Муниципальное казенное учреждение
«Центр поддержки образования»
муниципального образования Динской район

Сборник №5 по подготовке к ГИА по МАТЕМАТИКЕ по теме «Элементы теории вероятностей»

Составитель учитель математики БОУ СОШ №3
Путилина Жаннетта Николаевна

ст.Динская, 2019

Предметом теории вероятностей является построение и исследование математических моделей случайных явлений и процессов, наблюдаемых в статистических экспериментах. Если статистика имеет дело с результатами реальных наблюдений и экспериментов, выявляет в них определенные закономерности, то теория вероятностей исследует только математические модели, а вопрос о применимости получаемых результатов к «действительному миру опыта» решается, как правило, за рамками теории вероятностей *(А. Н. Колмогоров).*

Наиболее распространенными классами (или типами) математических моделей, исследуемых теорией вероятностей, являются случайные события, случайные величины, системы случайных величин, случайные процессы

Согласно статистически-частотной интерпретации ***вероятность*** *характеризует относительную частоту появления события в определенной совокупности событий, соответствующих неким относительно устойчивым или повторяющимся условиям.*

Эксперимент (или опыт) заключается в наблюдении за объектами или явлениями в строго определенных условиях и измерении значений заранее определенных признаков этих объектов (явлений). Эксперимент называют статистическим, если он может быть повторен в практически неизменных условиях неограниченное число раз (подбрасывание монеты)

Исходом эксперимента называют значение наблюдаемого признака, непосредственно полученное по окончании эксперимента. Каждый эксперимент заканчивается одним и только одним исходом.

Событием, наблюдаемым в эксперименте, называют появление исхода, обладающего заранее указанным свойством.

Пример. Бросаем шестигранный игральный кубик. Условия: один кубик, одна поверхность, отсутствие сильных внешних воздействий (кроме притяжения Земли и движения руки, бросающей кубик). Исходы эксперимента - номер грани кубика, оказавшейся сверху после его остановки; возможно 6 разных исходов.

Следует хорошо отличать события от исходов. Следует также иметь в виду, что в конкретном эксперименте могут появляться не любые события, а только такие, которые могут быть определены через свойства исходов этого эксперимента, и количество событий, возможных в данном эксперименте, не произвольно, а определяется числом исходов эксперимента *(в эксперименте с n исходами возможно* 2^n *разных событий).*

Случайнымотносительно комплекса условий S называется событие, которое при осуществлении указанного комплекса условий может либо произойти, либо не произойти. Теория вероятностей имеет дело со случайными событиями, однако она не может предсказать, произойдет ли единичное событие или нет. Теория вероятностей изучает *вероятностные закономерности массовых однородных случайных событий.*

1.Основные понятия теории вероятностей
Некоторые формулы комбинаторики

1. Комбинации, состоящие из одной и той же совокупности ***n***различных элементов и различающиеся только порядком их расположения, называются ***перестановками***. Число всех возможных перестановок определяется произведением чисел от единицы до ***n:***

$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3 \cdots n = n!$$

2. Комбинации по m элементов, составленные из n различных элементов ($m \leq n$), отличающиеся друг от друга либо элементами, либо их порядком, называются ***размещениями***. Число всевозможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

3. Комбинации, содержащие по m элементов каждая, составленные из n различных элементов

($m \leq n$) и различающиеся хотя бы одним элементом, называются *сочетаниями.* Число сочетаний определяется формулой

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},\ C_n^m = C_n^{n-m}\ ,\ A_n^m = P_m \cdot C_n^m (1)$$

В частности, вторую из формул удобно использовать в расчетах, когда m >n/2.

Пример 1. Сколькими способами можно выбрать: а) по 2 шара из корзины, в которой находятся 36 шаров; б) по 32 шара из корзины, в которой находятся 36 шаров?

Решение.Искомое число способов:

а) $C_{36}^2 = \frac{36!}{2!34!} = \frac{35 \cdot 36}{2} = 630$, б) $C_{36}^{32} = C_{36}^4 = \frac{36!}{4!32!}$

2. Виды случайных событий

Определение 1. События называют ***несовместными****,* если в одном и том же испытании появление одного из них исключает появление других. Например, выпадение «орла» при подбрасывании монеты исключает появление в этом же испытании «решки», и наоборот.

Определение 2. Несколько событий образуют ***полную группу****,* если в результате испытания появление хотя бы одного из них является достоверным событием. Например, при произведении выстрела по мишени (испытание) обязательно будет либо попадание, либо промах; эти два события образуют полную группу.

3. Понятие вероятности

Назовем каждый из возможных результатов испытания ***элементарным событием****,* или *исходом.* Те элементарные исходы, которые, интересуют нас, называются ***благоприятными***событиями.

Определение 3. Отношение числа благоприятствующих событию *А* элементарных исходов **m** к общему числу равновозможных несовместных элементарных исходов **n**, образующих полную группу, называется ***вероятностью события А.***

P(A)=m/n

Вероятность события А обозначается Р(А).Понятие вероятности является одним из основных в теории вероятностей. Данное ранее его определение является классическим. Из него вытекают некоторые свойства.

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице.

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число $0<P(A)<1$.

Следовательно, вероятность любого события удовлетворяет неравенству

$0 \le P(A) \le 1$ (2)

Пример 2. В коробке лежат 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Найти вероятность того, что из пяти взятых наугад шаров будет 4 белых.

Решение.Найдем число благоприятных исходов: число способов, которыми можно взять 4 белых шара из 6 имеющихся, равно

$$C_6^4 = \frac{6!}{2!\,4!} = 15$$

Общее число исходов определяется числом сочетаний из 10 по 5: $C_{10}^5 = 252$**.** Согласно определению, искомая вероятность P= 15/252 ≈0,06. (***P=m/n=15/252)***

3. Умножение вероятностей

3.1. Произведение событий и условная вероятность.

Определение 4. ***Произведением***двух событий *А* и *В* называется событие *АВ,* означающее совместное появление этих событий.

Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме необходимого комплекса условий *S,* не налагается, то такая вероятность называется ***безусловной****.*

Если же налагаются другие дополнительные условия, содержащие случайные события, то вероятность такого события называется ***условной***.

Определение 5. Вероятность события *B* в предположении о наличии события *A* называют ***условной вероятностью*** $P_A(B)$.

Пример 3. В ящике лежат 11 деталей, 3 из них нестандартные. Из ящика дважды берут по одной детали, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что во второй раз из ящика будет извлечена стандартная деталь — событие B, если в первый раз взяли нестандартную.

Решение. После первого извлечения в ящике из 10 деталей имеется 8 стандартных, и, следовательно, искомая вероятность

$P_A(B) = 0{,}8.$

Пусть теперь известны вероятность $P(A)$ события *A* и условная вероятность $P_A(B)$ события *B*. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Вероятность произведения двух событий определяется формулой

$P(AB) = P(A)P_A(B).$ (3)

В теории доказывается, что справедливо равенство $P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$.

Замечание*: Теорема 1 допускает обобщение на случай произведения любого числа событий.*

Пример 4. В условиях примера 3 найти вероятность того, что в первый раз извлечена нестандартная деталь, а во второй раз — стандартная.

Решение.Итак, событие *A* — это извлечение из ящика нестандартной детали, а событие *B* - стандартной. Тогда вероятность $P(A) = 3/11$, а условная вероятность $P_A(B) = 0{,}8$. Искомая вероятность произведения этих событий (их совместного появления в указанном порядке) равна, (по **теореме 1)**,

$P(AB) = P(A)\,P_A(B) = (3/11)\cdot 0{,}8 \approx 0{,}22.$

Пример 5. В урне находятся 4 белых шара, 5 красных и 3 синих. Наудачу извлекают по одному шару, не возвращая его обратно. Найти вероятность того, что в первый раз появится белый шар (событий A), во второй раз — красный (событие B), в третий — синий (событие C).

Решение.Вероятность появления белого шара в первом извлечении $P(A) = 1/3$; условная вероятность появления красного шара во втором извлечении при условии появления в первый раз белого шара

$P_A(B) = 5/11$; условная вероятность появления синего шара в третьем извлечении при условиях появления в предыдущих извлечениях белого и красного шаров $P_{AB}(C) = 0{,}3$. Искомая вероятность определяется по формуле 3 с учетом, что событий больше двух. При n = 3:

$P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C) = (1/3)(5/11)\,0{,}3 \approx 0{,}045.$

3.2. Независимые события

Определение 6. Событие *B* называется ***независимым***от события *A,* если условная вероятность события *B* равна его безусловной вероятности (появление события *A* не влияет на вероятность

события *B):*

$P_A(B) = P(B).$ (4)

Для независимых событий теорема умножения вероятностей (1) в общей форме, имеет вид

$P(A_1A_2A_3\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)\cdots P(A_n),\ n>1.$ (5)

Равенство (5) принимается за определение независимых событий.

Пример 6. Найти вероятность поражения цели при совместной стрельбе тремя орудиями, если вероятности поражения цели орудиями равны 0,9, 0,8 и 0,7 соответственно (события A, B и C).

Решение.Поскольку события *A, B* и *C* являются независимыми, то искомая вероятность вычисляется, согласно формуле (5), при n = 3:

P(ABC) = P(A) P(B) P(C) = 0,9·0,8·0,7 = 0,504.

Когда в результате испытания могут иметь место *n* независимых событий с известными вероятностями их появления, особый интерес представляет случай нахождения вероятности наступления хотя бы одного из них (например, в случае трех событий — найти вероятность наступления либо одного, либо двух, либо трех событий). Обозначим это события через *A*. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий A_1 A_2..., *An*определяется формулой

$P(A) = 1 - g_1 g_2 g_3 \dots g_n$(6)

где q_i = 1 - p_i— вероятности соответствующих противоположных событий ¬A(i= 1, 2, ...,n).

В частном случае, когда все события A_iимеют одинаковую вероятность *p,* из формулы (6) следует, что **$P(A) = 1 - q^n$, $q=1 - p$.(7)**

Пример 7. На перевозку груза направлены 4 автомобиля. Вероятность нахождения каждой из машин в исправном состоянии равна 0,8. Найти вероятность того, что в работе участвует хотя бы один из выделенных для этого автомобилей.

Решение.Вероятность противоположного события (машина неисправна) равна *q*= 1 - 0,8 = 0,2. По формуле (7) находим искомую вероятность при *n* = 4:

P (A) = 1 – q^4 = 1 - $0{,}2^4$ = 0,9984.

1. О классическом, статистическом и геометрическом определениях вероятности

Традиционное изложение элементов **теории вероятностей включает в себя три «определения» вероятности:*классическое*** (отношение числа благоприятствующих исходов к общему числу возможных), ***статистическое*** (предел относительной частоты при неограниченном увеличении числа испытаний) и ***геометрическое*** (отношение длин, площадей или объемов двух областей: общей, в которой лежат все возможные исходы, и благоприятствующей, в которой лежат интересующие нас исходы).

Вероятность - это мера возможности появления случайного события; она одна, и каждое случайное событие имеет свое значение, величину этой вероятности. Вероятность можно сравнить с длиной, площадью или объемом. Например, каждая плоская фигура имеет определенную пространственную протяженность - это ее неотъемлемое свойство. Но одна фигура более протяженная, другая менее. Мерой пространственной протяженности является площадь. Чем менее протяжённая фигура, тем меньше ее площадь, и наоборот.

Из курса геометрии мы знаем, как измерить длину, площадь или объем, как найти их численные значения. Теория вероятностей дает нам способы «измерения», нахождения численного значения вероятностей появления различных событий.

Если опыт, в котором появляется событие *A,* имеет конечное число *n*равновозможных исходов, то вероятность события *A* равна *P(A)* =$\frac{m}{n}$, где m - количество исходов, при которых событие *A* появляется. Это классическое определение вероятности, но «определение» не в смысле раскрытия самого понятия, а в смысле нахождения численного значения вероятности в тех случаях, когда *n* **конечно** и все исходы **равновозможны**. Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то применять формулу классической вероятности нельзя, результат будет неправильным.

Если количество возможных исходов опыта **бесконечно велико,** а все исходы по-прежнему **равновозможны,** то численное значение вероятности можно найти по формуле геометрической вероятности: *P(A)* = $\frac{l_A}{l}$ или *P(A)* = $\frac{S_A}{S}$, или *P(A)*=$\frac{V_A}{V}$ в зависимости от того, где лежат точки, соответствующие исходам эксперимента - на линии, на плоскости или в трехмерном пространстве.

5. Типы случайных событий и действия над ними. Теоремы о вероятностях

Достоверное событие - это событие, которое обязательно происходит при каждом проведении рассматриваемого эксперимента.

Невозможное событие - это событие, которое никогда не может произойти при проведении данного эксперимента. Это значит, что среди всех исходов эксперимента нет ни одного исхода, обладающего тем свойством, которым определено событие, являющееся невозможным, что невозможному событию соответствует **пустое множество** исходов данного эксперимента. Например, при бросании монеты событие N - «при бросании монеты выпали орели решка» - является невозможным, т. к. нет исходов, при которых появляются орел и решка одновременно.

Противоположное событие (по отношению к рассматриваемому событию *A)* - это событие $\neg A$, которое не происходит, если *A* происходит, и наоборот. Это значит, что событию $\neg A$ соответствует те исходы эксперимента, которые не соответствуют событию *A,* причем объединение (сумма) исходов, соответствующих событиям Аи $\neg A$, всегда равно полному множеству всех исходов данного эксперимента.

Два события *A и B* называют **совместными,** если они могут произойти одновременно, при одном исходе эксперимента, и **несовместными**, если они не могут произойти одновременно ни при одном исходе эксперимента (т. е. в соответствующих им множествах экспериментов нет одинаковых (общих) исходов).

Гораздо более сложным является понятие **независимости** случайных событий; рассуждения о том, что «наступление или не наступление одного из независимых событий никак не зависит от наступления или не наступления второго» не являются вполне удовлетворительными. Не имея возможности определить это понятие вполне строго, лучше говорить, что два события ***A* и *B* считаются независимыми**, если вероятность каждого из них *(P(A)* и *P(B))* не зависит от наступления или не наступления второго.

Суммой двух случайных событий *A* и *B* называют новое случайное событие *A + B,* которое происходит, если происходят либо *A,* либо *B,* либо Аи *B* одновременно. Событию *A + B* соответствует объединение (сумма) множеств исходов, соответствующих событиям ***A и B.***

Произведением двух случайных событий А и Вназывается новое случайное событие $A \cdot B$, которое происходит только тогда, когда происходят события *A* ***и*** *B* одновременно. Событию $A \cdot B$ соответствует пересечение множеств исходов, соответствующих событиям Аи *B.*

6. Обобщение умножения и сложения вероятностей

Определение 7. События *A* и *B* называют *совместными,* если в одном и том же испытании появление одного из них не исключает появление другого. Для таких событий справедлива следующая теорема.

Определение 8. *Суммой* двух событий *A* и *B* называют событие *C = A + B,* которое состоит в появлении либо события *A,* либо события *B,* либо *A и B* одновременно.

Аналогично определяется сумма *нескольких* событий, состоящая в появлении хотя бы одного из этих событий.

Теорема сложения. Вероятность суммы двух **несовместных** случайных событий *A и B* равна сумме их вероятностей: . Для несовместных событий *P (AB)* = 0, и в этом случае имеем

1) $P(A+B) = P(A) + P(B).$ (8)

2) Если ***A* и *B* совместны**, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A\cdot B). \quad (9)$$

3) Если **события А и В зависимы** с учетом формулы (3)

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P_A(B) \quad (10)$$

Теорема умножения. Вероятность произведения двух **независимых случайных событий *A и B*** равна произведению их вероятностей:

1) $P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B).$ *(11)*

2) Если ***A* и *B* зависимы**, то

$P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B/A) =P(B) \cdot P(A/B),$ *(12)*

где $P(A/B)$, $P(B/A)$ - условные вероятности одного события относительно второго.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Задача 1.Две фабрики выпускают одинаковые лампочки. Первая фабрика выпускает 60% лампочек, вторая - 40%. Среди продукции первой фабрики 3% лампочек дефектные, среди продукции второй фабрики - 2%. Найдите вероятность того, что случайно купленная в магазине лампочка окажется дефектной.

Решение

По условию задачи первая фабрика выпускает 60% лампочек из 100%. Другими словами она выпускает 60/100 = 0,6 доли от общего производства двух фабрик. Вторая фабрика аналогично выпускает 40% = 40/100 = 0,4 доли от общего числа лампочек.

Среди этих 0,6 по условию 3% брака, что значит 0,03 от 0,6, это равно: 0,03·0,6=0,018. То есть от всего объема выпущенных лампочек 0,018 окажутся дефектными с первой фабрики.

Аналогично найдем долю дефектных лампочек со второй фабрики: 0,02· 0,4 = 0,008

Всего бракованных лампочек с обеих фабрик будет: 0,018 + 0,008 = 0,026. Это и будет равно вероятности того, что случайно выбранная в магазине лампочка окажется дефектной.

Ответ: 0,026.

Более коротко:

Вероятность того, что лампочки выпущены на первой фабрике и они бракованные: 0,03·0,6=0,018. Вероятность того, что лампочки выпущены на второй фабрике и они бракованные : 0,02· 0,4 = 0,008.

Поэтому по формуле полной вероятности вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным равна : 0,018 + 0,008 = 0,026

Ответ: 0,026.

Задача 2.Два завода выпускают одинаковые автомобильные предохранители. Первый завод выпускает 40% предохранителей, второй - 60%. Первый завод выпускает 4% бракованных предохранителей, а второй - 3%. Найдите вероятность того, что случайно выбранный в магазине предохранитель окажется бракованным.

Решение:

По условию задачи первый завод выпускает 40% предохранителей из 100%. Другими словами он выпускает 40/100 = 4/10 доли от общего производства двух заводов. Второй завод аналогично выпускает 60% = 60/100 = 6/10 доли от общего числа деталей.

Среди этих 4/10 по условию 4% брака, что значит 4/100 от 4/10, это равно: 4/100 * 4/10 = 16/1000. То есть от всего объема выпущенных деталей 16/1000 бракованных выпускает первый завод.

Аналогично найдем долю брака со второго завода: 3/100 * 6/10 = 18/1000.

Всего бракованных деталей с обоих заводов будет: 16/1000 + 18/1000 = 34/1000 = 0,034. Это и будет равно вероятности того, что случайно выбранный в магазине предохранитель окажется бракованным.

Ответ: 0,034.

Задача 3. На тренировку пришел 21 школьник, среди них два брата - Василий и Павел. Школьников случайным образом делят на три футбольные команды по 7 человек в

каждой. Найдите вероятность того, что Василий и Павел окажутся в одной команде.

Решение:

Нас устроит, если Василий и Павел окажутся в любой из трех команд.

Допустим, событие А - оба попали в 1-ю футбольную команду

событие В - оба попали во 2-ю футбольную команду

событие С - оба попали в 3-ю футбольную команду.

Эти события несовместны и любое из них нас устроит. Найдем P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C).

В свою очередь событие А состоит из двух зависимых событий:

А1 - что Василий окажется в 1-ой футбольной команде

А2 - что Павел окажется в 1-ой футбольной команде, ⇔ $P(A) = P(A1) * P_{A1}(A2)$.

По определению *вероятность события P(A)= m/n, где m - число благоприятных исходов, а n - число всех исходов.*

находим вероятность, что Василий попадет в 1-ю футбольную команду P(A1): m=1, так как один благоприятный исход, а n=3, так как всего возможно три исхода. Поэтому P(A1) = 1/3.

Теперь найдем $P_{A1}(A2)$ то есть условную вероятность того, что Павел попадет в 1-ю футбольную команду при условии, что Василий в нее уже попал.

Число благоприятных условий равно 6, так как одно место в команде уже занято Василием (то есть нас устраивает, если Павел попадет в любое из шести свободных мест в команде и m=6), а общее число всех исходов = 20, так как Василий уже не участвует в выборке (то есть всего претендентов осталось 20 человек и n=20).

Поэтому $P_{A1}(A2) = 6/20 = 3/10$

Таким образом P(A) = 1/3 · 3/10 = 1/10.

Аналогично рассуждая, найдем P(B) = 1/10 и P(C) = 1/10.

Поэтому P(A+B+C) = 1/10 + 1/10 + 1/10 = 3/10 = 0,3.

Ответ: 0,3.

Задача 4. Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Пояснение.

Пусть событие A состоит в том, что яйцо имеет высшую категорию, события B_1 и B_2 состоят в том, что яйцо произведено в первом и втором хозяйствах соответственно. Тогда события $A|B_1$ и $A|B_2$— события, состоящие в том, что яйцо высшей категории произведено в первом и втором хозяйстве соответственно. По формуле полной вероятности, вероятность того, что будет куплено яйцо высшей категории, равна:

$$P(AB_1)+P(AB_2)=P(A|B_1)\cdot P(B_1)+P(A|B_2)\cdot P(B_2)=$$
$$=0,4\cdot P(B_1)+0,2\cdot(1-P(B_1))=0,2P(B_1)+0,2.$$

Поскольку по условию эта вероятность равна 0,35, поэтому для вероятности того, что купленное яйцо произведено в первом хозяйстве имеем:

$$P(B_1)=(0,35-0,2):0,2=0,75.$$

Примечание

Это решение можно записать коротко. Пусть x — искомая вероятность того, что куплено яйцо, произведенное в первом хозяйстве. Тогда $1-x$ — вероятность того, что куплено яйцо, произведенное во втором хозяйстве. По формуле полной вероятности имеем:

$$0,4x+0,2(1-x)=0,35\Leftrightarrow 0,2x=0,15\Leftrightarrow x=0,75.$$

Ответ: 0,75.

<u>Приведем другое решение.</u>

Пусть в первом хозяйстве агрофирма закупает x яиц, в том числе, $0,4x$ яиц высшей категории, а во втором хозяйстве — y яиц, в том числе $0,2y$ яиц высшей категории. Тем самым, всего агроформа закупает $x+y$ яиц, в том числе $0,4x+0,2y$ яиц высшей категории. По условию, высшую категорию имеют 35% яиц, тогда:

$$\frac{0,4x+0,2y}{x+y}=0,35 \Leftrightarrow 0,4x+0,2y=0,35(x+y) \Leftrightarrow 0,05x=0,15y \Leftrightarrow x=3y.$$

Следовательно, у первого хозяйства закупают в три раза больше яиц, чем у второго. Поэтому вероятность того, что купленное яйцо окажется из первого хозяйства равна

$$\frac{3y}{3y+y}=\frac{3}{4}=0,75.$$

Задача 5. В классе 21 шестиклассник, среди них два друга — Митя и Петя. Класс случайным образом делят на три группы, по 7 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Митя и Петя окажутся в разных группах.

Решение.

Пусть один из друзей находится в некоторой группе. Вместе с ним в группе окажутся 6 человек из 20 оставшихся одноклассников, а остальные 14 будут в других группах. Вероятность того, что второй друг окажется среди этих 14 человек, равна 14 : 20 = 0,7.

Ответ: 0,7.

Задача 6. В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того,

а) что наступит исход РОР (в первый и третий разы выпадает решка, во второй — орёл).

б) что выпадет хотя бы две решки.

Решение.

Всего возможных исходов — восемь. Двоичный код. **Обозначим 1-решка, 0-орел.**

000 001 010 011 100 101 110 111	О ОО О ОР ОР О ОРР РО О РОР РРО РРР

А) Благоприятным является один: решка-орел-решка.

Следовательно, искомая вероятность равна 1 : 8 = 0,125.

Б) Благоприятными являются четыре: решка-решка-решка, решка-решка-орел, решка-орел-решка, орел-решка-решка. Следовательно, искомая вероятность равна 4 : 8 = 0,5.

Ответ: 0,5.

Задача 7. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. 14 октября погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 17 октября в Волшебной стране будет отличная погода.

Решение.

Рассмотрим всевозможные случаи. Пусть **0-отличная погода, 1-хорошая погода.**

	14.10	**5.10**	**6.10**	**7.10**	
000					0,2·0,8·0,8 = 0,128
001					
010					0,2·0,2·0,2 = 0,008;
011					
100					0,8·0,2·0,8 = 0,128;
101					
110					0,8·0,8·0,2 = 0,128
111					

Для погоды на 15, 16 и 17 октября есть 4 варианта: ХХО, ХОО, ОХО, ООО (здесь Х — хорошая, О — отличная погода). Найдем вероятности наступления такой погоды:

Р(XXO) = 0,8·0,8·0,2 = 0,128;

Р(XOO) = 0,8·0,2·0,8 = 0,128;

Р(OXO) = 0,2·0,2·0,2 = 0,008;

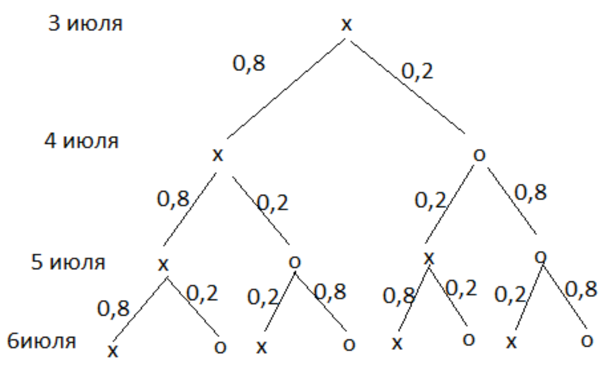
Р(OOO) = 0,2·0,8·0,8 = 0,128.

Указанные события несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий:

Р(ХХО) + Р(ХОО) + Р(ОХО) + Р(ООО) = 0,128 + 0,128 + 0,008 + 0,128 = 0,392.

Ответ:0,392

Задача 8



В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

Решение:

4 варианта: ХХО, ХОО, ОХО, ООО

Р(ХХО) + Р(ХОО) + Р(ОХО) + Р(ООО)=0,8·0,8·0,2+0,8·0,2·0,8+ +0,2·0,2·0,2+0,2·0,8·0,8=0,128+0,128+0,008+0,128=0,392

Ответ:0,392

Задача 9. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна

0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение А – кофе закончится в первом автомате; В – кофе закончится во втором автомате.

По условию задачи, *P(A)=P(B)=0,3. P(AB)=0,12.отметим, что эти события не являются независимыми, в противном случае P(AB)=0,09*

$$P(A+B)=0{,}3+0{,}3-0{,}12=0{,}48$$

Вероятность противоположного события «кофе останется в обоих автоматах» равна

$$P(\overline{A+B})=1-0{,}48=0{,}52$$

Ответ:0,52

Задача 10. Вероятности поражения цели первым и вторым орудиями равны, соответственно, 0,8 и 0,9. Найти вероятность поражения цели при залпе.

Решение. Поскольку вероятности поражения цели орудиями (события *А и В* соответственно) не зависят от результатов стрельбы каждого из напарников, то эти события независимы. Искомая вероятность рассчитывается по формуле *P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)* = 0,8 + 0,9 - 0,72 = 0,98.

В случае полной группы событий $A_{lt}A_2$, ..., *А,, сумма их вероятностей равна единице:*

$P(A_t) + P(A_2) + \quad + P(A) = 1.$

Другое условие задачи : Оба орудия поразят цель

*P(A * B) = P(A) * P(B)*=0,8 * 0,9 =0,72

Задача 11. Перед началом первого тура чемпионата по шахматам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвуют 16 шахматистов, среди которых 4 представителя России, в том числе Василий Зайцев. Найдите вероятность того, что в первом туре Василий Зайцев будет играть с каким-либо шахматистом из России.

Решение:

В первом туре участвуют 16 шахматистов, они разбиты на пары. Всего пар 8 (16:2=8).

Допустим, Василий Зайцев окажется в первой паре шахматистов. Вероятность этого найдем по определению вероятности: 2/16 = 1/8.

Вероятность того, что вторым окажется россиянин посчитаем тоже по определению вероятности: 3/15 = 1/5 (так как благоприятных исходов - 3, а всего возможно исходов 15, так как Василий уже выбран).

1) *Вероятность события А - это отношение числа исходов, благоприятствующих его наступлению к числу всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновозможных). Р(А)= m/n, где m - число благоприятных исходов, а n - число всех исходов.*

Значит, вероятность того, что Василий Зайцев окажется с россиянином в паре будет равна

1/8 * 1/5 = 1/40 =0,025(по формуле поиска вероятности произведения событий).

2*) Теорема: Вероятность произведения двух зависимых событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденного в предположении, что первое событие уже наступило: Р(А*В) = Р(А) * РА(В).)*

Но заметим, что нас устроило бы, что Василий будет в любой из 8 пар вместе со вторым россиянином. Поэтому искомая вероятность будет равна: 1/40 + 1/40 + 1/40+ 1/40+ 1/40+ 1/40 + 1/40+ 1/40 = 1/40 * 8 = 1/5 = 0,2 (по формуле поиска вероятности суммы несовместных событий)

4) Теорема: Вероятность суммы несовместных событий А и В равна сумме вероятностей этих событий Р(А+В) = Р(А)+Р(В).

Ответ: 0,2.

Задача 12(не допустить ошибки). Допустим, что 5 раз подбрасывалась монета, и каждый раз выпадал орел. Какова вероятность того, что при новом броске выпадет орел?

Решение.

Вероятность выпадения орла при одном бросании монеты равна $\frac{1}{2}$

Вероятность выпадения орла в каждом из пяти бросаний подряд равна $\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$, т. е. очень невелика. Принято, что вероятность выпадания орла при одном бросании равна $\frac{1}{2}$, это значит, что исходы равновозможны, и при каждом бросании монеты вероятность выпадения остается постоянной, равной $\frac{1}{2}$, не зависимо от результатов предыдущих бросаний.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задача 13. Найдите вероятность того, что случайным образом выбранное двузначное число при делении на 13 дает в остатке 5. Округлить до тысячных.

Решение.

Общее количество двузначных чисел $n = 9\cdot 10 = 90$; выбор каждого числа считаем равновозможным.

Рассмотрим событие *A:* «случайным образом выбранное двузначное число при делении на 13 дает в остатке 5».

Если число N при делении на 13 дает в остатке 5, то его можно I представить в виде: $N = 13\cdot к + 5$. Необходимо пересчитать *к,* при которых N остается двузначным, это и будет количество исходов, благоприятствующих событию *A:* подходят *к*= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, то есть $m_A= 7$. Искомая вероятность равна $P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{7}{90} \approx 0{,}078$

Ответ: 0,078

Задача 14. Найдите вероятность того, что случайным образом выбранное двузначное число при делении на 11 дает в остатке 10.

Решение.

Общее число двузначных чисел $n = 90$.

Событие *A:*=«случайным образом выбранное двузначное число при делении на 11 дает в остатке 10».

Количество благоприятствующих исходов m_Aравно числу значений *к,* при которых число 11k + 10 - двузначное. Это будет при *к*= 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, то есть $m_A= 9$.

Искомая вероятность $P(A)=\frac{m_A}{n} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

Ответ: 0,1

Задание 15. Стрелок стреляет по мишени один раз. В случае промаха стрелок делает второй выстрел по той же мишени. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена (либо первым, либо вторым выстрелом).

Пояснение.

Пусть A — событие, состоящее в том, что мишень поражена стрелком с первого выстрела, B — событие, состоящее в том, что мишень поражена со второго выстрела. Вероятность события A равна $P(A) = 0{,}7$. Событие B наступает, если, стреляя первый раз, стрелок промахнулся, а, стреляя второй раз, попал. Это независимые события, их вероятность равна произведению вероятностей этих событий: $P(B) = 0{,}3\cdot 0{,}7 = 0{,}21$. События A и B несовместные, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий: $P(A + B) = P(A) + P(B) = 0{,}7 + 0{,}21 = 0{,}91$.

Ответ: 0,91.

Задание 16. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

Пояснение.

Джон промахнется, если схватит пристрелянный револьвер и промахнется из него, или если схватит непристрелянный револьвер и промахнется из него. По формуле условной вероятности, вероятности этих событий равны соответственно $0{,}4\cdot(1-0{,}9)=0{,}04$ и $0{,}6\cdot(1-0{,}2)=0{,}48$. Эти события несовместны, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий: $0{,}04+0{,}48=0{,}52$.

Ответ: 0,52.

Приведем другое решение.

Джон попадает в муху, если схватит пристрелянный револьвер и попадет из него, или если схватит непристрелянный револьвер и попадает из него. По формуле условной вероятности, вероятности этих событий равны соответственно $0{,}4\cdot0{,}9=0{,}36$ и $0{,}6\cdot0{,}2=0{,}12$. Эти события несовместны, вероятность их суммы равна сумме вероятностей этих событий: $0{,}36+0{,}12=0{,}48$. Событие, состоящее в том, что Джон промахнется, противоположное. Его вероятность равна $1-0{,}48=0{,}52$.

Задание 17. Из ящика, в котором лежат фломастеры, не глядя достали два фломастера. Найдите вероятность того, что эти фломастеры оказались одного цвета, если известно, что в ящике 12 синих и 13 красных фломастеров.

Решение.

Изначально в ящике 12+13=25 фломастеров. При выборе первого фломастера вероятность того, что он будет синего цвета, равна 12/25. Если первый выбранный фломастер действительно оказался синего цвета, то в ящике остается 24 фломастера и из них 11 синих. Поэтому вероятность выбора второго синего фломастера, равна 11/24. Так как и первый и второй фломастеры должны быть синими, получаем произведение этих вероятностей:

$$P_1=\frac{12}{25}\cdot\frac{11}{24}=\frac{132}{600}=0,22$$

Рассмотрим вторую ситуацию, когда оба фломастера могут быть красными. Подобными рассуждениями получаем вероятность

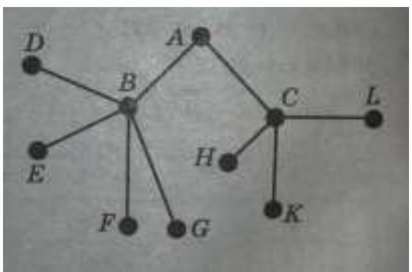
$$P_2=\frac{13}{25}\cdot\frac{12}{24}=\frac{13}{50}=0,26$$

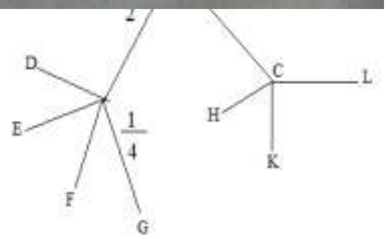
Так как нас интересует наступление или первого или второго исхода (при несовместности этих событий), получаем значение искомой вероятности:

$$P=P_1+P_2=0,22+0,26=0,48$$

Ответ: 0,48.

Задача 18. Пенсионер гуляет по дорожкам парка. На каждой развилке он наудачу выбирает следующую дорожку, не возвращаясь обратно. Схема дорожек показана на рисунке. Пенсионер начинает прогулку в точке A. Найдите вероятность того, что он придет в точку G.





Решение:

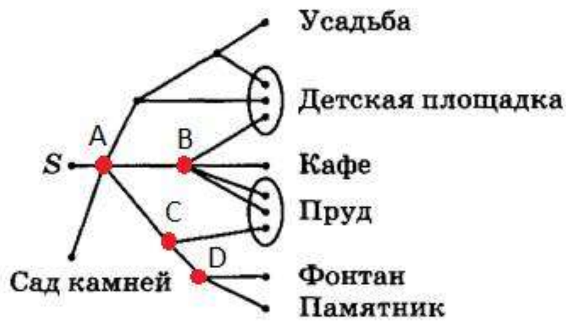
Чтобы попасть в точку G, пенсионер должен будет сначала попасть в точку B (так как если он сначала попадет в точку С, то по условию задачи вернуться обратно в точку А он не сможет).

Поэтому напомним, что такое условная вероятность.

**Условная вероятность:* *Пусть А и В - зависимые события. Условной вероятностью $P_A(B)$ события В называется вероятность события В, найденная в предположении, что событие А уже наступило.*

Пусть из точки А в точку G должно произойти два события:
Событие М - что пенсионер идет из точки А в точку В.
Событие N - что пенсионер идет из точки В в точку G.
Обозначим за Q событие, что пенсионер попадет в точку G по формуле P(Q) = P(M) * Pм(N).
Найдем P(M) = 1/2 по определению вероятности
Найдем Pм(N) = 1/4 тоже по определению вероятности.
1) Вероятность события А - это отношение числа исходов, благоприятствующих его наступлению к числу всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновозможных). P(A)= m/n, где m - число благоприятных исходов, а n - число всех исходов.
Поэтому P(Q) = 1/2 * 1/4 = 1/8 = 0,125 (по формуле поиска вероятности произведения событий
 * *Теорема: Вероятность произведения двух зависимых событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденного в предположении, что первое событие уже наступило: P(A*B) = P(A) * $P_A(B)$.)*
Ответ: 0,125.

Задача 20. Артём гуляет по парку. Он выходит из точки S и, дойдя до очередной развилки, с равными шансами выбирает следующую дорожку, но не возвращается обратно. Найдите вероятность того, что таким образом он выйдет к пруду или фонтану.



Решение.
Рассмотрим следующие точки: A, B, C, D, из которых Артем может попасть к пруду или фонтану (см. рисунок ниже).
Рассмотрим маршрут A-B-пруд. Вероятность его выбора будет определяться сначала выбором направления из точки A в точку B, а затем, из точки B в сторону пруда. Вероятность выбора из A в B, равна 1/4 (1 дорожка из 4-х возможных), а вероятность из B к пруду – 2/4=1/2 (2 дорожки из 4-х возможных). Следовательно, вероятность попадания из S к пруду $P_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ через A и B, равна

К пруду также можно попасть через A-C-пруд.
Вероятность этого маршрута, равна:

$$P_2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Наконец, к фонтану, можно пройти по маршруту A-C-D-фонтан. Вероятность этого пути:

$$P_3 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$
.

Так как все три события несовместны, то искомая вероятность посещения или пруда или фонтана, равна сумме этих вероятностей:

$$P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16} = 0,3125$$

Ответ: 0,3125.

Задача 21. За круглый стол на 101 стул в случайном порядке рассаживаются 99 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что между девочками будет сидеть один мальчик.

Решение.

Пусть первой за стол сядет девочка, тогда для каждого из оставшихся ребят (в том числе и для второй девочки) вероятность оказаться на любом из оставшихся стульев равна $\frac{1}{100}$.

А мест, удовлетворяющих условию задачи, только два. Таким образом, вероятность, что между двумя девочками будет сидеть один мальчик равна $2\cdot\frac{1}{100} = 0,02$

Ответ: 0,02

Используемая литература:

1. Задачи открытого банка заданий ЕГЭ по математике 2019.
2. В. Н. Студенецкая. «Решение задач по статистике, комбинаторике теории вероятностей», Волгоград, 2005г.
3. «ЕГЭ математика 2019г.», И.В. Ященко (базовый, профильный уровень).
4. Интернет – ресурсы.
5. Д.Д. Гущин, Решу ЕГЭ, 2019г.