Муниципальное казенное учреждение
«Центр поддержки образования»
муниципального образования Динской район

Сборник №3 по подготовке к ГИА по МАТЕМАТИКЕ по теме «Задачи с параметрами»

Составитель учитель математики БОУ СОШ №31
Безручко Маргарита Михайловна

ст.Динская, 2019

Одной из наиболее трудных тем школьного курса математики является решение задач с параметрами.

Во многих учебниках можно встретить такие задачи, однако в них отсутствует системное и четкое изложение соответствующей теории вопроса, они не охватывают все многообразие и логику решения задач с параметрами. Практика единого государственного экзамена показывает, что задачи с параметрами представляют для учащихся наибольшую сложность как в логическом, так и в техническом плане и поэтому умение их решать во многом предопределяет успешность сдачи экзамена по математике.

Задачи с параметрами являются сложными потому, что не существует единого алгоритма их решения. Спецификой подобных задач является то, что наряду с неизвестными величинами в них фигурируют параметры, численные значения которых не указаны конкретно, но считаются известными и заданными на некотором числовом множестве. При этом значения параметров существенно влияют на логический и технический ход решения задачи и форму ответа.

При решении задач с параметрами требуется, кроме хорошего знания стандартных методов решений уравнений и неравенств, умение проводить довольно разветвленные логические построения, аккуратность и внимательность для того, чтобы не потерять решение и не приобрести лишних. Это требует от школьника более развитого логического мышления и математической культуры, но, в свою очередь, эти задачи сами способствуют их развитию. Опыт выпускных экзаменов показывает, что учащиеся, владеющие методами их решения, обычно успешно справляются и с другими задачами.

Теоретическое изучение физических процессов, решение экономических задач часто приводит к различным уравнениям или неравенствам, содержащим параметры, и необходимой частью их решения является исследование характера процесса в зависимости от значений параметров. Таким образом, задачи с параметрами представляют собой небольшие исследовательские задачи. Важно, чтобы школьники уже на первых простых примерах усвоили: во-первых, необходимость аккуратного обращения с параметром – фиксированным, но неизвестным числом, поняли, что оно имеет двойственную природу (с одной стороны это некоторое число, с другой стороны степени свободы общения с ним ограничивается его неизвестностью); во-вторых, что запись ответа существенно отличается от записи ответов аналогичных уравнений и неравенств без параметра. Поэтому наша цель – научить учащихся методам решения задач с параметром, помочь преодолеть психологический барьер, который обусловлен противоречивыми характеристиками параметра.

Понятие уравнения с параметрами.

Пусть дано уравнение $f(x; a) = 0$. Если ставится задача отыскать все такие пары $(x; a)$, которые удовлетворяют данному уравнению, то оно рассматривается как уравнение с двумя равноправными переменными x и a. Но можно поставить и другую задачу, полагая переменные неравноправными. Дело в том, что если придать переменной a какое-либо фиксированное значение, то $f(x; a) = 0$ превращается в уравнение с одной переменной x, и решения этого уравнения, естественно, зависят от выбранного значения a. Например, уравнение $ax^2 - 3ax - 4 = 0$.

При $a = 0$ получается уравнение $0 \cdot x^2 - 0 \cdot x - 4 = 0$, которое не имеет решений.

При $a = 1$ уравнение принимает вид $x^2 - 3x - 4 = 0$ и имеет корни -1 и 4.

При $a = -1$ уравнение принимает вид $x^2 + 3x - 4 = 0$ и имеет корни -4 и 1.

При $a = -\frac{16}{9}$ уравнение принимает вид $-\frac{16}{9}x^2 + \frac{16}{3}x - 4 = 0$ и имеет один корень $x = 1{,}5$.

Т.к. букву a можно заменить любым числом, то мы имеем дело с целым семейством уравнений.

Если уравнение вида $f(x; a) = 0$ нужно решить относительно переменной x, а под a понимается произвольное действительно число, то уравнение называют уравнением с параметром *a*. Основная трудность, связанная с решением уравнений с параметром, состоит в следующем: при одних значениях параметра уравнение не имеет решений, как мы видим из приведенного выше примера, при других – имеет бесконечно много решений, при третьих – оно решается по одним формулам, при четвертых – по другим.

Поэтому задачу решения уравнения с параметром можно сформулировать следующим образом: *решить уравнение с параметром* $f(x;\ a) = 0$ *– это значит решить семейство уравнений, получающихся из уравнения* $f(x;\ a) = 0$ *при любых действительных значениях параметра.* Ясно, что выписать каждое уравнение из бесконечного семейства уравнений невозможно, но, можно по некоторому признаку разбить множество всех значений параметра на подмножества, а затем заданное уравнение решить на каждом из этих подмножеств.

Для разбиения множества значений параметра на подмножества полезно воспользоваться теми значениями параметра, при которых или при переходе через которые происходит качественное изменение уравнения. Такие значения параметра можно назвать контрольными или особыми. Искусство решения уравнения с параметрами как раз и cостроит в том, чтобы уметь находить контрольные значения параметра.

Основные типы задач с параметрами.

Тип 1. Уравнения, которые необходимо решить либо для любого значения параметра (параметров), либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству.

Тип 2. Уравнения, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра (параметров). Обращаем внимание на то, что при решении задач данного типа нет необходимости ни решать заданные уравнения, ни приводить эти решения.

Тип 3. Уравнения, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения имеют заданное число решений (в частности, не имеют или имеют бесконечное множество решений). Легко увидеть, что задачи типа 3 в каком-то смысле обратные задачам типа 2.

Тип 4. Уравнения,для которых при искомых значениях параметра множество решений уравнений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

Например, найти значения параметра, при которых:

1) уравнение выполняется для любого значения переменной из заданного промежутка;
2) множество решений первого уравнения является подмножеством множества решений второго уравнения и т.д.

Основные методы решения задач с параметром.

Способ I (*аналитический*). Это способ так называемого прямого решения, повторяющего стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра. Иногда говорят, что это способ «силового» решения. Аналитический способ решения задач с параметром есть самый трудный способ, требующий высокой грамотности и наибольших усилий по овладению им.

Способ II (*графический*). В зависимости от задачи (с переменной *x* и параметром *a*) рассматриваются графики или в координатной плоскости *Oxy*, или в координатной плоскости *Oxa*.

Способ III (*решение относительно параметра*). При решении этим способом переменные *x* и *a* принимаются равноправными и выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение признается более простым.

Задача № 1. В уравнении $(a - 1)x = a - 2$ ***определите а так, чтобы число 3 было его корнем.***

Решение. Если число 3 является корнем уравнения, то оно обращает его в верное равенство. Подставим $x = 3$ в уравнение и решим его относительно *а:*

$(a-1)\ \ 3 = a - 2$

$3a - a = 3 - 2$

$a = 0{,}5$

Итак, при $a = 0{,}5$ число 3 является корнем уравнения $(a-1)x = a - 2$.

Ответ: 0,5.

Задача № 2. Найти все значения параметра а, такие, что уравнение $sin^2x - 5\,sin\,x + 2 = a$ ***имеет корень*** $x_0 = \frac{\pi}{6}$ ***. Найти все корни уравнения при найденном значении параметра а.***

Решение.Если уравнение имеет корень $x_0 = \frac{\pi}{6}$, то при подстановке в уравнение он обращает его в верное равенство. Подставим $x_0 = \frac{\pi}{6}$ в уравнение и решим его относительно *а*:

$sin^2\frac{\pi}{6} - 5\sin\frac{\pi}{6} + 2 = a$

$\frac{1}{4} - 5 \cdot \frac{1}{2} + 2 = a$

$a = -\frac{1}{4}$

Решим теперь уравнение $sin^2x - 5\sin x + 2 = a$ при $a = -\frac{1}{4}$.

$sin^2x - 5\sin x + 2 = -\frac{1}{4}$

$sin^2x - 5\sin x + 2{,}25 = 0$

Примем $\sin x = t,\text{где}\ |t| \le 1$. Имеем: $t^2 - 5t + 2{,}25 = 0$

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} &t = \frac{1}{2}, \\ &t = \frac{9}{2}, \end{aligned}\right. \\ |t| \le 1; \end{cases}$$

$t = \frac{1}{2}$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

Линейные уравнения и приводимые к ним уравнения с параметрами.

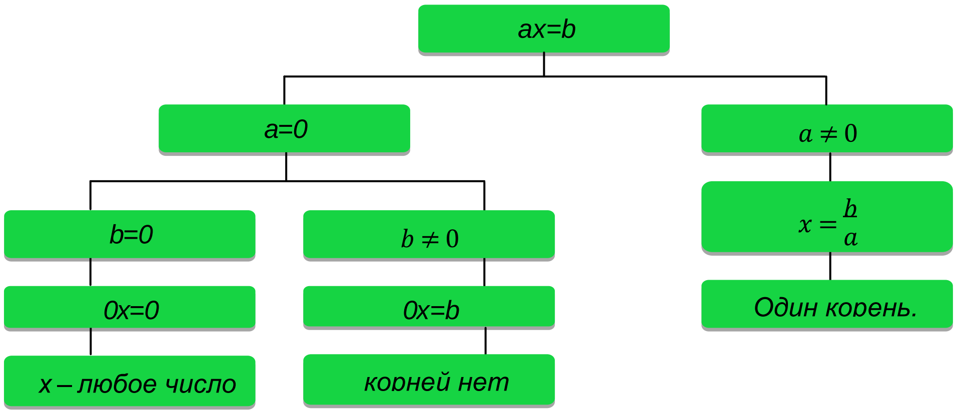
Линейным уравнением называется уравнение вида $ax = b$, где a, b – некоторые действительные числа, *x* – переменная.

В зависимости от коэффициента *a*, зависит и решение этого уравнения.

Если *a*=0, возникает два вопроса значениях b*:*

- Если *a*=0, *b*=0, то уравнение принимает вид *0x=b,* значит уравнение имеет бесконечно много решений, решением является любое действительно число.
- Если *a*=0, $b \neq 0$, то уравнение принимает вид *0x=b*, значит уравнение не имеет корней, т.к. нет такого числа, которое при умножении на нуль даст результат, отличный от нуля.
- При *a*≠0 мы можем обе части уравнения разделить на *a*, имеем единственный корень, равный $x = \frac{b}{a}$

Наши рассуждения можно наглядно изобразить в виде схемы:



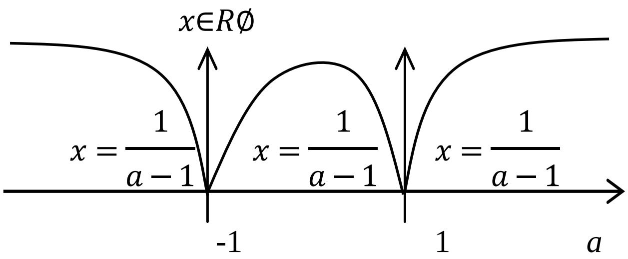
В процессе решения этого уравнения мы выделили значения параметра $a = 0$, при котором происходит качественное изменение уравнения, такое значение параметра мы будем называть «контрольным» или «особым».

Алгоритм решения линейных уравнений с параметром аналитическим способом:

1. Привести уравнение к виду $ax = b$
2. Найти контрольные значения параметра a.
3. Подставить контрольные значения в уравнение $ax = b$ и выяснить, сколько решений имеет уравнение.
4. Записать, при каких значениях параметра a уравнение имеет единственное решение.
5. Нанести все решения на ось параметров.
6. Записать правильно ответ.

Задача №3. Для каждого значения параметра а решить уравнение $a^2x - 1 = x + a$.
Решение. $a^2x - 1 = x + a$

1) Приведем уравнение к виду $ax = b$, для этого члены, содержащие x, перенесем в левую часть уравнения.
$a^2x - x = a + 1$
$(a^2 - 1)x = a + 1$
$(a - 1)(a + 1)x = a + 1$
2) Найдем контрольные значения параметра, при которых коэффициент при x обращается в нуль.
$(a - 1)(a + 1) = 0$
$a = 1$ или$a = -1$
3) Если $a = 1$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = 2$, т.е. при $a = 1$ уравнение не имеет решений.
4) Если $a = -1$, то уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$, $x \in R$
5) Если $a \neq 1$; $a \neq -1$, то уравнение имеет единственное решение:
$x = \dfrac{a+1}{(a+1)(a-1)}$; $\quad x = \dfrac{1}{a-1}$



Ответ: при $a = -1$, x – любое;

при $a = 1$, решений нет;

при $a \neq 1$; $a \neq -1$, один корень $x = \frac{1}{a-1}$.

Задача №4. ***Укажите все значения параметра a, при котором уравнение $ax - 2x = 3(x - 1)$ имеет корень.***

Решение.

$ax - 2x = 3(x - 1)$

1) Приведем уравнение к виду $ax = b$, для этого раскроем скобки и члены, содержащие x, перенесем в левую часть уравнения.

$ax - 2x = 3x - 3$,

$ax - 2x - 3x = -3$,

$ax - 5x = -3$,

$(a - 5)x = -3$

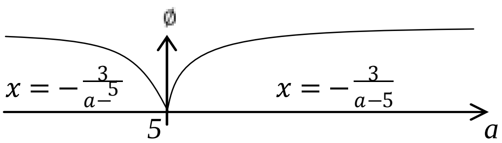
2) Найдем контрольные значения параметра a.

$a - 5 = 0$, $a = 5$

3) Если $a = 5$, то уравнение принимает вид 0x = -3, т.е. при $a = 5$ уравнение не имеет решений.

4) Если $a \neq 5$, то уравнение имеет единственное решение

$x = -\frac{3}{a-5}$



Ответ: при $a \in (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$.

Решение уравнений с параметрами, приводимых к линейным.

Задача №5. При всех значениях а решите уравнение $\frac{2(a+1)x}{a} = 3(x+1) + \frac{7}{a}$

Решение.

Обращаем внимание на то, что параметр находится в знаменателе. А знаменатель дроби не должен быть равен нулю (т.е. параметр имеет область допустимых значений).

Контрольными значения параметра, при котором знаменатель дроби равен 0.

О.Д. З $x \in R$, $a \neq 0$

1) При <u>*а*=0</u> уравнение <u>не имеет корней</u>..

2) При $a \neq 0$ $\frac{2(a+1)x}{a} = 3(x+1) + \frac{7}{a}$

Умножим обе части уравнения на $a \neq 0$, получим линейное уравнение с параметром.

2(a+1)x=3a(x+1)+7

2(a+1)x-3a(x+1)=7

2ax+2x-3ax-3a=7

2x-ax=7+3a

(2-a)x=7+3a

Получим уравнение вида $ax=b$ <u>контрольные значения параметра</u>: 2-*а*=0, *а*=2

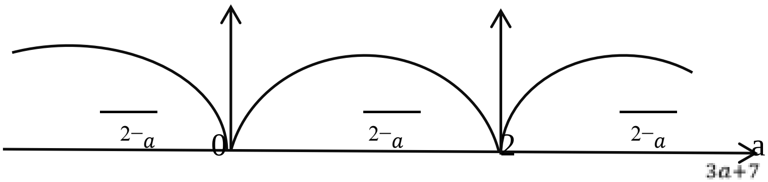
Если *а*=2,то 0·x=13 уравнение не имеет корней.

Если $a \neq 2$, то уравнение имеет единственное решение $x = \frac{7+3a}{2-a}$

∅∅

$3a$+7 $3a$+7 $3a$+7

$x =$ $x =$ $x =$



Ответ: при $a \neq 0$ и $a \neq 2$, единственное решение $x = \frac{3a+7}{2-a}$

при $a = 0$ или $a = 2$, нет корней

Линейные уравнения с параметром при наличии дополнительных условий к корням уравнения.

Задача №6. При каких значениях параметра а уравнение $(a^2 - 1) \cdot a = a^2 - 2a - 3$ имеет единственное решение, принадлежащее лучу **$[-1;+\infty)$.**

Решение. $(a^2 - 1) \cdot x = a^2 - 2a - 3$

1) Найдем контрольные значения параметра, при которых коэффициент при x обращается в нуль:

$$a^2 - 1 = 0$$
$$a^2 = 1$$
$$a = \pm 1$$

2) Если a=1, то уравнение принимает вид 0x= -4, т.е. при a=1 уравнение не имеет решений, и условие задачи не выполняется.

3) Если a= -1, то уравнение принимает вид 0x=0, $x \in R$. Условие задачи не выполняется.

4) Если $a \neq 1$; $a \neq -1$, то уравнение имеет единственное решение:

$$x = \frac{(a+1)(a-3)}{(a+1)(a-1)}$$

$$x = \frac{a-3}{a-1}$$

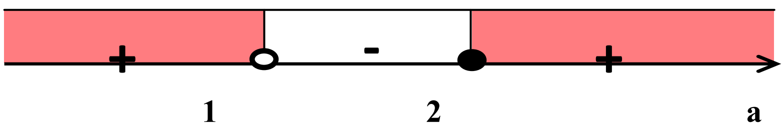
$$\frac{-3}{-1} \geq -1$$

$$\frac{a-3}{a-1} + 1 \geq 0$$

$$\frac{a-3+a-1}{a-1} \geq 0$$

$$\frac{2a-4}{a-1} \geq 0$$

$$\frac{a-2}{a-1} \geq 0$$



$a \in (-\infty; 1) \cup [2; +\infty]$

Исключим a = -1, при котором уравнение не имеет единственного решения.

Ответ: при $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup [2; +\infty]$

Дробно - рациональные уравнения, сводящиеся к линейным.

Задача №7.Решите уравнение $\frac{3mx-5}{(m-1)(x+3)} + \frac{3m-11}{m-1} = \frac{2x+7}{x+3}$.

Решение.

1) О.Д.З.: $(m-1)(x+3) \neq 0$. Отсюда $m \neq 1$; $x \neq -3$

2) При m=1 уравнение не имеет корней.

3) При $m \neq 1$:

Преобразуем исходное уравнение:

$$\frac{3mx-5}{(m-1)(x+3)}+\frac{3m-11}{m-1}=\frac{2x+7}{x+3} \quad | \cdot (m-1)(x+3) \neq 0$$

$$3mx-5+(3m-11)(x+3)=(2x+7)(m-1)$$

$$3mx-5+3mx+9m-11x-33=2xm-2x+7m-7$$

$$4mx-9x=31-2m$$

Получим уравнение вида ax=b

Контрольные значения параметра: $4m-9=0$

$$m=\frac{9}{4}$$

4) Если $m=\frac{9}{4}$ то $0 \cdot x = 31-4{,}5$

$0 \cdot x = 26{,}5$ уравнение не имеет решений.

5) Если $m \neq \frac{9}{4}$, то $x=\frac{31-2m}{4m-9}$ – единственное решение.

6) Учтем О.Д.З.:

Найдем значение параметра m, при котором этот корень принимает значение -3.

Имеем: $\frac{31-2m}{4m-9}=-3$

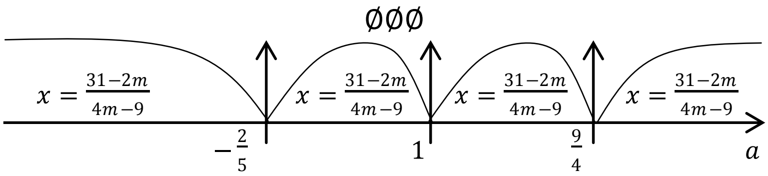
$-3(4m-9)=31-2m$

$-12m+27=31-2m$

$-10m=4$

$m=-\frac{2}{5}$

При $m=-\frac{2}{5}$ уравнение не имеет решений



Ответ: при $a=-\frac{2}{5}; a=1; a=\frac{9}{4}$ решений нет;

при $a \in \left(-\infty; -\frac{2}{5}\right) \cup \left(-\frac{2}{5}; 1\right) \cup \left(1; \frac{9}{4}\right)$ $x=\frac{31-2m}{4m-9}$.

Задача №8. При каких значениях параметра а не имеет решений уравнение $\frac{x-a}{x-2}-\frac{x}{x+2}=\frac{1}{x^2-4}$?

Решение.

1) О.Д.З.: $a \in R$, $x \neq 2$ $и x \neq -2$

2) На О.Д.З. преобразуем исходное уравнение:

$$\frac{x-a}{x-2}-\frac{x}{x+2}=\frac{1}{x^2-4} \quad | \cdot (x-2)(x+2) \neq 0$$

$$(x-a)(x+2)-x(x-2)=1$$

$$x^2+2x-ax-2a-x^2+2x=1$$

$2x-ax+2x=2a+1$

$4x-ax=2a+1$

$(4-a) \cdot x = 2a+1$

Получим уравнение вида $ax=b$

Контрольные значения параметра: $4 - a = 0$

$$a = 4$$

Если $a = 4$, то уравнение $0 \cdot x = 9$ не имеет решений.

Если $a \neq 4$, то $x = \frac{2a+1}{4-a}$ – единственное решение.

3) Вернемся к области допустимых значений.

Найдем значения параметра а, при которых этот корень принимает значения 2 и -2.

1) $\frac{2a+1}{4-a} = 2$

$2a + 1 = 2(4 - a)$

$2a + 1 = 8 - 2a$

$4a = 7$

$a = \frac{7}{4}$

$a = 1\frac{3}{4}$

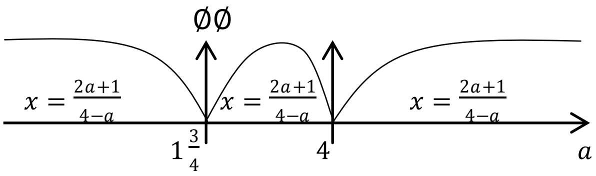
2) $\frac{2a+1}{4-a} = -2$

$2a + 1 = -8 + 2a$

$0 \cdot a = -9$

решений нет

При $a = 1\frac{3}{4}$ уравнение не имеет решений.



Ответ: при a=1,75 и a=4 уравнение не имеет решений.

Квадратные уравнения с коэффициентами, зависящими от параметров.

Определение. Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, *где коэффициенты* a, b, c - любые действительные числа, называется ***квадратным.***

Определение. Квадратное уравнение называется ***приведенным***, если $a = 1$; квадратное уравнение называют ***неприведенным***, если $a \neq 1$.

Определение. ***Полное квадратное уравнение*** –это квадратное уравнение, в котором a, b, c отличны от нуля.

Определение. ***Неполное квадратное уравнение*** - это уравнение, в котором один или оба коэффициента b, c равны нулю.

Определение. Корнем квадратного уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, называют всякое значение переменной x, при котором квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ обращается в нуль.

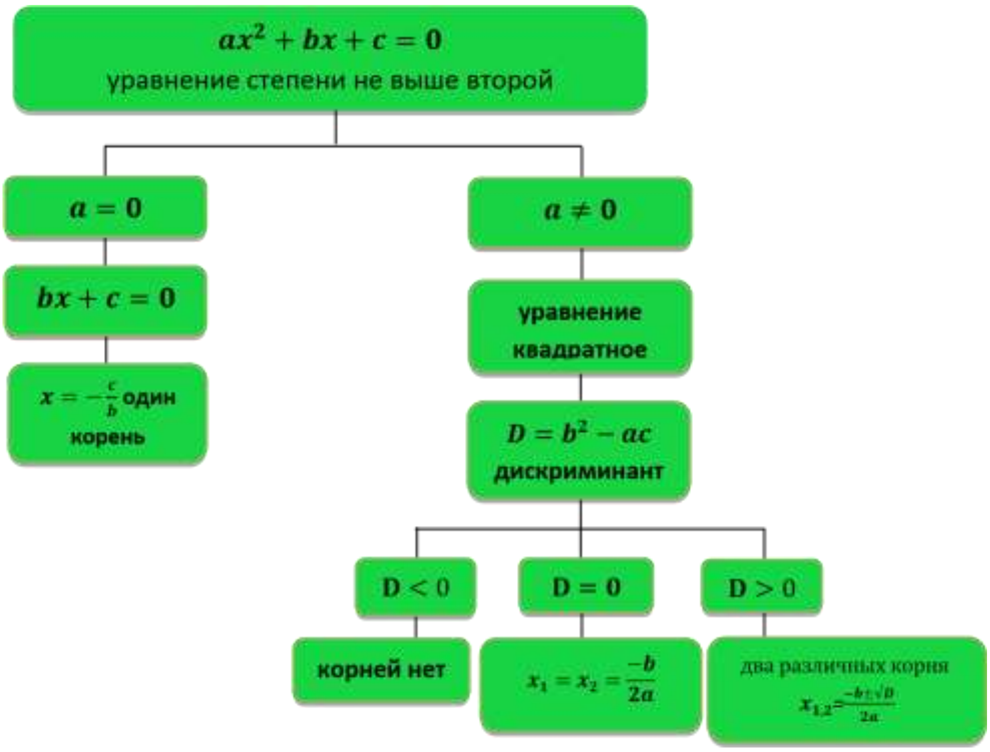
Выражение $b^2 - 4ac$ называют дискриминантом квадратного уравнения.

Квадратное уравнение в зависимости от знака дискриминанта D может иметь один, два или не иметь корней.

Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней.

Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет единственный действительный корень $x = \frac{-b}{2a}$ (или говорят, что это уравнение имеет два кратных корня $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$).

Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два различных действительных корня $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$



При решении квадратного уравнения с параметром *контрольными* будут те значения параметра, при которых коэффициент при x^2 обращается в 0. Дело в том, что если этот коэффициент равен нулю, то уравнение превращается в линейное и решается по соответствующему алгоритму; если же этот коэффициент отличен от нуля, то имеем квадратное уравнение, которое решается по иному алгоритму (меняется процедура решения, в этом и состоит качественное изменение уравнения). Дальнейшее решение зависит от D.

Рассмотрим несколько квадратных уравнений с параметром.

Задача №9. При каких значениях параметра а имеет два корня уравнение $x^2 + 2ax + a^2 - 3a + 1 = 0$?

Решение.

Данное уравнение является квадратным. Оно имеет два корня, если D > 0.

Имеем:

$$x^2 + 2ax + a^2 - 3a + 1 = 0$$

a=1 b=2a $c = a^2 - 3a + 1$

$D_1 = a^2 - (a^2 - 3a + 1) = a^2 - a^2 + 3a - 1 = 3a - 1;$

$D_1 > 0$

3a-1 >0

$a > \frac{1}{3}$

Ответ: при $a > \frac{1}{3}$.

Задача №10. При каком значении параметра а имеет единственный корень уравнение $2x^2 - ax + 18 = 0$?

Решение.

Данное уравнение является квадратным. Оно имеет единственный корень, если D=0Имеем:

$2x^2 - ax + 18 = 0$

$a = 2$ $b = -ac = 18$

$$D = a^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 = a^2 - 144$$

$a^2 - 144 = 0$

$a = -12$ или $a = 12$

Ответ: при $a = -12$; $a = 12$

Задача №11. При всех значениях а решите уравнение $(a - 2)x^2 + 2ax + a + 3 = 0$.

Решение.

Обратим внимание на распространенную ошибку: считать такое уравнение квадратным. Т.к. коэффициент перед x^2 может быть равен 0!

На самом деле это уравнение степени не выше второй.

I. Если $a - 2 = 0$, $a = 2$, то получаем линейное уравнение

$4x + 5=0$

$x = -1\frac{1}{4}$, которое имеет единственный корень.

II. Если $a - 2 \neq 0$, $a \neq 2$, то уравнение является квадратным. Количества корней уравнения зависит от дискриминанта.

$(a - 2)x^2 + 2ax + a + 3 = 0$

$a = a\text{-}2 \quad b = 2a \quad c = a+3$

$D_1 = a^2 - (a - 2)(a + 3) = a^2 - (a^2 + a - 6) = a^2 - a^2 - a + 6 = 6 - a$

1) Если $D_1 > 0$, т. е. $6 - a > 0$ $a < 6$, два корня

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{6-a}}{a-2}$$

2) Если $D_1 = 0$, т.е. $6 - a = 0$ $a = 6$, один корень

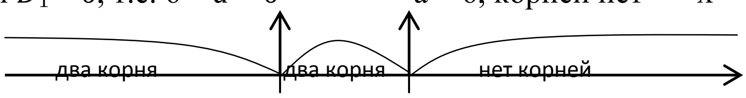
$4x^2 + 12x + 9 = 0$

$(2x + 3)^2 = 0$

$2x + 3 = 0$

$\underline{x = -1{,}5}$

3) Если $D_1 < 0$, т.е. $6 - a < 0$ $a > 6$, корней нет x = 1,25 x = -1,5



2 6 a

Ответ: при $a < 2,\ 2 < a < 6,\quad x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{6-a}}{a-2}$;

при $a = 2,\ x = -1\frac{1}{4}$;

при $a = 6$, $x = -1{,}5$;

при $a > 6$, корней нет.

Задачи на применение теорем Виета.

Многие задачи, связанные с квадратным трехчленом, и методы их решения основаны на применении прямой и обратной теорем Виета.

Теорема Виета. Сумма корней x_1иx_2 квадратного уравнения $ax^2 + bx + x = 0$ равна отношению второго коэффициента к первому, взятому с противоположным знаком, а произведение равно отношению свободного члена к первому коэффициенту:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Для приведенного квадратного уравнения. Если x_1иx_2– корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q. \end{cases}$$

т.е. сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

Обратная теорема Виета. Если сумма двух действительных чисел $x_1 и x_2$ равна $-\frac{b}{a}$, а произведение равно $\frac{c}{a}$, то эти числа являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + x = 0$.

Для приведенного квадратного уравнения. Если существуют действительные числа $x_1 и x_2$ такие, что $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1x_2 = q$, то эти числа $x_1 и x_2$ являются корнями квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Исследование знаков корней.

Теорема 1

Чтобы корни квадратного трехчлена были действительными и имели одинаковые знаки, необходимо и достаточно выполнение следующих соотношений:
$D = b^2 - 4ac \geq 0;\quad x_1x_2 = \frac{c}{a} > 0$, при этом оба корня будут положительными, если дополнительно наложить условие: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$, и оба корня будут отрицательны, если $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$

Теорема 2 .

Чтобы корни квадратного трехчлена были действительными и имели различные знаки, необходимо и достаточно выполнение соотношений: $D = b^2 - 4ac > 0;\quad x_1x_2 = \frac{c}{a} < 0$, при этом положительный корень имеет большую абсолютную величину, если $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$, если же $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$, то отрицательный корень имеет большую абсолютную величину.

Задача №12. При каких значениях параметра а произведение корней уравнения $x^2 + (a + 2)x + a^2 - 4a = 0$ равно 5?

Решение.

$x^2 + (a + 2)x + a^2 - 4a = 0$. Данное уравнения квадратное.

Если корни квадратного уравнения существуют, то по теореме Виета $x_1x_2 = a^2 - 4a$

Произведение корней равно 5, если

$$a^2 - 4a = 5$$
$$a^2 - 4a - 5 = 0$$
$$a = -1;\quad a = 5$$

Подставим найденные значения параметра a в исходное уравнение и выясним, при каких a квадратное уравнение имеет корни.

При $a = -1$ получим, $x^2 + x + 1 + 4 = 0$

$x^2 + x + 5 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -19,\ D < 0$

уравнение не имеет корней.

При $a = 5$ получим, $x^2 + 7x + 25 - 20 = 0$

$x^2 + 7x + 5 = 0$

$D = 49 - 4 \cdot 5 = 29;\ D > 0$

уравнение имеет два корня.

Ответ: при $a = 5$.

Задача №13. При каких значениях параметра а сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (a-1)x - 2a = 0$ равна 9?

Решение.

$$x^2 + (a-1)x - 2a = 0$$

Данное уравнение является квадратным.

Найдем дискриминант:

$$D = (a-1)^2 + 4 \cdot 2a = a^2 - 2a + 1 + 8a = a^2 + 6a + 1$$

Теорема Виета работает лишь для тех квадратных уравнений, у которых есть корни.

Существование корней определяется условием $D \geq 0$, т.е.

$$a^2 + 6a + 1 \geq 0$$

Пусть $x_1 и x_2$ – корни данного уравнения.

По условию $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 9$; $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 9$

Применяя теорему Виета, имеем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - a \\ x_1x_2 = -2a; \end{cases}$$

Получаем уравнение: $(1-a)^2 + 2 \cdot 2a = 9$

$$1 - 2a + a^2 + 4a - 9 = 0$$

$$a^2 + 2a - 8 = 0$$

$$a_1 = -4, \quad a_2 = 2$$

Найденные значения $a = -4$ и $a = 2$ должны удовлетворять неравенству $a^2 + 6a + 1 \geq 0$.

Проверим. Если $a = -4$, то $(-4)^2 - 24 + 1 \geq 0$

$17 - 24 \geq 0$ (неверно)

Значит, при $a = -4$ уравнение не имеет корней.

Если $a = 2$, то $4 + 12 + 1 \geq 0$ (верно). Значит, при $a = 2$ уравнение имеет корни.

Ответ: при $a = 2$.

Задача №14. Найдите все действительные значения параметра а, при которых корни уравнения $(a-3)x^2 - 2ax + 6a = 0$ действительны и положительны.

Решение.

$$(a-3)x^2 - 2ax + 6a = 0$$

Данное уравнение степени не выше второй.

1) Если $a - 3 = 0$, $a = 3$, то получаем уравнение

$$-6x + 18 = 0$$

$$-6x = -18$$

$$x = 3$$

3 – положительный корень, значит, $a = 3$ удовлетворяет условию задачи.

2) Если $a - 3 \neq 0$, $a \neq 3$, то уравнение является квадратным. Найдем дискриминант: $D_1 = a^2 - 6a(a-3) = a^2 - 6a^2 + 18a = 18a - 5a^2$Существование корней уравнения определяется условием $D \geq 0$, т.е.

$$18a - 5a^2 \geq 0$$

$$5a^2 - 18a \leq 0$$

$$a(5a - 18) \leq 0$$

$$0 \leq a \leq \frac{18}{5}$$

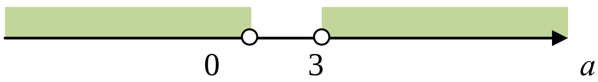
$$0 \leq a \leq 3{,}6$$

3) Пусть $x_1 и x_2$ – корни данного уравнения. Чтобы корни были действительными и положительными, необходимым и достаточным условием служит система неравенств:

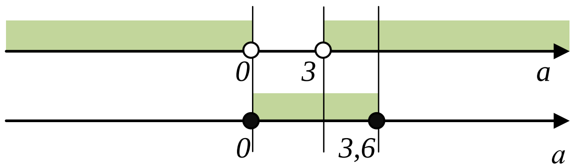
$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1x_2 > 0. \end{cases}$$

По теореме Виета:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2a}{a-3} \\ x_1 x_2 = \frac{6a}{a-3}; \end{cases}$$

Получаем, $\begin{cases} \frac{2a}{a-3} > 0 \\ \frac{6a}{a-3} > 0; \end{cases}$



a< 0 или a> 3
Учитывая, что $0 \le a \le 3{,}6$, получим

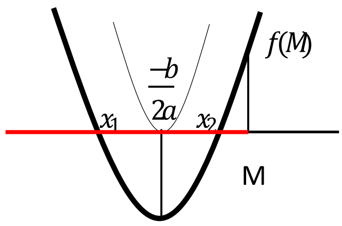


А т.к. при $a = 3$ уравнение имеет положительный корень, то $a \in [3; 3{,}6]$
Ответ: $a \in [3; 3{,}6]$.

Расположение корней квадратного трехчлена в зависимости от параметра.

Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$ имеет действительные корни x_1, x_2, которые могут быть кратными, а М, А – какие-нибудь действительные числа, причем А > М. Тогда:

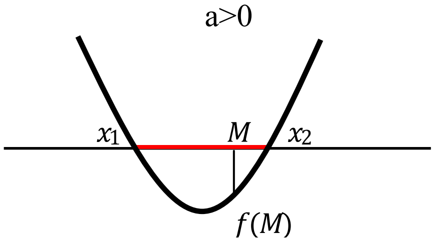
Теорема 3. Для того чтобы оба корня квадратного трехчлена были меньше, чем число М (т.е. лежали на координатной прямой левее, чем точка М), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:



$$a > 0 \quad \begin{cases} D \ge 0 \\ \frac{-b}{2a} > M \\ f(M) > 0 \end{cases}$$

Теорема 4. Чтобы один из корней квадратного трехчлена был меньше, чем число М, а другой больше, чем М (т.е. точка М лежала бы между корнями), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

a>0

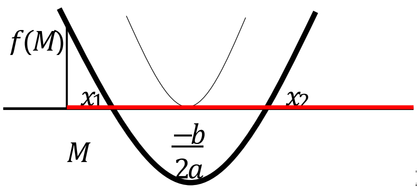


$f(M) < 0$

Теорема 5.

Чтобы оба корня квадратного трехчлена были больше, чем число М (т.е. лежали на координатной прямой правее, чем число М), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

a>0

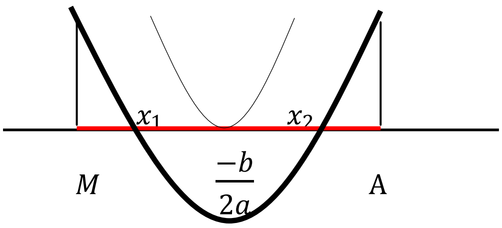


$$\begin{cases} D \geq 0 \\ \frac{-b}{2a} > M \\ f(M) > 0 \end{cases}$$

27

Следствие 1.

Чтобы оба корня квадратного трехчлена были больше, чем число М, но меньше, чем число А (М < А), т.е. лежали на интервале между М и А, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:



$$\begin{cases} D \geq 0 \\ f(M) > 0 \\ f(A) > 0 \\ M < \frac{-b}{2a} < A \end{cases}$$

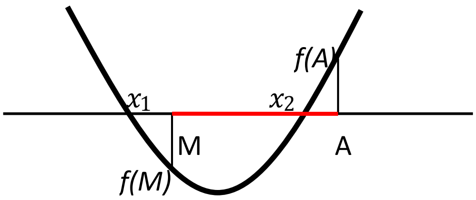
f(M)

f(A)

Следствие 2.

Чтобы только больший корень квадратного трехчлена лежал в интервале между М и А (М<А), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

a>0



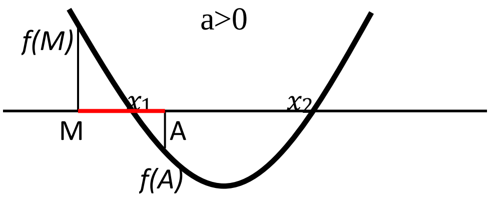
$$\begin{cases} f(M) < 0 \\ f(A) > 0 \end{cases}$$

при этом меньший корень вне отрезка |МА|

Следствие 3.

Чтобы только меньший корень квадратного трехчлена лежал в интервале между М и А (М < А), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

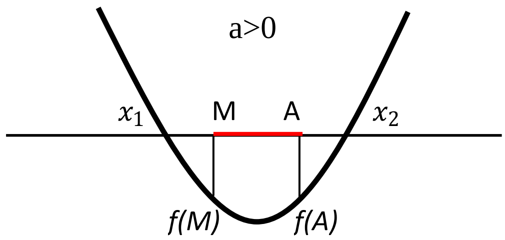
при этом больший корень лежит вне отрезка |МА|



$$\begin{cases} f(M) > 0 \\ f(A) < 0 \end{cases}$$

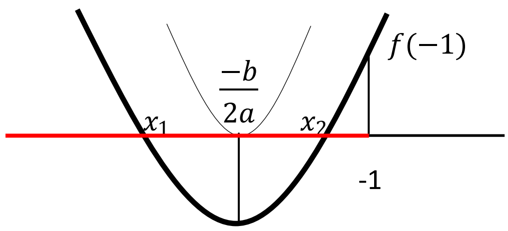
Следствие 4.

Чтобы один корень квадратного трехчлена был меньше, чем М, а другой больше, чем А (М < А), т.е. отрезок МА целиком лежал внутри интервала между корнями, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:



f(A)   f(M) $\begin{cases} f(M) < 0 \\ f(A) < 0 \end{cases}$

Задача №15. При каких а оба корня уравнения $x^2 + 4ax + 1 - 2a + 4a^2 = 0$ меньше -1?
Решение. Данное уравнение квадратное. Изобразим графически условие задачи. Коэффициент перед x^2 положительный, ветви параболы $f(x) = x^2 + 4ax + 1 - 2a + 4a^2$ направлены вверх. Уравнение имеет два различных корня, которые меньше -1, т.е. оба корня расположены левее числа -1.



Т.к. корни существу
Абсцисса вершин параболы меньше -1 и значение квадратного трехчлена в точке -1 должно быть больше нуля.
Запишем систему, которая описывает эту ситуацию:

$$\begin{cases} D > 0, \\ -\frac{b}{2a} < -1, \\ f(-1) > 0; \end{cases}$$

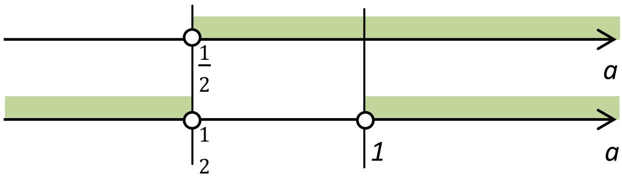
$$D_1 = (2a)^2 - (1 - 2a + 4a^2) = 4a^2 - 1 + 2a - 4a^2 = 2a - 1$$

$$-\frac{b}{2a} = \frac{-4a}{2} = -2a$$

$$f(-1) = 1 - 4a + 1 - 2a + 4a^2 = 4a^2 - 6a + 2$$

Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} 2a - 1 > 0, \\ -2a < -1, \\ 4a^2 - 6a + 2 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a > \frac{1}{2}, \\ a > \frac{1}{2}, \\ 2a^2 - 3a + 1 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a > \frac{1}{2}, \\ 2(a-1)\left(a - \frac{1}{2}\right) > 0; \end{cases}$$



Ответ: при $a > 1$.

Функционально-графический подход к решению задач с параметрами.

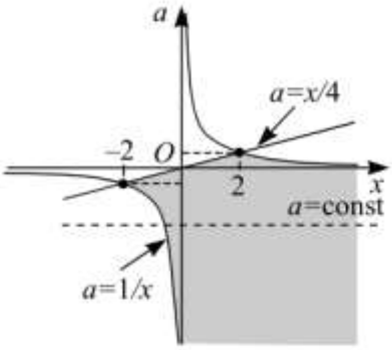
В задачах вида F(x,a)∨0 или f(x,a)∨g(x,a) или $\begin{cases} F_1(x, y, a) \vee 0, \\ F_2(x, y, a) \vee 0, \end{cases}$ (1) часто ставиться вопрос исследовать на:
– наличие решений или их отсутствие,
– единственность решения или наличие определенного количества решений,
– наличие решений определенного типа и т.д.

Для решения подобных задач можно применять графический метод решения (метод наглядной графической интерпретации), основанный на использовании графических образов выражений.

Задачи, в решении которых графические интерпретации играют ключевую роль, можно с определенной степенью условности разделить на три основные группы. К первой отнесем задачи, в которых графические интерпретации позволяют изображать множество всех точек плоскости Оха, удовлетворяющих условию задачи, в виде некоторой фигуры («области»), рассматривая различные положения прямой a=const относительно изображенной области, найти ответ. Ко второй группе отнесем задачи, допускающие прямую графическую интерпретацию, т.е. построение и исследование графика функции. К третьей группе отнесем задачи, решение которых основывается на исследовании взаимного расположения известных фигур (геометрической интерпретации данных уравнений или неравенств).

Пример 1. Определите, при каких значениях параметра а, имеет хотя бы одно решение система неравенств $\begin{cases} ax-1\le 0, \\ x-4a\ge 0. \end{cases}$

Решение. Заштрихуем на плоскости Оха множество точек, координаты которых удовлетворяют системе неравенств.



Неравенству $ax-1\le 0$ удовлетворяют координаты точек, лежащих между ветвями гиперболы $a=\frac{1}{x}$ или на гиперболе. Неравенство $x-4a\ge 0$ или $a\le\frac{x}{4}$ выполняется для точек, лежащих не выше прямой $a=\frac{x}{4}$.

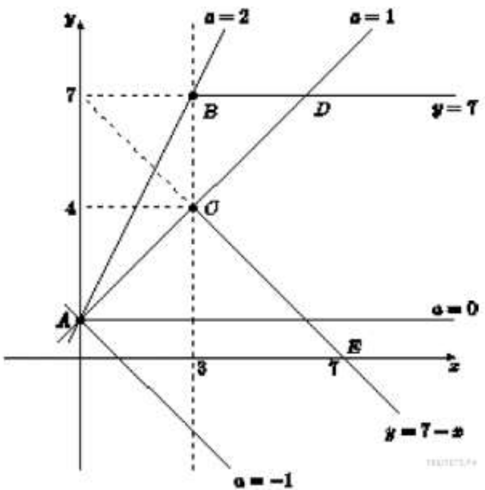
Данная система имеет решение, если прямая a=const пересекает заштрихованную область, т.е. при $a\le 0{,}5$.

Ответ: $a\le 0{,}5$.

Пример 2. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система $\begin{cases} y^2+xy-7x-14y+49=0, \\ y=ax+1, \\ x\ge 3 \end{cases}$ ***имеет единственное решение.***

Решение. Преобразуем исходную систему: $\begin{cases} (y-7)(x+y-7)=0, \\ y=ax+1, \\ x\ge 3. \end{cases}$

Уравнение $(y-7)(x+y-7)=0$ задает пару пересекающихся прямых $y=7$ и $y=7-x$.



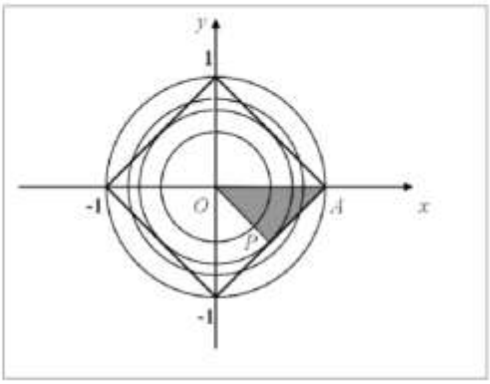
Система $\begin{cases} x\ge 3, \\ (y-7)(y+x-7)=0 \end{cases}$ задает части прямых, расположенные в полуплоскости $x\ge 3$, то есть лучи ***BD*** и ***CE***, включая точки ***B*** и ***C***.

Уравнение $y=ax+1$ задает прямую ***m*** с угловым коэффициентом ***a***, проходящую через точку ***A(0;1)***. Следует найти все значения ***a***, при каждом из которых прямая ***m*** имеет единственную общую точку с объединением лучей ***BD*** и ***CE***.

а) прямая ***AB*** задается уравнением $y = 2x + 1$. Поэтому при ***a***>2 прямая ***m*** не пересекает ни луч ***BD***, ни луч ***CE***, а при ***a***=2 есть только одна точка пересечения – точка ***B***.
б) прямая AC задается уравнением $y = x + 1$. Поэтому при 1<***a***<2 прямая ***m*** пересекает луч ***BD***, но не пересекает луч ***CE***, то есть условие выполнено.
в) При 0<***a***≤1 прямая ***m*** пересекает луч ***BD*** и луч ***CE***.
г) При –1<***a***≤0 прямая ***m*** пересекает только луч ***CE***.
д) При ***a***≤–1 прямая ***m*** не пересекает ни луч ***BD***, ни луч ***CE***.
Ответ: $a \in (-1;0] \cup (1;2)$.

Пример 3. Для каждого значения параметра а определите число решений системы уравнений $\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$

Решение. Первое уравнение системы на координатной плоскости ***Oxy*** задает квадрат, а второе уравнение – семейство концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусом $r = |a|$. Из прямоугольного равнобедренного ***ΔOPA*** находим $OP = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



По графику видим, что
система не имеет решений, если ***r***< $\frac{\sqrt{2}}{2}$ или ***r***>1;
при ***r***= $\frac{\sqrt{2}}{2}$ или ***r***=1 – четыре решения;
при $\frac{\sqrt{2}}{2}$ <***r***<1 – восемь решений.
С учетом того, что $r = |a|$, получаем:

система не имеет решений, если $a \in (-\infty;-1) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (1;+\infty)$;

четыре решения, если $a \in \left\{\pm 1; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$;

восемь решений $a \in \left(-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)$.

<u>Ответ:</u> при $a \in (-\infty;-1) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (1;+\infty)$ решений нет,

при $a \in \left\{\pm 1; \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ четыре решения, при $a \in \left(-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2};1\right)$ восемь решений.

В зависимости от того, какая роль отводится параметру при решении задачи с параметрами с использованием этого метода, можно выделить ***два основных приема***.

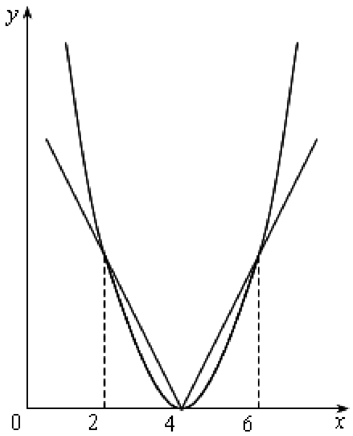
- построение графического образа на координатной плоскости ***Oxy***.
- построение графического образа на координатной плоскости ***Oxa***.

<u>Структура решения задач с параметром</u>

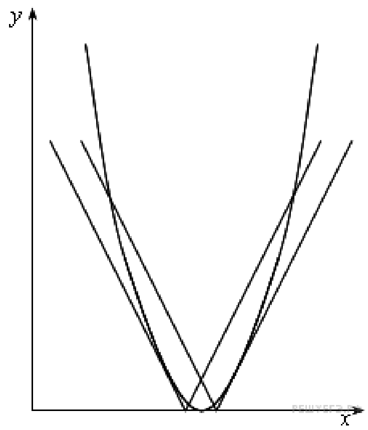
В координатной плоскости ***Oxy***	В координатной плоскости ***Oxa***
1) Строим график функции $y=f(x;a)$, задающий семейство кривых, зависящих от параметра ***a***. 2) Определяем преобразование, позволяющее перейти от одной кривой семейства к другой. 3) Читаем график и находим необходимый графический образ.	1) Записываем уравнение $F(x;a)=0$ в виде $a=f(x)$ и строим график этой функции. 2) Находим точки пересечения графика функции $a=f(x)$ с прямыми вида ***a=const***, параллельными оси ***Ox***. 3) Выбираем абсциссы точек пересечения, определяющие решения в соответствии с условием задачи.

Пример 4. Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение $x^2-8x=2|x-a|-16$ ***имеет ровно три различных решения.***

Решение. Запишем уравнение в виде $(x-4)^2=2|x-a|$ и рассмотрим графики функций $y=(x-4)^2$ и $y=2|x-a|$. График первой функции – парабола, график второй функции – угол с вершиной в точке с абсциссой равной ***a***.



Уравнение будет иметь три различных решения в следующих случаях.
1) Вершина параболы совпадает с вершиной угла. (рис. слева)
2) Одна из сторон угла касается параболы. (рис. справа)



В первом случае ***a***=4, и уравнение имеет три корня 2, 4, 6.

Рассмотрим второй случай.

Если правая сторона угла касается параболы, то уравнение $(x-4)^2=2x-2a$ должно иметь единственное решение. Приведем уравнение к стандартному виду $x^2-10x+16+2a=0$. Из равенства нулю дискриминанта получаем $25-(16+2a)=0$, откуда ***a***=4,5.

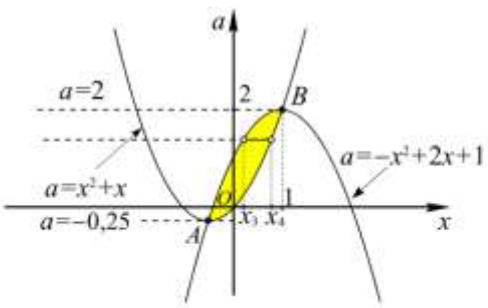
Если левая сторона угла касается параболы, то уравнение $(x-4)^2=2a-2x$ должно иметь единственное решение. Приведем уравнение к стандартному виду $x^2-6x+16-2a=0$. Из равенства нулю дискриминанта получаем $9-(16-2a)=0$, откуда ***a***=3,5.

Ответ: 3,5; 4; 4,5.

Пример 5. Решить систему неравенств в зависимости от значений параметра а:

$$\begin{cases} x^2+x\le a, \\ 2x-x^2\ge a-1. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем исходную систему неравенств к виду $\begin{cases} x^2+x\le a, \\ 1+2x-x^2\ge a. \end{cases}$



Выполним построения графиков функций $a=x^2+x$ и $a=-x^2+2x+1$ на плоскости Оха.

Найдем координаты точек пересечения построенных графиков A и B. Абсциссы этих точек найдем из уравнения $x^2+x=2x-x^2+1$. Его корнями являются числа $x_1=-0{,}5$ и $x_2=1$. Заметим, что корни x_1, x_2 совпадают с абсциссами вершин первой и второй парабол соответственно, а ординаты точек A и B равны $-0{,}25$ и 2. Графическое решение исходной системы неравенств – множество точек, принадлежащих фигуре, выделенной фоном.

Проводим прямые, параллельные оси Ох. Они будут иметь общие точки с полученной фигурой при $-0{,}25\le a\le 2$. При $a=-0{,}25$ или $a=2$ будем иметь по одной общей точке, соответственно решение системы неравенств $x_1=-0{,}5$ или $x_2=1$. При $-0{,}25<a<2$ все общие точки образуют отрезок этой прямой, и их абсциссы x удовлетворяют неравенству $x_3\le x\le x_4$, где $x_3=1-\sqrt{2-a}$ – меньший из корней уравнения $a=-x^2+2x+1$, а $x_4=\dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}$ – больший из корней уравнения $x^2+x=a$.

Ответ: $x_1=-0{,}5$ при $a=-0{,}25$; $x_2=1$ при $a=2$;

$x\in\left[1-\sqrt{2-a};\dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}\right]$ при $-0{,}25<a<2$.

В случаях исследования уравнения на наличие корней или их количество в зависимости от значений параметра применяют **метод сечений**, состоящий в следующем: в системе координат ***Oxy*** строится график $f(x)$ и определяется количество точек его пересечения семейством графиков функции $y_a(x)=g(x,a)$ в зависимости от значений параметра a либо в системе координат ***Oxa*** строится график $f(x)$ и определяется количество точек его пересечения $a=cons$.

Для графической интерпретации при решении неравенств используется метод областей на плоскости ***Oxa*** или ***Oxy***. В общем случае это уравнение задает некоторую кривую или несколько кривых на плоскости. Полученные кривые разбивают плоскость на множества, для координат всех точек которые имеет постоянный знак. Далее отбирают требуемые подмножества, координаты точек которых удовлетворяют неравенству. Это можно сделать подстановкой координат произвольной точки из рассматриваемого подмножества в выражение $f(x,y)$ или $f(x,a)$.

Пример 6. Найдите все значения а, при каждом из которых график функции $f(x)=x^2-3x+2-|x^2-5x+4|-a$ ***пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.***

Решение. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x)=x^2-3x+2-|x^2-5x+4|$. Если x≤1 или x≥4, то $|x^2-5x+4|=x^2-5x+4$, и $g(x)=2x-2$. Если 1<x<4, $|x^2-5x+4|=-x^2+5x-4$, и $g(x)=2x^2-8x+6$. Таким образом, график функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы.

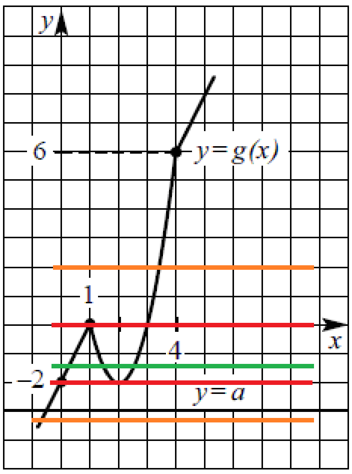


График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в двух или одной точках, если уравнение $g(x)=a$ имеет менее трех различных корней.

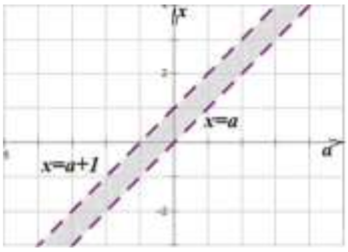
На рисунке видно, что уравнение $g(x)=a$ имеет

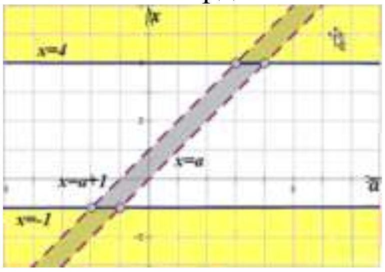
- один корень при $a\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$
- два корня при $a=-2$ и $a=0$
- три корня при $a\in(-2;0)$

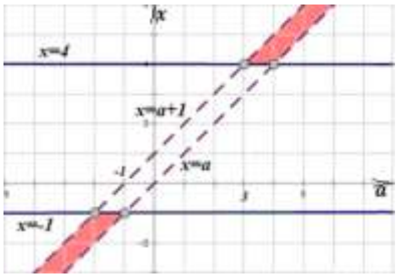
Ответ: $a\le -2$ и $a\ge 0$.

Пример 7. При каких значениях a ***система неравенств*** $\begin{cases} x^2-(2a+1)x+a^2+a<0, \\ x^2-3x-4\ge 0 \end{cases}$ ***не имеет решений.***

Решение. Рассмотрим первое неравенство, используя теорему Виета, имеем $a<x<a+1$. Решением второго неравенства есть совокупность $\left[\begin{matrix} x\le -1, \\ x\ge 4. \end{matrix}\right.$ Поэтапно построим множество решений исходного неравенства в системе координат ***Оха***.





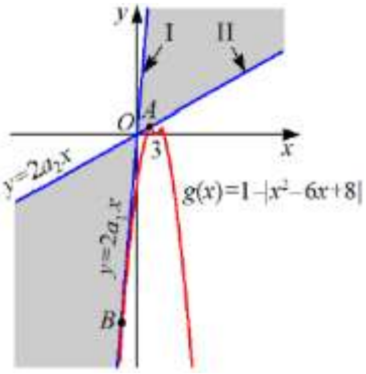


Очевидно, множество решений системы неравенств не имеет общих точек с прямой $a=cons$ при $-1\le a\le 3$.

Ответ: $a\in[-1;3]$.

Задача №16. Найти все значения а, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=2ax+|x^2-6x+8|$ ***меньше 1.***

Решение. При каждом a функция $f(x)=2ax+|x^2-6x+8|$ определена и непрерывна на всей числовой прямой и ограничена снизу.



Условию удовлетворяют такие a, при каждом из которых неравенство f(x)<1 или $2ax+|x^2-6x+8|<1 \Leftrightarrow 2ax<1-|x^2-6x+8|$ имеет хотя бы одно решение, то есть график функции $g(x)=1-|x^2-6x+8|$ расположен выше прямой $y=2ax$ хотя бы при одном значении х. Построим на плоскости Оху график функции $g(x)$.

Равенство $y=2ax$ задает на плоскости ОХУ семейство прямых с угловым коэффициентом $2a$, проходящих через начало координат. Имеется два критических положения этих прямых.

(I) Из условия касания в точке В прямой $y=2a_1x$ графика $g(x)=-x^2+6x-7$ на $x\in(-\infty;2]$ найдем a_1:

$$\begin{cases} g(x_0)=y(x_0), \\ g'(x_0)=y'(x_0), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_0^2+6x_0-7=2a_1x_0, \\ -2x_0+6=2a_1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-\sqrt{7}, \\ 2a_1=6+2\sqrt{7}. \end{cases}$$

Угловой коэффициент первой прямой равен $k_1=2a_1=2\sqrt{7}+6$.

(II) График функции $y=2a_2x$ проходит через точку А(2;1). Из уравнения $2a_2x=1$ при х=2 получаем $k_2=2a_2=0{,}5$.

Решений нет при $k_2<k<k_1$, $0{,}5<2a<2\sqrt{7}+6$, $0{,}25<a<\sqrt{7}+3$, то есть когда прямые расположены в выделенной фоном области. Соответственно, решение существует при $a\in(-\infty;0{,}25]\cup[\sqrt{7}+3;+\infty)$.

Ответ: $a\in(-\infty;0{,}25]\cup[\sqrt{7}+3;+\infty)$.

Задания для самостоятельной работы:

1) Найти все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=ax+6+|-x^2-6x-5|$ больше 2.

Ответ: $-12<a<0{,}8$.

2) Найти все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=2ax+5+|x^2+6x+5|$ меньше 1.

Ответ: $a\in(-\infty;-6]\cup[0{,}4;+\infty)$.

3) Найти все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=4ax+|x^2-8x+15|$ меньше 1.

Ответ: $a\in\left(-\infty;\frac{1}{12}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{14}}{2}+2;+\infty\right)$.

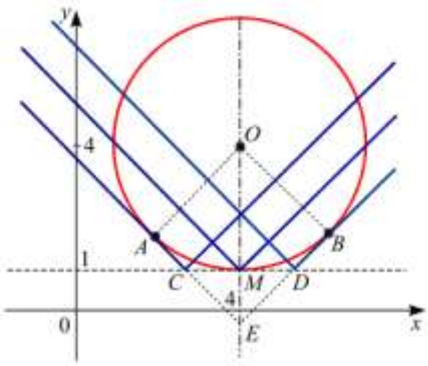
4) Найти все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=2ax+|x^2-8x+7|$ больше 1.

Ответ: $a\in\left(\frac{1}{2};4+\sqrt{6}\right)$.

5) Найти все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x)=4ax+|x^2-8x+7|$ больше 1. Ответ: $\frac{1}{4}<a<\frac{4+\sqrt{6}}{2}$.

Задача №17. Найти все значения a, при каждом которых система $\begin{cases}(x-4)^2+(y-4)^2=9,\\ y=|x-a|+1\end{cases}$ ***имеет ровно три различных решения.***

Решение. Первое уравнение системы задает окружность радиуса 3 с центром в точке O(4;4). Второе уравнение системы задает прямой угол с вершиной в точке (a;1) и симметричной относительно прямой x=*a*.



Прямая y=1 является касательной к окружности.

Ровно три точки заданные фигуры имеют в трех случаях.

1. Вершина прямого угла лежит в точке касания и прямой y=1 (в точке M), а его стороны пересекают окружность в двух точках. Это условие выполняется при *a*=4.

2. Одна из сторон угла пересекает окружность в двух точках, а другая касается окружности. Таких случаев два. Четырехугольник AOBE – квадрат, симметричный относительно прямой x=*a*, со стороной, равной радиусу окружности 3, и диагональю $3\sqrt{2}$.

MD=MC=OE–OM=$3\sqrt{2}-3$. Абсциссы точек C и D соответствуют искомым значениям параметра *a*. Следовательно, условию задачи соответствуют $a=4-(3\sqrt{2}-3)=7-3\sqrt{2}$ или $a=4+(3\sqrt{2}-3)=1+3\sqrt{2}$.

Ответ: $7-3\sqrt{2}$, 4 и $1+3\sqrt{2}$.

Задания для самостоятельной работы:

1) Найти все значения a, при каждом которых система $\begin{cases}(x-3)^2+(y-5)^2=16,\\ y=|x-a|+1\end{cases}$ имеет ровно три различных решения.

Ответ: $7-4\sqrt{2}$, 3 и $4\sqrt{2}-1$.

2) Найти все значения а, при каждом которых система $\begin{cases}(x-4)^2+(y-6)^2=25,\\ y=|x-a|+1\end{cases}$ имеет ровно три различных решения.

Ответ: $9-5\sqrt{2}$, 4 и $5\sqrt{2}-1$.

3) Найти все значения а, при каждом которых система $\begin{cases}(x-4)^2+(y-5)^2=16,\\ y=|x-a|+1\end{cases}$ имеет ровно три различных решения.

Ответ: $8-4\sqrt{2}$, 4 и $4\sqrt{2}$.

4) Найти все значения а, при каждом которых система $\begin{cases}(x-3)^2+(y-3)^2=4,\\ y=|x-a|+1\end{cases}$ имеет ровно три различных решения.

Ответ: $5-2\sqrt{2}$, 3 и $1+2\sqrt{2}$.

5) Найти все значения а, при каждом которых система $\begin{cases}(x-5)^2+(y-4)^2=9,\\ y=|x-a|+1\end{cases}$ имеет ровно три различных решения.

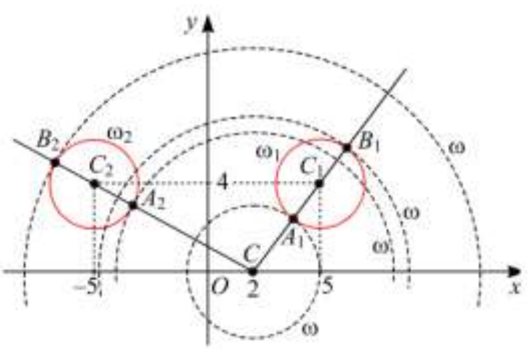
Ответ: $8-3\sqrt{2}$, 5 и $2+3\sqrt{2}$.

Задача №18. Найти все положительные значения параметра а, при каждом из которых система $\begin{cases}(|x|-5)^2+(|y|-4)^2=4,\\ (x-2)^2+y^2=a^2\end{cases}$ ***имеет единственное решение.***

Решение. При $x\geq 0$ первое уравнение системы имеет вид $(x-5)^2+(y-4)^2=4$ и задает окружность ω_1 радиуса 2 с центром в точке $C_1(5;4)$, а при x<0 имеет вид $(x+5)^2+(y-4)^2=4$ и задает окружность ω_2 радиуса 2 с центром в точке $C_2(-5;4)$.

Второе уравнение системы при положительных значениях параметра а задает окружность ω радиуса a с центром в точке C(2;0).

Задача сводится к нахождению всех значений параметра *а*, при которых окружность ω имеет единственную точку с непересекающимися окружностями ω_1 и ω_2. Это возможно, если окружность ω касается внешним или внутренним образом с одной из окружностей ω_1 и ω_2, и при этом не имеет общих точек с другой.



Так как точка касания и центры двух касающихся окружностей лежат на одной прямой, то проведем лучи CC_1 и CC_2, и обозначим A_1 и B_1 точки касания окружностей ω и ω_1, а A_2 и B_2 точки касания окружностей ω и ω_2.

Так как $CC_1=\sqrt{(5-2)^2+(4-0)^2}=5$, а $CC_2=\sqrt{(-5-2)^2+(4-0)^2}=\sqrt{65}$, то

$a_1=CA_1=CC_1-C_1A_1=5-2=3$, $a_2=CB_1=CC_1-C_1B_1=5+2=7$,

$a_3=CA_2=CC_2-C_2A_2=\sqrt{65}-2$, $a_4=CB_2=CC_2-C_2B_2=\sqrt{65}+2$.

Заметим, что при $a<a_1$ и $a>a_2$ окружности ω и ω_1 не пересекаются, при $a_1<a<a_2$ окружности ω и ω_1 имеют две точки, а при $a=a_1$ и $a=a_2$ окружности касаются.

Аналогично при $a<a_3$ и $a>a_4$ окружности ω и ω_2 не пересекаются, при $a_3<a<a_4$ окружности ω и ω_2 имеют две точки, а при $a=a_3$ и $a=a_4$ окружности касаются.

Так как $a_1<a_3<a_2<a_4$, то условию удовлетворяют только числа a=3 и $a=\sqrt{65}+2$.

Ответ: 3 и $\sqrt{65}+2$.

Задания для самостоятельной работы:

1) Найти все положительные значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases}(|x|-5)^2+(|y|-4)^2=9,\\ (x-2)^2+y^2=a^2\end{cases}$ имеет единственное решение.

Ответ: 2 и $\sqrt{65}+3$.

2) Найти все положительные значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases}(|x|-5)^2+(|y|-3)^2=9,\\ (x-1)^2+y^2=a^2\end{cases}$ имеет единственное решение.

Ответ: 2 и $3\sqrt{5}+3$.

3) Найти все положительные значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases}(|x|-4)^2+(|y|-4)^2=4,\\ (x+1)^2+y^2=a^2\end{cases}$ имеет единственное решение.

Ответ: 2 и $\sqrt{41}+3$.

4) Найти все положительные значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases}(|x|-4)^2+(|y|-4)^2=9,\\ (x-1)^2+y^2=a^2\end{cases}$ имеет единственное решение.

Ответ: 3 и $\sqrt{41}+2$.

5) Найти все положительные значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases}(|x|-9)^2+(|y|-5)^2=9,\\ (x+3)^2+y^2=a^2\end{cases}$ имеет единственное решение.

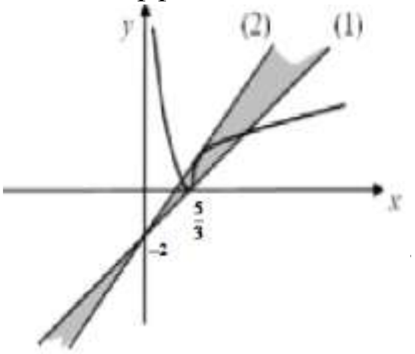
Ответ: 16 и $\sqrt{61}-3$.

Задача №19. Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{5}{x}-3\right|=ax-2$ на промежутке (0;+∞) имеет более двух корней.

Решение. (1 способ – графический)

Найдем все значения параметра *a*, при каждом из которых прямая $g(x,a)=ax-2$ имеет более двух общих точек с той частью графика функции $f(x)=\left|\frac{5}{x}-3\right|$, которая расположена в правой полуплоскости (x>0). Последний график представляет собой правую ветку гиперболы $y=\frac{5}{x}$, которую а) сместили на 3 единицы вниз, б) ту часть графика, которая расположена ниже оси Ox зеркально отразили относительно оси абсцисс в верхнюю полуплоскость. Заметим так же, что прямая $g(x,a)=ax-2$ проходит через точку (0; –2) при любом значении параметра a, который является угловым коэффициентом.

Видим, что условию задачи отвечают все прямые, расположенные внутри заштрихованной области.



Значение параметра, соответствующее границе (1), находим из уравнения $0=\frac{5}{3}a-2$, $a=\frac{6}{5}$. Значение параметра, соответствующее границе (2), находим из условия касания прямой $y=ax-2$ и графика функции $y=3-\dfrac{5}{x}$ (отраженной части гиперболы). Уравнение $ax-2=3-\dfrac{5}{x}$ должно иметь один корень. После преобразований получаем квадратное уравнение $ax^2-5x+5=0$ (очевидно, что a>0), дискриминант которого приравниваем к нулю: $D=25-20a=0$, $a=\dfrac{5}{4}$. Условию удовлетворяют все $a\in\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{5}{4}\right)$.

Ответ: $a\in\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{5}{4}\right)$.

Решение. (2 способ – с помощью производной)

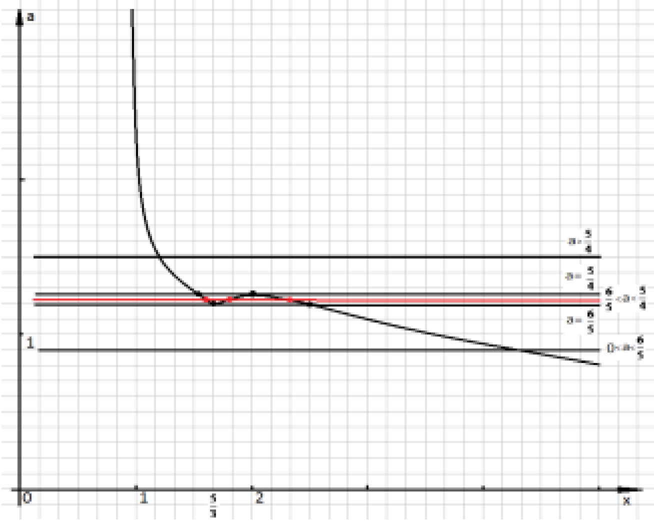
Из уравнения $\left|\dfrac{5}{x}-3\right|=ax-2$ выразим параметр *a* через переменную x: $a=\dfrac{\left|\frac{5}{x}-3\right|+2}{x}$. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\left|\frac{5}{x}-3\right|+2}{x}=\begin{cases}\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{1}{x}, & \text{если } 0<x\le\dfrac{5}{3};\\ \dfrac{5}{x}-\dfrac{5}{x^2}, & \text{если } x\ge\dfrac{5}{3}\end{cases}$ на промежутке (0;+∞). Так как $\dfrac{5}{(5/3)^2}-\dfrac{1}{5/3}=\dfrac{5}{5/3}-\dfrac{5}{(5/3)^2}$, то функция f(x) непрерывна на промежутке (0;+∞). Найдем производную: $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x-10}{x^3}, & \text{если } 0<x<\dfrac{5}{3};\\ \dfrac{10-5x}{x^3}, & \text{если } x>\dfrac{5}{3}\end{cases}$ Так как $\dfrac{5/3-10}{(5/3)^3}\neq\dfrac{10-5\cdot5/3}{(5/3)^3}$, то $f'(x)$ не существует при x=$\dfrac{5}{3}$.

$0<x<\frac{5}{3}$	$x=\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}<x<2$	x=2	x>2
$f'(x)<0$	$f'(x)$ – не существует	$f'(x)>$	$f'(x)=0$	$f'(x)<0$

$f\left(\dfrac{5}{3}\right)=\dfrac{6}{5}$, $f(2)=\dfrac{5}{4}$.

Рисуем эскиз графика f(x) в системе координат Оха и проводим прямые a=const.

Определяем значения параметра, при которых прямые пересекают график функции в трёх точках.



Ответ: $a\in\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{5}{4}\right)$.

Задания для самостоятельной работы:

1) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{5}{x}-4\right|=ax-2$ на промежутке (0;+∞) имеет ровно один корень.

Ответ: $a\in\left(0;\frac{8}{5}\right)\cup\left(\frac{9}{5};+\infty\right)$.

2) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{6}{x}-5\right|=ax-1$ на промежутке (0;+∞) имеет ровно один корень.

Ответ: $a\in\left(0;\frac{5}{6}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

3) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{6}{x}-3\right|=ax-1$ на промежутке (0;+∞) имеет ровно один корень.

Ответ: $a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$.

4) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{5}{x}-3\right|=ax-1$ на промежутке (0;+∞) имеет более двух корней.

Ответ: $a\in\left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$.

5) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{4}{x}-1\right|=ax-2$ на промежутке (0;+∞) имеет более двух корней.

Ответ: $a\in\left(\frac{1}{2};\frac{9}{16}\right)$.

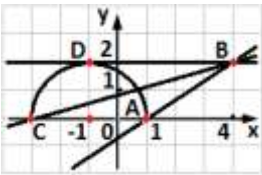
Задача №20. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $ax+\sqrt{3-2x-x^2}=4a+2$ имеет единственный корень.

Решение. (1 способ – графический)

$\sqrt{3-2x-x^2}=4a-ax+2$; $\sqrt{4-(1+2x+x^2)}=-a(x-4)+2$; $\sqrt{4-(1+x)^2}=-a(x-4a)+2$.

$$\begin{cases} y=-a(x-4)+2, \\ y=\sqrt{4-(1+x)^2}. \end{cases}$$

График функции $y=-a(x-4)+2$ семейство прямых, имеющих различный наклон и общую точку (4;2). График функции $y=\sqrt{4-(1+x)^2}$ полуокружность с центром (-1;0) и радиусом 2.



Мы видим, что прямые, заключенные между прямыми AB и CB имеют с полуокружностью одну общую точку. Прямые AB и DB имеют одну общую точку, а прямая CB – две. Найдём коэффициенты наклона этих прямых: коэффициент наклона AB равен 2/3; коэффициент наклона CB равен 2/7; коэффициент наклона DB равен нулю.

Итак, мы получили: $\frac{2}{7}<-a\le\frac{2}{3}$ и –a=0.

Ответ: $-\frac{2}{3}\le a<-\frac{2}{7}$ и a=0.

Решение. (2 способ – с помощью производной)

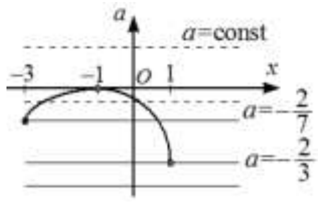
Так как $ax+\sqrt{3-2x-x^2}=4a+2 \Leftrightarrow \sqrt{3-2x-x^2}-2=a(4-x)$ и при $x=4$ подкоренное выражение отрицательно $3-2\cdot 4-4^2<0$, то можно записать $a=\dfrac{\sqrt{3-2x-x^2}-2}{4-x}$.

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{\sqrt{3-2x-x^2}-2}{4-x}$, $D(f)=[-3;1]$. Функция непрерывна на $D(f)$.

Найдем её производную $f'(x)=\dfrac{-1-5x-2\sqrt{3-2x-x^2}}{2\sqrt{3-2x-x^2}\cdot(4-x)^2}$.

Из уравнения $-1-5x-2\sqrt{3-2x-x^2}=0$ получаем $x=-1$.

$-3<x<-1$	$x=-1$	$-1<x<1$
$f'(x)>0$	$f'(x)=0$	$f'(x)<0$



$$f(-3)=-\frac{2}{7},\ f(-1)=0,\ f(1)=-\frac{2}{3}.$$

Рисуем эскиз графика в системе координат Oxa и проводим прямые a=const. Определяем значения параметра, при которых эти прямые пересекают график функции f(x) в одной точке.

Ответ: $a\in\left[-\frac{2}{3};-\frac{2}{7}\right)\cup\{0\}$.

Задания для самостоятельной работы:

1) Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение $ax+\sqrt{-7-8x-x^2}=2a+3$ имеет единственный корень.
Ответ: $a\in\left[-1;-\frac{1}{3}\right)\cup\{0\}$.

2) Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение $ax+\sqrt{-8-6x-x^2}=2a+1$ имеет единственный корень.
Ответ: $a\in\left[-\frac{1}{4};-\frac{1}{6}\right)\cup\{0\}$.

3) Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение $ax+\sqrt{-3-4x-x^2}=3a+1$ имеет единственный корень.
Ответ: $a\in\left[-\frac{1}{4};-\frac{1}{6}\right)\cup\{0\}$.

4) Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение $ax+\sqrt{-5-6x-x^2}=5a+2$ имеет единственный корень.
Ответ: $a\in\left[-\frac{1}{3};-\frac{1}{5}\right)\cup\{0\}$.

5) Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение $ax+\sqrt{3+2x-x^2}=4a+2$ имеет единственный корень.
Ответ: $a\in\left[-2;-\frac{2}{5}\right)\cup\{0\}$.

Решений задач с параметрами при изучении графиков функций.

На начальном этапе обучения (8-9 класс) графическому методу решения уравнений с параметром в качестве семейства функций вида $y_a(x)=g(x,a)$ используются линейные функции:

$y_a(x)=a$ - семейство прямых, параллельных оси абсцисс;

$y_a(x)=\pm x+a$ - семейство прямых, параллельных прямой $y=\pm x$;

$y_a(x)=ax$ - семейство прямых («пучок»), проходящих через начало координат;

$y_a(x) = ax + y_0$ - семейство прямых («пучок»), проходящих через точку (0;y_0);

$y_a(x) = a(x - x_0)$ - семейство прямых («пучок»), проходящих через точку (x_0;0).

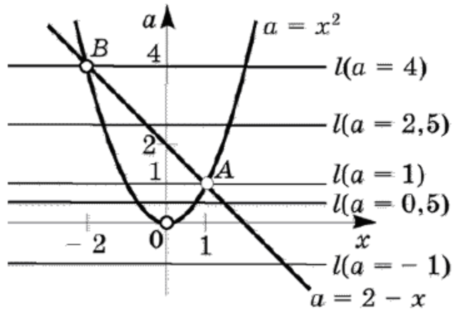
$y_a(x) = a(x - x_0) + y_0$ - семейство прямых («пучок»), проходящих через точку (x_0;y_0).

Как известно, число решений уравнения $f(x) = g(x)$ совпадает с количеством точек пересечения графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, построенных в одной системе координат.

Пример 8. Для всех действительных значений параметра a найдите число различных корней уравнения $(a - x^2)(a + x - 2) = 0$.

Решение. Исходное уравнение равносильно совокупности $a - x^2 = 0$ или $a + x - 2 = 0$. Поэтому построение искомого множества точек – графика уравнения – сводится к построению графиков $a = x^2$ и $a = 2 - x$.

Координаты точек пересечения графиков определяются как решение системы уравнений $\begin{cases} a = x^2, \\ a = 2 - x, \end{cases}$ решив которую находим координаты ***A(1;1)*** и ***B(–2;4)***.



Понятно, что все точки параболы и прямой (и только они) имеют координаты ***(x;a)***, удовлетворяющие исходному уравнению. Поэтому количество различных корней уравнения по переменной ***x*** при каждом значении параметра ***a=a₀*** совпадает с количеством точек пересечения прямой ***l***, задаваемой равенством ***a=a₀***, с построенным множеством точек.

Таким образом, уравнение $(a - x^2)(a + x - 2) = 0$ имеет следующее количество корней:

- один корень при ***a***<0;
- два корня при ***a***=0, ***a***=1 и ***a***=4;
- три корня при 0<***a***<1, 1<***a***<4 и ***a***>4.

Ответ: один корень при ***a***<0;
два корня при ***a***=0, ***a***=1 и ***a***=4;
три корня при 0<***a***<1, 1<***a***<4 и ***a***>4.

Пример 9. При каких значениях параметра k уравнение $\frac{x+10}{x+6} = k - x$ имеет только два решения.

Решение. Пусть $y(x) = \frac{x+10}{x+6} = 1 + \frac{4}{x+6}$ и $g(x) = k - x$.

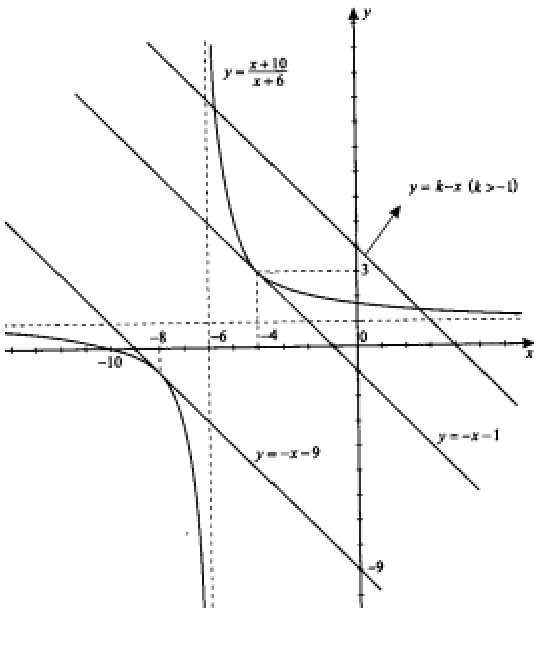


График $y(x)$ – гипербола; график $g(x)$ – прямая.

Преобразуем исходное уравнение:

$x + 10 = -x^2 - 6x + 6k + kx;$

$x^2 - (k - 7)x + 10 - 6k = 0.$

Решение будет единственным, если прямая касается гиперболы, то есть ***D=0***.

$D = (k - 7)^2 - 40 + 24k = k^2 + 10k + 9 = 0$; $k_1 = -1$ и $k_2 = -9$.

Так как ***D=0***, то $x_1 = x_2 = \frac{k-7}{2}$.

При $k_1 = -1$ и $k_2 = -9$ получаем $x_1 = -4$ и $x_2 = -8$ (точки касания).

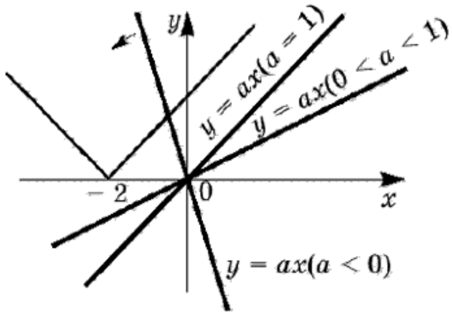
Таким образом, уравнение $\dfrac{x+10}{x+6} = k - x$ имеет следующее количество корней:

- один корень при $k = -1$ и $k = -9$;
- два корня при $-1<\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{k}<-9$;
- нет корней при $-9<\boldsymbol{k}<-1$.

Ответ: при $k \in (-\infty;-9) \cup (-1;+\infty)$.

Пример 10. При каких значениях параметра a уравнение $|x+2| = ax$ не имеет решений?

Решение. Рассмотрим графики функций $y = |x+2|$ и $y=ax$. График первой функции не зависит от параметра a; график второй функции (правой части уравнения) принадлежит семейству прямых, проходящих через начало координат. Поэтому искомые значения параметра a соответствуют тем прямым из указанного семейства, которые не пересекают график функции $y = |x+2|$.



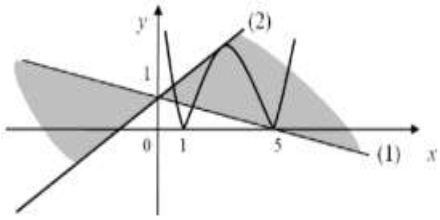
При изменении параметра a прямая $y=ax$ поворачивается, начиная от «вертикального» положения «слева» от оси координат, против часовой стрелки вокруг начала координат. Очевидно, что при $a \le 0$ прямая $y=ax$ пересекает, по крайней мере, один раз «неподвижный» график $y = |x+2|$; при дальнейшем возрастании параметра a до момента $a = 1$ прямая не имеет общих точек с «неподвижным» графиком; при $a>1$ у графиков снова появляется общая точка. Поэтому исходное уравнение не имеет решений при $0<\boldsymbol{a}<1$.

Ответ: при $a \in (0;1)$.

Пример 11. Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение $|x^2-6x+5|=ax+1$ имеет ровно 4 корня.

Решение. Переформулируем задачу на графическом языке: нужно найти все значения параметра *а*, при которых прямая $y=ax+1$, проходящая через точку ***(0;1)*** имеет четыре общих точки с графиком функции $y = |x^2-6x+5| = \begin{cases} x^2-6x+5, & при \quad x \in (-\infty;1] \cup [5;+\infty) \\ -(x^2-6x+5), & при \quad x \in (1;5) \end{cases}$.

По графику видим, что условию задачи удовлетворяют все прямые, расположенные внутри заштрихованной области. Найдем граничные значения параметра, соответствующие прямым (1) и (2).



(1) прямая $y=ax+1$ проходит через точку ***(5;0)***:

$0 = 5a+1, \quad a = -0{,}2$.

(2) прямая $y=ax+1$ касается параболы $y = -(x^2-6x+5)$.

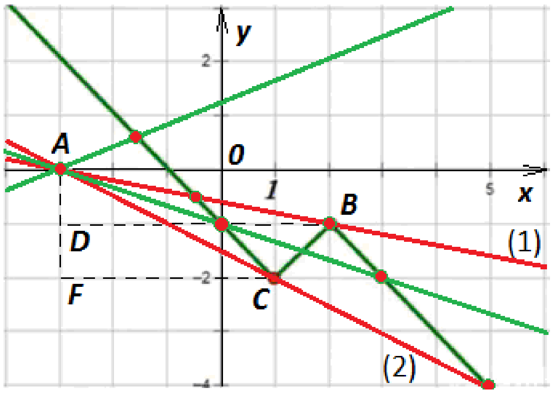
Следовательно, уравнение $-x^2+6x-5=ax+1$ должно иметь ровно один корень.

$x^2 + (a-6)x + 6 = 0$, $D=(a-6)^2-24=0$. Решая уравнение $(a-6)^2-24=0$, находим $a = 6 \pm 2\sqrt{6}$. Очевидно, что прямой (2) соответствует угловой коэффициент $a = 6+2\sqrt{6}$.

Ответ: при $-0{,}2< a < 6+2\sqrt{6}$.

Пример 12. Найдите все значения параметра а, при которых уравнение $|x-1|-|x-2|-x=a(x+3)$ имеет не менее двух решений.

Решение. Рассмотрим графики функций $y=|x-1|-|x-2|-x=\begin{cases}-x-1, & при\ \ x\le 1\\ x-3, & при\ \ 1\le x\le 2\\ -x+1, & при\ \ x\ge 2\end{cases}$ и $y=a(x+3)$. График первой функции не зависит от параметра a; график второй функции (правой части уравнения) принадлежит семейству прямых, проходящих через точку $A(-3;0)$. Поэтому искомые значения параметра a соответствуют прямым из указанного семейства, которые имеют две общие точки с графиком функции $y=|x-1|-|x-2|-x$.



По графику видим, что условию задачи удовлетворяют все прямые, расположенные внутри области между прямыми AB и AC. Найдем граничные значения параметра, соответствующие прямым (1) и (2).

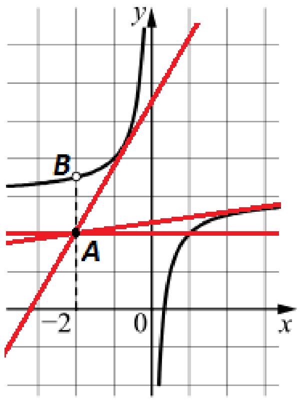
(1): из ABD находим $a=-\dfrac{AD}{BD}=-\dfrac{1}{5}=-0{,}2$;

(1): из ACF находим $a=-\dfrac{AF}{CF}=-\dfrac{2}{4}=-0{,}5$.

Ответ: при $-0{,}5\le a\le -0{,}2$.

Пример 13. Найдите все значения параметра а, при которых система уравнений $\begin{cases}y=3-\dfrac{x+2}{x^2+2x},\\ ax-y+2a=-2\end{cases}$ ***имеет единственное решение.***

Решение. Преобразуем уравнения системы: $y=3-\dfrac{x+2}{x^2+2x}=3-\dfrac{1}{x}$, $x\ne -2$ и $ax-y+2a=-2$, $y=ax+2a+2=a(x+2)+2$. График первого уравнения – гипербола с выколотой точкой $B(-2;3{,}5)$, второго – семейство прямых, проходящих через точку $A(-2;2)$. Переформулируем задачу на графическом языке: нужно найти все значения параметра ***a***, при которых прямая имеет только одну общую точку с гиперболой. Строим графики уравнений.



Очевидно, что единственное решение возможно тогда и только тогда, когда прямая $y=a(x+2)+2$ параллельна оси абсцисс ($a=0$) или в случае касания прямой и гиперболы ($D=0$).

Рассмотрим случай касания: $3-\dfrac{1}{x}=a(x+2)+2$, $1-\dfrac{1}{x}=ax+2a$,

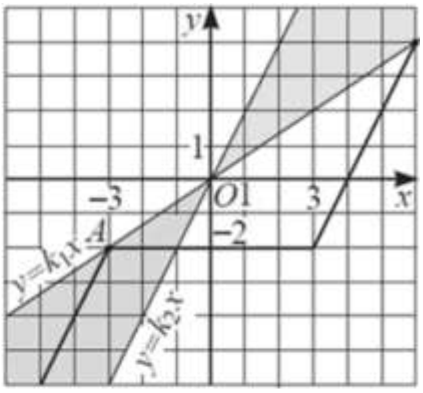
$x-1=ax^2+2ax$, $ax^2+x(2a-1)+1=0$, $D=(2a-1)^2-4a=4a^2-8a+1=0$, $D_1=16-4=12$,

$a_{1,2}=\dfrac{4\pm 2\sqrt{3}}{4}=1\pm 0{,}5\sqrt{3}$.

Ответ: $a=0$ и $a_{1,2}=1\pm 0{,}5\sqrt{3}$.

Реальные задания ЕГЭ и ОГЭ

2008 год (№ 21). Найдите все значения k, при которых прямая $y=kx$ пересекает в трех различных точках ломаную, заданную условием: $y=\begin{cases}2x+4, & \text{если } x\le -3,\\ -2, & \text{если } -3\le x\le 3,\\ 2x-8, & \text{если } x\ge 3.\end{cases}$

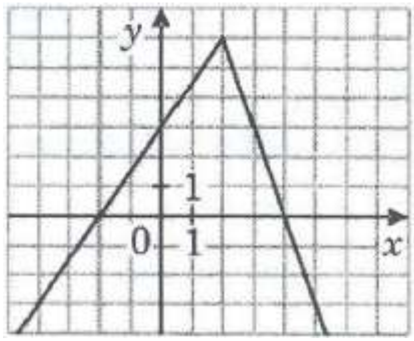


Решение. Построим заданную ломаную. Все прямые, заданные уравнением $y=kx$, проходят через начало координат и будут пересекать ломаную в трех различных точках, если их угловой коэффициент больше углового коэффициента прямой $y=k_1x$, проходящей через точку $A(-3;-2)$, и меньше углового коэффициента прямой $y=k_2x$, параллельной прямым $y=2x+4$ и $y=2x-8$.

Коэффициент k_1 найдем, подставив в уравнение прямой $y=k_1x$ координаты точки $A(-3;-2)$: $-2=-3k_1$, $k_1=\frac{2}{3}$. Так как прямые $y=k_2x$ и $y=2x+4$ параллельны, то $k_2=2$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют прямые $y=kx$ при $\frac{2}{3}<k<2$.

Ответ: $\frac{2}{3}<k<2$.

2009 год. (№ 21). Задайте аналитически (т.е. с помощью формул) функцию, график которой изображен на рисунке.



Решение.

1) Составим уравнение прямой, проходящей через точки (0;3) и (–2;0). Найдем коэффициенты k и b в уравнении $y=kx+b$. Так как при x=0, y=3, то b=3. Подставим в уравнение $y=kx+3$ координаты x = –2, y=0, получим: $0=-2k+3$, $k=1{,}5$. Значит, при $x\le 2$ функция задается формулой $y=1{,}5x+3$.

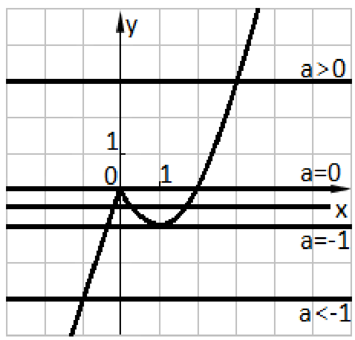
2) Составим уравнение прямой, проходящей через точки (2;6) и (4;0). Имеем систему уравнений $\begin{cases}6=2k+b\\ 0=4k+b\end{cases}$. Отсюда: $k=-3$, $b=12$. Значит, при $x\ge 2$ функция задается формулой $y=-3x+12$.

Таким образом, $y=\begin{cases}1{,}5x+3, & \text{если } x\le 2,\\ -3x+12, & \text{если } x\ge 2.\end{cases}$

Ответ: $y=\begin{cases}1{,}5x+3, & \text{если } x\le 2,\\ -3x+12, & \text{если } x\ge 2.\end{cases}$

2010 год. (№ 21). При каких значениях a прямая $y=a$ имеет одну общую точку с графиком функции $y=f(x)$, где $f(x)=\begin{cases}x(x-2), & \text{если } x\ge 0;\\ x(2-x), & \text{если } x\prec 0?\end{cases}$

Решение. Построим график данной функции: $y=x(x-2)$ – парабола, ветви которой направлены вверх и координаты вершины (1;–1); $y=x(2-x)$ – парабола, ветви которой направлены вниз и координаты вершины (1;–1).



Проводим прямые параллельные оси x. Очевидно, что прямая и график функции имеют одну общую точку при a>0 и a<–1.

Ответ: $a \in (-\infty;-1) \cup (0;+\infty)$

2011 год. (№ С14). При каких значениях p ***вершины парабол*** $y = x^2 - 2px - 1$ ***и*** $y = -x^2 + 4px + p$ ***расположены по разные стороны оси x?***

Решение. Найдем ординату вершины каждой параболы:

1) $y = x^2 - 2px - 1 = (x - p)^2 - p^2 - 1$; $y_0 = -p^2 - 1 < 0$ (при любых значениях ***p*** вершина ниже оси ***x***);

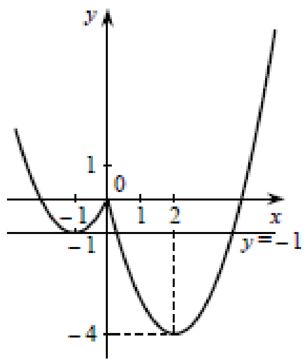
2) $y = -x^2 + 4px + p = -(x - 2p)^2 + 4p^2 + p$; $y_0 = 4p^2 + p > 0$ (условие задачи – по разные стороны оси ***x***, то есть выше оси ***x***); ***p***<–0,25 и ***p***>0.

Ответ: $p \in (-\infty;-0{,}25) \cup (0;+\infty)$.

2012 год. (№ С7). Постройте график функции $y = x^2 - 3|x| - x$ ***и определите, при каких значениях с прямая*** $y = c$ ***имеет с графиком ровно три общие точки.***

Решение.

$$y = x^2 - 3|x| - x = \begin{cases} x^2 - 4x, & x \geq 0; \\ x^2 + 2x, & x \prec 0. \end{cases}$$



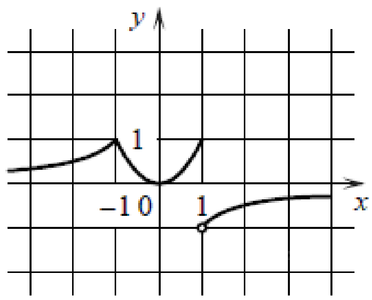
Построим график данной функции: $y = x^2 - 4x$ – парабола, ветви которой направлены вверх и координаты вершины (2;–4); $y = x^2 + 2x$ – парабола, ветви которой направлены вверх и координаты вершины (–1; –1).

Проводим прямые параллельные оси x. Очевидно, что прямая и график функции имеют три общие точки при $c = 0$ и $c = -1$.

Ответ: при $c = 0$ и $c = -1$.

2013 год

I. (№ С6). Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } |x| \leq 1, \\ -\dfrac{1}{x}, & \text{если } |x| \succ 1 \end{cases}$ ***и определите, при каких значениях с прямая*** $y = c$ ***будет иметь с графиком единственную общую точку.***

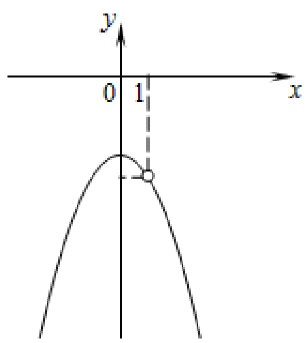


Решение. Построим график данной функции: $y = x^2$ – парабола, ветви которой направлены вверх и координаты вершины (0;0); $y = -\dfrac{1}{x}$ – гипербола, ветви которой расположены во II и IV четвертях.

Проводим прямые параллельные оси x. Очевидно, что прямая и график функции будет иметь единственную общую точку при $-1 < c \leq 0$.

Ответ: при $-1 < c \leq 0$.

II. (№ С6) Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2 + 2{,}25)(x - 1)}{1 - x}$ ***и определите, при каких значениях k прямая*** $y = kx$ ***будет иметь с графиком ровно одну общую точку.***



Решение. При $x \neq 1$ имеем: $y = \dfrac{(x^2 + 2{,}25)(x - 1)}{1 - x} = -x^2 - 2{,}25$.

Поэтому график заданной функции представляет собой параболу, с выколотой точкой (1;–3,25).

Чтобы прямая $y=kx$ имела с построенным графиком одну общую точку, нужно чтобы или прямая касалась параболы или пересекала параболу в точке с абсциссой 1 и какой – то второй точке.

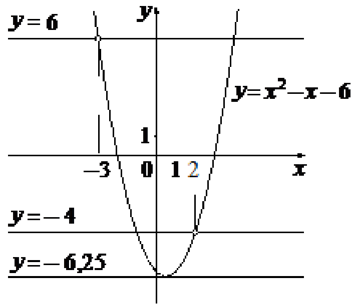
Случай касания реализуется когда дискриминант квадратного уравнения $-x^2-2{,}25=kx$ равен нулю. $D=k^2-9=0$, отсюда $k=\pm3$. При $k=-3$ точка касания $x=1{,}5$, а при $k=3$ точка касания $x=-1{,}5$.

Для рассмотрения второго случая подставим $x=1$ в уравнение $-x^2-2{,}25=kx$, получим $k=-3{,}25$. При этом D>0, значит ещё одно решение точно есть.

Ответ: –3,25; –3; 3.

2014 год

I. (№ 23) Постройте график функции $y=\dfrac{x^4-13x^2+36}{(x+3)(x-2)}$ ***и определите, при каких значениях с прямая*** $y=c$ ***будет иметь с графиком ровно одну общую точку.***



Решение.Разложим числитель на множители:

$x^4-13x^2+36=(x^2-4)(x^2-9)=(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$.

При $x\neq-3$, $x\neq2$ исходная функция принимает вид: $y=(x+2)(x-3)$, её график – парабола, из которой выколоты точки (–3;6) и (2;–4).

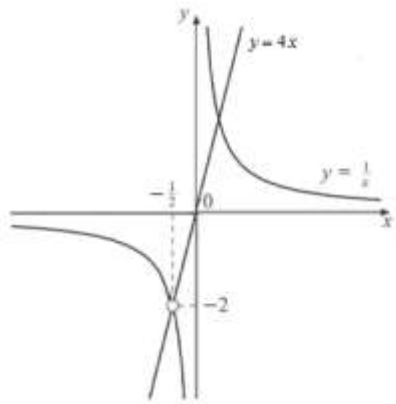
Прямая $y=c$ имеет с графиком ровно одну общую точку либо тогда, когда проходит через вершину параболы, либо тогда, когда пересекает параболу в двух точках, одна из которых – выколотая. Вершина параболы имеет координаты (0,5; –6,25).

Поэтому ***c*** = –6,25; ***c*** = –4 или ***c*** = 6.

Ответ: –6,25; –4; 6.

II. (№ 23) Постройте график функции $y=\dfrac{2x+1}{2x^2+x}$ ***и определите, при каких значениях k прямая*** $y=kx$ ***будет иметь с графиком ровно одну общую точку.***

Решение.При $x\neq0{,}5$ имеем: $y=\dfrac{2x+1}{2x^2+x}=\dfrac{2x+1}{x(2x+1)}=\dfrac{1}{x}$.



Поэтому график заданной функции представляет собой гиперболу, с выколотой точкой (–0,5;–2).

Прямая $y=kx$ будет иметь с графиком одну общую точку, если пройдет через выколотую точку. Тогда $k=\dfrac{-2}{-0{,}5}=4$, и уравнение прямой примет вид: $y=4x$.

Ответ: при ***k*** = 4.

Задания для самостоятельной работы:

Задания ЕГЭ – 2003

1. Найдите все значения р,при которых уравнение $\cos2x+\dfrac{p}{\sin x}=-7$ ***имеет решения?***

Ответ: $-6\le a<0$; $0<a\le6$.

2. Найдите все значения параметра р, при которых уравнение $4\cos^3x+p=7\cos2x$ ***не имеет корней?***

Ответ: $-\infty < p < -7;\ 11 < p < +\infty.$

Задания ЕГЭ – 2007

1. Найдите все значения параметра а, для которых при каждом х из промежутка $[1;2)$ значение выражения $4^x - 2\cdot 2^x - 6$ не равно значению выражения $a\cdot 2^x$.

Ответ: $-\infty < a < -3;\ \frac{1}{2} \le a < +\infty.$

2. Найдите все значения параметра а, для которых при каждом х из промежутка $(-3;-1]$ значение выражения $x^4 - 8x^2 - 2$ не равно значению выражения ax^2.

Ответ: $-\infty < a < -9;\ \frac{7}{9} \le a < +\infty.$

3. Найдите все значения параметра а, для которых при каждом х из промежутка $(4;8)$ значение выражения $\log_2^2 x - 8$ не равно значению выражения $(2a-1)\log_2 x$.

Ответ: $-\infty < a < -\frac{1}{2};\ \frac{2}{3} < a < +\infty.$

Задания ЕГЭ – 2010

1. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4ax + |x^2 - 8x + 7|$ меньше 1.

Ответ: $a < \frac{1}{4};\ a > \frac{4+\sqrt{6}}{2}.$

2. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - |x - a^2| - 9x$ имеет более двух точек экстремума.

Ответ: $-\sqrt{5} < a < -2;\ 2 < a < \sqrt{5}.$

3. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 10x$ имеет хотя бы одну точку максимума.

Ответ: $-\sqrt{6} < a < -2;\ 2 < a < \sqrt{6}.$

Задания ЕГЭ – 2011

1. Найдите все положительные значения параметра а, при каждом из которых система

$\begin{cases} (|x|-5)^2 + (y-4)^2 = 4, \\ (x-2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ ***имеет единственное решение.***

Ответ: $3;\ \sqrt{65}+2.$

2. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система

$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-4)^2 = 9, \\ y = |x-a| + 1 \end{cases}$ ***имеет ровно три различных решения.***

Ответ: $8-3\sqrt{2};\ 5;\ 2+3\sqrt{2}.$

3. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система

$\begin{cases} (|x|-4)^2 + (|y|-4)^2 = 4, \\ y = ax + 1, \\ xy > 0 \end{cases}$ ***имеет единственное решение.***

Ответ: $\frac{6-\sqrt{21}}{6};\ \frac{10+\sqrt{37}}{6}.$

Задания ЕГЭ – 2012

1. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение на промежутке $(0;+\infty)$ $\left|\frac{5}{x}-3\right| = ax-2$ ***имеет более двух корней.***

Ответ: $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$.

2. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение на промежутке $[0;+\infty)$ $\frac{2}{x+1} = a|x-3|$ ***имеет более двух корней.***

Ответ: $\frac{1}{2} < a \le \frac{2}{3}$.

3. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\sqrt{1-2x} = a-7|x|$ ***имеет более двух корней.***

Ответ: $\frac{7}{2} \le a < \frac{25}{7}$.

Задания ЕГЭ – 2013

1. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\log_{1-x}(a-x+2)=2$ ***имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку*** $[-1;1)$.

Ответ: $-\frac{5}{4} \le a < -1$; $-1 < a \le 1$.

2. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $\log_{x+1}(x+5-a)=2$ ***имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку*** $(-1;2]$.

Ответ: $(-2;4)\cup(4;4{,}25]$.

3. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $(4\cos x-3-a)\cos x-2{,}5\cos 2x+1{,}5=0$ ***имеет хотя бы один корень.***

Ответ: $-\infty < a \le -6$; $0 \le a < +\infty$.

4. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $ax+\sqrt{3-2x-x^2}=4a+2$ ***имеет единственный корень.***

Ответ: $-\frac{2}{3} \le a < -\frac{2}{7}$; $a=0$.

5. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $x^2+(a+7)^2=|x-7-a|+|x+a+7|$ ***имеет единственный корень.***

Ответ: $a=-9$; $a=-5$.

6. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $8a+\sqrt{7+6x-x^2}=ax+4$ ***имеет единственный корень.***

Ответ: $\{0\}\cup\left(\frac{4}{9};4\right]$.

7. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $x^2-|x+a+3|=|x-a-3|-(a+3)^2$ ***имеет единственный корень.***

Ответ: $a=-5$; $a=-1$.

Задания ЕГЭ – 2015

1. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2-xy-7y+4x+12)\sqrt{x+4}}{\sqrt{7-y}}=0 \\ a=x+y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a\le -5$; $a=5$; $a\ge 11$.

2. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y(y-7)=xy-5(x+2), \\ x\le 6, \\ \dfrac{a(x-6)-2}{y-2}=1 \end{cases}$$ ***имеет единственное решение.***

Ответ: $a=-\dfrac{5}{3};\ a=-\dfrac{1}{3};\ 0\le a<1.$

3. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x-2y-2=\left|x^2+y^2-1\right|, \\ y=a(x-1) \end{cases}$$ ***имеет более двух решений.***

Ответ: $1<a<2.$

4. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (y^2-xy+x-3y+2)\sqrt{x+3}=0, \\ a-x-y=0 \end{cases}$$ ***имеет ровно два различных решения.***

Ответ: $-4<a\le-2;\ a=0.$

5. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \left|x^2-2x\right|-x^2=\left|y^2-2y\right|-y^2, \\ x+y=a \end{cases}$$ ***имеет более двух решений.***

Ответ: $0<a\le 1.$

6. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+2x+y^2+4y=4\left|2x-y\right|, \\ x+2y=a \end{cases}$$ ***имеет более двух решений.***

Ответ: $-5\sqrt{5}-5<a\le-10;\ 0\le a<5\sqrt{5}-5.$

7. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2-xy+3x-y-6)\sqrt{x+4}}{\sqrt{4-x}}=0 \\ x+y+a=0 \end{cases}$$ ***имеет ровно два различных решения.***

Ответ: $-7<a\le-6;\ 1\le a<10.$

8. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2-xy-5y+x+4)\sqrt{x+2}}{\sqrt{4-y}}=0 \\ a=x+y-2 \end{cases}$$ ***имеет хотя бы два решения.***

Ответ: $-3<a<2.$

9. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y(y-5)=xy-4(x+1), \\ x\le 5, \\ \dfrac{a(x-5)-1}{y-1}=1 \end{cases}$$ ***имеет единственное решение.***

Ответ: $a=-2;\ a=-0{,}2;\ 0\le a<1.$

Задания ЕГЭ - 2016

1. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2-3xy-3y+9}{\sqrt{x+3}}=0, \\ y=ax \end{cases}$$ ***имеет ровно два различных решения.***

Ответ: $0 < a \le \frac{1}{3};\ a = 3.$

2. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x(x^2+y^2-y-2)=|x|(y-2), \\ y=x+a \end{cases}$$ ***имеет ровно три различных решения.***

Ответ: $a = 1-\sqrt{2};\ 0 \le a < 2;\ 2 < a < 2\sqrt{2}.$

3. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{xy^2-3xy-3y+9}{\sqrt{x+3}}=0, \\ y=ax \end{cases}$$ ***имеет ровно три различных решения.***

Ответ: $a = \frac{1}{6};\ a \ge \frac{2}{3}.$

4. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x(x^2+y^2+y-x-2)=|x|(x^2+y^2-y+x), \\ y=a(x+2) \end{cases}$$ ***имеет ровно три различных решения.***

Ответ: $-\frac{\sqrt{3}}{3} < a < -\frac{1}{2};\ a = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

5. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (x-3)(y+3x-9)=|x-3|^3, \\ y=x+a \end{cases}$$ ***имеет ровно четыре различных решения.***

Ответ: $-7 < a < -3;\ -3 < a < 1.$

6. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение

$\sqrt{x^4-x^2+a^2} = x^2+x-a$ ***имеет ровно три различных корня.***

Ответ: $a < -1;\ -1 < a < 0.$

7. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение

$2^x - a = \sqrt{4^x - a}$ ***имеет единственный корень.***

Ответ: $-1 < a < 0;\ 0 < a \le 1.$

8. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение

$\sqrt{x} + \sqrt{2a-x} = a$ ***имеет ровно два различных корня.***

Ответ: $2 \le a < 4.$

9. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение

$\frac{x^3+x^2-9a^2x-2x+a}{x^3-9a^2x}=1$ ***имеет ровно один корень.***

Ответ: $\{-7/9; 0; 1; 5/9\}.$

10. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение

$\sqrt{2^x-a}+\frac{a-2}{\sqrt{2^x-a}}=1$ ***имеет ровно два различных корня.***

Ответ: $2 < a < \frac{9}{4}.$

Задания ЕГЭ - 2017

1. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax \ge 2, \\ \sqrt{x-1} > a, \\ 3x \le 2a+11 \end{cases}$$ ***имеет хотя бы одно решение на отрезке*** $[3;4]$.

Ответ: $\frac{1}{2} \le a < \sqrt{3}.$

2. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система неравенств

$\begin{cases}|x|+|a|<4,\\ x^2+16a\le 8x+48\end{cases}$ ***имеет хотя бы одно решение на отрезке*** $[0;1]$.

Ответ: $-4<a<8\sqrt{2}-8.$

3. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение

$\sqrt{3x-2}\cdot\ln(x-a)=\sqrt{3x-2}\cdot\ln(2x+a)$ ***имеет ровно один корень на отрезке*** $[0;1]$.

Ответ: $-\frac{4}{3}<a<-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}\le a<\frac{2}{3}.$

4. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение

$\sqrt{3-5x}\cdot\ln(4x^2-a^2)=\sqrt{3-5x}\cdot\ln(2x+a)$ ***имеет ровно один корень.***

Ответ: $-\frac{6}{5}<a\le-\frac{1}{2};\frac{1}{5}\le a<\frac{6}{5}.$

5. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение

$\ln(4x-1)\cdot\sqrt{x^2-6x+6a-a^2}=0$ ***имеет ровно один корень на отрезке*** $[0;3]$.

Ответ: $\frac{1}{4}<a\le\frac{1}{2};\ \frac{11}{2}\le a<\frac{23}{4}.$

6. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение

$tg(\pi x)\cdot\ln(x+a)=\ln(x+a)$ ***имеет ровно один корень на отрезке*** $[0;1]$.

Ответ: $-\frac{1}{4}<a<0;\ a=\frac{1}{2};\ a=\frac{3}{4};\ a>1.$

7. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение

$\sqrt{x-a}\cdot\sin x=\sqrt{x-a}\cdot\cos x$ ***имеет ровно один корень на отрезке*** $[0;\pi]$.

Ответ: $a<0;\ \frac{\pi}{4}\le a\le\pi.$

8. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение

$x\cdot\sqrt{x-a}=\sqrt{6x^2-(6a+3)x+3a}$ ***имеет ровно один корень на отрезке*** $[0;1]$.

Ответ: $a<0;\ 3-\sqrt{6}\le a\le 1.$

9. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение

$\frac{(x-a-7)(x+a-2)}{\sqrt{10x-x^2-a^2}}=0$ ***имеет ровно один корень на отрезке*** $[4;8]$.

Ответ: $\frac{-3-\sqrt{41}}{2}<a<-3;\ a=-\frac{5}{2};-2<a\le 1.$

Задания ЕГЭ – 2018

1. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система неравенств

$\begin{cases}((x-1)^2+(y-4)^2)((x-6)^2+(y-4)^2)\le 0,\\ (x-a)^2+(y-2a)^2\le 4a^2\end{cases}$ ***имеет ровно одно решение.***

Ответ: $[1;2]\cup[17;26]$.

2. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система неравенств

$\begin{cases}((x-2)^2+(y-3)^2)((x-8)^2+(y-2)^2)\le 0,\\ (x-2a)^2+(y-a)^2\le 4a^2\end{cases}$ ***имеет ровно одно решение.***

Ответ: $[1;2]\cup[13;34]$.

3. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система

$\begin{cases}y(y+1)\le 0,\\ 3x^2+3y^2-6a(x+y)+5a^2-6x+4a+3=0\end{cases}$ ***имеет единственное решение.***

Ответ: $(0;1)$.

Задания для самостоятельной работы:

1) Постройте график функции $y=\begin{cases}1{,}5x-3, & при\quad x\prec 2,\\ -1{,}5x+3, & при\quad 2\le x\le 3,\\ 3x-10{,}5, & при\quad x\succ 3.\end{cases}$ $\left[\; y=\begin{cases}2{,}5x-1, & при\quad x\prec 1,\\ -2{,}5x+4, & при\quad 1\le x\le 3,\\ 1{,}5x-8, & при\quad x\succ 3.\end{cases}\right]$

Определите при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

2) Постройте график функции $y=\begin{cases}-x+1, & при\quad x\prec -2,\\ -x^2-2x+3, & при\quad x\ge -2.\end{cases}$ $\left[\; y=\begin{cases}x+3, & при\quad x\prec -4,\\ x^2+6x+7, & при\quad x\ge -4.\end{cases}\right]$

Определите при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

3) Постройте график функции $y=\begin{cases}0{,}5x, & при\quad x\prec -1,\\ x^2-2x-3{,}5, & при\quad x\ge -1.\end{cases}$ $\left[\; y=\begin{cases}2{,}5x, & при\quad x\prec 1,\\ x^2-6x+7{,}5, & при\quad x\ge 1.\end{cases}\right]$

Определите при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

4) Постройте график функции $y=-4-\dfrac{x^4-x^3}{x^2-x}$ $\left[y=5-\dfrac{x^4-2x^3}{x^2-2x}\right]$. Определите при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

5) Постройте график функции $y=\dfrac{(x-5)(x^2-6x+8)}{x-2}$ $\left[y=\dfrac{(x^2-3x+2)(x^2+3x+2)}{x^2-x-2}\right]$. Определите при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

6) Постройте график функции $y=|x|(x-1)-2x$ $(y=|x|(x-1)-3x)$. Определите при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

7) Постройте график функции $y=3|x+7|-x^2-13x-42$ $(y=x^2-|4x+3|)$. Определите при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

8) Постройте график функции $y=\begin{cases}x^2-4x, & при\quad x\succ -1,\\ -\dfrac{5}{x}, & при\quad x\le -1.\end{cases}$ $\left[\; y=\begin{cases}-x^2-4x, & при\quad x\prec 1,\\ -\dfrac{5}{x}, & при\quad x\ge 1.\end{cases}\right]$ Определите при каких значениях с прямая $y=c$ будет пересекать построенный график в трёх точках.

9) Постройте график функции $y=\dfrac{9x+1}{9x^2+x}$ $\left[y=\dfrac{x-2}{2x-x^2}\right]$. Определите при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

10) Постройте график функции $y=x^2-5|x|-x$ $(y=-x^2+6|x|+2x)$ и определите, при каких значениях c прямая $y=c$ имеет с графиком ровно три общие точки.

11) При каких отрицательных (положительных) значениях k прямая $y=kx-4$ имеет с параболой $y=x^2+3x$ $(y=x^2-2x)$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки и постройте данные графики в одной системе координат.

12) При каком значении p прямая $y=-x+p$ $(y=2x+p)$ имеет с параболой $y=x^2+3x$ $(y=x^2-2x)$ ровно одну общую точку? Найдите координаты этой точки. Постройте в одной системе координат данную параболу и прямую при найденном значении p.

13) Известно, что графики функции $y=-x^2+p$ $(y=x^2+p)$ и $y=2-2x$ $(y=2x-2)$ имеют ровно одну общую точку. Определите координаты этой точки. Постройте графики заданных функций в одной системе координат.

14) При каких значениях m вершины парабол $y = x^2 - 4mx + m$ ($y = -x^2 - 6mx + m$) и $y = -x^2 + 8mx + 4$ ($y = x^2 - 4mx - 2$) расположены по одну сторону от оси x?

15) Постройте график функции $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)}$ $\left[y = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{(x-1)(x-2)} \right]$. Определите, при каких значениях с прямая $y = c$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

16) Найдите координаты общих точек гиперболы $y = \frac{3}{x}$ $\left[y = -\frac{2}{x} \right]$ и окружность $x^2 + y^2 = R^2$, если известно, что их ровно две.

17) Прямая $x + y = c$, где с – некоторое число, касается гиперболы $y = \frac{4}{x}$ $\left[y = \frac{1}{x} \right]$ в точке с отрицательными координатами. Найдите с.

18) При каких значениях p прямая $y = p$ имеет более одной общей точки с графиком функции $y = f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} -x(x-4), & если\ x \geq 0; \\ x(x+4), & если\ x < 0. \end{cases}$ $\left[f(x) = \begin{cases} x(x+4), & если\ x \geq 0; \\ -x(x+4), & если\ x < 0. \end{cases} \right]$

19) Дана система уравнений: $\begin{cases} 3x + y = 9, \\ x - 3y = -7, \\ x + 2y = p. \end{cases}$ $\left[\begin{cases} x + 3y = 1, \\ 3x - y = 13, \\ x - 2y = p. \end{cases} \right]$ При каком значении p эта система имеет решение?

Функционально – графический метод решения задач с параметрами

Для овладения графическими методами решения задач с параметрами необходимо повторить основные способы построения семейства графиков функций с помощью элементарных преобразований. Обычно в задачах используются функции, графики которых строятся средствами элементарной математики, то есть без использования дифференциального исчисления.

Таблица элементарных преобразований графика функции

Функция	Преобразование графика функции $y = f(x)$
$y = f(x) + A$	Параллельный перенос вдоль оси Oy на A единиц вверх при A>0 и на –A единиц при A<0
$y = f(x - a)$	Параллельный перенос его вдоль оси Ox на a единиц вправо при a>0 и на –a единиц влево при a<0
$y = kf(x)$, k>0	Растяжение его вдоль оси Oy в k раз, если k>1, и сжатие в 1/k раз, если 0<k<1
$y = f(kx)$, k>0	Сжатие его вдоль оси Ox в k раз, если k>1, и растяжение в 1/k раз, если 0<k<1
$y = -f(x)$	Симметричное отражение его относительно оси Ox
$y = f(-x)$	Симметричное отражение его относительно оси Oy
$y = \lvert f(x) \rvert$	Часть графика, расположенная ниже оси Ox, симметрично отражается относительно этой оси, остальная его часть остается без изменения
$y = f(\lvert x \rvert)$	Часть графика, расположенная в области x≥0, остается без изменения, а его часть для области x<0 заменяется симметричным отображением относительно оси Oy части графика для x>0

Часто используемые семейства функций

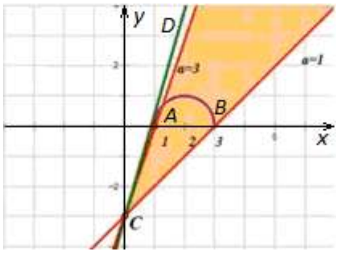
1) «Пучок прямых» - семейство линейных функций $g(x,a)=a(x-x_0)+y_0$, графики которых – прямые, проходящие через точку (x_0,y_0) и имеющие угловой коэффициент, равный a.

2) Семейство «уголков» - семейство функций $g(x,a)=k|x-x_0(a)|+y_0(a)$, графики которых получаются из графика $y=k|x|$ параллельным переносом на вектор $(x_0(a);y_0(a))$.

3) Семейство окружностей $(x-x_0(a))^2+(y-y_0(a))^2=(r(a))^2$ с центром в точке $(x_0(a);y_0(a))$, радиуса $|r(a)|$.

Пример 14. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $ax-3=\sqrt{4x-x^2-3}$ ***имеет единственное решение.***

Решение.



$y=\sqrt{4x-x^2-3}=\sqrt{-x^2+4x-4+1}=\sqrt{1-(x-2)^2}$.

$$\begin{cases} y=ax-3, \\ y=\sqrt{1-(x-2)^2}. \end{cases}$$

График функции $y=ax-3$ семейство прямых, имеющих различный наклон и общую точку $C(0;-3)$. График функции $y=\sqrt{1-(x-2)^2}$ полуокружность с центром $(2;0)$ и радиусом 1.

Мы видим, что прямые, заключенные между прямыми АС и ВС имеют с полуокружностью одну общую точку. Прямые ВС и CD имеют одну общую точку, а прямая АС – две. Найдём коэффициенты наклона этих прямых АС и ВС: коэффициент наклона АС равен 3; коэффициент наклона ВС равен 1.

Так как CD – касательная к графику функции $y=\sqrt{1-(x-2)^2}$, то $(ax-3)^2=4x-x^2-3$, $(a^2+1)x^2-2x(3a+2)+12=0$, $D_1=9a^2+12a+4-12(a^2+1)=-3a^2+12a-8=0$,

$a_1=\frac{6+2\sqrt{3}}{3}>3$; $a_2=\frac{6-2\sqrt{3}}{3}<1$ – не подходит.

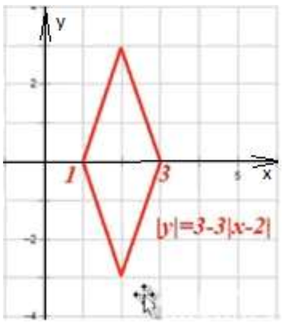
Итак, мы получили: $1\le a<3$ и $a=\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$.

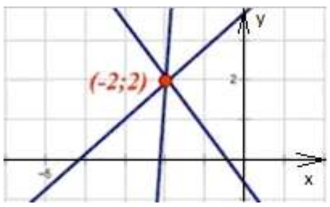
Ответ: $[1;3)\cup\left\{\frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right\}$.

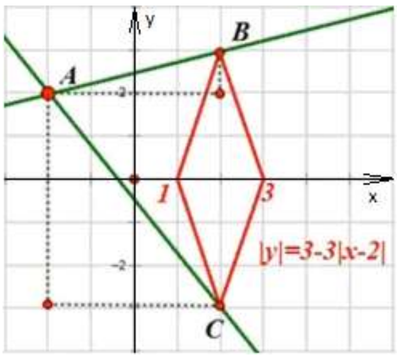
Пример 15. Найдите все значения а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 3|x-2|+|y|-3=0, \\ ax-y+2a+2=0 \end{cases}$ ***имеет единственное решение.***

Решение. Построим график уравнения $|y|=3-3|x-2|$.

Построим график функции $y=ax+2a+2=a(x+2)+2$.







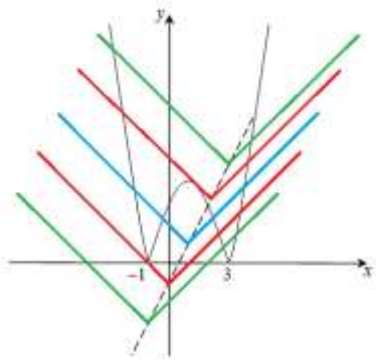
(AB) прямая $y=a(x+2)+2$ проходит через точку $B(2;3)$: $3=4a+2,\quad a=0{,}25$.

(AC) прямая $y = a(x+2)+2$ проходит через точку $B(2;-3)$: $-3 = 4a+2, \quad a = -1{,}25$.
Ответ: $0{,}25$ и $-1{,}25$.

Пример 16. При каких а уравнение $\left|x^2-2x-3\right|-2a=\left|x-a\right|-1$ ***имеет ровно три корня?***

Решение.

Запишем уравнение в виде $\left|x^2-2x-3\right|=\left|x-a\right|+2a-1$.



Построим графики левой и правой частей уравнения. Из рисунка видно, что значений а удовлетворяющих условию задачи ровно два – при одном из них график правой части проходит через точку $(-1;0)$, при другом – касается отраженного участка параболы.

Первое происходит при а=0, а второе – когда уравнение $3+2x-x^2=3a-1-x$ имеет единственный корень. Приравнивая дискриминант к нулю, находим $a=\frac{25}{12}$.

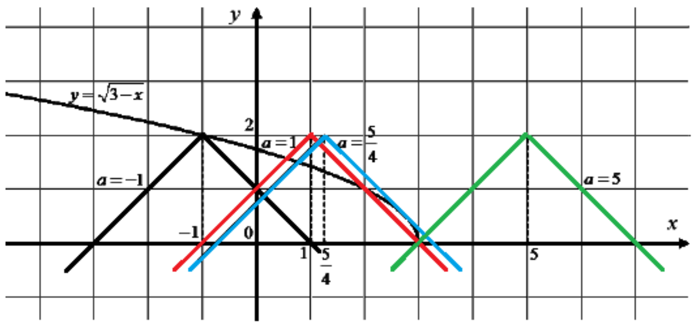
Ответ: $a=0$ и $a=\frac{25}{12}$.

Пример 17. Найдите все значения а, при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{3-x}+\left|x-a\right|\le 2$ ***является отрезок.***

Решение. Перепишем неравенство в виде $\sqrt{3-x}\le 2-\left|x-a\right|$.

Нарисуем эскизы графиков левой и правой частей неравенства.

Из рисунка видно, что график правой части неравенства лежит выше левой при $a\in(-1;5)$.



Заметим, что при $a=1$, решением кроме отрезка становится ещё и точка x=3, что противоречит условию.

При дальнейшем уменьшении а в решение будет попадать ещё один отрезок с правым концом в точке x=3. Левый конец будет сдвигаться вплоть до случая касания при котором решение снова превратится в один отрезок.

Рассмотрим случай касания: $f'\left(\sqrt{3-x}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}=-1 \;\Leftrightarrow\; 3-x=0{,}25 \;\Leftrightarrow\; x=2{,}75$, тогда

$\sqrt{3-2{,}75}=0{,}5 \;\Leftrightarrow\; 0{,}5=2-(2{,}75-a) \;\Leftrightarrow\; a=1{,}25$.

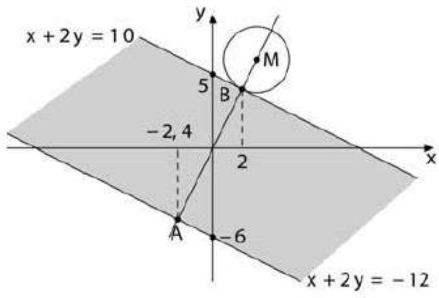
Итак, интервал $(1;1{,}25)$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a\in(-1;1)\cup(1{,}25;5)$.

Пример 18. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система $\begin{cases}\left|x+2y+1\right|\le 11,\\ (x-a)^2+(y-2a)^2=2+a\end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение.

Преобразуем систему: $\begin{cases} -12 \le x+2y \le 10, \\ (x-a)^2+(y-2a)^2=2+a. \end{cases}$



Неравенство $-12 \le x+2y \le 10$ задает на плоскости полосу, граница которой – пара параллельных прямых: $x+2y=10$ и $x+2y=-12$.

Если $a<-2$, то система не имеет решений, поскольку правая часть уравнения становится отрицательной. Если $a=-2$, то уравнение принимает вид: $(x+2)^2+(y+4)^2=0$ и задает единственную точку $(-2;-4)$, координаты которой удовлетворяют неравенству: $|-2-8+1|=9<11$. Следовательно, при $a=-2$ система имеет единственное решение.

Рассмотрим случай $a>-2$. Тогда уравнение $(x-a)^2+(y-2a)^2=2+a$ определяет окружность радиусом $\sqrt{2+a}$. Центр $M(a;2a)$ окружности лежит на прямой $y=2x$, которая перпендикулярна граничным прямым полосы и пересекает их в точках $A(-2{,}4;-4{,}8)$ и $B(2;4)$. Система имеет единственное решение, если только окружность внешним образом касается полосы в точке А или в точке В. Если точка касания – А, то $a<-2{,}4$, что невозможно. Окружность касается полосы в точке В, только если $a>2$ и $MB=\sqrt{2+a}$.

Получаем: $(a-2)^2+(2a-4)^2=2+a \;\Leftrightarrow\; 5a^2-21a+18=0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} a=3, \\ a=1{,}2. \end{array}\right.$

Условию $a>2$ удовлетворяет только корень a=3.

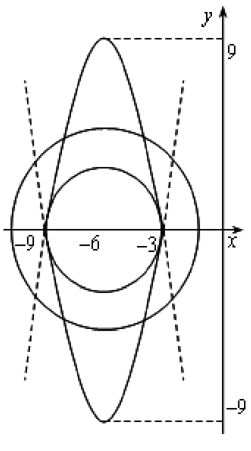
Ответ: $a=-2$ и $a=3$.

Пример 19. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2+12x+|y|+27=0, \\ x^2+(y-a)(y+a)=-12(x+3) \end{cases}$ имеет 4 решения.

Решение. Преобразуем систему: $\begin{cases} |y|=9-(x+6)^2, \\ (x+6)^2+y^2=a^2. \end{cases}$

Первое уравнение задает части двух парабол: $y=\begin{cases} 9-(x+6)^2, & y\ge 0, \\ (x+6)^2-9, & y<0. \end{cases}$

Второе уравнение задает окружность радиусом $|a|$ с центром $(-6;0)$.



Очевидно, что 4 решения получается в двух случаях.

1) Окружность касается каждой из ветвей обеих парабол.

2) Окружность пересекает каждую из ветвей обеих парабол в двух точках, лежащих по разные стороны от оси абсцисс.

Составим уравнение для ординат общих точек окружности и параболы $y=9-(x+6)^2$. Получим: $y=9-(a^2-y^2)$, откуда $y^2-y+(9-a^2)=0$.

Чтобы окружность касалась парабол, уравнение должно иметь нулевой дискриминант: $1+4a^2-36=0$, откуда $a=\pm\frac{\sqrt{35}}{2}$.

Во втором случае радиус окружности заключен между числами 3 и 9.

Ответ: $(-9;-3)$, $-\frac{\sqrt{35}}{2}$, $\frac{\sqrt{35}}{2}$, $(3;9)$.

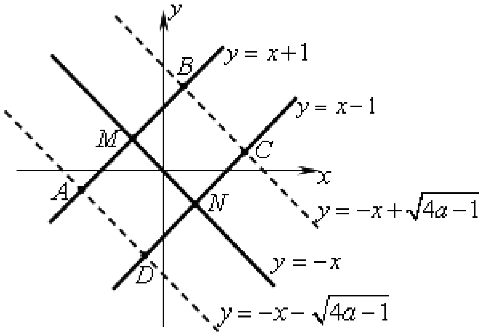
Пример 1. Найдите все значения параметра a***, при каждом из которых система уравнений*** $\begin{cases} x^2+y^2=2a, \\ 2xy=2a-1 \end{cases}$ ***имеет ровно два решения.***

Решение. Заменим первое уравнение разностью, а второе – суммой исходных уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2a, \\ 2xy=2a-1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2=1, & (1) \\ (x+y)^2=4a-1; & (2) \end{cases}$$

При $a<0{,}25$ второе уравнение системы, а, значит, и вся система решений не имеет. При $a\ge 0{,}25$ получаем: $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x-1, \\ y=x+1; \end{array}\right.$ и

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-x-\sqrt{4a-1}, \\ y=-x+\sqrt{4a-1}. \end{array}\right.$$

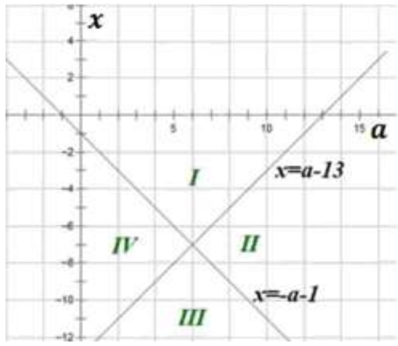


Ясно, что при $a>0{,}25$ система имеет четыре решения (координаты точек A, B, C, D), а при $a=0{,}25$ – два решения (координаты точек M, N).

Ответ: $a=0{,}25$.

Пример 2. Найдите все значения а, при каждом из которых имеет единственный корень уравнение $(x+7)^2+(a-6)^2=|x-a+13|+|x+a+1|$.

Решение.Раскроем модули.



А) Приравняем каждое подмодульное выражение к нулю: $x-a+13=0, \quad x=a-13;$

$x+a+1=0, \quad x=-a-1.$

Б) Определим знаки подмодульных выражений:

	I	II	III	IV
$x-a+13$	+	–	–	+
$x+a+1$	+	+	–	

В)Раскроем модули на каждом промежутке:

I. $(x+7)^2+(a-6)^2=(x-a+13)+(x+a+1)$

$(x+7)^2+(a-6)^2=2x+14$

$x^2+14x+49-2x-14+(a-6)^2=0$

$x^2+12x+35+(a-6)^2=0$

$x^2+12x+36-1+(a-6)^2=0$

$(x+6)^2+(a-6)^2=1$

II. $(x+7)^2+(a-6)^2=-(x-a+13)+(x+a+1)$

$(x+7)^2+(a-6)^2=2a-12$

$(x+7)^2+a^2-12a+36-2a+12=0$

$(x+7)^2+a^2-14a+48=0$

$(x+7)^2+a^2-14a+49-1=0$

$(x+7)^2+(a-7)^2=1$

III. $(x+7)^2+(a-6)^2=-(x-a+13)-(x+a+1)$

$(x+7)^2+(a-6)^2=-2x-14$

$x^2+14x+49+2x+14+(a-6)^2=0$

$x^2+16x+63+(a-6)^2=0$

$x^2+16x+64-1+(a-6)^2=0$

$(x+8)^2+(a-6)^2=1$

IV. $(x+7)^2+(a-6)^2=(x-a+13)-(x+a+1)$

$(x+7)^2+(a-6)^2=-2a+12$

$(x+7)^2+a^2-12a+36+2a-12=0$

$(x+7)^2+a^2-10a+24=0$

$(x+7)^2+a^2-10a+25-1=0$

$(x+7)^2+(a-5)^2=1$

Построим на каждом промежутке графики уравнений:

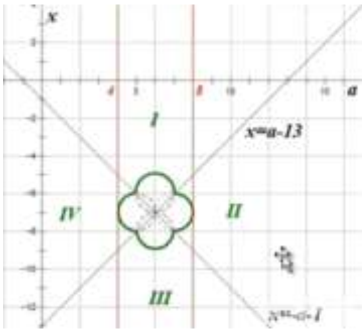
I. $(x+6)^2+(a-6)^2=1;\ a=6,\quad x=-6,\quad R=1.$

II. $(x+7)^2+(a-7)^2=1;\ a=7,\quad x=-7,\quad R=1.$

III. $(x+8)^2+(a-6)^2=1;\ a=6,\quad x=-8,\quad R=1.$

IV. $(x+7)^2+(a-5)^2=1;\ a=5,\quad x=-7,\quad R=1.$

Ответ: $(4;8)$.



Пример 3. Найдите все положительные значения ***a***, при каждом из которых множеством решений неравенства $\dfrac{x-2}{ax^2-(a^2+1)x+a}\geq 0$ является луч.

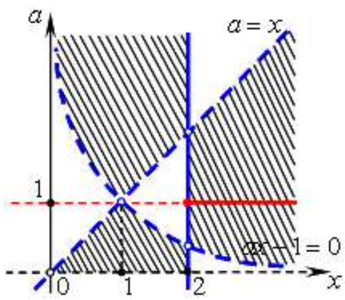
Решение. Разложим знаменатель левой части данного неравенства на множители: $ax^2-(a^2+1)x+a=ax^2-a^2x-x+a=ax(x-a)-(x-a)=(ax-1)(x-a)$.

Данное неравенство задает на координатной плоскости три области (см. заштрихованные области на рисунке).

Множество решений данного неравенства при каждом значении ***a*** есть множество абсцисс всех точек этих областей, ордината которых равна ***a***.

Это множество является лучом только при $a=1$.

Ответ: $a=1$.



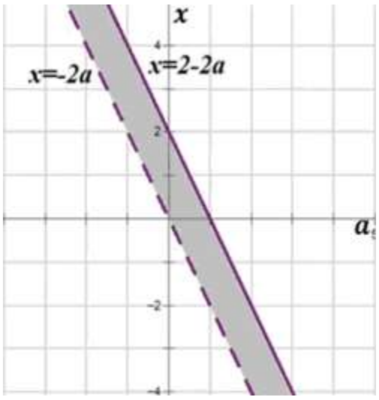
Пример 4. При каких значениях а система неравенств $\begin{cases}\log_{0,5}(2a+x)\geq -1,\\ |x+a|\leq 2\end{cases}$ ***имеет единственное решение.***

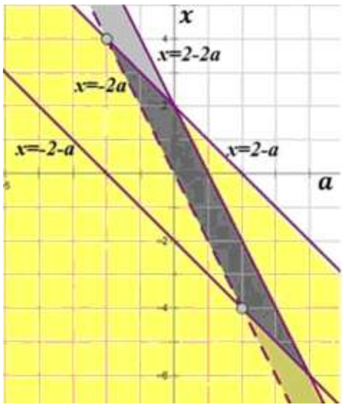
Решение.

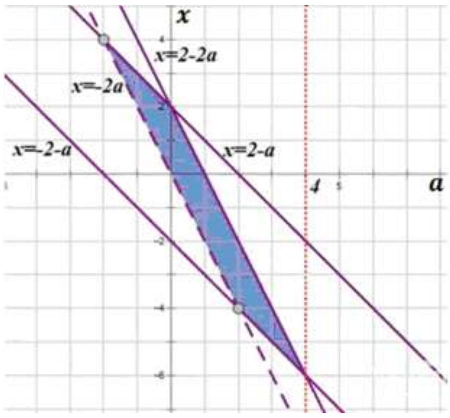
Решим первое неравенство: $\log_{0,5}(2a+x)\geq -1$; $\log_{0,5}(2a+x)\geq \log_{0,5}2$; $0<2a+x\leq 2$; $-2a<x\leq 2-2a$.

Решим второе неравенство: $|x+a|\leq 2$; $-2\leq x+a\leq 2$; $-2-a\leq x\leq 2-a$.

Получаем систему неравенств: $\begin{cases}x\succ -2a,\\ x\leq 2-2a,\\ x\leq 2-a,\\ x\geq -2-a.\end{cases}$



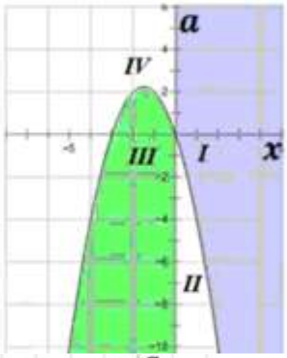




Ответ: 4.

Пример 5. При каких значениях параметра a ***уравнение*** $\left|x^2+3x+a\right|+|x|=6$ ***имеет не менее трех решений.***

Решение.



Раскроем модули: $x^2+3x+a=0, \quad a=-x^2-3x; \quad x=0$.

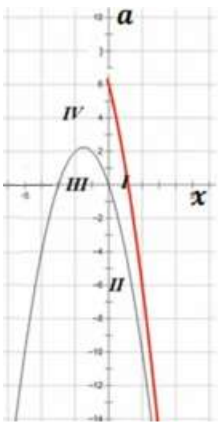
	I	II	III	IV
x^2+3x+a	+	–	–	+
x	+	+	–	

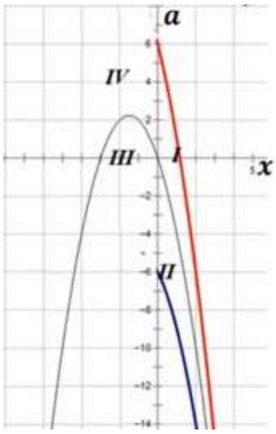
I. $x^2+3x+a+x=6$; $a=-x^2-4x+6$.

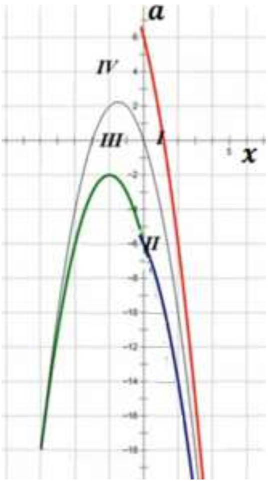
II. $-x^2-3x-a+x=6$; $a=-x^2-2x-6$.

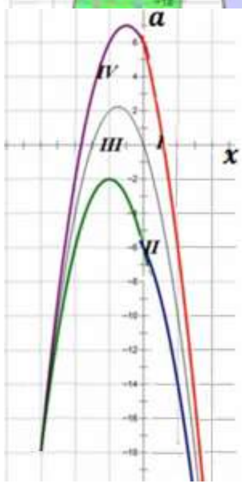
III. $-x^2-3x-a-x=6$; $a=-x^2-4x-6$.

IV. $x^2+3x+a-x=6$; $a=-x^2-2x+6$.









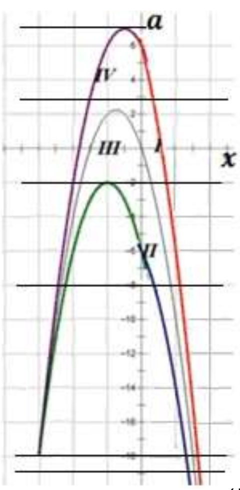
Находим точки пересечения графиков:

III. $-x^2-4x-6=-x^2-3x$; $x=-6$; $a=-36+18=-18$.

IV. $-x^2-2x+6=-x^2-3x$; $x=-6$; $a=-36+18=-18$.

Очевидно, что при $-18\leq a\leq -2$ уравнение имеет не менее трех решений.

Ответ: $a\in[-18;-2]$.



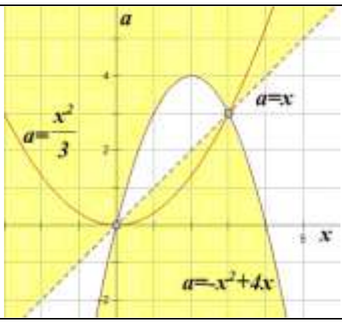
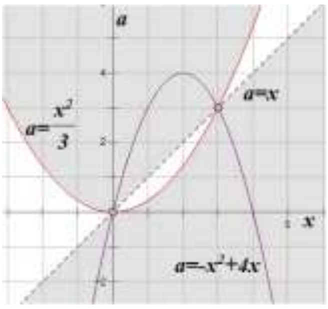
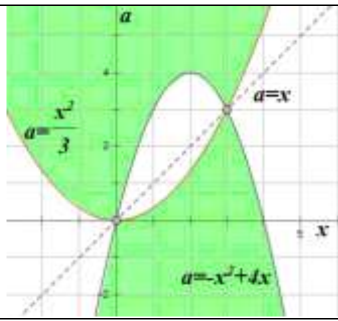
Пример 6. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых неравенство $\left|\frac{x^2-x-2a}{x-a}-1\right|\leq 2$ ***имеет единственное решение на отрезке*** $[1;3]$***.***

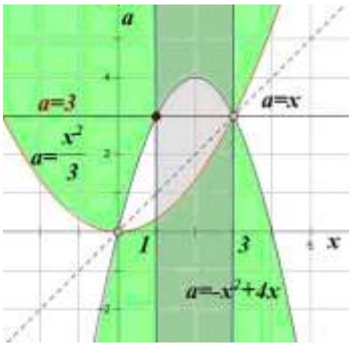
Решение.

$$\left|\frac{x^2-x-2a}{x-a}-1\right|\le 2 \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{x^2-x-2a-x+a}{x-a}\right|\le 2 \quad\Rightarrow\quad \left|\frac{x^2-2x-a}{x-a}\right|\le 2$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-2x-a}{x-a}\le 2\\ \dfrac{x^2-2x-a}{x-a}\ge -2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2-2x-a-2x+2a}{x-a}\le 0\\ \dfrac{x^2-2x-a+2x-2a}{x-a}\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2-4x+a}{x-a}\le 0 \quad (1)\\ \dfrac{x^2-3a}{x-a}\ge 0 \quad (2)\end{cases}$$

Изобразим на параметрической плоскости ***Oxa*** решения системы

Решения неравенства (1) $a=-x^2+4x$ и $a\neq x$	Решения неравенства (2) $a=\dfrac{x^2}{3}$ и $a\neq x$	Решения системы неравенств
		



По условию неравенство имеет единственное решение на отрезке $[1;3]$ и одну общую точку с выделенной областью имеет только прямая a=3.

Ответ: $a=3$.

ИСТОЧНИКИ

I. Прокофьев Александр Александрович, Зав.каф. ВМ-1, НИУ МИЭТ
Курс: «Технология подготовки учащихся к овладению решения задач с параметрами»

- Занятие №3. Технология подготовки учащихся к овладению функционально-графическими методами решения задач с параметрами. Прокофьев А.А.http://miet.ru/upload/content/abiturient_ru/EGE/2015Zan3.pdf

II. Задания 20 (С6). Уравнения, неравенства, системы с параметром http://reshuege.ru/

III.http://alexlarin.net/

- А.Г. Корянов и А.А.Прокофьев «Пособие по решению заданий С5 образца 2011 года»
- А.Г. Корянов и А.А.Прокофьев «Пособие по решению заданий С5 образца 2012 года»
- С.К.Кожухов «Уравнения и неравенства с параметром», ЕГЭ – 2015
- Материалы для экспертов ЕГЭ2014

IV.http://ege-ok.ru/category/zadachi-s-parametrom/

- Видеолекция «Графический метод решения задач с параметрами»
- Задача с параметром. Задание С5. 01 июня 2013

V. http://webmath.exponenta.ru/

VI. http://festival.1september.ru/articles/600641/