Муниципальное казенное учреждение
«Центр поддержки образования»
муниципального образования Динской район

Сборник № 7 по подготовке к ГИА по МАТЕМАТИКЕ по теме «Применение производной к исследованию функций. Производная в физике и технике»

Составитель учитель математики БОУ СОШ №1
Хижняк Людмила Ильинична

ст. Динская, 2021

Задание № 7 (ЕГЭ профильный уровень).

Одна из основных задач исследования функции – это нахождение промежутков её возрастания и убывания. Такое исследование легко провести с помощью производной. Сформулируем соответствующие утверждения:

1. Если $f^{/}(x) > 0$ в каждой точке интервала I, то функция f возрастает на I.
2. Если $f^{/}(x) < 0$ в каждой точке интервала I, то функция f убывает на I.

Рассмотрим задания № 7.

Задания делятся на три группы:

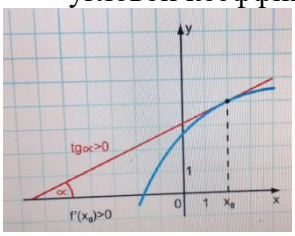
I. Геометрический смысл производной.
II. Механический смысл производной.
III. Связь между функцией и её производной (исследование функции)

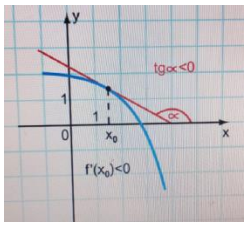
I. Геометрический смысл производной.

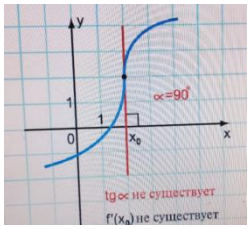
$$f^{/}(x_0) = tg\alpha = k$$

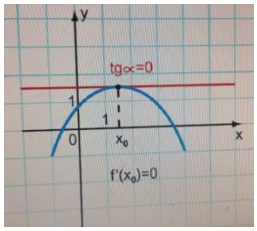
tg α – это тангенс угла наклона касательной к графику функции в точке x_0.

k - угловой коэффициент касательной.



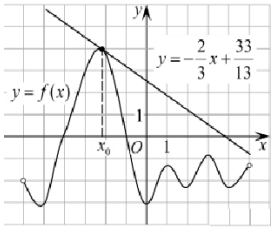






Пример 1.

На рисунке изображены график функции y = f(x) и касательная к этому графику, проведённая в точке x_0. Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $g(x) = 12f(x) + \frac{6}{13}$ в точке x_0.



Решение. $f^{/}(x_0) = k = -\frac{2}{3}$, $g^{/}(x_0) = 12f^{/}(x_0) = 12 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -8$.

Ответ: – 8.

Пример 2.

Прямая y = – 4x – 11 является касательной к графику функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Условие касания графика функции y = f(x) и прямой y = kx + b задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$$

В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 3x^2+14x+7=-4, \\ x^3+7x^2+7x-6=-4x-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+14x+11=0, \\ x^3+7x^2+11x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{11}{3}, \\ x=-1, \end{array}\right. \\ x^3+7x^2+11x+5=0\ (1). \end{cases}$$

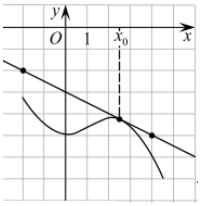
Проверка подстановкой показывает, что первый корень не удовлетворяет, а второй удовлетворяет уравнению (1). Поэтому искомая абсцисса точки касания −1.

Ответ: −1.

Задания с решением.

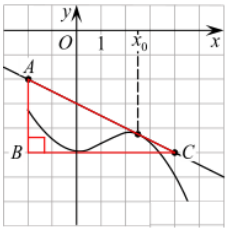
<u>Пример 1.</u>

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (−2; −2), B (−2; −5), C (4; −5). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB:

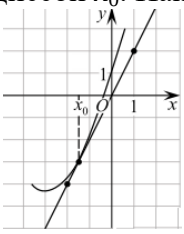


$$y'(x_0) = tg(180^\circ - \angle ACB) = -tg\angle ACB = -\frac{AB}{BC} = -\frac{3}{6} = -0{,}5.$$

Ответ: −0,5.

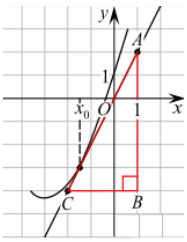
<u>Пример 2.</u>

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках A (1; 2), B (1; −4), C(−2; −4). Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу ACB:

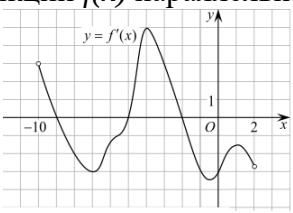


$$y'(x_0) = tg\angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{3} = 2$$

Ответ: 2.

<u>Пример 3.</u>

На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−10; 2). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции *f(x)* параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней.



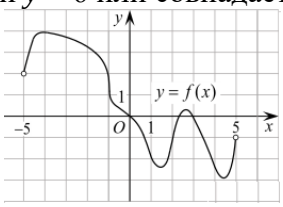
Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней, их угловые коэффициенты равны –2. Найдем количество точек, в которых $f'(x) = -2$ это соответствует количеству точек пересечения графика производной с прямой $y = -2$. На данном интервале таких точек 5.

Ответ: 5.

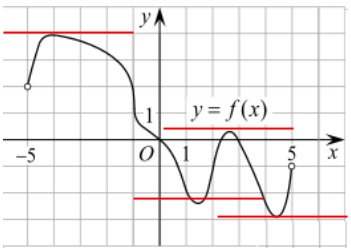
<u>Пример 4.</u>

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (−5; 5). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней.



Решение.

Поскольку касательная параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней, их угловые коэффициенты равны 0. Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания. У данной функции производная равна нулю только в точках экстремума функции. На заданном интервале функция имеет 2 максимума и 2 минимума, итого 4 экстремума. Таким образом, касательная к графику функции параллельна прямой $y = 6$ или совпадает с ней в 4 точках.



Ответ: 4.

II. Механический смысл производной.

С помощью производных функций, характеризующих физические явления, задаются многие физические величины. Например: скорость; ускорение; мощность.
Производная от координаты по времени есть скорость.

$$x^{/}(t) = V(t)$$

Производная от скорости по времени есть ускорение.

$$x^{//}(t) = V^{/}(t) = a(t)$$

<u>Пример 1.</u>

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -t^4 + 6t^3 + 5t + 23$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени t = 3 с.

Решение.

Найдем закон изменения скорости: $V(t) = x'(t) = -4t^3 + 18t^2 + 5$ м/с.

При t = 3 с имеем:

$$V(3) = -4 \cdot 3^3 + 18 \cdot 3^2 + 5 = 59 \text{ м/с.}$$

Ответ: 59.

<u>Пример 2.</u>

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^3 - 4t^2$. Найдите ускорение в момент t = 5 с.

Решение:

$x^{/}(t) = 3t^2 - 8t$ (м/с)

$x^{//}(t) = 6t - 8$ (м/с^2)

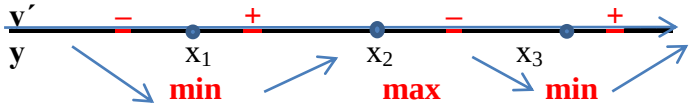
$x^{//}(5) = 6 \cdot 5 - 8 = 22$ (м/с^2).

Ответ: 22.

III. Связь между функцией и её производной (исследование функции).

Мы рассмотрели поведение функции на промежутках, где $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$.
Внутренние точки области определения функции, в которых её производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками* этой функции. Эти т очки могут быть точками *экстремума функции.*

Рассмотрим функцию y = f(x).



x_1; x_2; x_3 – точки экстремума.

<u>Пример 1.</u>

На рисунке изображен график производной функции f(x), определенной на интервале (-6;6). Найдите промежутки возрастания функции f(x). В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

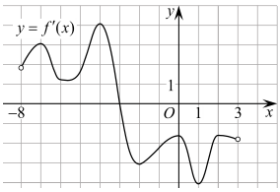
Решение.

Промежутки возрастания данной функции *f*(*x*) соответствуют промежуткам, на которых ее производная неотрицательна, то есть промежуткам (−6; −5,2] и [2; 6). Данные промежутки содержат целые точки 2, 3, 4 и 5. Их сумма равна 14.

Ответ: 14.

<u>Пример 2.</u>

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции f(x) определенной на интервале (−8; 3). В какой точке отрезка [−3; 2] функция f(x) принимает наибольшее значение?



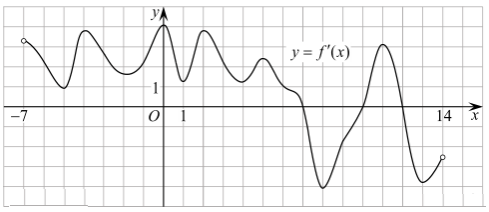
Решение.

На заданном отрезке производная функции отрицательна, поэтому функция на этом отрезке убывает. Поэтому наибольшее значение функции достигается на левой границе отрезка, т. е. в точке −3.

Ответ: −3.

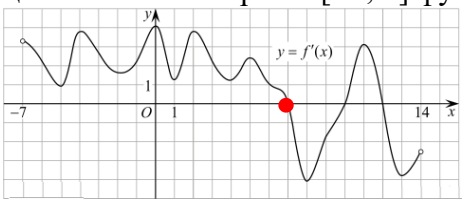
<u>Пример 3.</u>

На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (−7; 14). Найдите количество точек максимума функции *f(x)* на отрезке [−6; 9].



Решение.

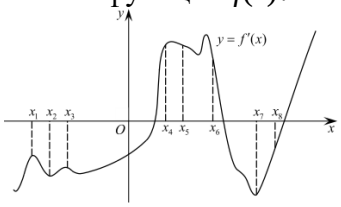
Точки максимума соответствуют точкам смены знака производной с положительного на отрицательный. На отрезке [−6; 9] функция имеет одну точку максимума $x = 7$.



Ответ: 1.

Пример 4.

На рисунке изображён график y = f ′ (x) - производной функции $f(x)$.На оси абсцисс отмечены восемь точек: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_8$. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



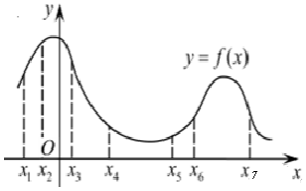
Решение.

Возрастанию дифференцируемой функции $f(x)$ соответствуют положительные значения её производной. Производная положительна в точках x_4, x_5, x_6. Таких точек 3.

Ответ: 3.

Пример 5.

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



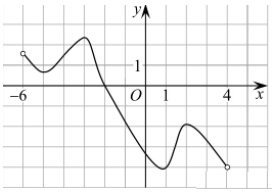
Решение.

Производная функции отрицательна в тех точках, которые принадлежат участкам убывания функции. Это точки x_3, x_4, x_7 — всего 3 точки.

Ответ: 3.

Пример 6.

Функция $y = f(x)$ определена на промежутке (– 6; 4) На рисунке изображен график ее производной. Найдите абсциссу точки, в которой функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение.



Решение.

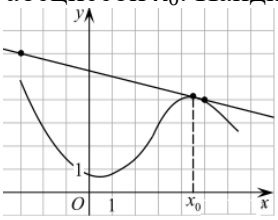
Смена знака производной с положительного на отрицательный соответствует точке максимума, следовательно, в точке с абсциссой −2 достигается наибольшее значение функции.

Ответ: −2

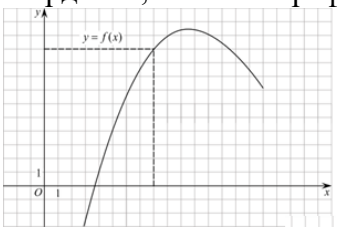
Задания для самостоятельной работы:

1. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 - 5t + 3$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?

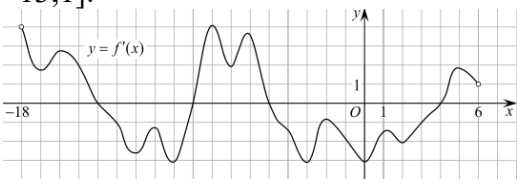
2. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



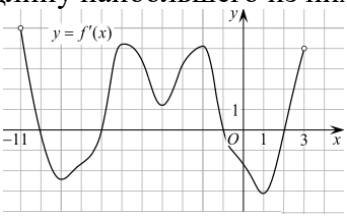
3. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 8. Найдите $f'(8)$.



4. Прямая $y = 7x – 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x – 8$. Найдите абсциссу точки касания.
5. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (−18; 6). Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке [−13;1].



6. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале (−11; 3). Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



7. На рисунке изображён график дифференцируемой функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: $x_1, x_2, x_3, ..., x_9$. Среди этих точек найдите все точки, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна. В ответе укажите количество найденных точек.

ОТВЕТЫ к заданиям:

№ задан.	1	2	3	4	5	6	7
Ответ	7	-0,25	1,25	0,5	1	6	3

Задание 12. Исследование функций

Решение практических задач часто сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее или наименьшее.

I. Наибольшее и наименьшее значение функции.

Пример 1.

Найдите наименьшее значение функции $y = e^{2x} - 6e^x + 3$ на отрезке $[1;2]$

Решение.

Найдем производную заданной функции: $y' = 2e^{2x} - 6e^x = 2e^x(e^x - 3)$.

Найдем нули производной:

$$2e^x(e^x - 3) = 0$$
$$e^x - 3 = 0$$
$$e^x = 3$$
$$x = \ln 3.$$

Отметим на рисунке нули производной и поведение функции на заданном отрезке:

Следовательно, наименьшим значением функции на заданном отрезке является ее значение в точке минимума. Найдем его: $y(\ln 3) = e^{2\ln 3} - 6e^{\ln 3} = 3^2 - 6\cdot 3 + 3 = -6$.

Ответ: −6.

Пример 2.

Найдите наименьшее значение функции $y = 4tgx - 4x - \pi + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции: $y' = \frac{4}{\cos^2 x} - 4 = 4\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) = 4tg^2 x$.

Найденная производная неотрицательна на заданном отрезке, заданная функция возрастает на нем, поэтому наименьшим значением функции на отрезке является

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 4\,\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 4\cdot\frac{\pi}{4} - \pi + 5 = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 3.

Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+5)^5 - 5x$ на отрезке [−4,5; 0].

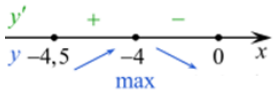
Решение.

Найдем производную заданной функции: $y' = \frac{5}{x+5} - 5.$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} \frac{5}{x+5} - 5 = 0, \\ -4,5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+5} = 1, \\ -4,5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ -4,5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -4.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = -4$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение: $y(-4) = \ln(-4+5)^5 - 5\cdot(-4) = 0 + 20 = 20$.

Ответ: 20.

<u>Пример 4.</u>

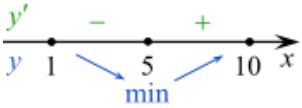
Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{x^2+25}{x}$ на отрезке [1; 10].

Решение.

1) $x \neq 0$

2) Найдем производную заданной функции: $y' = \left(\dfrac{x^2+25}{x}\right)' = \left(x + \dfrac{25}{x}\right)' = 1 - \dfrac{25}{x^2} = \dfrac{x^2-25}{x^2}$.

Производная обращается в нуль в точках 5 и −5. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции на заданном отрезке:



Наименьшим значением функции на заданном отрезке будет её значение в точке 5. Найдем его:

$$y(5) = \frac{25+25}{5} = 10.$$

Ответ: 10.

<u>Пример 5</u> *<u>(без применения производной)</u>*

Найдите наибольшее значение функции $y = \log_5\left(4 - 2x - x^2\right) + 3$.

Решение.

Поскольку функция $y = \log_5 x$ возрастающая, она достигает наибольшего значения в той точке, в которой достигает наибольшего значения выражение, стоящее под знаком логарифма. Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ с отрицательным старшим коэффициентом достигает наибольшего значения в точке $x_{\max} = \dfrac{-b}{2a}$, в нашем случае — в точке − 1. Значение функции в этой точке

$$y = \log_5\left(4 - 2(-1) - (-1)^2\right) + 3 = 1 + 3 = 4.$$

Ответ: 4.

<u>Пример 6.</u>

Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$.

Решение.

Рассмотри функция $f(x) = x^2 - 6x + 13$.

График парабола, ветви вверх.

Своё наименьшее значение функция принимает в вершине параболы.

$x_0 = \dfrac{6}{2} = 3$, тогда $y = \sqrt{x^2 - 6x + 13} = \sqrt{9 - 18 + 13} = 2$.

Ответ: 2.

II. Точки максимума и минимума функции

Точки максимума и минимума функции – это те точки, в которых производная функции равна нулю.

1) Если в точке x_0 производная меняет знак с + на –, то x_0 есть точка максимума.

2) Если в точке x_0 производная меняет знак с – на +, то x_0 есть точка минимума.

<u>Пример 1.</u>

Найдите точку максимума функции $y = \dfrac{x}{x^2+289}$.

Решение.

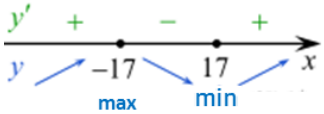
Найдем производную заданной функции:

$$y' = -\left(\frac{x}{x^2+289}\right)' = -\frac{1\cdot(x^2+289)-x\cdot(2x)}{(x^2+289)^2} = \frac{x^2-289}{(x^2+289)^2}.$$

Найдем нули производной:

$$x^2-289=0 \Leftrightarrow x^2=289 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=17, \\ x=-17. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x=-17$.

Ответ: −17.

<u>Пример 2.</u>

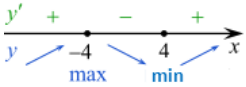
Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 48x + 17$.

Решение.

Найдем производную заданной функции: $y' = 3x^2 - 48 = 3(x^2-16) = 3(x-4)(x+4)$

Найдем нули производной: $3(x-4)(x+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4, \\ x=4. \end{array}\right.$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x=-4$.

Ответ: −4.

<u>Пример 3.</u>

Найдите точку минимума функции $y = -\dfrac{x^2+1}{x}$.

Решение.

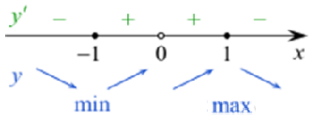
1) Область определения функции: $x \neq 0$
2) Найдём производную заданной функции:

$$y' = -\left(\frac{x^2+1}{x}\right)' = -\left(x+\frac{1}{x}\right)' = -\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = -1+\frac{1}{x^2} = \frac{1-x^2}{x^2}.$$

Найдём нули производной:

$$1-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума x = – 1.
Ответ: −1.

Пример 4.

Найдите точку минимума функции $y = 3x - \ln(x+3)^3$.

Решение.

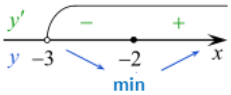
Заметим, что $y = 3x - 3\ln(x+3)$. Область определения функции — открытый луч (–3; +∞). Найдем производную заданной функции:

$$y'(x) = 3 - \frac{3}{x+3}.$$

Найдем нули производной:

$$3 - \frac{3}{x+3} = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Найденная точка лежит на луче (–3; +∞). Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x = -2$.
Ответ: −2.

Пример 5.

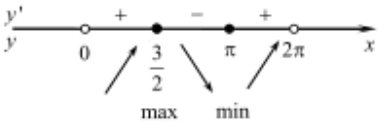
Найдите точку максимума функции $y = (2x-3)\cos x - 2\sin x + 2$ принадлежащую промежутку (0; 2π).

Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = 2\cos x + (2x-3)(-\sin x) - 2\cos x = (3-2x)\sin x.$$

На заданном промежутке синус обращается в нуль в точке π, поэтому нулями производной являются $\frac{3}{2}$ и π. Определим знаки производной функции:



Функция положительна при $0 < x < 1{,}5$ и при $\pi < x < 2\pi$ и при отрицательна при $1{,}5 < x < \pi$. Поэтому искомая точка максимума — число 1,5.
Ответ: 1,5.

Пример 6. (без применения производной)

Найдите точку минимума функции $y = \log_5(x^2 - 6x + 12) + 2$

Решение.

Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ с положительным старшим коэффициентом достигает минимума в точке $x_{\min} = \frac{-b}{2a}$, в нашем случае — в точке 3. Поскольку функция $y = \log_5 x$ возрастает, и заданная функция $y = \log_5(x^2 - 6x + 12) + 2$ определена в точке 3, она также достигает в ней минимума.
Ответ: 3.

Пример 7.

Найдите точку максимума функции $y=\sqrt{4-4x-x^2}$.

Решение.

Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ с отрицательным старшим коэффициентом достигает максимума в точке $x_{\max}=\frac{-b}{2a}$ в нашем случае — в точке − 2. Поскольку функция $y=\sqrt{x}$ возрастающая, а заданная функция определена при найденном значении переменной, она достигает максимума в той же точке, в которой достигает максимума подкоренное выражение.

Ответ: −2.

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите наименьшее значение функции $y=\frac{x^3}{3}-9x-7$ на отрезке [–3; 3].
2. Найдите наибольшее значение функции $y=12\cos x+6\sqrt{3}x-2\sqrt{3}\pi+6$ на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
3. Найдите наименьшее значение функции $y=x+\frac{36}{x}$ на отрезке $[1;\ 9]$.
4. Найдите наименьшее значение функции $y=2x^2-5x+\ln x-3$ на отрезке $\left[\frac{5}{6};\frac{7}{6}\right]$.
5. Найдите точку минимума функции $y=(3-x)e^{3-x}$.
6. Найдите точку минимума функции $y=2x-\ln(x+3)+7$.

ОТВЕТЫ к заданиям:

№ задан.	1	2	3	4	5	6
Ответ	– 25	12	12	– 6	4	– 2,5

Используемая литература:

1. Задачи открытого банка заданий ЕГЭ по математике 2020.
2. Тематический сборник заданий для подготовки к ЕГЭ-2010 по математике под редакцией Е.С. Семенко. Краснодар, 2010г.
3. «ЕГЭ математика 2020г.», И.В. Ященко (профильный уровень).
4. Интернет – ресурсы.
5. Д.Д. Гущин, Решу ЕГЭ, 2020-2021гг.