Муниципальное казенное учреждение
«Центр поддержки образования»
муниципального образования Динской район

Сборник №6
по подготовке к ГИА по МАТЕМАТИКЕ по теме «Уравнения, неравенства, системы»

ст.Динская, 2019

Содержание

Системы логарифмических уравнений и неравенств в задании №15 ЕГЭ по математике.Профильный уровень

Чернышева Ирина Аркадьевна,
учитель математики БОУ СОШ №37

1. Основные методы решений неравенств

К таковым методам можно отнести:

- метод равносильных переходов;
- метод замены;
- метод интервалов и обобщенный метод интервалов.
- решение неравенства на промежутках;
- метод рационализации;
- метод оценки, в частности, использование классических неравенств.

2. Решение неравенств разными способами

Пример1
Решить неравенство:

$$\log_x 2 < \log_{6-x} 2$$

Решение.
1-й способ (обобщенный метод интервалов)

$$\log_x 2 < \log_{6-x} 2$$

Перейдем к основанию 2

$$\frac{1}{\log_2 x} < \frac{1}{\log_2(6-x)}; \quad \frac{1}{\log_2 x} - \frac{1}{\log_2(6-x)} < 0$$

$$\frac{\log_2(6-x) - \log_2 x}{\log_2 x * \log_2(6-x)} < 0.$$

Рассмотрим функцию
$f(x) = \frac{\log_2(6-x) - \log_2 x}{\log_2 x * \log_2(6-x)}$. Её область определения задается условиями

$$\begin{cases} 6-x > 0 \\ x > 0 \\ 6-x \neq 1 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Отсюда $D(f(x)) = (0;1) \cup (1;5) \cup (5;6)$.
Функция непрерывна на своей области определения и обращается в нуль при x=3. Решая методом интервалов исходное неравенство и с учетом области определения решениями неравенства являются все значения $x \in (0;1) \cup (3;5)$.
2-й способ(метод рационализации)

$$\log_x 2 < \log_{6-x} 2$$

$$\begin{cases} \big((6-x) - x\big)(x-1)(6-x) < 0 \\ 6-x > 0 \\ x > 0 \\ 6-x \neq 1 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3-x)(x-1)(5-x) \\ x < 6 \\ x \neq 50 < x < 1 \\ x > 03 < x < 5 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

3-й способ (метод расщепления).

$$\frac{\log_2(6-\mathrm{x})-\log_2 x}{\log_2 x * \log_2(6-x)} < 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2(6-\mathrm{x}) - \log_2 x < 0 \\ \log_2 x * \log_2(6-x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2(6-\mathrm{x}) - \log_2 x > 0 \\ \log_2 x * \log_2(6-x) < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Объедения решения эти систем и с учетом области определения неравенства, находим все значения $x \in (0;1) \cup (3;5)$.

3. Системы логарифмических неравенств

Некоторые логарифмические неравенства удается решить непосредственно, используя свойства возрастания и убывания логарифмической функции. Иногда используют замену, с помощью которой удается свести данное неравенство к алгебраическому неравенству. При решении логарифмического неравенства необходимо учитывать те значения переменной, при которых определены выражения, содержащие знак логарифма в исходном неравенстве. Кроме того, следует использовать те преобразования неравенства, которые не нарушают равносильности неравенств.

Пример 2

Решить систему неравенств $\begin{cases} \frac{\log_2 x - 5}{1 - 2\log_x 2} \geq 2\log_2 x \\ 11\log_9(x^2 - 12x + 27) \leq 12 + \log_9 \frac{(x-9)^{11}}{x-3} \end{cases}$

Решение.

1. Первое неравенство системы определено при выполнении условий

$$\begin{cases} x > 0x > 0 \\ x \neq 1x \neq 1 \\ 1 - 2\log_x 2 \neq 0\, x \neq 4. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

Пусть $\log_2 x = a$, *тогда после замены первое неравенство примет вид:*

$$\frac{a-5}{1-\frac{2}{a}} \geq 2a.$$

Решим это неравенство.

$$\begin{cases} \frac{a-5}{1-\frac{2}{a}} - 2a \geq 0. \frac{a(a+1)}{a-2} \leq 0 \\ a \neq 0a \neq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a \leq -1 \\ 0 < a < 2. \end{cases} \Longleftrightarrow \left[\right.$$

С учетом области допустимых значений первого неравенства системы имеем.

$$\left[\begin{array}{l} \log_2 x \leq -1{,}0 < x \leq -0{,}5 \\ 0 < \log_2 x < 2.\, 1 < x < 4. \end{array}\right.$$

2. Значения x, при которых определены обе части второго неравенства системы, задаются условиями

$$\begin{cases}(x^2-12x+27)>0, (x-3)(x-9)>0,\\ \frac{(x-9)^{11}}{x-3}>0\ \frac{(x-9)^{11}}{x-3}>0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3,\\ x>9.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ \end{cases}$$

Область определения второго неравенства - есть промежуток $(-\infty;3)\cup(9;+\infty)$.

Приведем исходное неравенство к виду

$\log_9|(x-3)^{11}| + \log_9|(x-9)^{11}| \le 12+\log_9|(x-9)^{11}| - \log_9|x-3|$.

$\log_9|(x-3)^{11}| + \log_9|x-3| \le 12$

$\log_9(x-3)^{12} \le 12$

$(x-3)^{12} \le 9^{12}$

$|x-3| \le 9$

$-6 \le x \le 12.$

С учетом $(-\infty;3)\cup(9;+\infty)$, получим решение второго неравенства системы: $[-6;3)\cup$ *(9;12*.

3. Находим решение системы $(0;0{,}5]\cup(1;3)$

Ответ: $(0;0{,}5]\cup(1;3)$

Пример 3

Решить систему неравенств $\begin{cases}\boldsymbol{1+lgx^6\cdot log_5 x > log_5 x^2 + lgx^3}\\ \boldsymbol{log_{log_2(\frac{x}{2})}(x^2-10x+22)} > 0\end{cases}$

Решение

1. Первое неравенство системы определено при $x>0$.

Преобразуем это неравенство к виду

$1+6lgx\log_5 x - 2\log_5 x - 3lgx > 0$, Группируя и вынеся общий множитель за скобки, получим:

$$(3\lg x-1)(2\log_5 x-1)>0$$

$$\left(\lg x-\lg\sqrt[3]{10}\right)(\log_5 x-\log_5\sqrt{5})>0$$

$$\begin{cases}\left(x-\sqrt[3]{10}\right)(x-\sqrt{5})>0\\ x>0\end{cases}$$

Проведем оценку корней и решим неравенство методом интервалов.

$$100<125, \sqrt[6]{10^2}<\sqrt[6]{5^3}, \sqrt[3]{10}<\sqrt{5}.$$

Решением первого неравенства является $x\in\left(0;\sqrt[3]{10}\right)\cup(5;+\infty)$.

2. Для второго неравенства системы найдем область определения, заданную системой неравенств

$$\begin{cases}(x^2-10x+22)>0\\ \log_2\frac{x}{2}>0\\ \log_2\frac{x}{2}\neq 1\\ x>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-(5-\sqrt{3})(x-(5+\sqrt{3})>0,\\ x>2,\\ x\neq 4.\end{cases}$$

$$\begin{cases}2<x<5-\sqrt{3},\\ \end{cases}$$

$$x > 5 + \sqrt{3}.$$

Второе неравенство исходной системы заменим равносильной ему системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases} (\log_2(\frac{x}{2}) - 1)(x^2 - 10x + 22 - 1) > 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2 < x < 5 - \sqrt{3}, \\ x > 5 + \sqrt{3}. \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{2} - 2\right)(x-3)(x-7) > 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2 < x < 5 - \sqrt{3}, \\ x > 5 + \sqrt{3}. \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3 < x < 4, \\ x > 7, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 2 < x < 5 - \sqrt{3}, \\ x > 5 + \sqrt{3}. \end{array}\right. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} 2 < x < 5 - \sqrt{3}, \\ x > 7. \end{array}\right.$$

3. Так как $\sqrt{5} < 3$, то решением исходной системы неравенств является объединение двух промежутков $(3; 5 - \sqrt{3}) \cup (7; +\infty)$.

Ответ: $(3; 5 - \sqrt{3}) \cup (7; +\infty)$.

Пример 4

Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_2(100 - x^2) \le 2 + \log_2(x+1), \\ \log_{0,3}(2|x+5| + |x-11| - 30) < 1. \end{cases}$

Решение.

По смыслу задачи $x + 1 > 0$,

$100 - x^2 > 0$, откуда $-1 < x < 10$.

При этих значениях переменной:

$|x+5| = x+5$,

$|x-11| = 11 - x$

и $\log_{0,3}(2|x+5| + |x-11| - 30) = \log_{0,3}(x-9)$.

Далее имеем:

$$\begin{cases} -1 < x < 10, \\ \log_2(100 - x^2) \le \log_2 4 + \log_2(x+1), \\ \log_{0,3}(2(x+5) - (x-11) - 30) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 10, \\ \log_2(100 - x^2) \le \log_2 4(x+1), \\ \log_{0,3}(x-9) < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\underset{2>1,\ 0,3<1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -1 < x < 10, \\ 100 - x^2 \le 4x + 4, \\ x - 9 > 0,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 10, \\ x^2 + 4x - 96 \ge 0, \\ x > 9,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9,3 < x < 10, \\ (x+12)(x-8) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9,3 < x < 10$$

Ответ: $(9,3;\ 10)$.

Пример 5

Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_2(49-x^2) \le 2+\log_2(x+1), \\ \log_{0,4}(2|x-3|+|x-8|-8) < 1. \end{cases}$

Решение.

1. Найдем ОДЗ первого неравенства $\begin{cases} x+1>0, \\ 49-x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<7.$

При этих значениях переменной во втором неравенстве: $|x-8| = 8-x$ имеем:

$$\log_{0,4}(2|x-3|+|x-8|-8) = \log_{0,4}(2|x-3|-x).$$

Тогда:

$$\begin{cases} -1<x<7, \\ \log_2(49-x^2) \le \log_2 4+\log_2(x+1), \\ \log_{0,4}(2|x-3|-x) < 1 \end{cases} \underset{0,4<1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -1<x<7, \\ \log_2(49-x^2) \le \log_2 4(x+1), \\ 2|x-3|-x > \dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\underset{2>1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -1<x<7, \\ 49-x^2 \le 4x+4, \\ 2|x-3| > x+\dfrac{2}{5}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<7, \\ x^2+4x-45 \ge 0, \\ 2|x-3| > x+\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<7, \\ (x+9)(x-5) \ge 0 \\ 2|x-3| > x+\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\underset{x\ge5}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 5 \le x < 7, \\ 2(x-3) > x+\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \le x < 7, \\ x > 6\dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow 6\frac{2}{5} < x < 7.$$

Ответ: $(6\frac{2}{5}, 7)$.

Пример 6

Решите систему неравенств $\begin{cases} 11^{\log_{\frac{1}{11}} \log_7 x} < 7^{\log_{\frac{1}{7}} \log_{11} x}, \\ \log_{\frac{2}{3x+1}} \left(\dfrac{2}{4x-1}\right) \ge 1. \end{cases}$

Решение.

1.Решим первое неравенство системы. Найдём ограничения на x:

$\begin{cases} x>0, \\ \log_7 x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x>1. \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$

Длятакихзначений x:

$$1^{\log_{\frac{1}{11}} \log_7 x} < 7^{\log_{\frac{1}{7}} \log_{11} x} \Leftrightarrow \frac{1}{11^{\log_{11} \log_7 x}} < \frac{1}{7^{\log_7 \log_{11} x}}.$$

По основному логарифмическому тождеству будем иметь: $\dfrac{1}{\log_7 x} < \dfrac{1}{\log_{11} x}$. Далее:

$$\frac{1}{\log_7 x} < \frac{1}{\log_{11} x} \Leftrightarrow \log_x 7 < \log_x 11.$$

Последнее неравенство справедливо лишь при $x \in (0;\ +\infty)$. Таким образом, множество решений первого неравенства системы $(1;\ +\infty)$.

2. Рассмотрим второе неравенство системы на множестве решений первого неравенства. Легко заметить, что при выполнении условия $x > 1$ также выполняются неравенства: $\frac{2}{3x+1} > 0,\ \frac{2}{3x+1} \neq 1, \frac{2}{4x-1} > 0.$

Далее воспользуемся методом рационализации. Имеем:

$$\log_{\frac{2}{3x+1}}\left(\frac{2}{4x-1}\right) \geq 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{2}{3x+1}}\left(\frac{2}{4x-1}\right) \geq \log_{\frac{2}{3x+1}}\left(\frac{2}{3x+1}\right).$$

$$\begin{cases} x > 1, \\ \left(\frac{2}{3x+1} - 1\right)\cdot\left(\frac{2}{4x-1} - \frac{2}{3x+1}\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ \frac{2-3x-1}{3x+1}\cdot\frac{6x+2-8x+2}{(4x-1)(3x+1)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ \frac{1-3x}{x+\frac{1}{3}}\cdot\frac{4-2x}{\left(x-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{3}\right) \geq 0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ \frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-2)}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2\left(x-\frac{1}{4}\right)} \end{cases} \geq 0$$

3. Для всех $x > 1$ также выполняются неравенства: $x - \frac{1}{3} > 0,\ \left(x+\frac{1}{3}\right)^2 > 0,\ x - \frac{1}{4} > 0.$

$$\begin{cases} x > 1, \\ \frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-2)}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Итак, решения исходной системы — множество: $[2;\ +\infty)$.

Ответ: $[2;\ +\infty)$.

Пример 7

$$\begin{cases} 4^{\log_2 x} + x^2 < 8, \\ \log_{\frac{1}{\log_2 x}}(4x^2 - 20x + 22) < 0. \end{cases}$$

Решите систему неравенств:

Решение.

1. Найдем область допустимых значений для этой системы:

$$\begin{cases} x > 0, \\ 4x^2 - 20x + 22 > 0, \\ \log_2 x > 0, \\ \log_2 x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 2x^2 - 10x + 11 > 0, \\ x > 1, \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x \neq 2, \\ x < \frac{5-\sqrt{25-22}}{2} \end{cases} \text{или} \begin{cases} x > 1, \\ x \neq 2, \\ x > \frac{5+\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Покажем, что

$$1 < \frac{5-\sqrt{3}}{2} < 2.1 < \frac{5-\sqrt{3}}{2} < 2 \Leftrightarrow 2 < 5 - \sqrt{3} < 4 \Leftrightarrow -3 < -\sqrt{3} < -1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 1 < \sqrt{3} < 3 \Leftrightarrow 1 < 3 < 9$ (неравенство верно).

Очевидно, что $\frac{5+\sqrt{3}}{2} > 2,$ поскольку $\frac{5}{2} > 2.$

Итак, получаем ограничения на x: $1 < x < \frac{5-\sqrt{3}}{2},\ x > \frac{5+\sqrt{3}}{2}.$

2. Рассмотрим первое неравенство системы:

$$4^{\log_2 x} + x^2 < 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ 2^{\log_2 x^2} + x^2 < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x^2 + x^2 < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x^2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

С учетом разрешенных значений получим решения первого неравенства системы: $1 < x < \frac{5-\sqrt{3}}{2}.$

3. Решим второе неравенство системы на множестве разрешенных значений методом рационализации:

$$\log_{\frac{1}{\log_2 x}}(4x^2 - 20x + 22) < 0 \Leftrightarrow \log_{\log_2 x}(4x^2 - 20x + 22) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x - 1)\cdot(4x^2 - 20x + 21) > 0 \Leftrightarrow (\log_2 x - \log_2 2)\cdot\left(x^2 - 5x + \frac{21}{4}\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\cdot\left(x^2 - 5x + \frac{21}{4}\right) > 0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot\left(x^2 - \left(\frac{3}{2} + \frac{7}{2}\right)x + \frac{3}{2}\cdot\frac{7}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)\cdot\left(x - \frac{3}{2}\right)\cdot\left(x - \frac{7}{2}\right) > 0.\ (*)$$

Заметим, что при всех значениях $x \in (1;\ 2)$ решения первого неравенства системы — справедливы неравенства $-2 < 0, x - \frac{7}{2} < 0.$ Следовательно, $(x-2)\left(x - \frac{7}{2}\right) > 0$ на указанном множестве. Тогда на этом же множестве решения неравенства (*) есть множество $\left(\frac{3}{2};\ 2\right).$

3. Для получения окончательного результата докажем неравенство $\frac{3}{2} < \frac{5-\sqrt{3}}{2}$:

$\frac{3}{2} < \frac{5-\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 3 < 5 - \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} < 2 \Leftrightarrow 3 < 4$ (неравенство очевидное).

Пресечение ранее полученных результатов с решениями второго неравенства будет множество $\left(\frac{3}{2};\ \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right).$ Ответ: $\left(\frac{3}{2};\ \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right).$

4. Решение комбинированных систем неравенств.

Пример 8

Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_{6x^2 - x - 1}(2x^2 - 5x + 3) \ge 0, \\ \frac{12x^2 - 31x + 14}{4x^2 + 3x - 1} \le 0. \end{cases}$

Решение.

1. Решим первое неравенство. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $0 < 6x^2 - x - 1 < 1.$ Тогда имеем систему

$$\begin{cases} 6x^2 - x - 1 > 0, \\ 6x^2 - x - 1 < 1, \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0, \\ 2x^2 - 5x + 3 \le 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)(3x+1) > 0, \\ (2x+1)(3x-2) < 0, \\ (x-1)(2x-3) > 0, \\ (x-2)(2x-1) \le 0. \end{cases}$$

Решением этой системы будет $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right).$

Второй случай: $6x^2 - x - 1 > 1.$ Тогда имеем систему:

$$\begin{cases} 6x^2 - x - 1 > 1, \\ 2x^2 - 5x + 3 \geq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)(3x-2) > 0, \\ (x-2)(2x-1) \geq 0. \end{cases}$$

Получаем: $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup [2, +\infty)$.

Решение первого неравенства: $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup [2, +\infty)$.

2. Решим второе неравенство: $\frac{12x^2 - 31x + 14}{4x^2 + 3x - 1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(12x-7)}{(x+1)(4x-1)} \leq 0$.

Решение второго неравенства: $x \in \left(-1, \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{7}{12}, 2\right]$.

3.Решением системы является общая часть обоих решений неравенств: $\left(-1, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{7}{12}, \frac{2}{3}\right) \cup \{2\}$.

О т в е т: $\left(-1, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{7}{12}, \frac{2}{3}\right) \cup \{2\}$.

Пример 9.

Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_{4-x}(16 - x^2) \leq 1, \\ 2x + 1 - \frac{21x + 39}{x^2 + x - 2} \geq -\frac{1}{x+2}. \end{cases}$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$\log_{4-x}(16 - x^2) \leq 1 \Leftrightarrow \log_{4-x}(4-x)(4+x) \leq 1 \Leftrightarrow \log_{4-x}(4+x) \leq 0$.

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 4 - x < 1$.

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x+4) \leq 0, \\ 0 < 4 - x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 \geq 1, \\ 3 < x < 4, \end{cases}$$ откуда $3 < x < 4$.

Второй случай: $4 - x > 1$.

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x+4) \leq 0, \\ 4 - x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x + 4 \leq 1, \\ x < 3, \end{cases}$$ откуда $-4 < x \leq -3$.

Решение первого неравенства исходной системы: $x \in (-4, -3] \cup (3, 4)$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$2x + 1 - \frac{21x + 39}{x^2 + x - 2} \geq -\frac{1}{x+2} \Leftrightarrow 2x + 1 - \frac{20(x+2)}{(x+2)(x-1)} - \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} \geq -\frac{1}{x+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 - \frac{20}{x-1} \geq 0, x \neq -2 \Leftrightarrow \frac{(x+3)(2x-7)}{x-1} \geq 0, x \neq -2.$$

Решение второго неравенства исходной системы:

$x \in [-3, -2) \cup (-2, 1) \cup \left[\frac{7}{2}, +\infty\right)$.

3. Пересекая промежутки, получаем решение системы неравенств.

О т в е т: $\{-3\} \cup \left[\frac{7}{2}, 4\right)$.

Пример 10

Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 2\cdot 3^{x+2}+27\cdot 3^{-x}\le 87, \\ \log_{3x}\dfrac{1}{27}\cdot\log_3 27x+9\ge 0. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y=3^x$.

$$18y+\frac{27}{y}\le 87;\ \frac{18y^2-87y+27}{y}\le 0;\ \frac{3(2y-9)(3y-1)}{y}\le 0;\ \left[\begin{array}{l} y<0, \\ \dfrac{1}{3}\le y\le\dfrac{9}{2}. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $3^x>0$, получаем: $\dfrac{1}{3}\le 3^x\le\dfrac{9}{2}$, откуда находим решение первого неравенства системы: $-1\le x\le 2-\log_3 2$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\frac{\log_3 27x}{\log_{\frac{1}{27}}3x}+9\ge 0;\ \frac{\log_3 x+3}{-\frac{1}{3}(\log_3 x+1)}+9\ge 0;\ 9-\frac{3(\log_3 x+3)}{\log_3 x+1}\ge 0;\ \frac{\log_3 x+3}{\log_3 x+1}\le 3.$$

Сделаем замену $z=\log_3 x$.

$$\frac{z+3}{z+1}\le 3;\ -\frac{2z}{z+1}\le 0;\ \left[\begin{array}{l} z<-1, \\ z\ge 0. \end{array}\right.$$

Тогда $\left[\begin{array}{l} \log_3 x<-1, \\ \log_3 x\ge 0, \end{array}\right.$ откуда находим решение второго неравенства системы: $0<x<\dfrac{1}{3};\ x\ge 1$.

3. Поскольку $1<2-\log_3 2$, получаем решение исходно системы неравенств:

$$0<x<\frac{1}{3};\ 1\le x\le 2-\log_3 2.$$

О т в е т: $\left(0;\dfrac{1}{3}\right);\ [1;2-\log_3 2]$.

Пример 11

Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 25^{x^2-x}-30\cdot 5^{x^2}+5^{2x+3}\ge 0, \\ \log_{4x}2x+\log_{2x^2}4x^2\le\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Решение.

1. Рассмотрим первое неравенство системы. Поскольку $25^{x^2-x}=5^{2x^2-2x}$, перепишем это неравенство так: $5^{2x^2-2x}-30\cdot 5^{x^2}+5^{2x+3}\ge 0$. Разделим обе части последнего неравенства на $5^{2x+3}>0$:

$$5^{2x^2-2x-2x-3}-30\cdot 5^{x^2-2x-3}+1\ge 0\Leftrightarrow 125\cdot 5^{2x^2-4x-6}-30\cdot 5^{x^2-2x-3}+1\ge 0.$$

Введем новую переменную. Пусть $5^{x^2-2x-3}=t, t>0$. .Тогда:

$$125t^2-30t+1\ge 0\Leftrightarrow t^2-\frac{6}{25}t+\frac{1}{125}\ge 0\Leftrightarrow t^2-\left(\frac{1}{25}+\frac{1}{5}\right)t+\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{5}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t\le\dfrac{1}{25}, \\ t\ge\dfrac{1}{5}. \end{array}\right.$$

Перейдем к переменной x:

$$5^{x^2-2x-3}\le 5^{-2}\Leftrightarrow x^2-2x-1\le 0\Leftrightarrow 1-\sqrt{1+1}\le x\le 1+\sqrt{2}.$$

$$5^{x^2-2x-3}\ge 5^{-1}\Leftrightarrow x^2-2x-2\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x\le 1-\sqrt{1+2}, \\ x\ge 1+\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Решения первого неравенства системы: $(-\infty;\ 1-\sqrt{3}]\cup[1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}]\cup[1+\sqrt{3};\ +\infty)$.

2. Решим второе неравенство системы. Ограничения на *x:*

$$\begin{cases} x>0 \\ x\neq\dfrac{1}{4} \\ x\neq\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

В левой части неравенства перейдем к логарифмам по основанию 2:

$$\frac{\log_2 2x}{\log_2 4x}+\frac{\log_2 4x^2}{\log_2 2x^2}\leq\frac{5}{2}\Leftrightarrow\frac{\log_2 2+\log_2 x}{\log_2 4+\log_2 x}+\frac{\log_2 4+2\log_2 x}{\log_2 2+2\log_2 x}-\frac{5}{2}\leq 0\Leftrightarrow\frac{1+\log_2 x}{2+\log_2 x}+\frac{2+2\log_2 x}{1+2\log_2 x}-\frac{5}{2}\leq 0.$$

Пусть $\log_2 x=t,$ тогда $\dfrac{t+1}{t+2}+\dfrac{2t+2}{2t+1}-\dfrac{5}{2}\leq 0\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{t+2}+1+\dfrac{1}{2t+1}-\dfrac{5}{2}\leq 0\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2t+1}-\frac{1}{t+2}-\frac{1}{2}\leq 0\Leftrightarrow\frac{2t+4-4t-2-2t^2-5t-2}{\left(t+\frac{1}{2}\right)\cdot(t+2)}\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{-2t^2-7t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)\cdot(t+2)}\leq 0\Leftrightarrow\frac{t\cdot\left(t+\frac{7}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)\cdot(t+2)}\geq 0.$$

Полученное неравенство решим методом интервалов.

Интервалы	$\left(-\infty;\ -\frac{7}{2}\right)$	$\left(-\frac{7}{2};\ -2\right)$	$\left(-2;\ -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$	$(0;+\infty)$
Знак рационального выражения на интервалах	+	−	+	−	+

Получили: $t\leq-\frac{7}{2}, -2<t<-\frac{1}{2}, t\geq 0.$ Перейдем к переменной *x:*

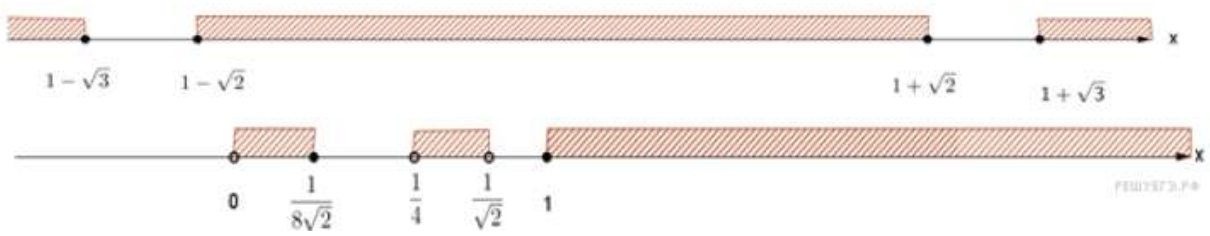
$$\log_2 x\leq-\frac{7}{2}\Leftrightarrow\log_2 x\leq\log_2 2^{-\frac{7}{2}}\Leftrightarrow 0<x\leq 2^{-\frac{7}{2}}\Leftrightarrow 0<x\leq\frac{1}{8\sqrt{2}};$$

$$-2<\log_2 x<-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\log_2 2^{-2}<\log_2 x<\log_2 2^{-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow 2^{-2}<x<2^{-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow\frac{1}{4}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\log_2 x\geq 0\Leftrightarrow\log_2 x\geq\log_2 1\Leftrightarrow x\geq 1.$$

Решения второго неравенства системы: $\left(0;\ \frac{1}{8\sqrt{2}}\right]\cup\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup[1;\ +\infty)$.

3. Найдем пересечение решений обоих неравенств системы:



Искомым пересечением является множество

$$\left(0;\ \frac{1}{8\sqrt{2}}\right]\cup\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left[1;\ 1+\sqrt{2}\right]\cup\left[1+\sqrt{3};\ +\infty\right).$$

Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{8\sqrt{2}}\right]\cup\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left[1;\ 1+\sqrt{2}\right]\cup\left[1+\sqrt{3};\ +\infty\right)$.

Пример 12

$$\begin{cases} 9^{\left(x+\frac{1}{2}\right)}-28\times 3^{\left(x-1\right)}+1\leqslant 0 \\ \log_{\sqrt{7}^{x+\frac{1}{2}}}\left(7^{\frac{2}{x^2+x}}\right)\leqslant\frac{4}{2x+1} \end{cases}$$

Решить систему неравенств:

Решение.

1. Решим первое неравенство системы, так как оно не требует определения ОДЗ.

$9^{\left(x+\frac{1}{2}\right)}-28\times 3^{\left(x-1\right)}+1\leqslant 0$ $\quad 9^{x}\Leftrightarrow\sqrt{9}-\frac{28}{3}\times 3^{x}+1\leqslant 0$

Сделаем замену: $3^{x}=t$, $\quad t^{2}\times\sqrt{9}-\frac{28}{3}\times t+1\leqslant 0 \Leftrightarrow 9t^{2}-28t+3\leqslant 0$

Четверть дискриминанта:

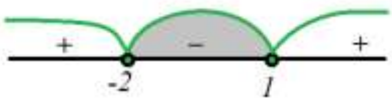
$\frac{D}{4}=\frac{b^{2}}{4}-ac=14^{2}-27=169$, Находим корни: $t_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{D}{4}}}{2}=\frac{14\pm 13}{9}$

$t_{1}=3, t_{2}=\frac{1}{9}$

Решение неравенства: $t\in\left(-\infty;\frac{1}{9}\right)\cup\left(3;+\infty\right)$

Сделаем обратную замену и запишем решение неравенства:

$3^{x}=3, x=1$ $\quad 3^{x}=\frac{1}{9}, x=-2$



$x\in\left(-\infty;-2\right)\cup\left(1;+\infty\right)$

2. Решим второе неравенство системы:

$\log_{\sqrt{7}^{x+\frac{1}{2}}} 7^{\frac{2}{x^2+x}}\leqslant\frac{4}{2x+1}$

Найдем допустимые значения:

$$\begin{cases}\sqrt{7^{x+\frac{1}{2}}}\neq 1\\ \sqrt{7^{x+\frac{1}{2}}}>0\\ x^2+x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}\neq 7^0\\ \sqrt{7^{x+\frac{1}{2}}}>0\\ x\left(x+1\right)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\neq 0\\ \sqrt{7^{x+\frac{1}{2}}}>0\\ x\left(x+1\right)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

При решении первого неравенства находим $x\neq-\frac{1}{2}$. Второе неравенство выполняется при любом значении переменной x. Третье неравенство выполняется при $x\neq 0$ и при $x\neq -1$.

Решим второе неравенство исходной системы:

$$\frac{2}{x^2+x}\times\log_{7^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}}7\leqslant\frac{4}{2x+1}\Leftrightarrow\frac{2}{x^2+x}\times\log_{7^{\frac{1}{2}\frac{\left(2x+1\right)}{2}}}7\leqslant\frac{4}{2x+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{x^2+x}\times\frac{4}{2x+1}\times\log_7 7\leqslant\frac{4}{2x+1}\Leftrightarrow\frac{2}{x^2+x}\times\frac{4}{2x+1}\leqslant\frac{4}{2x+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{x^2+x}\times\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{2x+1}\leqslant 0\Leftrightarrow\frac{2}{x^2+x}\times\frac{1}{2x+1}-\frac{x^2+x}{\left(x^2+x\right)\left(2x+1\right)}\leqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2-x^2-x}{x\left(x+1\right)\left(2x+1\right)}\leqslant 0$$

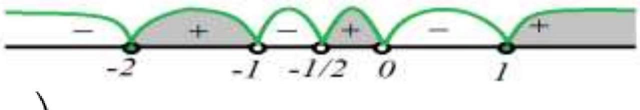
Умножая обе части полученного неравенства на (-1), меняем знак неравенства:

$$\frac{x^2+x-2}{x\left(x+1\right)\left(2x+1\right)}\geqslant 0.$$

Используем теорему Виета для определения корней квадратного трехчлена в числителе:

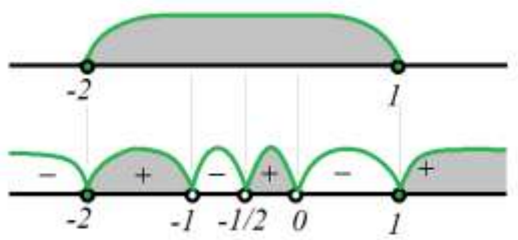
$$\frac{\left(x-1\right)\left(x+2\right)}{x\left(x+1\right)\left(2x+1\right)}\geqslant 0$$

Решаем полученное неравенство методом интервалов:



$$x\in\left[-2;-1\right)\cup-\frac{1}{2};0\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\left[1;+\infty\right)$$

3. Находим решение исходной системы с учетом допустимых значений.



$x\in[-2;-1)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\{1\}$

Ответ: $x\in[-2;-1)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\{1\}$.

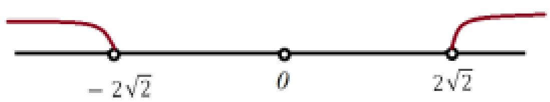
Пример 13

Решить систему неравенств: $\begin{cases}\log_3\left(\frac{x^2}{4}-\frac{16}{x^2}\right)\le 1\\ \frac{2x^2+x-28}{(x-6)^3+(x-5)^3-1}\le 0\end{cases}$

Решение.

1. Решим первое неравенство, определив допустимые значения переменной:

$\frac{x^2}{4}-\frac{16}{x^2}>0$ $\frac{x^4}{4}\Leftrightarrow 16>0$ $x^4>64$ $\Leftrightarrow$



$x>2\sqrt{2}$ либо $x<-2\sqrt{2}$ и $x\ne 0$

Решаем первое неравенство на области допустимых значений переменной.

$\log_3\left(\frac{x^2}{4}-\frac{16}{x^2}\right)\le 1$ по определению логарифма имеем: $\frac{x^2}{4}-\frac{16}{x^2}\le 3$ $\Leftrightarrow$

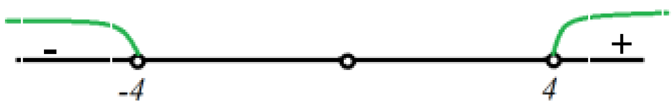
$\frac{x^4}{4}\Leftrightarrow 16-3x^2\le 0$ $x^4-12x^2-64\le 0$

Введем замену:

$v^2-12v-64\le 0$, $\frac{D}{4}=100$, $v\le -4$ или $v>16$

Первое неравенство решений не имеет. Во втором делаем обратную замену: $x^2>16$

Решение: $x>4$ либо $x<-4$



$x\in(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$

2. Решим второе неравенство: $\frac{2x^2+x-28}{(x-6)^3+(x-5)^3-1}\leqslant 0$

Числитель разложим на множители, а знаменатель упростим. Для этого разложим $(x-5)^3-1$ как разность кубов:

$$\frac{2x^2+x-28}{(x-6)^3+(x-5-1)\left((x-5)^2+x-5+1\right)}\leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2+x-28}{(x-6)\left((x-6)^2+(x-5)^2+x-4\right)}\leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+x-28}{(x-6)(2x^2-21x+57)}\leqslant 0.$$

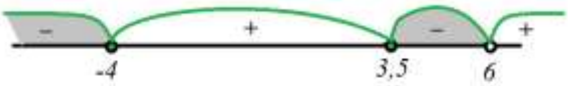
Трехчлен $2x^2-21x+57$ имеет положительный старший коэффициент, и при этом – отрицательный дискриминант, то есть он положителен при всех значениях x. Поэтому, знак неравенства зависит от выражения:

$$\frac{2x^2+x-28}{x-6}\leqslant 0$$

Разложим числитель на множители и решим это неравество методом интервалов:

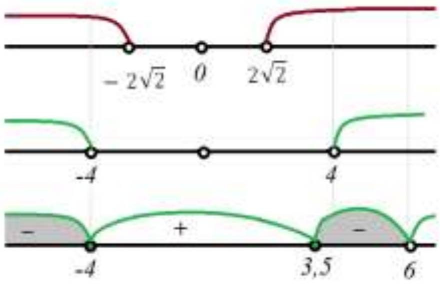
$D=225$ $x_1=-4$ и $x_2=3,5$

$$\frac{(x-3,5)(x+4)}{x-6}\leqslant 0$$



$x\in(-\infty;-4]\cup[3,5;6)$.

3. С учетом области допустимых решений найдем решение исходной системы.



Решением системы являются $x\in(-\infty;-4)\cup(4;6]$

Ответ: $x\in(-\infty;-4)\cup(4;6]$

Пример 14

$$\begin{cases} 16^{\left(x-\frac{5}{4}\right)} - 3\times4^{\left(x-\frac{3}{2}\right)} + 1 \geqslant 0 \\ \log_2\left(\frac{2x^2+5x-7}{3x-2}\right) \leqslant 1 \end{cases}$$

Решить систему неравенств

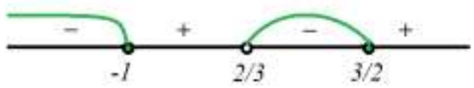
Решение.

1. Решим второе неравенство системы: $\log_2\left(\frac{2x^2+5x-7}{3x-2}\right) \leqslant 1$ по определению логарифма:

$$\frac{2x^2+5x-7}{3x-2} \leqslant 2 \Leftrightarrow \frac{2x^2+5x-7}{3x-2} - \frac{2(3x-2)}{3x-2} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-x-3}{3x-2} \leqslant 0$$.

Раскладываем на множители числитель: сумма первого и третьего коэффициентов равна второму, следовательно, корни (-1) и 1,5. Корень знаменателя – 2/3:

$$\frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+1)}{3\left(x-\frac{2}{3}\right)} \leqslant 0$$



Решение: $x\in(-\infty;-1] \cup (\frac{2}{3};+\frac{3}{2}]$

Определим допустимые значения переменной для этого неравенства:

$$\frac{2x^2+5x-7}{3x-2} > 0$$

.Сумма коэффициентов числителя равна нулю, поэтому корни: 1 и (-3,5):

$$\frac{2(x-1)(x+3,5)}{3\left(x-\frac{2}{3}\right)} > 0$$

$x\in\left(-3,5;\frac{2}{3}\right)\cup(1;+\infty)$

2.Решим первое неравенство:

$$16^{\left(x-\frac{5}{4}\right)} - 3\times4^{\left(x-\frac{3}{2}\right)} + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{16^x}{16^{\frac{5}{4}}} - \frac{3\times4^x}{4^{\frac{3}{2}}} + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{16^x}{\sqrt[4]{16^5}} - \frac{3\times4^x}{\sqrt{4^3}} + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

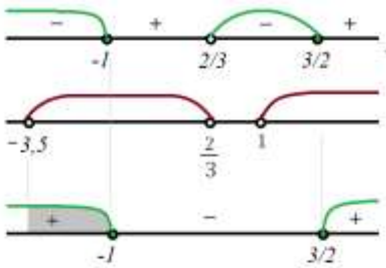
$$\frac{16^x}{32} - \frac{3\times4^x}{8} + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow 16^x - 12\times4^x \Leftrightarrow 16^x - 12\times4^x + 32 \geqslant 0$$

Вводим замену: $4^x = t$, $t^2 - 12t + 32 \geqslant 0$, то теореме Виета найдем корни x=8 и x= 4. Разложим на множители: $(t-8)(t-4) \geqslant 0$.Решение неравенства с заменой: $t\in(-\infty;4] \cup [8;+\infty)$. Вернемся к обратной замене $4^x = 4$, $x=1$

$4^x = 8$, $x = 1,5$

Решение неравенства : x∈ $(-\infty;1] \cup [1,5;+\infty)$

3.С учетом области допустимых значений найдем решение исходной системы:



Решение всей системы: $x\in(-3,5;-1]\cup\{1,5\}$

Ответ: $x\in(-3,5;-1]\cup\{1,5\}$.

Пример 15

Решить систему неравенств: $\begin{cases} x\times\log_{x+3}(7-2x)\geqslant 0 \\ 19\times 4^{x}+4^{(-x)}\leqslant 20\end{cases}$

Решение.

1. Найдем область определения системы:

$\begin{cases}x+3>0\\x+3\neq 1\\7-2x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-3\\x\neq -2\\x<3,5\end{cases}$  $x\in(-3;-2)\cup(-2;3,5)$

2. Решение, второе неравенство:

$19\times 4^{x}+4^{(-x)}\leqslant 20$. Вводим замену: $4^{x}=a$, $19a^{2}+1\leqslant 20a \Leftrightarrow 19a^{2}-20a+1\leqslant 0$ Так как сумма коэффициентов равна 0, то корни 1 и $\frac{1}{19}$.

Решение неравенства с заменой: 

$a\in[\frac{1}{19};1]$

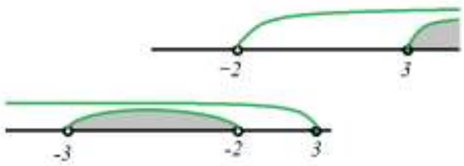
Переходим обратно к переменной x: $4^{x}=1$, $x=0$

Или $4^{x}=\frac{1}{19}$, $x=\log_{4}\frac{1}{19}$ – заметим, что данный логарифм – величина отрицательная, и меньше (-2). Все значения x, удовлетворяющие второму неравенству неположительные числа, $x\in\left[\log_{4}\frac{1}{19};0\right]$

3. Решим первое неравенство: $x\times\log_{x+3}(7-2x)\geqslant 0$, с учетом $x>0$,

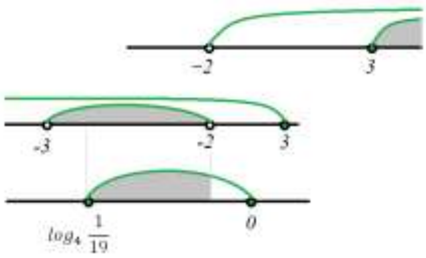
$\log_{x+3}(7-2x)\leqslant 0$. Так как $x+3>1$, $x>-2$, то $\log_{x+3}(7-2x)\leqslant\log_{x+3}1$ $\Leftrightarrow$ $7-2x\leqslant 1$, $x\geqslant 3$.

При условии $x+3<1$, $x+3>0$, или $x<-2$, $x>-3$, $\log_{x+3}(7-2x)\leqslant\log_{x+3}1$ $\Leftrightarrow$ $7-2x\geqslant 1$, $x\leqslant 3$



$x\in(-3;-2)\cup[3;+\infty)$

4. Найдем решение исходной системы.



Проверка показывает, что общее решение принадлежит ОДЗ полностью.

$x\in [\log_4\frac{1}{19};-2)$ Ответ: $x\in [\log_4\frac{1}{19};-2)$

Пример 16

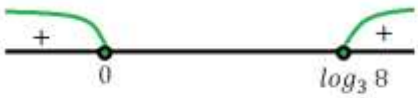
Решить систему неравенств $\begin{cases} 2\log_{\left(x^2-4x+5\right)^2}\left(4x^2+1\right)\leqslant\log_{x^2-4x+5}\left(3x^2+4x+1\right) \\ 3^x+8\times3^{\left(-x\right)}\geqslant 9 \end{cases}$

Решение.

1. Решим второе неравенство: $3^x+8\times3^{\left(-x\right)}\geqslant 9$, Вводим замену: $3^x=a$, $a^2-9a+8\geqslant 0$ $(-\infty;1]\cup[8;+\infty)$

Вернемся к прежней переменной: $3^x=1$ или $3^x=8$, $x=0$ или $x=\log_3 8$

Решение этого неравенства:



$x\in(-\infty;0]\cup[\log_3 8;+\infty)$.

2. Решим первое неравенство системы, определив допустимые значения:

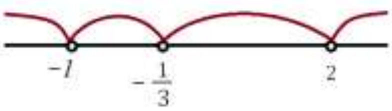
$$\begin{cases} x^2-4x+5>0 \\ x^2-4x+5\neq 1 \\ 4x^2+1>0 \\ 3x^2+4x+1>0 \end{cases}$$

Решением первого и третьего неравенств в этой системе являются все значения переменной x . Второе неравенство выполняется при всех значениях при условии, что $x\neq 2$

Решим неравенство $3x^2+4x+1>0$

Так как сумма первого и третьего коэффициентов равна второму, то корни квадратного трехчлена : (-1) и (-1/3)

Область допустимых значений:



$x\in\left(-\infty;-1\right)\cup\left(-\frac{1}{3};2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$

3. Решим первое неравенство системы, рассмотрев два случая:

1. Случай $\begin{cases}\log_{x^2-4x+5}\left(4x^2+1\right)\leqslant\log_{x^2-4x+5}\left(3x^2+4x+1\right)\\ x^2-4x+5<1\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}4x^2+1\geqslant 3x^2+4x+1\\ x^2-4x+4<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4x\geqslant 0\\ \left(x-2\right)^2<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

Так как второе неравенство второе неравенство решений не имеет, то и система не имеет решений.

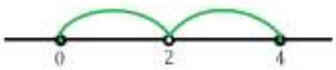
2 случай $\begin{cases}\log_{x^2-4x+5}\left(4x^2+1\right)\leqslant\log_{x^2-4x+5}\left(3x^2+4x+1\right)\\ x^2-4x+5>1\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}4x^2+1\leqslant 3x^2+4x+1\\ x^2-4x+4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4x\leqslant 0\\ x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\left(x-4\right)\leqslant 0\\ x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow$$

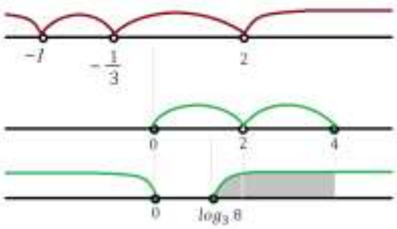
Решение первого неравенства данной системы: $x\in\left[0;4\right]$

Решение данной системы и в целом первого неравенства:

$x\in\left[0;2\right)\cup\left(2;4\right]$



4. Найдем решение исходной системы с учетом области допустимых значений.



Решение системы $x\in\{0\}\cup[\log_3 8;2)\cup(2;4]$.

Ответ: $x\in\{0\}\cup[\log_3 8;2)\cup(2;4]$.

Пример 17

Решите систему неравенств: $\begin{cases}4^x-6\cdot 2^x+8\geqslant 0,\\ \log_3\frac{2x^2+3x-5}{x+1}\leqslant 1.\end{cases}$

Решение.

1. Решим первое неравенств. Используя замену $t=2^x$, переходим к неравенству:

$$t^2-6t+8\geqslant 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\leqslant 2,\\ t\geqslant 4.\end{array}\right.$$

Переходим к обратной подстановке: $\left[\begin{array}{l}2^x\leqslant 2^1,\\ 2^x\geqslant 2^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leqslant 1,\\ x\geqslant 2.\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty).$

2. Решим второе неравенство. Область его допустимых значений определяется неравенством:

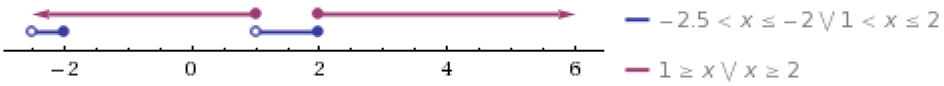
$$\frac{2x^2+3x-5}{x+1}>0 \Leftrightarrow x\in(-2{,}5;-1)\cup(1;+\infty).$$

В области допустимых значений с учетом того, что основание логарифма $3>1$, переходим к равносильному неравенству:

$$\frac{2x^2+3x-5}{x+1}\leqslant 3 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{x+1}\leqslant 0 \Leftrightarrow \quad x\in(-\infty;-2]\cup(-1;2].$$

Исключая решения, не входящие в область допустимых значений, получаем промежуток $x\in(-2{,}5;-2]\cup(1;2]$.

3. Ответом к системе неравенств будет пересечение полученных промежутков, то есть $x\in(-2{,}5;-2]\cup\{2\}$.



Полученные промежутки на числовой прямой. Решение — их пересечение

Ответ: $x\in(-2{,}5;-2]\cup\{2\}$.

Пример 18

Решите систему неравенств: $\begin{cases}2^x+16\cdot 2^{-x}\geqslant 17,\\ 2\log_9(4x^2+1)\leqslant\log_3(3x^2+4x+1).\end{cases}$

Решение.

1. Решим сперва первое неравенство. Умножаем обе части на $2^x>0$, делаем замену $t=2^x$, в результате чего приходим к неравенству:

$$t^2-17t+16\geqslant 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\leqslant 1,\\ t\geqslant 16.\end{array}\right.$$

Переходим к обратной подстановке: $\left[\begin{array}{l}2^x\leqslant 2^0,\\ 2^x\geqslant 2^4\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x\leqslant 0,\\ x\geqslant 4\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;0]\cup[4;+\infty).$

2. Решим второе неравенство. Область его допустимых значений определяется системой:

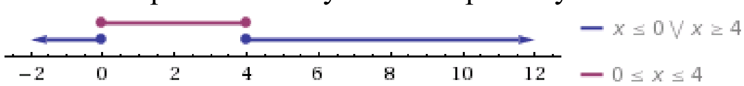
$$\begin{cases}4x^2+1>0,\\ 3x^2+4x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{3};+\infty\right).$$

Воспользовавшись свойствами логарифмов, в области допустимых значений переходим к равносильному неравенству:

$$\log_3(4x^2+1)\leqslant\log_3(3x^2+4x+1)\Leftrightarrow$$
$$4x^2+1\leqslant 3x^2+4x+1\Leftrightarrow x^2-4x\leqslant 0\Leftrightarrow x\in[0;4].$$

Данный промежуток целиком входит в область допустимых значений данного неравенства.

3. Общее решение системы будет являться пересечением полученных промежутков, то есть $x=\{0,4\}$. Графическое изображение полученных промежутков.



Решение системы — их пересечение

Ответ: $[0;4]$.

Пример 19

Решите систему неравенств: $\begin{cases}3^x<1+12\cdot 3^{-x},\\ 2\ln\frac{1}{3x-2}+\ln(5-2x)\geqslant 0.\end{cases}$

Решение.

1. Решим первое неравенство. Умножаем обе его части на $3^x>0$, после чего получаем неравенство: $3^{2x}-3^x-12<0$.

Используя подстановку $t = 3^x$, переходим к следующему неравенству:

$$t^2 - t - 12 < 0 \Leftrightarrow -3 < t < 4.$$

Переходим к обратной подстановке: $-3 < 3^x < 4^2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; \log_3 4)$.

2. Решим второе неравенство. Найдем область допустимых значений этого неравенства:

$$\begin{cases} \frac{1}{3x-2} > 0, \\ 5 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{3}, \\ x < 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{2}{3}; 2,5\right).$$

В области допустимых значений переходим к равносильному неравенству:

$$\ln \frac{5-2x}{(3x-2)^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{5-2x}{(3x-2)^2} \geqslant 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{9x^2 - 10x - 1}{(3x-2)^2} \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{5-\sqrt{34}}{9}; \frac{5+\sqrt{34}}{9}\right].$$

Обращаем внимание, что

$$\frac{5+\sqrt{34}}{9} < \frac{5+\sqrt{36}}{9} = \frac{11}{9} < 2,5$$

$$\frac{5-\sqrt{34}}{9} = \frac{\sqrt{25}-\sqrt{34}}{9} < 0 < \frac{2}{3}.$$

Тогда с учетом области допустимых значений получаем: $x \in \left(\frac{2}{3}; \frac{5+\sqrt{34}}{9}\right]$.

3. Находим общее решение системы неравенств. Сравнение полученных иррациональных значений узловых точек. Сделать это можно следующим образом. Так как

$$\frac{5+\sqrt{34}}{9} < \frac{5+\sqrt{39,0625}}{9} = \frac{5}{4},$$

$$\log_3 4 = \log_3 \sqrt[4]{256} > \log_3 \sqrt[4]{243} = \log_3 3^{\frac{5}{4}} = \frac{5}{4},$$

то $\frac{5+\sqrt{34}}{9} < \log_3 4$ и окончательный ответ к системе имеет вид: $x \in \left(\frac{2}{3}; \frac{5+\sqrt{34}}{9}\right]$.

Ответ: $x \in \left(\frac{2}{3}; \frac{5+\sqrt{34}}{9}\right]$.

Пример 20

Решите систему неравенств: $\begin{cases} \log_{\log_x 3x}(4x-1) \geqslant 0, \\ 21^x - 9 \cdot 7^x - 3^x + 9 \leqslant 0. \end{cases}$

Решение.

1. Решим второе неравенство:

$$7^x \cdot 3^x - 9 \cdot 7^x - 3^x + 9 \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 7^x \cdot (3^x - 9) - (3^x - 9) \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (7^x - 1) \cdot (3^x - 9) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [0; 2].$$

2. Первое неравенство исходной системы представляет собой логарифмическое неравенство с переменным основанием. Предложим удобный способ решения подобных неравенств, в его основе лежит формула:

$$\log_{k(x)} f(x) \vee \log_{k(x)} g(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f(x) - g(x)) \cdot (k(x) - 1) \vee 0.$$

Вместо знака $\vee$ может быть подставлен любой знак неравенства, главное, чтобы он был один и тот же в обоих случаях. Использование данной формулы существенно упрощает решение неравенства:

$$\log_{\log_x 3x}(4x-1) \geqslant \log_{\log_x 3x} 1 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (4x-2) \cdot (\log_x 3x - 1) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4x-2}{\log_3 x} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty).$$

Определим теперь область допустимых значений данного неравенства. Она задается следующей системой:

$$\begin{cases} 4x-1>0, \\ \log_x 3x>0, \\ \log_x 3x \neq 1, \\ x>0, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{4}, \\ \log_x 3x>\log_x 1, \\ x\neq 1, \\ x>0, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x>\frac{1}{4}, \\ (3x-1)(x-1)>0 \\ x>0, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty).$$

Легко видеть, что одновременно этот промежуток будет являться и решением данного неравенства.

3. Окончательным ответом исходной системы неравенств будет пересечение полученных промежутков, то есть $x\in\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)\cup(1;2]$.

Ответ: $x\in\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)\cup(1;2]$.

Пример 21

Решите систему неравенств: $\begin{cases} 25^x-30\cdot 5^x+125\geqslant 0, \\ \log_x(x-1)\cdot\log_x(x+1)\leqslant 0. \end{cases}$

Решение.

1. Решим первое неравенство. Используем подстановку $t=5^x$. Переходим к следующему квадратному неравенству:

$$t^2-30t+125\geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x\leqslant 5, \\ 5^x\geqslant 25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leqslant 1, \\ x\geqslant 2. \end{array}\right.$$

2. Решим второе неравенство. Область его допустимых значений определяется системой:

$$\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ x-1>0, \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(1;+\infty).$$

Данное неравенство равносильно следующей смешанной системе:

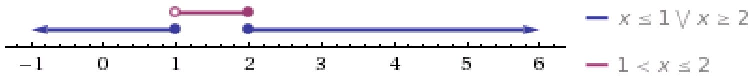
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_x(x-1)\leqslant 0, \\ \log_x(x+1)\geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \log_x(x-1)\geqslant 0, \\ \log_x(x+1)\leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

В области допустимых значений, то есть при $x>1$, используя равносильные преобразования переходим к следующей смешанной системе:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1\leqslant 1, \\ x+1\geqslant 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x-1\geqslant 1, \\ x+1\leqslant 1. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\leqslant 2, \\ x\geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x\geqslant 2, \\ x\leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[0;2].$$

С учетом области допустимых значений получаем: $x\in(1;2]$.

3. Решением исходной системы является пересечение полученных промежутков, то есть $x=2$.



Изображение полученных промежутков на числовой прямой
Ответ: $x = 2$.

Пример 22

Решите систему неравенств: $\begin{cases} \frac{3\cdot 64^x+2^x-70}{64^x-2} \geqslant 3, \\ \log_3^2(x+3) - 3\log_3(x+3) + 2 \leqslant 0. \end{cases}$

Решение.

1. Решим первое неравенство. Равносильными преобразованиями приводим его к виду:

$$\frac{2^x-64}{64^x-2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2^x-2^6}{2^{6x}-2^1} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \frac{x-6}{6x-1} \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{6}\right) \cup [6; +\infty).$$

2. Решим второе неравенство. Область его допустимых значений определяется промежутком: $x > -3$. Используя замену переменной $t = \log_3(x+3)$, переходим к следующему квадратичному неравенству:

$$t^2 - 3t + 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 \leqslant t \leqslant 2 \Leftrightarrow 1 \leqslant \log_3(x+3) \leqslant 2 \Leftrightarrow 3 \leqslant x+3 \leqslant 9 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 6.$$

Этот ответ целиком принадлежит области допустимых значений неравенства.

3.Пересечением полученных в предыдущих пунктах промежутков получаем окончательный ответ к системе неравенств: $\left[0; \frac{1}{6}\right) \cup \{6\}$.

Ответ: $\left[0; \frac{1}{6}\right) \cup \{6\}$.

9. Разбор задания №15 ЕГЭ 2018 года

Пример 23

Решить неравенство: $2\log_5 2x - \log_5 \frac{x}{1-x} \leq \log_5\left(8x^2 + \frac{1}{x} - 3\right)$.

Решение.

1. Найдем область допустимых значений неравенства

$$\begin{cases} 2x > 0; \\ \dfrac{x}{1-x} > 0; \\ 8x^2 + \dfrac{1}{x} - 3 > 0. \end{cases}$$

Решением первого неравенства является $x > 0$,решением второго являются все значения $x \in (0;1)$. Рассмотрим неравенство $8x^2 + \frac{1}{x} - 3 > 0$ на промежутке $x \in (0;1)$, так как этот промежуток является решением первого и второго неравенства. На этом промежутке третье неравенство принимает положительные значения.

2. Решим неравенство: $2\log_5 2x - \log_5 \frac{x}{1-x} \leq \log_5\left(8x^2 + \frac{1}{x} - 3\right)$.

$$\log_5 \frac{4x^2\cdot(1-x)}{x} \leq \log_5\left(8x^2 + \frac{1}{x} - 3\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\log_5 \frac{4x^3 - 4x^2)}{x} \leq \log_5\left(8x^2 + \frac{1}{x} - 3\right)$$

Логарифмическая функция по основанию 5 возрастающая, поэтому

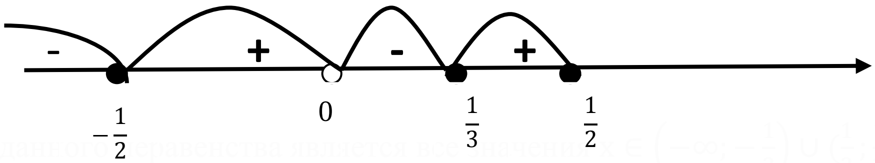
$$\frac{4x^2 - 4x^3}{x} \leq \frac{8x^3 + 1 - 3x}{x}$$

Раскрывая скобки, приводя подобные слагаемые и вынося общий множитель за скобки, придем к неравенству вида:

$$\frac{(4x^2-1)(1-3x)}{x} \le 0$$

Разложим на множители числитель

$$\frac{\left(\frac{1}{2}x-1\right)(\frac{1}{2}x+1)(1-3x)}{x} \le 0$$



Решением данного неравенства является все значения $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$

3. Найдем решение исходного неравенства с учетом допустимых значений при $x \in (0; 1)$.

Получаем множество значений при $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup [\frac{1}{2}; 1)$.

Ответ: $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup [\frac{1}{2}; 1)$.

Пример 24

Решить неравенство $log_7(2x^2+12) - log_7(x^2-x+12) \ge log_7(2-\frac{1}{x})$.

Решение

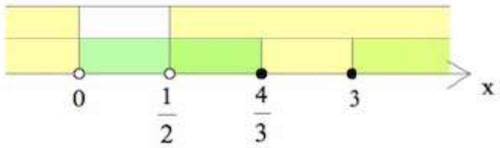
$$log_7(2x^2+12) - log_7(x^2-x+12) \ge log_7(2-\frac{1}{x});$$

$log_7\frac{2x^2+12}{x^2-x+12} \ge log_7(2-\frac{1}{x})$; $\frac{2x^2+12}{x^2-x+12} \ge 2-\frac{1}{x}$ при условии $2-\frac{1}{x} > 0$;

$\frac{x(2x^2+12)-2x(x^2-x+12)+x^2-x+12}{x(x^2-x+12)} \ge 0$ при условии $\frac{2x-1}{x} > 0$;

$\frac{3x^2-13x+12}{x(x^2-x+12)} \ge 0$, при условии $\frac{2x-1}{x} > 0$;

$\frac{(x-3)(3x-4)}{x(x^2-x+12)} \ge 0$, при условии $\frac{2x-1}{x} > 0$;



$x \in (\frac{1}{2}; \frac{4}{3}] \cup [3; +\infty)$.

Ответ: $(\frac{1}{2}; \frac{4}{3}] \cup [3; +\infty)$.

10. Логарифмические уравнения и неравенства на ЕГЭ по математике

НЕРАВЕНСТВА

1. (ЕГЭ, 2017) ***Решите неравенство***

$$\log_2^2(25-x^2) - 7\log_2(25-x^2) + 12 \geqslant 0.$$

$\left(-5; -\sqrt{17}\right] \cup [-3; 3] \cup \left[\sqrt{17}; 5\right)$

2. (Санкт-Петербург, ЕГЭ, 2017) ***Решите неравенство*** $\frac{2x^2+9x+7}{\log_3(x^2+6x+9)} \geqslant 0.$

$(-\infty; -4) \cup [-\frac{7}{2}; -3) \cup (-3; -2) \cup [-1; +\infty)$

3. (МИОО, 2017) ***Решите неравенство*** $\dfrac{\log_2(8x)\cdot\log_3(27x)}{x^2-|x|} \leqslant 0.$

$(0; \frac{1}{27}] \cup [\frac{1}{8}; 1)$

4. (МИОО, 2017) ***Решите неравенство***

$$\log_{49}(x+4) + \log_{x^2+8x+16}\sqrt{7} \leqslant -\frac{3}{4}.$$

$(-4; -\frac{27}{7}] \cup \left[-4+\frac{1}{\sqrt{7}}; -3\right)$

5. (МИОО, 2017) ***Решите неравенство*** $(5-2x)\log_{-x^2+4x-3}(x-1) \geqslant 0.$

$(1; 2) \cup [\frac{5}{2}; 3)$

6. (ЕГЭ, 2016) ***Решите неравенство***

$$2\log_{(x^2-6x+10)^2}\left(5x^2+3\right) \leqslant \log_{x^2-6x+10}\left(4x^2+7x+3\right)$$

$[0; 3) \cup (3; 7]$

7. (ЕГЭ, 2016) ***Решите неравенство*** $\log_{1-\frac{1}{(1-x)^2}}\left(\dfrac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2}\right) \leqslant 0.$

$[-\frac{3}{4}; 0) \cup (2; +\infty)$

8. (МИОО, 2016) ***Решите неравенство*** $\log_{x^2+1}(x-3)^2 \cdot \log_{x^2+1}\dfrac{(x-3)^2}{(x^2+1)^3} \leqslant -2.$

$(-\infty; -2] \cup [1; \frac{4}{3}]$

9. (ЕГЭ, 2015) ***Решить неравенство*** $\left(\log_2^2 x - 2\log_2 x\right)^2 < 11\log_2^2 x - 22\log_2 x - 24.$

$\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup (8; 16)$

10. (ЕГЭ, 2015) ***Решить неравенство***

$$\lg^4 x - 4\lg^3 x + 5\lg^2 x - 2\lg x \geqslant 0.$$

$(0; 1] \cup \{10\} \cup [100; +\infty)$

СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

1. (ЕГЭ, 2014) ***Решите систему неравенств:*** $\begin{cases} \log_{4-x}(x+4)\cdot\log_{x+5}(6-x) \leqslant 0, \\ 25^{x^2-2x+10} - 0{,}2^{2x^2-4x-80} \leqslant 0. \end{cases}$

$\{-3\} \cup (3; 4)$

2. (ЕГЭ, 2014) ***Решите систему неравенств:***

$$\begin{cases} 3^x + 8\cdot 3^{-x} \geqslant 9, \\ 2\log_{(x^2-4x+5)^2}\left(4x^2+1\right) \leqslant \log_{x^2-4x+5}\left(3x^2+4x+1\right). \end{cases}$$

$\{0\} \cup [\log_3 8; 2) \cup (2; 4]$

3. (ЕГЭ, 2014) ***Решите систему неравенств:*** $\begin{cases} \log_3\left(\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{16}{x^2}\right) \leqslant 1, \\ \dfrac{2x^2+x-28}{(x-6)^3+(x-5)^3-1} \leqslant 0. \end{cases}$

$\{-4\} \cup [\frac{7}{2}; 4]$

4. (ЕГЭ, 2014) ***Решите систему неравенств:*** $\begin{cases} 9^{x+\frac{1}{2}} - 28\cdot 3^{x-1} + 1 \leqslant 0, \\ \log_{(\sqrt{7})^{x+\frac{1}{2}}} 7^{\frac{2}{x^2+x}} \leqslant \dfrac{4}{2x+1}. \end{cases}$

$[-2;-1)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\{1\}$

5. (ЕГЭ, 2014) ***Решите систему неравенств:*** $\begin{cases} \log_x(x^3-1) \leqslant \log_x(x^3+2x-4), \\ \sqrt{3\cdot 4^x - 5\cdot 2^{x+1} + 3} \geqslant 2^x - 3. \end{cases}$

$[\log_2 3; +\infty)$

6. (МИОО, 2014) ***Решите систему неравенств:*** $\begin{cases} \log_2^2(-\log_2 x) + \log_2 \log_2^2 x \leqslant 3, \\ -4\left|x^2-1\right| - 3 \geqslant \dfrac{1}{x^2-1}. \end{cases}$

$\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right]$

7. (ЕГЭ, 2013) ***Решите систему неравенств:*** $\begin{cases} \log_{7-2x}(x+6) \leqslant 0, \\ x - \dfrac{x-3}{x+6} - \dfrac{x^2+27x+90}{x^2+8x+12} \leqslant -1. \end{cases}$

$(-6;-5]$

8. (ЕГЭ, 2013) ***Решите систему неравенств:*** $\begin{cases} \log_{6-x}\dfrac{(x-6)^2}{x-2} \geqslant 2, \\ \dfrac{x^2-x-14}{x-4} + \dfrac{x^2-8x+3}{x-8} \leqslant 2x+3. \end{cases}$

$(5;6)$

9. (ЕГЭ, 2012) ***Решите систему неравенств:*** $\begin{cases} 2^x + 32\cdot 2^{-x} \geqslant 33, \\ 2\log_9(4x^2+1) \geqslant \log_3(3x^2+4x+1). \end{cases}$

$(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{3};0\right]\cup[5;+\infty)$

10. (Москва, ЕГЭ, 2012) ***Решите систему неравенств:***

$$\begin{cases} -11x + 3\ln 17 + \log_x(\log_2 x + \log_4 x + 1) \geqslant \dfrac{1}{\log_2 x} - 11x + 3\ln 17, \\ 10x - 14\ln 17 + 3^x + 3^{x+1} > 4^x + 10x - 14\ln 17. \end{cases}$$

$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}};1\right)\cup\left[\sqrt[3]{4}; \log_{\frac{4}{3}} 4\right)$

11. Самостоятельная работа

«Решение систем логарифмических неравенств»

Вариант 1

1. $\begin{cases} \log_{x^2}\ x+1\ ^{2} \le 1, \\ 3\cdot 9^x - 28\cdot 3^x + 9 \le 0 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} \log_{3x+1}\ 4x-6\ + \log_{4x-6}\ 3x+1\ \le 2, \\ 16^x - 12^x - 2\cdot 9^x \le 0 \end{cases}$;

3. $\begin{cases}\log_{\log_x 2x}\ \ 9x-4\ \ \geq 0,\\ 6^x-4\cdot 3^x-2^x+4\leq 0\end{cases}.$

Вариант 2

1. $\begin{cases}\log_{x^2}\ \ x+1\ ^2\leq 1,\\ 3\cdot 9^{-x}-28\cdot 3^{-x}+9\leq 0\end{cases};$

2. $\begin{cases}\log_{2x+1}\ \ 4x-5\ \ +\log_{4x-5}\ \ 2x+1\ \ \leq 2,\\ 9^x-2\cdot 6^x-3\cdot 4^x\leq 0\end{cases};$

3. $\begin{cases}\log_{\log_x 2x}\ \ 6x-2\ \ \geq 0,\\ 20^x-64\cdot 5^x-4^x+64\leq 0\end{cases}.$

Вариант 3

1. $\begin{cases}\log_{x^2}\ \ x-1\ ^2\leq 1,\\ 2\cdot 4^{-x}-9\cdot 2^{-x}+4\leq 0\end{cases};$

2. $\begin{cases}\log_{2x+1}\ \ 3x-1\ \ +\log_{3x-1}\ \ 2x+1\ \ \leq 2,\\ 9^x+6^x-6\cdot 4^x\leq 0\end{cases};$

3. $\begin{cases}\log_{\log_x 2x}\ \ 9x-4\ \ \geq 0,\\ 20^x-64\cdot 5^x-4^x+64\leq 0\end{cases}.$

Вариант 4

1. $\begin{cases}\log_{x^2}\ \ x-1\ ^2\leq 1,\\ 2\cdot 4^x-9\cdot 2^x+4\leq 0\end{cases};$

2. $\begin{cases}\log_{2x-1}\ \ 4x-5\ \ +\log_{4x-5}\ \ 2x-1\ \ \leq 2,\\ 3\cdot 16^x-2\cdot 12^x-5\cdot 9^x\leq 0\end{cases};$

3. $\begin{cases}\log_{\log_x 2x}\ \ 6x-2\ \ \geq 0,\\ 6^x-4\cdot 3^x-2^x+4\leq 0\end{cases}.$

Ответы к самостоятельной работе
«Решение систем логарифмических неравенств»

Вариант 1	**Вариант 2**
1. $\left[-\frac{1}{2};0\right)\cup\ \ 0;1\ \ ;$ 2. $\left(\frac{3}{2};\frac{7}{4}\right);$ 3. $\left(\frac{4}{9};\frac{1}{2}\right)\cup\ \ 1;2\ \ .$	1. $-2;-1\ \ \cup\left[-\frac{1}{2};0\right)\cup\ \ 0;1\ \ ;.$ 2. $\left(\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right);$ 3. $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)\cup\ \ 1;3$
Вариант 3	**Вариант 4**
1. $-1;0\ \ \cup\left(0;\frac{1}{2}\right];$ 2. $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right);$	1. $-1;0\ \ \cup\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup\ \ 1;2\ \ ;.$ 2. $\left(\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right);$

3. $\left(\frac{4}{9};\frac{1}{2}\right)\cup\ 1;3$.	3. $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)\cup\ 1;2$

Литература

1. Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Системы неравенств с одной переменной в экзаменационных заданиях. // «Математика в школе», − М.: «Школьная пресса», – 2013. – № 2. − С. 15-27.
2. Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Материалы курса «Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников» лекции 1-4. − М.: Педагогический университет «Первое сентября». – 2014. – 120 с.
3. Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Логарифмические неравенства в заданиях С3 ЕГЭ (начало). // «Математика для школьников», − М.: «Школьная пресса», – 2012. – № 1. − С. 3–12.
4. Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Логарифмические неравенства в заданиях С3 ЕГЭ (окончание). // «Математика для школьников», − М.: «Школьная пресса», 2012. – № 2. − С. 3-10.
5. Петрович М.Ю. Логарифмические уравнения и неравенства –М.: Подготовительные курсы «Физтех –Потенциал»,2008, 20с
6. Математика. Сборник тренировочных работ под редакцией А.Л. Семёнова и И.В. Ященко. -М.: МЦНМО, 2017. - 72 с.-
7. Математика . Тематические тесты. Часть 2. Подготовка к ЕГЭ -2010.10-11 классы /
8. Ф. Ф. Лысенко. — Ростов-на-Дону: Легион, 2018. — 176 с. — (Готовимся к ЕГЭ) Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ — М: Интеллект-Центр, 2017. — 96 с. (Под редакцией А. Л. Семенова и И. В. Ященко).

Интернет ресурсы:

1. www.resolventa.ru , resolventa@list.ru,
2. https://ege.sdamgia.ru/
3. http://alexlarin.net/ege19.html
4. https://easy-physic.ru/neravenstva-profil-nogo-ege-zadaniya-17-ne-opyat-a-snova/
5. https://урок.рф/library/prakticheskaya_tetrad_po_teme_logarifm_chisla_osno_105454.html
6. http://mf.grsu.by/Kafedry/matan/arxiv/012/posobe2.pdf
7. https://infourok.ru/manovskaya-rabota-logarifmicheskie-neravenstva-v-ege-468336.html
8. https://yourtutor.info/решение-систем-неравенств-репетитор

Решение тригонометрических уравнений.
Математика. Профильный уровень

Першина Елена Юрьевна,
учитель математики БОУ СОШ №3

Глава 1. Тригонометрические уравнения.

Чтобы решить тригонометрическое уравнение надо путём тригонометрических преобразований свести его к простейшему тригонометрическому уравнению. Напомним формулы решений простейших тригонометрических уравнений.

1. sinx=a. Если |a|>1, решений нет. Если |a|≤1, то $x=(-1)^n\arcsin a+\pi n$, n∈Z или

$$x=\left[\begin{array}{l}\arcsin a+2\pi k,\ k\in Z.\\ \pi-\arcsin a+2\pi k,\ k\in Z.\end{array}\right.$$

2. cosx=a. Если |a|>1, решений нет. Если |a|≤1, то $x=\pm\arccos a+2\pi n, n\in Z$.

3. tgx=a. При любом a $x=\mathrm{arctg}\,a+\pi n, n\in Z$.

4. ctgx=a. При любом a $x=\mathrm{arcctg}\,a+\pi n, n\in Z$.

Отметим несколько частных случаев простейших тригонометрических уравнений: а) sinx=1. Тогда $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$.

б) sinx=-1. Тогда $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$.

в) cosx=0. Тогда $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$.

г) cosx=-1. Тогда $x=\pi+2\pi n, n\in Z$.

<u>Рассмотрим несколько типовых способов решения тригонометрических уравнений.</u>

I. Разложение на множители

Пример 1
Решить уравнение: **3sin2x-3cosx+2sinx-1=0.**
Решение:
Используя формулу sin2x=2sinxcosx, преобразуем данное уравнение

$$6\sin x\cos x-3\cos x+2\sin x-1=0,$$
$$3\cos x(2\sin x-1)+(2\sin x-1)=0,$$
$$(2\sin x-1)(3\cos x+1)=0.$$

Уравнение распадается на два:

1) $2\sin x-1=0$, $\sin x=\frac{1}{2}$ и $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$.

2) $3\cos x+1=0$, $\cos x=-\frac{1}{3}$ и $x=\pm\arccos(-\frac{1}{3})+2\pi k, kZ$.

Ответ: $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$; $x=\pm\arccos(-\frac{1}{3})+2\pi k, k\in Z$.

Пример 2

Решить уравнение **$\sin 2x+\cos(5x-\frac{\pi}{6})=0$.**

Решение

Используя формулу приведения $\sin 2x=\cos(\frac{\pi}{2}-2x)$, преобразуем наше уравнение

$$\cos(\frac{\pi}{2}-2x)+\cos(5x-\frac{\pi}{6})=0;$$

$$2\cos\left(\frac{3x+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{7x-\frac{2\pi}{3}}{2}\right)=0.$$

Уравнение распадётся на два:

1) $\cos\left(\frac{3x+\frac{\pi}{3}}{2}\right)=0;\ \frac{3x+\frac{\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$

$3x+\frac{\pi}{3}=\pi+2\pi n,\ n\in Z;\ x=\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z.$

2) $\cos\left(\frac{7x-\frac{2\pi}{3}}{2}\right)=0;\ \frac{7x-\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z;$

$7x-\frac{2\pi}{3}=\pi+2\pi k,\ k\in Z;\ \ x=\frac{5\pi}{21}+\frac{2\pi n}{7},\ k\in Z.$

Ответ: $x=\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z;\ \ x=\frac{5\pi}{21}+\frac{2\pi n}{7},\ k\in Z.$

II. Сведение уравнения к алгебраическому от одного переменного

Пример 3

Решить уравнение $4\sin^3 x=3\cos(x+\frac{3\pi}{2})$.

Решение

По формуле приведения $\cos(x+\frac{3\pi}{2})=\sin x$, поэтому уравнение запишется: $4\sin^3 x=3\sin x$.

$$\sin x(4\sin^2 x-3)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\ x=\pi n,\ n\in Z.\\ \sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z.\end{array}\right.$$

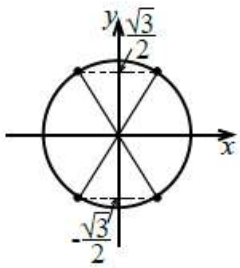


Рис. 1

Отметим, что в случае двух уравнений $\sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ мы записали не объединение стандартных формул $(-1)^n(\pm\frac{\pi}{3})+\pi n, n\in Z$, а более простую, которая получается, если изобразить решения этих уравнений на тригонометрическом круге (рис. 1). (Две верхние точки – решения уравнения $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, а две нижние – решения уравнения $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$).

Ответ $x=\pi n, n\in Z$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$.

Пример 4

Решить уравнение $\cos 2x+\sin^2 x=0,5$.

Решение

Воспользуемся формулой $\cos 2x=1-2\sin^2 x$.

Получим: $1-\sin^2 x=0,5$;

$$\sin^2 x=\frac{1}{2},$$

$$\sin x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z. \quad (1)$$

Это уравнение можно решить и пользуясь формулой $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$. Тогда оно преобразуется к виду: $\cos 2x=0$,

$$2x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z, \text{ или}$$

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z. \quad (2)$$

Геометрически множества точек (1) и (2) совпадают (рис. 2).Так что решения тригонометрических уравнений могут быть записаны в разной форме.

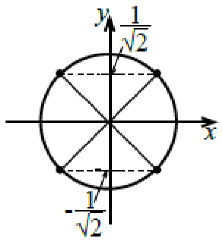


Рис. 2

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$.

III. Однородные уравнения

Пример 5.

Решить уравнение $5\sin^2 x-4\sin x\cdot\cos x-\cos^2 x=0$.

Решение

Это однородное уравнение второго порядка. Так как $\cos x\neq 0$ (иначе из нашего уравнения следовало бы, что $\sin x=0$ что противоречит основному тригонометрическому тождеству ($\sin^2 x+\cos^2 x=1$), то разделим наше уравнение на $\cos^2 x$. Получим уравнение $5\mathrm{tg}^2 x-4\mathrm{tg}x-1=0$. Откуда $\mathrm{tg}x=1$ и $\mathrm{tg}x=-\frac{1}{5}$. Следовательно, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$, или $x=-\mathrm{arctg}\frac{1}{5}+\pi k, k\in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$; $x=-\mathrm{arctg}\frac{1}{5}+\pi k, k\in Z$.

Пример 6

Решить уравнение $2+3\sin x\cos x=7\sin^2 x$.

Решение

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством $\sin^2x+\cos^2x=1$. Преобразуем наше уравнение к однородному уравнению второго порядка:

$$2(\sin^2x+\cos^2x)+3\sin x\cos x=7\sin^2x.$$

$$5\sin^2x-3\sin x\cos x-2\cos^2x=0.$$

Здесь $\cos x\neq 0$ (в противном случае из последнего уравнения следовало бы, что $\sin x\neq 0$ что противоречит основному тригонометрическому тождеству). Делим последнее уравнение на $\cos^2x$. Получаем уравнение $5tg^2x-3tgx-2=0$.Откуда $tgx=1$ и $tgx=-\frac{2}{5}$. И значит, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$ и $x=-arctg\frac{2}{5}+\pi k, k\in Z$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$; $x=-arctg\frac{2}{5}+\pi k, k\in Z$

Пример 7

Решить уравнение $\sin^3x+13\cos^3x-\cos x=0$.

Решение

Перепишем это уравнение так:

$$\sin^3x+13\cos^3x-\cos x(\sin^2x+\cos^2x)=0$$

$$\sin^3x+12\cos^3x-\cos x\sin^2x=0.$$

Это однородное уравнение третьего порядка. Деля его на $\cos^3x$ ($\cos x\neq 0$ для решений нашего уравнения), получим уравнение относительно tgx: $tg^3x-tg^2x+12=0$.

Делаем замену: $t=tgx$. Алгебраическое уравнение $t^3-t^2+12=0$ имеет корень $t=-2$ (находится подбором среди целых делителей числа 12). Далее деля многочлен t^3-t^2+12 на $(t+12)$, раскладываем левую часть алгебраического уравнения на множители $(t+2)(t^2-3t+6)=0$.

Уравнение $t^2-3t+6=0$ не имеет действительных корней, т. к. $D<0$.

Итак, $tgx=-2$; $x=-arctg2+\pi n, n\in Z$.Ответ: $x=-arctg2+\pi n, n\in Z$.

IV. Использование формулы дополнительного угла

Напомним эту формулу $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$, где φ определяется (неоднозначно) из равенств

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}(a^2+b^2\neq 0).$$

Формулу дополнительного угла можно записать и в другом виде, например,

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha+\varphi),\text{ где}$$

$$\cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi=-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Пример 8

Решить уравнение $4\sin x-3\cos x=5$.

Решение

1-ый способ. По формуле дополнительного угла преобразуем уравнение:

$$\sqrt{16+9}\sin(x+\varphi)=5,$$

$$\sin(x+\varphi)=1,$$

$$\cos\varphi=\frac{4}{5},$$

$$\sin\varphi=-\frac{3}{5}.$$

Можновзять$\varphi=-\arcsin\frac{3}{5}$.

Решением уравнения будет: $x+\varphi=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$.

$$x=\arcsin\frac{3}{5}+\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z.$$

Ответ: $x=\arcsin\frac{3}{5}+\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z.$

<u>2-йспособ.</u>Воспользуемсяформулами:

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2};\ \cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2},\ \ 1=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}$$

Тогда уравнение $4\sin x-3\cos x=5$ запишется в виде

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-3(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2})=5(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2})$$

$$2\sin x^2\frac{x}{2}-8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+8\cos^2\frac{x}{2}=0.$$

Это однородное уравнение второго порядка, деля которое на $2\cos^2\frac{x}{2}$, получим уравнение:

$$tg^2\frac{x}{2}-4tg\frac{x}{2}+4=0 \text{или } (tg\frac{x}{2}-2)^2=0.$$

Итак, $tg\frac{x}{2}=2$, значит $\frac{x}{2}=arctg2+\pi n, n\in Z$, $x=2arctg2+2\pi n, n\in Z.$

Ответ: $x=2arctg2+2\pi n, n\in Z.$

Отметим, что формы ответа при решении способами 1 и 2 различны, хотя, конечно, это одно и то же множество точек.

Отметим, что подобным образом решаются уравнения вида: $F(\sin 2x, \sin x\pm\cos x)=0$. Замена $t=\sin x\pm\cos x$.

Пример 9

Решить уравнение sin2x-2(sinx+cosx)-1=0.

Решение

Сделаем замену: $t=\sin x+\cos x$. Тогда

$$t^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1+\sin 2x.$$

Откуда $\sin 2x=t^2-1$. Наше уравнение преобразуется в такое: $t^2-2t-2=0$.

$$t_1=1+\sqrt{3},\ t_2=1-\sqrt{3}.$$

Так как $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\leq 2$, то $t_1=1+\sqrt{3}>2$ не является решением. Число $|1-\sqrt{3}|\leq 2$ и уравнение $\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ имеет решения: $x+\frac{\pi}{4}=(-1)^n\arcsin\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\pi n, n\in Z.$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\pi n, n\in Z.$

Рассмотрим теперь более сложные тригонометрические уравнения, в которых надо делать отбор корней.

V. Рациональные тригонометрические уравнения

Пример 10

Решить уравнение $\boldsymbol{\frac{\cos 2x+\cos x+1}{2\sin x+\sqrt{3}}=0}$.

Решение

ОДЗ $\sin x\neq-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Не будем решать это неравенство, а изобразим на тригонометрическом круге (рис. 3а) точки, не удовлетворяющие ОДЗ.

Решаем уравнение $\cos 2x+\cos x+1=0$.

Преобразуем его:$(2\cos^2x-1)+\cos x+1=0$,

$$2\cos^2x + \cos x = 0,$$
$$\cos x(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z, \\ \cos x = -\dfrac{1}{2},\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z. \end{array}\right.$$

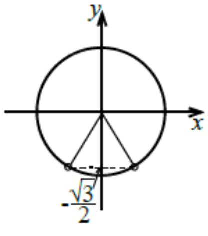


Рис. 3а

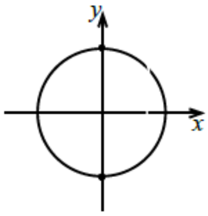


Рис. 3б

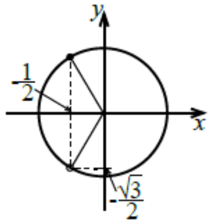


Рис. 3в

Изобразим решения уравнения cosx=0 на тригонометрическом круге (рис. 3б). Они удовлетворяют ОДЗ.

Изобразим решения уравнения cosx=$-\frac{1}{2}$ на тригонометрическом круге (рис. 3в).

Мы видим, что точки x=$-\frac{2\pi}{3}$+2πn,n∈Z, не удовлетворяют ОДЗ, а точки x=$\frac{2\pi}{3}$+2πn, n∈Z удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: x=$\frac{\pi}{2}$+πn,n∈Z, x=$\frac{2\pi}{3}$+2πn,n∈Z.

Пример 11

Решить уравнение $\boldsymbol{\dfrac{\sin x}{\sin 3x}+\dfrac{\sin 5x}{\sin x}}$***=8cosxcos3x.***

Решение

ОДЗ $\begin{cases} \sin 3x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi m}{3}, m \in Z.$

Умножим уравнение на sinx·sin3x. Получим:

$$\sin^2x + \sin 3x \cdot \sin 5x = 8\sin x\cos x \cdot \sin 3x \cdot \cos 3x.$$

Преобразуем это уравнение:

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x) = 2\sin 2x \cdot \sin 6x.$$

Ещёразвоспользуемсяформулой

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

в правой части последнего уравнения и умножим его на 2. Получим

$$(1-\cos 2x) + (\cos 2x - \cos 8x) = 2(\cos 4x - \cos 8x)$$
$$1 + \cos 8x - 2\cos 4x = 0.$$

Далее:
$$1 + \left(2\cos^2 4x - 1\right) - 2\cos 4x = 0,\ 2\cos 4x\left(\cos 4x - 1\right) = 0 \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 4x = 1. \\ \cos 4x = 0. \end{array}\right.$$

Если cos4x=1, то 4x=2πn, x=$\frac{\pi n}{2}$,n∈Z.

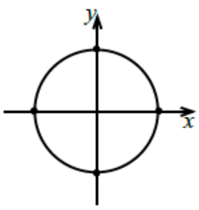


Рис. 4а

1. Изображаем точки x=$\frac{\pi n}{2}$,n∈Z на тригонометрическом круге (рис. 4а). Геометрически их 4 штуки (для n=0,1,2,3 – далее они повторяются).

Рис. 4б

2. Изображаем точки $x=\frac{\pi m}{3}, m\in Z$, которые не удовлетворяют ОДЗ на тригонометрическом круге (4б). Их 6 штук (для m=0,1,2,3,4,5 – далее они повторяются). Видно, что совпадения точек будут при $x=\pi n$, $n\in Z$. Эти значения надо исключить из решения, т. е. в ответ пойдут точки $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$.

С решениями уравнения $\cos 4x=0$, $4x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z, x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}, n\in Z$, можно поступить аналогично, сделав отбор на тригонометрическом круге. Но когда точек–решений на тригонометрическом круге много, и много точек, не входящих в ОДЗ, то удобнее воспользоваться аналитическим способом отбора решений. В данном случае точек - решений на тригонометрическом круге в серии $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}, n\in Z$, будет 8 штук (различные при n=0,1,2,3,4,5,6,7 – далее они повторяются), а точек, не входящих в ОДЗ на тригонометрическом круге 6. Посмотрим, есть ли совпадения, т. е. существуют ли целые m и n такие, что

$$\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}=\frac{\pi m}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{8}+\frac{n}{4}=\frac{m}{3}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3+6n=8m\Leftrightarrow 3=2(4m-3n).$$

Последнее равенство невозможно, т. к. слева стоит нечётное число, а справа чётное.

Отметим, что и для решений уравнения $\cos 4x=1$ отбор можно было сделать аналитически. А именно смотрим, существуют ли целые m и n такие, что $\frac{\pi n}{2}=\frac{\pi m}{3}\Leftrightarrow 3n=2m$. Видим, что n делится на 2. Тогда n=2k и m=3k,k∈Z.

Т. е. из решения уравнения $\cos 4x=1$ надо исключить $x=\frac{\pi n}{2}$, где n=2k, т. е. оставить $x=\frac{\pi n}{2}$ с n=2k+1,k∈Z. Но при n=2k+1 в серии $x=\frac{\pi n}{2}$ останутся $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$, что и было нами получено на тригонометрическом круге.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$; $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}, n\in Z$.

Иногда отбор решений предлагается сделать в условии задачи.

Пример 12

а) Решить уравнение $\mathbf{\frac{2}{tg^2x}-\frac{1}{tgx}-3=0}$.

б) Указать корни, принадлежащие отрезку $\mathbf{[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}]}$.

Решение

а) Сделаем замену $t=\frac{1}{tgx}$. Получим уравнение $2t^2-t-3=0$. Его решение $t_1=-1$ и $t_2=\frac{3}{2}$.

1) tgx=-1. Следовательно, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$.

2) $tgx=\frac{2}{3}$. Тогда $x=arctg\frac{2}{3}+\pi n, n\in Z$.

б) Сделаем отбор корней, принадлежащих отрезку $[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}]$.

1) Решаем неравенство $-\frac{3\pi}{2} \le -\frac{\pi}{4}+\pi n \le -\frac{\pi}{2}$. Оно равносильно неравенству $-\frac{5}{4} \le n \le -\frac{1}{4}$. Т. к. $n \in Z$, то последнему неравенству удовлетворяет только n=-1. Итак, из серии решений $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n \in Z.$, только корень $x=-\frac{5\pi}{4} \in [-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}]$.

2) Аналогично решаем неравенство $-\frac{3\pi}{2} \le \operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi n \le -\frac{\pi}{2}$ (5)

Т. к. $n \in Z$, то в силу правого неравенства n<0. Число n=-1 подходит, т. к. неравенство (5) в этом случае преобразуется в неравенство $-\frac{\pi}{2} \le \operatorname{arctg}\frac{2}{3} \le \frac{\pi}{2}$, что верно, n=-2 не удовлетворяет (5), т. к. в этом случае получим $\frac{\pi}{2} \le \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$, что неверно. Аналогично не подходит n<-2. Итак, из серии решений $x= \operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi n$, только корень $(\operatorname{arctg}\frac{2}{3}-\pi) \in [-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}]$.

Ответ а) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n \in Z.$; $x=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi n, n \in Z.$

б) $x=-\frac{5\pi}{4}$ и $x= \operatorname{arctg}\frac{2}{3}-\pi$

Пример 13

***Найти наименьший корень уравнения* $\mathbf{ctg6x-tg5x=\frac{1}{cos5x}}$*,принадлежащий отрезку*$\mathbf{[\frac{8\pi}{17};\frac{40\pi}{17}]}$.**

Решение

Преобразуем данное уравнение

$$\frac{\cos 6x}{\sin 6x}-\frac{\sin 5x}{\cos 5x}=\frac{1}{\cos 5x}$$

$$\frac{\cos 6x\cdot\cos 5x-\sin 6x\cdot\sin 5x}{\sin 6x\cdot\cos 5x}=\frac{1}{\cos 5x}$$

$$\frac{\cos 11x}{\sin 6x\cdot\cos 5x}=\frac{1}{\cos 5x}.$$

Последнее уравнение равносильно cos11x=sin6x при условии $\sin6x\cdot\cos5x\neq0$.

Решаем уравнение cos11x-sin6x=0. Преобразуем его:

$$\cos11x-\cos(6x-\frac{\pi}{2})=0$$

$$-2\sin(\frac{17x}{2}-\frac{\pi}{4})\sin(\frac{5x}{2}+\frac{\pi}{4})=0.$$

1) Еслиsin$(\frac{5x}{2}+\frac{\pi}{4})=0$ то$\frac{5x}{2}+\frac{\pi}{4}=\pi n$, $n \in Z$, откуда $5x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in Z$.

Эти числа не являются корнями исходного уравнения, т. к. нарушается условие $\cos5x\neq0$.

2) Если $\sin(\frac{17x}{2}-\frac{\pi}{4})=0$, то $x=\frac{\pi(1+4n)}{34}$,$n \in Z$. Находим, при какихn∈Z, эти числа лежат на отрезке $[\frac{8\pi}{17};\frac{40\pi}{17}]$.

Решаем неравенства $\frac{8\pi}{17} \le \frac{\pi(1+4n)}{34} \le \frac{40\pi}{17} \Leftrightarrow \frac{15}{4} \le n \le \frac{79}{4}$.

Значит, $4 \le n \le 19, n \in Z$. Итак, на отрезок $[\frac{8\pi}{17};\frac{40\pi}{17}]$ попадают числа $\frac{17\pi}{34}, \frac{21\pi}{34}, \frac{25\pi}{34}$,.... Первое из них не удовлетворяет условию $\cos5x\neq0$ (т.к.$\frac{17\pi}{34}=\frac{\pi}{2}$) и, следовательно, не является решением уравнения. Число $\frac{21\pi}{34}$удовлетворяет условию $\sin6x\cdot\cos5x\neq0$; значит, именно оно является минимальным корнем на данном отрезке.

Ответ: $x=\frac{21\pi}{34}$

VI. Тригонометрические уравнения с корнем квадратным

Пример 14

Решить уравнение $\sqrt{\cos 2x - 5\sin x}=-2\cos x$.

Решение

Это уравнение равносильно системе $\begin{cases} \cos 2x - 5\sin x = 4\cos^2 x. \\ \cos x \le 0. \end{cases}$

Неравенство должно выполняться, т. к. правая часть уравнения равна корню квадратному, а он неотрицателен по определению. (Отметим, что в системе мы не пишем неравенство $\cos 2x-5\sin x \ge 0$, т. е. подкоренное выражение неотрицательно, т. к. оно равно квадрату правой части). Решаем уравнение: Преобразуем его:

$$(1-2\sin^2 x)-5\sin x=4(1-\sin^2 x)$$

$$2\sin^2 x -5\sin x-3=0.$$

Заменяя $\sin x=t$, получим квадратное уравнение: $2t^2-5t-3=0$.

Откуда $t_1=3$, $t_2=-\frac{1}{2}$. Т. к. $|\sin x|\le 1$, то $t_1=3$ не является решением.

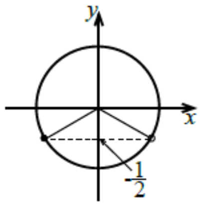


Рис. 5

Если $\sin x=-\frac{1}{2}$, то на тригонометрическом круге (рис. 5) имеем две точки. Но правая точка не подходит, т. к. должно быть $\cos x \le 0$.

Ответ: $x=\frac{7\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$.

Пример 15

Решить уравнение $\sqrt{5-\cos 2x}$***=cosx-3sinx.***

Решение

Это уравнение эквивалентно системе $\begin{cases} 5-\cos 2x = (\cos x - 3\sin x)^2, \\ \cos x - 3\sin x \ge 0. \end{cases}$

Решаем уравнение. Преобразуем его к однородному.

$$5(\sin^2 x+\cos^2 x)-(\cos^2 x - \sin^2 x)= \cos^2 x -6\sin x\cos x+ 9\sin^2 x$$

$$3 \sin^2 x -6\sin x\cos x-3\cos^2 x =0.$$

$$2\sin x\cos x+(\cos^2 x - \sin^2 x)=0$$

$$\sin 2x+\cos 2x=0.$$

Это однородное уравнение 1-го порядка. Оно эквивалентно уравнению $\mathrm{tg}2x=-1$.

Отсюда $2x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$, $x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$.

Изобразим решения на тригонометрическом круге (рис. 6). Это 4 точки ($n=0,1,2,3$ - далее они повторяются).

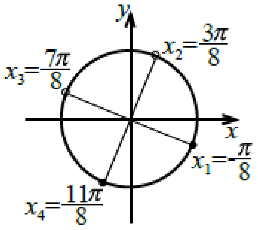


Рис. 6

Для этих точек надо проверить неравенство cosx-3sinx≥0. Ясно, что точка x_1 удовлетворяет этому неравенству, т. к. $\cos x_1>0$ и $\sin x_1<0$. Для точки x_3, диаметрально противоположной точке x_1, sinx и cosx меняют знак, меняет знак и выражение (cosx-3sinx), и, следовательно, для x_3 неравенство не выполняется. Точка x_2 не удовлетворяет неравенству, т. к. $\sin x_2>0$, $\cos x_2>0$, но $\sin x_2>\cos x_2$ в виду того, что $\frac{\pi}{4}<x_2<\frac{\pi}{2}$, так что выражение $\cos x_2-3\sin x_2<0$. Точка x_4 диаметрально противоположна x_2. Следовательно,

$$\cos x_4-3\sin x_4=-(\cos x_2-3\sin x_2)>0,$$

и, значит, это решение. Учитывая, что решения имеют период 2π, получаем

Ответ: $x=-\frac{\pi}{8}+2\pi n, n\in Z$; $x=\frac{11\pi}{8}+2\pi n, n\in Z$.

VII. Уравнения с модулем

Пример 17

***Решить уравнение* sin3x+|sinx|=sin2x.**

Решение

Решение уравнения сводится к объединению решений двух систем.

1) $\begin{cases} \sin x \ge 0, \\ \sin 3x + \sin x = \sin 2x. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin x < 0, \\ \sin 3x - \sin x = \sin 2x. \end{cases}$

Решаем первую систему. Уравнение sin3x+sinx=sin2x преобразуем:

$$2\sin 2x\cos x=\sin 2x$$

$$\sin 2x(2\cos x-1)=0.$$

Значит, $\left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0, \\ \cos x = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$

Изображаем решения уравнения sin2x=0 на тригонометрическом круге: $x=\frac{\pi n}{2}, n\in Z$, (рис. 7). В силу неравенства sinx≥0 не подходит нижняя точка, т. е. в решения системы входят

$$x=\pi n,\ n\in Z, \text{ и } x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z.$$

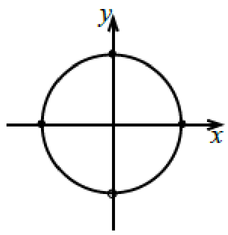


Рис. 7

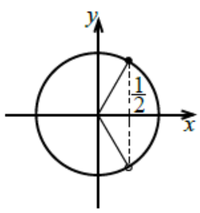


Рис. 8

Аналогично, изображаем на тригонометрическом круге (рис. 8) решения уравнения cosx=$\frac{1}{2}$. Нижняя точка не удовлетворяет неравенству sinx≥0. Значит, остаются в качестве решений системы x=$\frac{\pi}{3}$+2πn, n∈Z.

Итак, решениями первой системы являются x=πn; x=$\frac{\pi}{2}$+2πn; x=$\frac{\pi}{3}$+2πn,n∈Z.

Решаем вторую систему. Уравнение sin3x-sinx=sin2x преобразуем:

$$2\cos 2x\cdot\sin x=2\sin x\cos x.$$

Т. к. в этой системе sinx≠0, то можно сократить уравнение на 2sinx. Оно запишется:

$$\cos 2x=\cos x$$
$$2\cos^2 x-\cos x-1=0.$$

Отсюда cosx=1 или cosx=-$\frac{1}{2}$ На тригонометрическом круге этим уравнениям удовлетворяют соответственно точки (рис. 9 и рис. 10). Неравенству sinx<0 удовлетворяет только одна из этих трёх точек, находящаяся в нижней полуплоскости, а именно x=$\frac{\pi}{3}$+π+2πn,n∈Z.

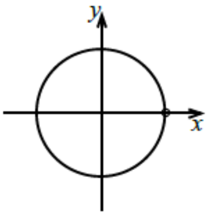


Рис. 9

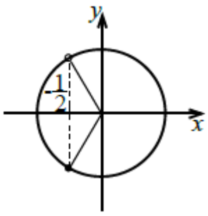


Рис. 10

В ответе две серии решений

$$x=\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z \text{ и } x=\frac{\pi}{3}+\pi+2\pi n, n\in Z,$$

соответствующие двум диаметрально противоположным точкам тригонометрического круга, можно задать одной формулой: x=$\frac{\pi}{3}$+πn, n∈Z.

Ответ: x=πn; x=$\frac{\pi}{2}$+2πn; x=$\frac{\pi}{3}$+πn,n∈Z.

Пример 18.

Решите уравнение $|\cos x+\sin x|=\sqrt{2}\sin 2x.$

Решение.

Имеем:

$$|\cos x+\sin x|=\sqrt{2}\sin 2x \Leftrightarrow \begin{cases}(\cos x+\sin x)^2=2\sin^2 2x,\\ \sin 2x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1+\sin 2x=2\sin^2 2x,\\ \sin 2x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin 2x=1;\\ \sin 2x=-\frac{1}{2},\end{array}\right.\\ \sin 2x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x=1 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+2\pi k \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\pi k, k\epsilon$ Z.

Пример 19. 1

Решить уравнение: $|\cos x|=\sin x+\frac{1}{2}.$

Решение.

Уравнение равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases} |\cos x|^2 = \left(\sin x + \frac{1}{2}\right)^2, \\ \sin x + \frac{1}{2} \geq 0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} 2\sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0, \\ \sin x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8\cdot 3}}{8} = \frac{-1-\pm\sqrt{7}}{4}.$$

Но $\frac{-1-\sqrt{7}}{4} < -\frac{1}{2}$ не является решением

Ответ. $x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{7}-1}{4} + \pi k$.

VIII. Нестандартные тригонометрические уравнения.

Использование ограниченности функцийcosx и sinx.

Пример20

Решить уравнение $\sin 5x - 2\cos 2x = 3$.

Решение.

Поскольку $\sin 5x \leq 1$, $-\cos 2x \leq 1$, то левая часть не превосходит 3 и равна 3, если $\begin{cases} \sin 5x = 1, \\ \cos 2x = -1. \end{cases}$

Для нахождения значений x, удовлетворяющих обоим уравнениям, поступим следующим образом. Решим одно из них, затем среди найденных значений отберем те, которые удовлетворяют и другому.

Начнем со второго: $\cos 2x = -1$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$. Тогда $5x = \frac{5\pi}{2} + 5\pi k$, $\sin 5x = \sin(\frac{5}{2}\pi + 5\pi k) = \sin(\frac{\pi}{2} + \pi k)$.

Понятно, что лишь для четных k будет $\sin 5x = 1$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Пример 21

2Решить уравнение $2\cos\frac{x}{5} = 5^x + 5^{-x}$ **.**

Решение.

$2\cos\frac{x}{5} \leq 2$, $5^x+5^{-x} \geq 2$. Следовательно, $\begin{cases} 2\cos\frac{x}{5} = 2 \\ 5^x + 5^{-x} = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 0$.

Ответ. $x = 0$.

Пример 22

Решить уравнение $\log_2(y+1) + \arcsin(2^{|x|} + y) = \frac{\pi}{2}$.

Решение.

Обозначим $f(x,y)=\arcsin(2^{|x|}+y)$, тогда из определения обратной тригонометрической функции $f(x,y)$ имеем $-\frac{\pi}{2}\le f(x,y)\le\frac{\pi}{2}$ и $-1\le 2^{|x|}+y\le 1$.

Так как $f(x,y)\le\frac{\pi}{2}$, то из уравнения следует неравенство $\log_2(y+1)\ge 0$, т.е. $y\ge 0$. Поскольку $2^{|x|}+y\le 1$ и $y\ge 0$, то $2^{|x|}\le 1$ и $|x|\le 0$. Однако $|x|\ge 0$ и поэтому $x=0$.

Если $2^{|x|}+y\le 1$ и $x=0$, то $y\le 0$. Так как ранее было установлено, что $y\ge 0$, то $y=0$

Ответ. $x=0$, $y=0$.

Функциональные методы решения тригонометрических и комбинированных уравнений.

Пример 23

3Решить уравнение $x^2+(1+x)\sin\frac{\pi x}{6}=\frac{3+x}{2}$.

Решение.

Преобразуем исходное уравнение к виду: $2x^2+\left(2\sin\frac{\pi x}{6}-1\right)x+2\sin\frac{\pi x}{6}-3=0$

и решим его как квадратное относительно x. Тогда получим, $\left[\begin{array}{l} x=-\sin\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2}, \\ x=-1. \end{array}\right.$

Решим первое уравнение совокупности. Учтя ограниченность функции $\sin\frac{\pi x}{6}$, приходим к выводу, что уравнение может иметь корень только на отрезке $[\frac{1}{2},\frac{5}{2}]$. На этом промежутке функция $y=x$ возрастает, а функция $y=-\sin\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2}$ убывает. Следовательно, если это уравнение имеет корень, то он единственный. Подбором находим $x=1$.

Ответ. $x=\pm 1$.

Пример 24.

4Решить уравнение $\cos(\cos\sqrt{1-x})+\frac{1}{\sqrt{x}}=1+\cos 1$.

Решение.

На основании теоремы о производной сложной функции ясно, что функция $y=\cos(\cos\sqrt{1-x})$ убывающая (функция $y=1-x$ убывающая, $y=\sqrt{x}$ возрастающая, $y=\cos x$ убывающая). Отсюда понятно, что функция $F(x)=\cos(\cos\sqrt{1-x})+\frac{1}{\sqrt{x}}$ определенная на $(0;1]$, убывающая. Поэтому данное уравнение имеет не более одного корня. Так как $F(1)=1+\cos 1$

Ответ. $x=1$.

Пример 5 25

Решить уравнение $-2\sqrt{3}\pi\sin x=|x+\pi|+|x-2\pi|$.

Решение.

Рассмотрим уравнение на трех промежутках.

а) Пусть $x<-\pi$. Тогда на этом множестве исходное уравнение равносильно уравнению $-2\sqrt{3}\pi\sin x=-2x+\pi$. Которое на промежутке $(-\infty;-2\pi]$ решений не имеет, т. к. $-2\sqrt{3}\pi\sin x\le 2\sqrt{3}\pi$, $-2x+\pi\ge 5\pi$, а $2\sqrt{3}\pi<5\pi$. На промежутке $(-2\pi;-\pi)$ исходное уравнение так же не имеет корней, т. к. $-2\sqrt{3}\pi\sin x<0$, а $-2x+\pi>3\pi$.

б) Пусть $-\pi\le x\le 2\pi$. Тогда на этом множестве исходное уравнение равносильно уравнению $-\sqrt{3}\sin x=3\pi \Leftarrow \sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, корнями которого на промежутке $[-\pi;2\pi]$ являются числа $-\dfrac{2\pi}{3}$, $-\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{4\pi}{3}$, $\dfrac{5\pi}{3}$.

в) Пусть $x>2\pi$. Тогда на этом множестве исходное уравнение равносильно уравнению $-2\sqrt{3}\pi\sin x=2x-\pi.$, которое на промежутке $(2\pi;3\pi]$ решений не имеет, т. к. $-2\sqrt{3}\sin x\le 0$, а $2x-\pi>3\pi$. На промежутке $(3\pi;+\infty)$ уравнение так же решений не имеет, т. к. $-2\sqrt{3}\pi\sin x\le 2\sqrt{3}\pi$, $2x-\pi>5\pi$, а $2\sqrt{3}\pi<5\pi$.

Ответ. $x=-\dfrac{2\pi}{3}$, $-\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{4\pi}{3}$, $\dfrac{5\pi}{3}$.

Глава 2. Тригонометрические неравенства.

Пример 26.

Решите неравенство $\sqrt{9-x^2}\cdot(3\sin x-2\cos^2 x)\ge 0.$

Решение.

Ясно, что $x\in[-3;3]$, причем $x=\pm 3$ подходит.

Пусть теперь $x\in(-3;3)$. Тогда неравенство сводится к такому:

$$3\sin x-2+2\sin^2 x\ge 0,$$
$$(\sin x+2)(2\sin x-1)\ge 0,$$
$$\sin x\ge\frac{1}{2}.$$

При $x\in(-3;0)$ синус отрицателен, это нам не подходит.

При $x\in[0;3)$ нам подойдет промежуток $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right]$ (отметим, что $\frac{5\pi}{6}<3$).

Ответ: $x\in\{-3;3\}\cup\left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right].$

Пример 27.

Решите неравенство: $2\sqrt{\sin^2 x-\sin x-1}\ge\cos^2 x+\sin x+3.$

Решение.

Обозначим $\sin x=t$, тогда получим $2\sqrt{t^2-t-1}\ge 4-t^2+t.$ При $t\in[0;1]$ подкоренное выражение отрицательно, Значит, $t<0.$

Пусть $\sqrt{t^2-t-1}=p$, тогда $2p\ge 3-p^2$, откуда $p\ge 1$ (отрицательные p не рассматриваем). То есть $t^2-t-1\ge 1$, откуда $t\le -1$, то есть $\sin x=-1$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$

Ответ: $-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\epsilon Z$

Пример 28

Решить неравенство $\sqrt[4]{\frac{7-\cos 4x}{2}} > -2\cos x.$

Решение

По аналогии с алгебраическими неравенствами с корнем квадратным мы должны решить две системы и объединить их решения.

$$1)\ \begin{cases} \cos x > 0, \\ \text{ОДЗ} \end{cases} \quad \text{и} \qquad 2)\ \begin{cases} \cos x \le 0, & (6) \\ \frac{7-\cos 4x}{2} > (-2\cos x)^4 & (7) \end{cases}$$

В данном случае ОДЗ: $7-\cos 4x \ge 0$ выполняется всегда, так что решение первой системы $\cos x>0$ (пока не будем находить x).

Решаем вторую систему. Преобразуем неравенство (7): $7-\cos 4x>32\cos^4 x$;

$$7-(2\cos^2 2x-1)>32\cos^4 x,$$

$$8-2\cos^2 2x>32\cos^4 x,$$

$$4-(2\cos^2 x-1)^2>16\cos^4 x,$$

$$4-4\cos^4 x+4\cos^2 x-1>16\cos^4 x,$$

$$20\cos^4 x-4\cos^2 x-3<0.$$

Обозначим $\cos^2 x=t$. Получим алгебраическое неравенство: $20t^2-4t-3<0$.

Откуда $-\frac{3}{10}<t<\frac{1}{2}$. Так как $t\ge 0$, то $t<\frac{1}{2}$. Далее $\cos^2 x<\frac{1}{2} \Leftrightarrow |\cos x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$

Учитывая (6): $\cos x\le 0$, получаем $-\frac{1}{\sqrt{2}}<\cos x\le 0$.

Это решение системы 2). Объединяя решение 1) и 2) систем, получаем $-\frac{1}{\sqrt{2}}<\cos x$.

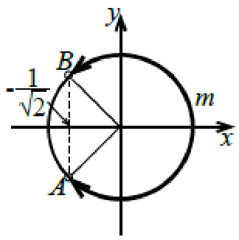


Рис. 13

Решая это простейшее неравенство на тригонометрическом круге (рис. 13), имеем дугу AmB

Ответ: $(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\frac{3\pi}{4}+2\pi n), n\in Z$.

Глава 3. Тригонометрические системы уравнений.

При решении систем тригонометрических уравнений мы используем те же методы, что и в алгебре (замены, подстановки, исключения и т.д.), а также известные методы и формулы тригонометрии. Рассмотрим некоторые примеры.

Решите системы уравнений
Пример 29.

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \cos^2 x - \cos^2 y = -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + y \\ \cos^2(\frac{\pi}{3} + y) - \cos^2 y = -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + y \\ \sin(\frac{\pi}{3} + 2y) \sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + y \\ -\sin(\frac{\pi}{3} + 2y)\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + y \\ \sin(\frac{\pi}{3} + 2y) = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + y \\ 2\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{3} + 2y) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + y \\ \sin(\frac{\pi}{3} + 2y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + y \\ \frac{\pi}{3} + 2y = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n;\ n \in z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + y \\ y = (-1)^n\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2};\ n \in z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2};\ n \in z \\ y = (-1)^n\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2};\ n \in z \end{cases}$$

Ответ: $((-1)^n\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}; (-1)^n\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}; n \in z)$

Пример 30

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2} \\ \cos 2x + 5\cos y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + y \\ \cos(2(\frac{\pi}{2} + y)) + \cos y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + y \\ \cos(\pi + 2y) + 5\cos y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + y \\ \cos\pi \cos 2y - \sin\pi \sin 2y + 5\cos y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + y \\ -\cos 2y + 5\cos y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + y \\ -2\cos^2 y + 1 + 5\cos y - 3 = 0 \end{cases}$$

$-2\cos^2 y + 5\cos y - 2 = 0$
$2\cos^2 y - 5\cos y + 2 = 0$
Заменить cos y на t; $t \in [-1;1]$
$2t^2 - 5t + 2 = 0$
$D = b^2 - 4ac$
$D = 9 > 0 \Rightarrow 2$
$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$t_1 = \frac{5+3}{4} = 2$ не является решением

$t_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$

$\cos y = \frac{1}{2}$

$y = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n;\ n \in z$

$y_{1,2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n\in z$

$x = \frac{\pi}{2} + y$

$x_1 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n\in z$; $x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n\in z$

Ответ: $(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n\in z);\ (\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n\in z)$

Способы решения системы:

а) подстановка и почленное сложение (вычитание) уравнений системы:

Пример 31.

$$\begin{cases} \cos x\cos y = 0{,}75 \\ \frac{\cos x\cos y = 0{,}75}{\sin x\sin y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x\cos y = 0{,}75 \\ \cos x\cos y = 3\sin x\sin y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x\cos y = 0{,}75 \\ \sin x\sin y = 0{,}25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x\cos y = 0{,}75 \\ \operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y = 3 \end{cases}$$

$\cos x\cos y + \sin x\sin y = 1$

$\cos(x-y) = 1$

$x-y = 2\pi n;\ n \in z$

$x = 2\pi n + y;\ n \in z$

$\cos x\cos y = 0{,}75$

$\cos(2\pi n + y)\cos y = 0{,}75$

$\cos^2 y = 0{,}75$

$\cos y = \sqrt{\frac{75}{100}}$

$\cos y = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$y = \pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n; n\in z$

$y_{1,2} = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n; n\in z$

$x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{6} + 4\pi n; n\in z$

Ответ: **(**$\pm\frac{\pi}{6} + 4\pi n; n\in z\ ;\pm\frac{\pi}{6} + 4\pi n; n\in z$ **)**

б) разложение на множители и почленное деление уравнений системы

Пример 32

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x - \cos y = \sqrt{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1 \\ -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$-\frac{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$-\operatorname{ctg}\frac{x-y}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{x-y}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{x-y}{2} = arcctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n; n \in z$$

$$\frac{x-y}{2} = \frac{2\pi}{3} + \pi n; n \in z$$

$$x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n; n \in z$$

$$\sin\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\cancel{2\pi}^{3}}{1} + y\right) + \sin y = 1$$

$$\sin\left(\frac{10\pi}{3} + \frac{\cancel{2\pi}^{3}}{1} + y\right) + \sin y = 1$$

$$2\sin\frac{\frac{10\pi}{3} + 2y}{2}\cos\frac{\frac{10\pi}{3}}{2} = 1$$

$$2\sin\left(\frac{10\pi}{6} + y\right)\cos\frac{10\pi}{6} = 1$$

$$\sin\left(\frac{10\pi}{6} + y\right) = 1$$

$$\frac{10\pi}{6} + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in z$$

$$y = \frac{\cancel{\pi}^{3}}{2} - \frac{10\pi}{6} + 2\pi k; k \in z$$

$$y = \frac{-7\pi}{6} + 2\pi k; k \in z$$

$$x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n + y; n \in z$$

$$x = \frac{\cancel{4\pi}^{2}}{3} - \frac{7\pi}{6} + 2\pi(n+k); n, k \in z$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n(n+k); n, k \in z$$

Ответ: ($\frac{\pi}{6} + 2\pi$n(n+k);-$\frac{7\pi}{6} + 2\pi k, n, k \epsilon$Z)

в) замена переменных

Пример 33.

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \cos 2x + \cos 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ 1 - 2\sin^2 x + 2\cos^2 y - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \cos^2 y - \sin^2 x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \cos^2 y - \sin^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ (\cos y - \sin x)(\cos y + \sin x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos y = 1 \\ \cos y - \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + 1 + \sin x = 1 \\ \cos y = 1 = \sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos y = 1 + \sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n; n \in z \\ \cos y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n; n \in z \\ y = 2\pi k; k \in z \end{cases}$$

Ответ: $(\pi n; 2\pi k, n, k \epsilon \mathrm{Z})$