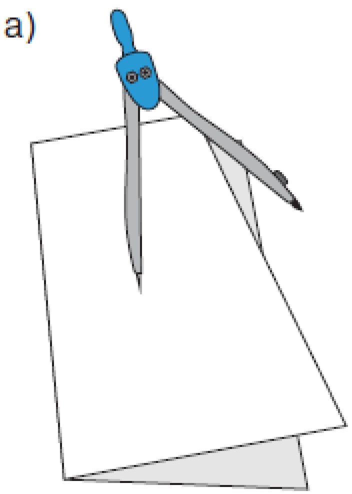

ФГОС 2021
МАТЕМАТИКА
Н. Я. ВИЛЕНКИН
В. И. ЖОХОВ
А. С. ЧЕСНОКОВ
С. И. ШВАРЦБУРД
6
класс
часть
2



8. Осевая симметрия

Возьмём лист бумаги и проведём на нём прямую l. Согнём лист по этой прямой. Циркулем или остро заточенным карандашом проткнём сложенный лист бумаги насквозь (рис. 8,а). Развернём лист, получим две точки с разных сторон от прямой l.

а)



б)

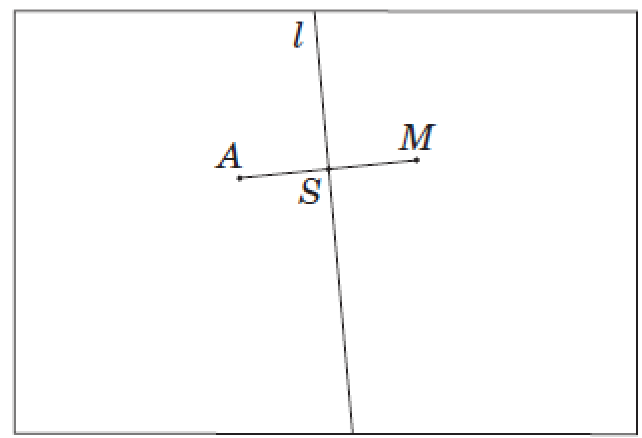
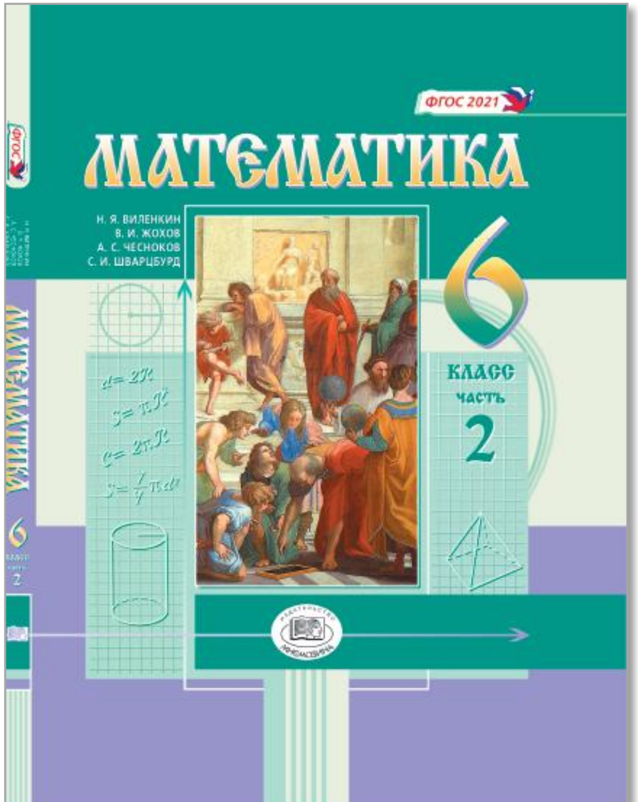


Рис. 8



28. Центр симметрии

Точки, симметричные относительно точки

Построим отрезок AB и точку O — середину этого отрезка. Середину отрезка называют центром симметрии этого отрезка, а его концы — **точками, симметричными относительно середины отрезка** (рис. 14).

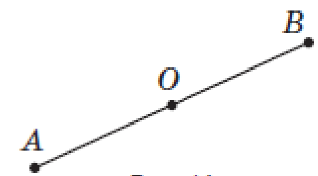


Рис. 14

Проведём в прямоугольнике $ABCD$ (рис. 15) диагонали AC и BD. Точка перечения O этих отрезков делит их пополам. Поэтому вершина A прямоугольника симметрична относительно точки O вершине C, а вершина B симметрична относительно точки O вершине D. Вообще для любой точки X этого прямоугольника найдётся точка Y того же прямоугольника, симметричная точке X относительно точки O. Говорят, что точка O — **центр симметрии** прямоугольника $ABCD$, а прямоугольник $ABCD$ симметричен относительно точки O.

Центр симметрии

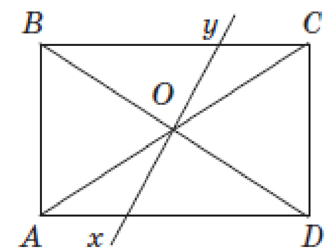
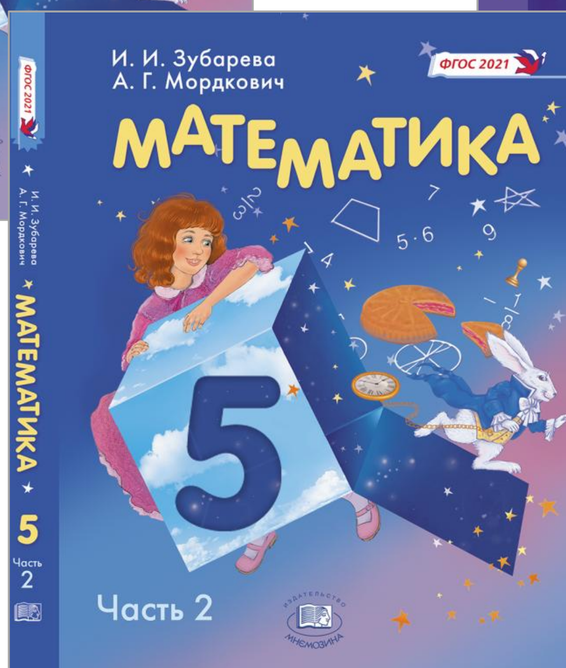


Рис. 15

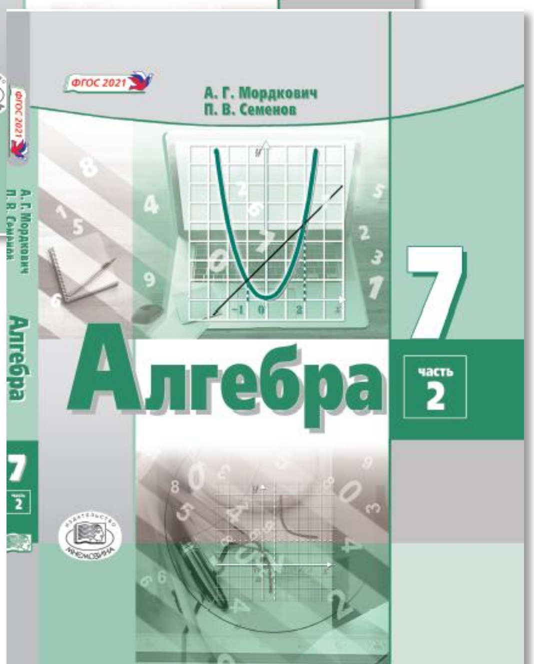
Математика. 5 и 6 классы. Пособие в 2-х частях

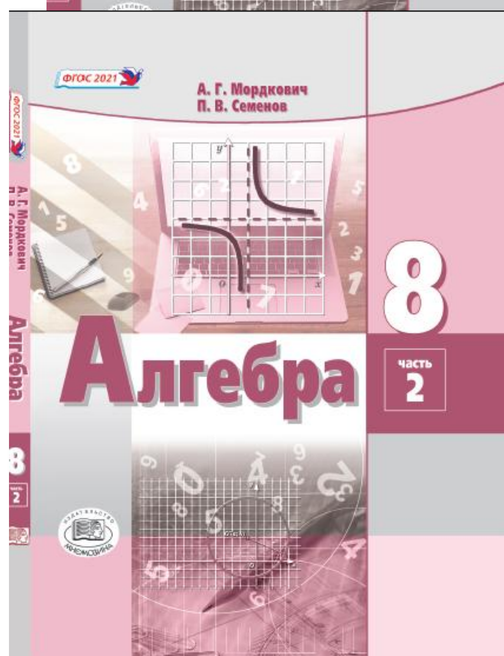
Авторы: И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович

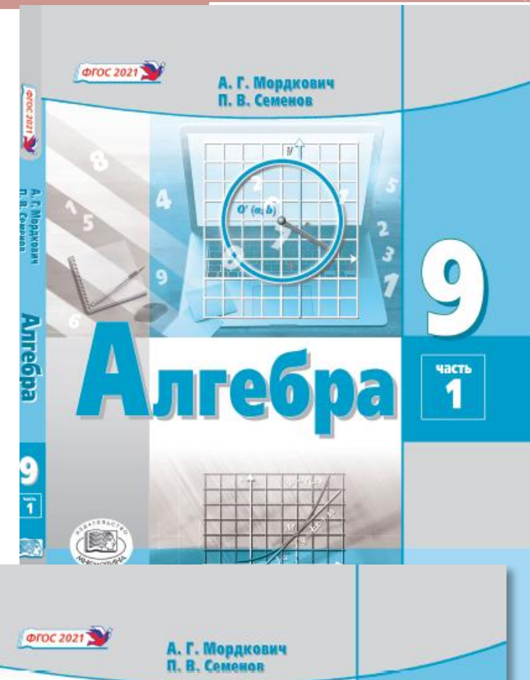


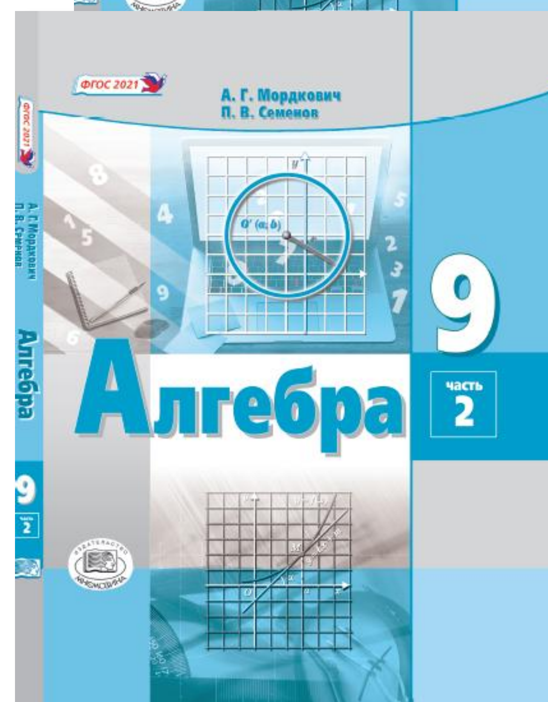
Алгебра. Пособие в 2-х частях. Издание 1-е

Авторы: А.Г. Мордкович, П.В.Семёнов



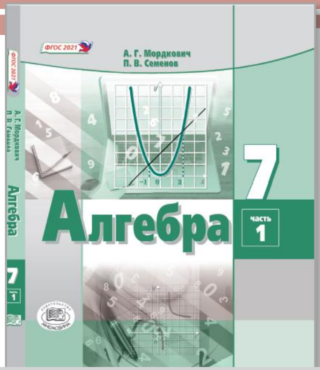






Алгебра. Пособие в 2-х частях. Издание 1-е

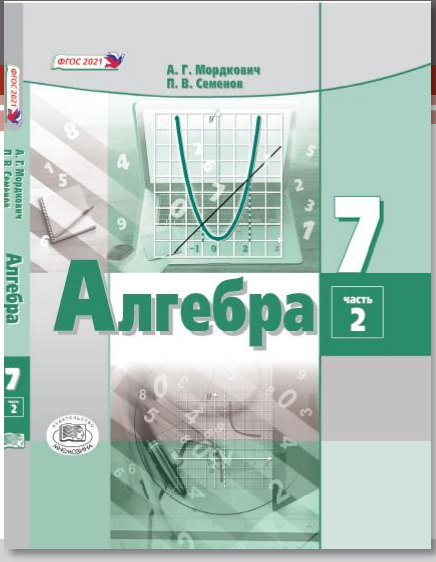
ОГЛАВЛЕНИЕ



Мордкович и др. "Алгебра. 7 класс" (базовый уровень)

Пособие	Учебник
Часть 1	
§ 1. Числовые выражения	п. 1 из § 1. Числовые и алгебраические выражения
§ 2. Множество рациональных чисел	**8 класс** § 10. Рациональные числа
§ 3. Алгебраические выражения	п. 2 из § 1. Числовые и алгебраические выражения
§ 4. Что такое математический язык	§ 2. Что такое математический язык
§ 5. Что такое математическая модель	§ 3. Что такое математическая модель
§ 6. Линейное уравнение с одной переменной	§ 4. Линейное уравнение с одной переменной
§ 7. Координатная прямая	§ 5. Координатная прямая В задачи вставлены №№ из задач к § 10. Рациональные числа учебника для **8 класса**
§ 8. Элементы статистики. Данные и ряды данных	§ 6. Статистика и комбинаторика. Данные и ряды данных
§ 9. Координатная плоскость	§ 7. Координатная плоскость
§ 10. Линейное уравнение с двумя переменными и его график	§ 8. Линейное уравнение с двумя переменными и его график
§ 11. Линейная функция и её график	§ 9. Линейная функция и её график
§ 12. Линейная функция $y = kx$	§ 10. Линейная функция $y = kx$
§ 13. Взаимное расположение графиков линейных функций	§ 11. Взаимное расположение графиков линейных функций
§ 14. Упорядочение и группировка данных, таблицы распределения	§ 12. Упорядочение данных, таблицы распределения + § 47. Группировка данных (не полностью)
§ 15. Основные понятия	§ 13. Основные понятия
§ 16. Метод подстановки	§ 14. Метод подстановки
§ 17. Метод алгебраического сложения	§ 15. Метод алгебраического сложения
§ 18. Системы двух линейных уравнений как математические модели реальных ситуаций	§ 16. Системы двух линейных уравнений как математические модели реальных ситуаций
§ 19. Нечисловые ряды данных	§ 17. Нечисловые ряды данных. **Дополнен**
§ 20. Что такое степень с натуральным показателем	§ 18. Что такое степень с натуральным показателем
§ 21. Таблица основных степеней	§ 19. Таблица основных степеней
§ 22. Свойства степени с натуральным показателем	§ 20. Свойства степени с натуральным показателем
§ 23. Умножение и деление степеней с одинаковыми показателями	§ 21. Умножение и деление степеней с одинаковыми показателями
§ 24. Степень с нулевым показателем	§ 22. Степень с нулевым показателем
§ 25. Работа с таблицами распределения	§ 23. Работа с таблицами распределения. **Дополнен**

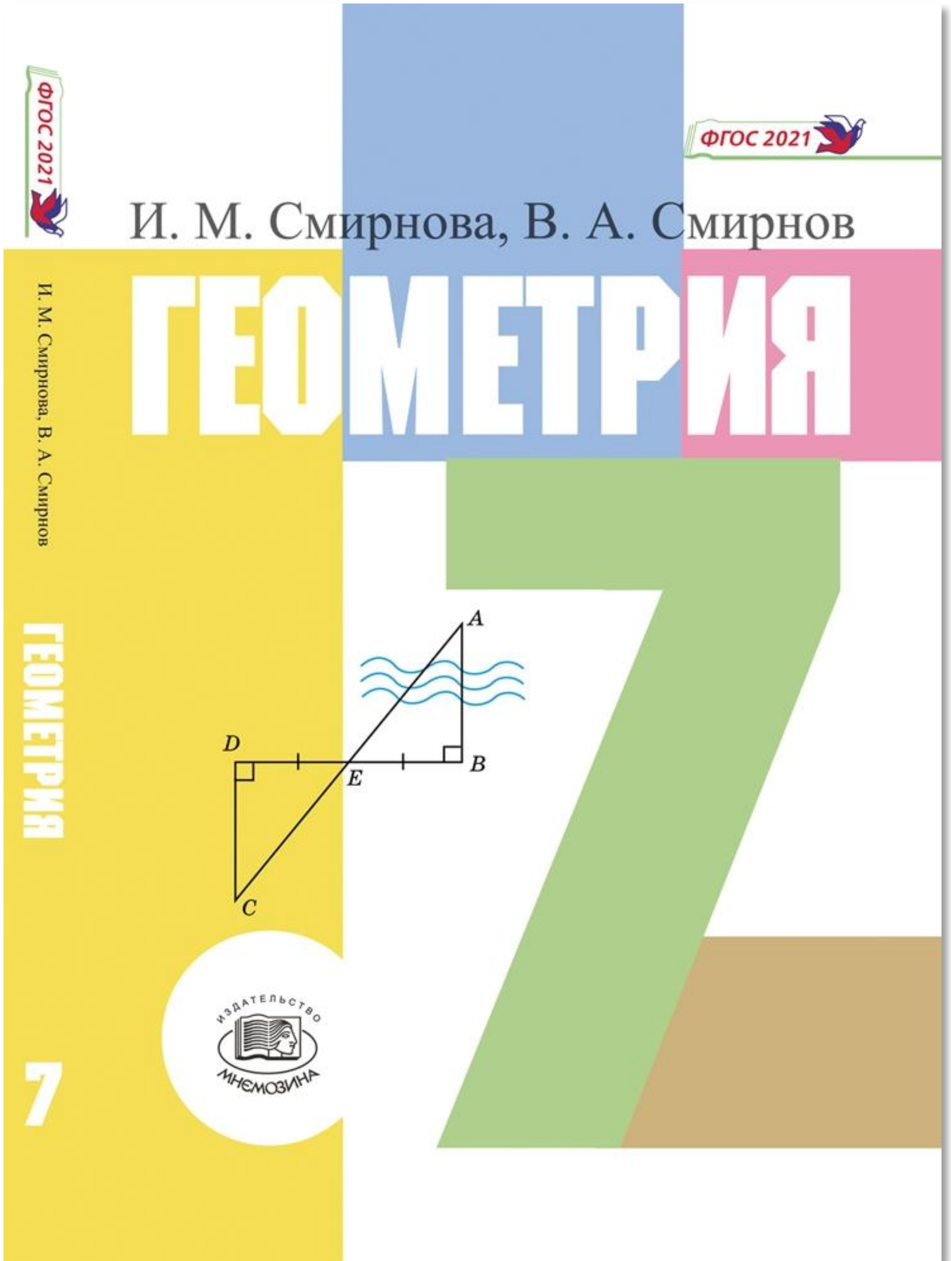
Алгебра. Пособие в 2-х частях. Издание 1-е



ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть 2	
§ 26. Понятие одночлена. Стандартный вид одночлена	§ 24. Понятие одночлена. Стандартный вид одночлена
§ 27. Сложение и вычитание одночленов	§ 25. Сложение и вычитание одночленов
§ 28. Умножение одночленов. Возведение одночлена в натуральную степень	§ 26. Умножение одночленов. Возведение одночлена в натуральную степень
§ 29. Деление одночлена на одночлен	§ 27. Деление одночлена на одночлен
§ 30. Частота и процентная частота	§ 28. Таблицы распределения частот + § 35. Процентные частоты (не полностью)
§ 31. Основные понятия	§ 29. Основные понятия
§ 32. Сложение и вычитание многочленов	§ 30. Сложение и вычитание многочленов
§ 33. Умножение многочлена на одночлен	§ 31. Умножение многочлена на одночлен
§ 34. Умножение многочлена на многочлен	§ 32. Умножение многочлена на многочлен
§ 35. Формулы сокращённого умножения	§ 33. Формулы сокращённого умножения
§ 36. Деление многочлена на одночлен	§ 34. Деление многочлена на одночлен
§ 37. Среднее арифметическое	§ 43. Среднее значение и дисперсия (не полностью, без Дисперсии). **Дополнен**
§ 38. Что такое разложение многочлена на множители и зачем оно нужно	§ 36. Что такое разложение многочлена на множители и зачем оно нужно
§ 39. Вынесение общего множителя за скобки	§ 37. Вынесение общего множителя за скобки
§ 40. Способ группировки	§ 38. Способ группировки
§ 41. Разложение многочленов на множители с помощью формул сокращённого умножения	§ 39. Разложение многочленов на множители с помощью формул сокращённого умножения
§ 42. Разложение многочленов на множители с помощью комбинации различных приёмов	§ 40. Разложение многочленов на множители с помощью комбинации различных приёмов
§ 43. Сокращение алгебраических дробей	§ 41. Сокращение алгебраических дробей
§ 44. Тождества	§ 42. Тождества
§ 45. Вероятность и частота	**Новый**
§ 46. Функция $y = x^2$ и её график	§ 44. Функция $y = x^2$ и её график
§ 47. Графическое решение уравнений	§ 45. Графическое решение уравнений
§ 48. Что означает в математике запись $y = f(x)$	§ 46. Что означает в математике запись $y = f(x)$ Дополнение из 8 класса пп. 1 и 3 из § 17. Модуль действительного числа
§ 49. Элементы теории графов	**Новый**

Геометрия. 7 класс. Авторы: И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. Пособие. *Издание 1-е*



ОГЛАВЛЕНИЕ

Геометрия. 8 класс. Авторы: И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. Пособие. *Издание 1-е*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Геометрия. 9 класс. Авторы: И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. Пособие. *Издание 1-е*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Пособие. Издание 1-е

Особенности УМК

Учебники имеют выраженную метапредметную направленность изучения предмета, ориентирован на планируемые результаты обучения.

В основе обучения лежит коммуникативно-деятельностный подход.

Русский язык. 5 класс. Часть 1. Авторы: С.И. Львова и В.В. Львов

СОДЕРЖАНИЕ

Русский язык. 5 класс. Часть 2. Авторы: С.И. Львова и В.В. Львов

СОДЕРЖАНИЕ

СИСТЕМАТИЧЕСКИЙ КУРС РУССКОГО ЯЗЫКА
(продолжение)

СОДЕРЖАНИЕ

ПЛАНЫ И ОБРАЗЦЫ ЯЗЫКОВОГО АНАЛИЗА

СЛОВАРИКИ

ПАМЯТКИ

Русский язык. 5–9 классы. Авторы: С.И. Львова и В.В. Львов

Пособие. Издание 1-е

Русский язык. 5-9 классы. Под редакцие Г.Г. Граник (Пособие.издание 1-е)

Особенности УМК

1. Построение курса на синтаксической основе.
2. Рассмотрение частей речи как лексико-грамматических классов слов.
3. Изучение орфографии на основе фонемно-морфемного принципа.

Русский язык. 5-9 классы. Под редакцие Г.Г. Граник. Пособие. Издание 1-е

Контактная информация

Тел.: +7 (495) 181-68-88
E-mail: ioc@mnemozina.ru
Сайт: http://www.mnemozina.ru

Для закупок:

Печатные учебники: tender@mnemozina.ru
Электронные формы учебников: zakaz@ars-edu.ru

ЭЛЕКТРОННЫЕ ФОРМЫ УЧЕБНИКОВ НА САЙТЕ: **ШКОЛАВКАРМАНЕ.РФ**

Печатные издания: **https://shop.mnemozina.ru/**
https://www.wildberries.ru/
https://www.ozon.ru/