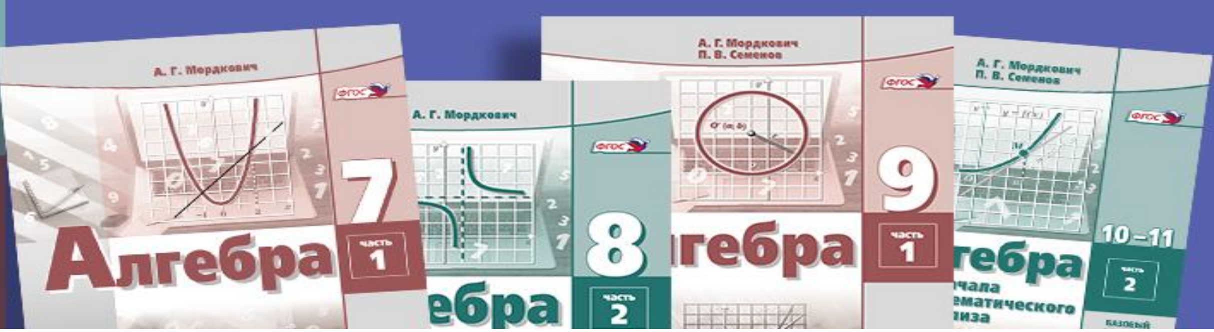
издательство Мнемозина

ВЕБИНАРЫ



ИЗМЕНЕНИЯ В КУРСЕ «ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА» В УМК ПО АЛГЕБРЕ ДЛЯ 7—9 КЛАССОВ ПОД РЕДАКЦИЕЙ А.Г. МОРДКОВИЧА В СООТВЕТСТВИИ С ТРЕБОВАНИЯМИ ФГОС–2021. ПРОДОЛЖЕНИЕ 2

Цель вебинара – минуя общие нормативные и теоретические положения, максимально точно представить содержание новых параграфов в подготовленном в 2022 г. к печати издании УМК «Алгебра» для 7—9-го классов, относящихся к курсу «Вероятность и статистика»: примеры случайных величин; простейшие свойства схемы Бернулли.

Издательство Мнемозина

Ведущий: **Семенов Павел Владимирович**, доктор физико-математических наук, профессор, почётный работник высшего профессионального образования Российской Федерации, профессор факультета математики НИУ «Высшая школа экономики», отдел математического образования, Центр педагогического мастерства. *E-mail:* pavelssem@gmail.com

07.02.2023 г.

А9. В целом, сохранена логика и структура учебника 2020 (2017, 2015 г).

- 1. Теперь учебник и задачник объединены.
- 2. Теперь есть А9_часть 1 (учебник + задачник, первые 3 главы)

  и есть есть А9_часть 2 (учебник + задачник, 2 главы и повторение).
- ТВиСТ образует отдельную главу 5 учебника алгебры.
- Вероятность суммы полностью перенесена в А8.
- Сделан отдельный параграф «Геометрическая вероятность», его удаляли в 2019-20 г.
- В «независимости» сделан акцент на повторения, а не на события,

  см. след. слайд.
- Из «независимости» случайные величины перенесены в отд. параграф,

  добавлены испытания «повторения до первого успеха».
- Последний параграф переименован, но практически не изменен.

А9, 2021, Гл.5. База

А9, **2022**, Гл.5, База

А9, **2022**, Гл.5, Угл.ур

§17 КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ. ПЕРЕСТАНОВКИ И СОЧЕТАНИЯ

Простейшие комбинаторные задачи несколько напоминают детскую игру в кубики. Имеется конечное число кубиков (или элементов некоторого конечного множества), а нужно посчитать количество тех или иных комбинаций, составленных из этих кубиков (элементов). Например, пусть имеется n одинаковых по размеру кубиков, выкрашенных в (попарно) разные

Правило умножения Если есть x способов выбрать предмет A первого типа, после каждого из которых есть y способов выбрать предмет B второго типа, после каждого из которых есть z способов выбрать предмет C третьего типа, то тройку предметов (A, B, C) можно выбрать xyz способами.

Таким же образом может быть сформулировано правило умножения для выбора четвёрки, пятёрки и т. д. элементов.

ПРИМЕР 1 В семье шесть человек, а за столом в кухне шесть стульев. Было решено каждый вечер перед ужином рассаживаться на эти шесть стульев по-новому. Сколько дней члены семьи смогут делать это без повторений?

Мы видим, что условия задач выглядят по-разному, а решаются эти задачи почти одним и тем же способом. Значит, есть какое-то общее правило для решения такого типа задач.

ТЕОРЕМА 1

n различных элементов можно расставить по одному на n различных мест ровно $n!$ способами.

Для доказательства достаточно повторить решение примера 2 не для $n = 6$, а для произвольного n.

Исторически сложилось так, что более употребителен не термин «расстановка», а термин «перестановка», и поэтому эту теорему чаще формулируют так: «*Число всех перестановок множества из n элементов равно $n!$*». Сокращённо это записывают в виде формулы

$$\boxed{\boldsymbol{P_n = n!.}}$$

В этом сокращении буква P соответствует первой букве английского глагола (существительного) *permute (permutation)*, который и переводится как «переставлять» («перестановка»).

Теперь займёмся задачами о сочетаниях. Вот типичные вопросы: сколькими способами можно выбрать: 5 учеников из 30 для дежурства в столовой; 7 монет из 10 монет в кошельке; 10 карт из колоды в 32 карты и т. п. Каждый конкретный способ из перечисленных выборов даёт некоторое *сочетание*: 5 учеников из 30, 7 монет из 10, 10 карт из 32. Важное свойство сочетаний — нам *не важен порядок* выбираемых элементов, важен только сам итог — какие именно элементы выбраны.

ЕДЕЛЕНИЕ 2 Число всех результатов выбора k элементов без учёта их порядка из n данных элементов называют **числом сочетаний из n элементов по k** и обозначают C_n^k.

МА 2 Число сочетаний C_n^k вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

для всех $0 < k < n$.

Идея доказательства состоит в том, что вместо формулы $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ нужно проверить формулу $C_n^k \cdot k! \cdot (n-k)! = n!$, или $C_n^k \cdot P_k \cdot P_{n-k} = P_n$. Подробное доказательство мы здесь приводить не будем.

- Задачи 17.1-10 - правило умножения, перестановки.

- Задачи 17.11-25 – сочетания….

- Сильное пересечение с предыдущими изданиями.

3 ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

Для чисел C_n^k сочетаний есть замечательная таблица, в которой эти числа расположены в систематическом виде. Она не прямоугольная, а треугольная (рис. 8, *а*). Её называют **треугольником Паскаля**. После вычисления значений чисел C_n^k он будет выглядеть как показано на рисунке 8, *б*.

ьник

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & \\
C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & &
\end{array}$$

а

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & &
\end{array}$$

б

Рис. 8

В треугольнике Паскаля крайними в каждой строке стоят единицы, в n-ой строке стоят числа:

$$1 = C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2,\ \dots,\ C_n^k,\ \dots,\ C_n^{n-1},\ C_n^n = 1.$$

Но самое главное — каждое не крайнее число в этой таблице равно сумме двух чисел, стоящих над ним в предыдущей строке. Смотрите, 1 + 2 из второй строки равно 3 из третьей строки, 3 + 3 из третьей строки равно 6 из четвёртой строки, 4 + 1 из строки четвёртой равно 5 из пятой строки и т. д. В общем виде, верна формула:

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^k.$$

Она помогает быстро найти все числа C_n^k при небольших n, скажем при $n < 10$.

Практически часть параграфа изданий 2016-19 гг., изменения и уточнения редакторского характера.

4 Вероятность и геометрия

Мы познакомились с вероятностными задачами, в которых множество исходов можно тем или иным способом *подсчитать*. Другими словами, количество N всех возможных исходов *конечно*. Но встречаются испытания и с *бесконечным* числом исходов. К ним классическая вероятностная схема уже не применима. Рассмотрим пример.

ПРИМЕР 6

Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $|x - 1| \leqslant 3$. Какова вероятность того, что оно окажется и решением неравенства $|x - 2| \geqslant 3$?

Решение Разумеется, следует для начала решить оба неравенства. Вспомним геометрический смысл модуля разности $|a - b|$ — это расстояние между точками a и b числовой прямой. Поэтому неравен-

Мы уже не раз решали задачи на нахождение вероятностей. Во всех из них множество исходов испытания (опыта, эксперимента) было конечным. Например, при подсчёте по формуле $P(A) = \dfrac{N(A)}{N}$ в знаменателе как раз и стоит количество N всех исходов (элементарных событий). Но встречаются испытания и с *бесконечным* множеством исходов. К ним классическая вероятностная схема уже неприменима.

+Пример 3, дуга окружн.

!!Упр 18.1-6

§19 НЕЗАВИСИМЫЕ ПОВТОРЕНИЯ ИСПЫТАНИЙ С ДВУМЯ ИСХОДАМИ

Из $19 **А-9**, 2021 гг. удалены с.в., добавлены «испытания до первого успеха». Не было в **А-9** 2019 г.

МвШколе №7, 2009 г. !! Схема Бернулли – старшая школа!!

На наш взгляд, в основной школе, с комбинаторной точки зрения вполне достаточно (при имеющемся числе уроков математики) развитых на разнообразных примерах навыков наивного перебора и отбора «руками» нужных вариантов, умений производить разумно организованный (например, в виде дерева вариантов) перебор случаев, и, разумеется, осознанного использования правила умножения, представленного в как можно большем числе разных комбинаций. Скорее всего, про факториалы и перестановки следует говорить тоже в основной школе. Во-первых, это одно из естественных применений правила умножения, во-вторых, – разумная пропедевтика более сложных формул для C_n^k из старшей школы. Именно так организовано изучение комбинаторики в нашем учебнике ([7]).

Взаимоотношения комбинаторики и теории вероятностей в школе, скорее всего, противоположны их взаимоотношениям в вузе. В высшей школе, зачастую, «комбинаторика – служанка теории вероятностей», т.е. комбинаторика появляется в тот момент, когда требуется решить ту или иную вероятностную задачу. В общеобразовательной школе, по нашему мнению, элементы теории вероятностей не должны главенствовать над развитием комбинаторных навыков, а, скорее, наоборот: интересно звучащие, «практико-ориентированные» вероятностные задачи образуют массив учебных задач, на которых повторяются и закрепляются основные комбинаторные умения и навыки. Идея о возможности формирования и развития неких вероятностных компетенций, минуя достаточную комбинаторную базу подготовки учащихся весьма красива, но излишне виртуальна: нет никаких примеров ее надежной реализации на практике.

Ниже приведены цитаты из различных источников, в которых предприняты попытки дать определение случайной величины.

1. Случайная величина - это величина, значение которой зависит от случая.

2. Случайная величина — это величина, которая принимает в результате опыта одно из множества значений, причем появление того или иного значения этой величины до её измерения нельзя точно предсказать.

3. Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное заранее неизвестное значение.

4. Случайной величиной, связанной с данным опытом, называется **величина**, которая при каждом осуществлении этого опыта принимает то или иное числовое значение, причем заранее неизвестно, какое именно.

5. Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

6. Случайная величина – любая числовая функция, определенная на (конечном) п.э.с.

7. Это некоторая функция j , принимающая одно из своих возможных значений в результате эксперимента (синонимы: опыт; испытание; реализация того комплекса условий, представление о котором входит в определение вероятности) и такая, что для любой совокупности ее значений можно указать вероятность того, что полученное в результате эксперимента конкретное значение будет принадлежать этой совокупности (в таком случае говорят о вероятности этой совокупности)

8. Формальное математическое определение следующее: пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, тогда случайной величиной называется функция $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$, измеримая относительно $\mathcal{F}$ и борелевской σ-алгебры на $\mathbb{R}$. Вероятностное поведение случайной величины полностью описывается её распределением.

На стол бросаются *(??!! грудью и скопом)* две монеты. Исходу «орел» припишем условное числовое значение 0, а исходу «решка» - 1. Составить таблицу распределения по вероятностям P значений случайной величины X – суммы выпавших на монетах чисел.

Монету бросают два раза. Заполните таблицу:

Возможное количество выпавших «решек»	0	1	2
Вероятность появления этого количества «решек»			

50. Примеры случайных величин

В теории вероятностей, кроме случайных событий, **изучаются случайные величины.** Случайные величины тоже связаны со случайными опытами. Случайная величина — это величина, значение которой зависит от того, каким элементарным событием закончился данный случайный опыт. Разным элементарным событиям при этом могут соответствовать разные значения случайной

Занимаясь статистикой, мы узнали, что большинство величин в окружающем мире подвержены случайной изменчивости: на их значения влияет множество известных или неизвестных случайных факторов. Про некоторые величины мы заранее знаем.

Изменчивые величины, возникающие при проведении случайного опыта, мы будем называть **случайными величинами.**

Определение. Случайная величина — это величина, значение которой зависит от того, каким элементарным событием закончился случайный опыт.

ПРИМЕР 1. Предположим, некто кидает игральную кость. Случайной величиной X будем считать число выпавших очков. Поскольку кубик имеет 6 граней и число очков на каждой грани — целое число от 1 до 6, случайная величина X принимает значения 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

ПРИМЕР 2. Рост наудачу выбранного человека можно рассматривать как случайную величину.

ПРИМЕР 3. Участник лотереи покупает билет. Цена билета фиксирована, но выигрыш — случайная величина.

ПРИМЕР 4. Время безотказной службы телевизора или стиральной машины — случайная величина. Свойства этой случайной величины важны, например при установлении гарантийного срока на новую технику.

ЕЛЕНИЕ 1 Если дано испытание с конечным числом исходов, то **случайная величина** каждому из этих исходов ставит в соответствие некоторое число.

Понятие случайной величины практически совпадает с понятием числовой функции, см. § 8, $y = f(x)$, $x \in X$. Отличие состоит в том, что до этого мы работали с функциями, область определения X которых была числовым множеством.

А вот для случайных величин область определения X состоит из исходов некоторого испытания — *случайных элементарных событий*. Эти исходы можно по-разному обозначить: словами, буквами, номерами, символами и т. п. Но в любом случае у тех случайных величин, с которыми мы начинаем знакомиться, область определения — конечное множество.

ПРИМЕР 1 Игральный кубик бросают дважды. Для следующих случайных величин найти их область определения и область (множество) значений:

а) сумма выпавших очков;
б) количество выпавших шестёрок;
в) модуль разности выпавших очков;
г) среднее арифметическое двух выпавших очков.

Решение Случайная величина* R в пункте б) примера 1 имеет три значения: 0, 1, 2. Значит, первую строку таблицы мы уже знаем.

Значение	0	1	2

* Мы используем для обозначения случайной величины букву R — от английского «random» (случайный).

ИМЕР 3 По заданной таблице распределения

Значение	0	1	$\sqrt{3}$	π
Вероятность	0,23	0,31	0,17	0,29

случайной величины R найти вероятность того, что её значения:

а) неотрицательны;
б) больше 4;
в) меньше 2;
г) иррациональны.

ПРИМЕР 5 Для схемы Бернулли из n повторений вычислить математическое ожидание:

а) числа «успехов» при $n = 2$;
б) числа «успехов» при $n = 3$;
в) числа «неудач» при $n = 3$;
г) модуля разности числа «успехов» и числа «неудач» при $n = 3$.

КОНТАКТНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Издательство «Мнемозина»:
111033, Москва, ул. Волочаевская, дом 40Г, строение 4, этаж 3
E-mail: ioc@mnemozina.ru
Сайт: mnemozina.ru
Тел.: 8 (495)181-68-88

Интернет-магазин: shop.mnemozina.ru

Торговый дом:
E-mail: td@mnemozina.ru
E-mail для оптовых закупок: tender@mnemozina.ru
Тел.: 8 (495)640-93-99

Электронные формы учебников и пособий представлены на сайте
«Школа в кармане»: pocketschool.ru
E-mail для оптовых закупок: zakaz@ars-edu.ru