Муниципальное казенное учреждение
«Центр поддержки образования»
муниципального образования Динской район

Сборник материалов по подготовке к ГИА по ФИЗИКЕ по теме «Электростатика»

Составитель учитель физики БОУ СОШ №3
Ватян Севан Ервандович

ст.Динская, 2019

ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ТЕЛ

Основные формулы

- Закон Кулона

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2},$$

где q_1, q_2 – точечные заряды; r – расстояние между зарядами; k – коэффициент пропорциональности, зависящий от системы единиц, в системе СИ $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9 \frac{Н\cdot м^2}{Кл^2}$, ε_0 – электрическая постоянная, $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \frac{Ф}{м}$.

- Закон Кулона в векторной форме

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r,$$

где $\vec{e}_r$ – единичный вектор, направленный от заряда q_1 к заряду q_2.

- $\tau = \mathrm{d}q/\mathrm{d}l$ – линейная плотность заряда, измеряется в Кл/м;

  $\sigma = \mathrm{d}q/\mathrm{d}S$ – поверхностная плотность заряда, измеряется в Кл/м^2;

  $\rho = \mathrm{d}q/\mathrm{d}V$ – объемная плотность заряда, измеряется в Кл/м^3.

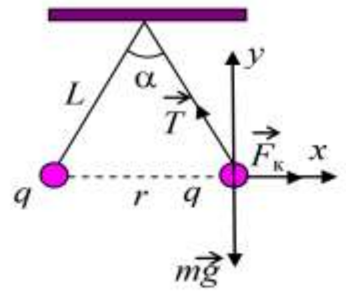
- Закон сохранения заряда

$$\sum_i^n q_i = const,$$

где $\sum_i^n q_i$ – алгебраическая сумма зарядов, входящих в изолированную систему; n – число зарядов.

Задача 1. Два шарика массой $m = 0{,}1$ г каждый подвешены в одной точке на нитях длиной $L = 20$ см каждая. Получив одинаковый заряд, шарики разошлись так, что нити образовали между собой угол $\alpha = 60°$. Найти заряд каждого шарика.

Решение:



Расставим силы, действующие на шарики: это – сила Кулона $\boldsymbol{F}_{кл}$, сила натяжения нити $\boldsymbol{T}$ и сила тяжести $\boldsymbol{mg}$. Поскольку шарики находятся в равновесии, то согласно второму закону Ньютона:

$$\boldsymbol{F}_{кл} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{mg} = \boldsymbol{0}.$$

В проекциях на ось OX и $OУ$:

$$F_{кл} = T\sin\alpha/2,$$
$$mg = T\cos\alpha/2,$$

поделив одно на другое получим

$$F_{кл} = mg\,\mathrm{tg}\alpha/2. \qquad (1)$$

С другой стороны кулоновская сила равна

$$F_{кл} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad (2)$$

где r – расстояние между зарядами, из треугольника $r = 2l\sin\alpha/2$. Приравняем формулы (1) и (2)

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 4l^2\sin^2{\alpha/2}} = mg\,tg\,\alpha/2,$$

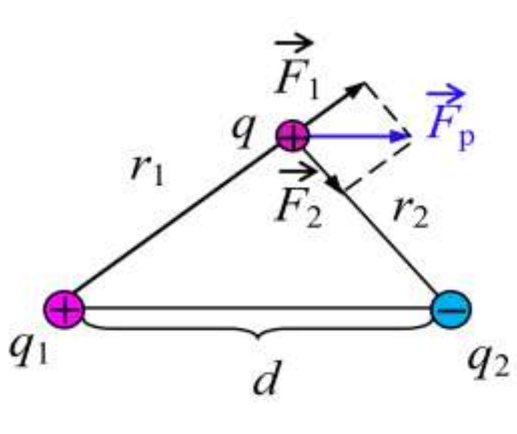
$$q^2 = mg\,tg\,\alpha/2\; 4\pi\varepsilon_0 4l^2\sin^2\alpha/2,$$

$$q = 4l\sin\alpha/2\sqrt{mg\pi\varepsilon_0\,tg\,\alpha/2},$$

$$q = 4\cdot 0{,}2\cdot\sin 30°\sqrt{10^{-4}\cdot 9{,}8\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\,tg30°} =$$
$$= 0{,}8\cdot 0{,}5\sqrt{272{,}33\cdot 10^{-16}\cdot 0{,}577} = 5\cdot 10^{-8} = 50нКл.$$

Задача 2. Расстояние между двумя точечными зарядами $q_1 = 1$ мкКл и $q_2 = -q_1$ равно 10 см. Определить силу F, действующую на точечный заряд $q = 0{,}1$ мкКл, удаленный на $r_1 = 6$ см от первого и на $r_2 = 8$ см от второго зарядов.

Решение.



По условию задачи видно, что заряды находятся в углах прямоугольного треугольника со сторонами 10 см, 8 см и 6 см ($10^2 = 8^2 + 6^2$). Расставим силы Кулона, действующие на заряд q со стороны зарядов q_1 и q_2, тогда результирующая сила $\boldsymbol{F}$ есть векторная сумма двух сил $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2},$$

модуль силы можно найти по теореме Пифагора (поскольку угол между силами составляет 90°):

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}\ . \tag{1}$$

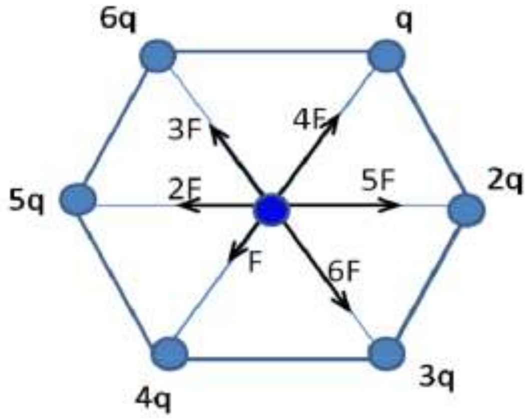
По закону Кулона силы $F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_1}{r_1^2}$ и $F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_2}{r_2^2}$, подставим в (1)

$$F = \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_1}{r_1^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_2}{r_2^2}\right)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}qq_1\sqrt{\frac{1}{r_1^4} + \frac{1}{r_2^4}}\,.$$

$$F = 9\cdot10^9\cdot10^{-6}\cdot10^{-7}\sqrt{\frac{1}{0{,}06^4} + \frac{1}{0{,}08^4}} = 0{,}0287\,H.$$

Задача 3. В вершинах правильного шестиугольника со стороной $a = 10$ см расположены точечные заряды q, $2q$, $3q$, $4q$, $5q$, $6q$ ($q = 0{,}1$ мкКл). Найти силу F, действующую на точечный заряд q, лежащий в плоскости шестиугольника и равноудаленный от его вершин.

Решение.



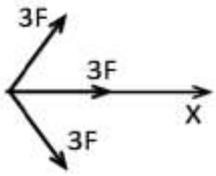
Заряд, на который действует сила со стороны всех остальных зарядов, расположен в центре на пересечении диагоналей, причем он равноудален от каждого заряда. Расставим кулоновские силы и найдем результирующую как векторную сумму:

$$\boldsymbol{F_p} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} + \boldsymbol{F_3} + \boldsymbol{F_4} + \boldsymbol{F_5} + \boldsymbol{F_6}.$$

По закону Кулона $F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_1}{r_1^2}$, т. к. $q_1 = q$, а $r_1 = a$, то $F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2} = F$,

$F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_2}{r_2^2}$, т. к. $q_2 = 2q$, а $r_2 = a$, то $F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2}{a^2} = 2F_1$ и так далее.

Для всех сил получим следующие соотношения: $F_2 = 2F$, $F_3 = 3F$, $F_4 = 4F$, $F_5 = 5F$ и $F_6 = 6F$. Сложив попарно вектора сил, получим

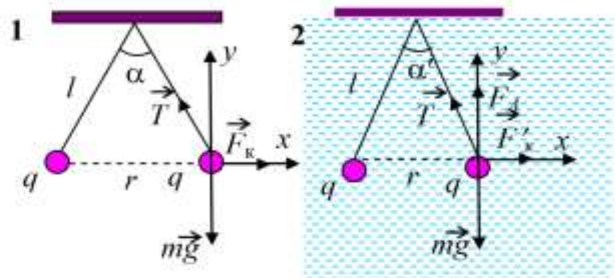


В проекциях на ось OX:

$$3F\cos 60° + 3F + 3F\cos 60° = F_p,$$
$$3F\cdot ½ + 3F + 3F\cdot ½ = 6F = F_p,$$
$$F_p = 6\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2} = 6\cdot 9\cdot 10^9\cdot\frac{\left(10^{-7}\right)^2}{0{,}1^2} = 54\cdot 10^{-3}H = 54мH.$$

Задача 4. Два одинаковых заряженных шарика подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины. При этом нити разошлись на угол α. Шарики погружаются в масло плотностью $\rho_0 = 8\cdot 10^2$ кг/м^3. Определить диэлектрическую проницаемость ε масла, если угол расхождения нитей при погружении шариков в масло остается неизменным. Плотность материала шариков $\rho = 1{,}6\cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение.



$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{F_к}{mg}$$

$$tg\frac{\alpha'}{2} = \frac{F_к'}{mg - F_A},$$
$$F_к' = \frac{F_к}{\varepsilon}$$

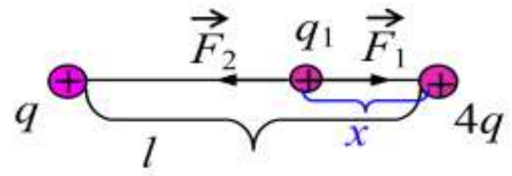
Т. к. по условию задачи угол отклонения не меняется $\alpha = \alpha'$, то

$$\frac{F_к}{mg} = \frac{F_к'}{mg - F_A},$$
$$\frac{F_к}{mg} = \frac{F_к}{\varepsilon(mg - F_A)},$$
$$\frac{F_к}{\rho Vg} = \frac{F_к}{\varepsilon(\rho Vg - \rho_0 Vg)},$$
$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\varepsilon(\rho - \rho_0)} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{\rho}{(\rho - \rho_0)}}.$$
$$\varepsilon = \frac{1{,}6\cdot 10^3}{\left(1{,}6\cdot 10^3 - 0{,}8\cdot 10^3\right)} = 2.$$

Задача 5. Два положительных точечных заряда q и $4q$ закреплены на расстоянии $l = 60$ см друг от друга. Определить, в какой точке на прямой, проходящей через заряды, следует поместить третий заряд q_1 так, чтобы он находился в равновесии. Указать, какой знак должен иметь этот заряд для того, чтобы равновесие было устойчивым, если перемещения заряда возможны только вдоль прямой, проходящей через закрепленные заряды.

Решение.

Заряды закреплены



Поместим заряд q_1 на расстоянии x от заряда $4q$. Расставим кулоновские силы $\boldsymbol{F_1}$ и $\boldsymbol{F_2}$, действующие на этот заряд. Для того чтобы заряды были в равновесии необходимо, чтобы сила F_1, действующая от заряда q на заряд q_1 была равна силе F_2, действующей от заряда $4q$ на заряд q_1.

$$F_1 = F_2,$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_1}{(l-x)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4qq_1}{x^2},$$

$$\frac{1}{(l-x)^2} = \frac{4}{x^2},$$

$$x^2 - 4l^2 + 8lx - 4x^2 = 0,$$

$$-3x^2 + 8lx - 4l^2 = 0,$$

$$D = 64l^2 - 4\cdot 3\cdot 4l^2 = 16l^2,$$

$$x_1 = \frac{-8l-4l}{-6} = 2l,\ x_2 = \frac{-8l+4l}{-6} = \frac{2}{3}l,$$

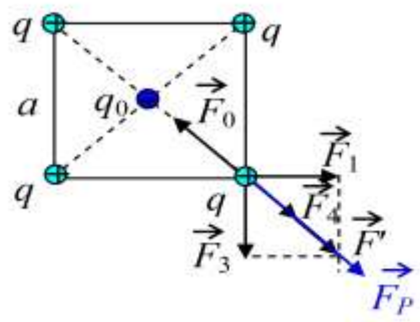
т. к. x не может быть больше l, то

$$x = \frac{2}{3}l = \frac{2}{3}\cdot 60 = 40\,см.$$

Для устойчивого равновесия q_1 должен быть *положительным*. Если он сместится к $4q$, то сила отталкивания возрастет, а со стороны заряда q сила отталкивания уменьшится, следовательно q_1 вернется на свое место.

Задача 6. В вершинах квадрата находятся одинаковые заряды $q = 0{,}3$ нКл каждый. Какой отрицательный заряд q_0 нужно поместить в центре квадрата, чтобы сила взаимного отталкивания положительных зарядов была уравновешена силой притяжения отрицательного заряда?

Решение.



Т. к. в вершинах квадрата находятся одинаковые заряды, то достаточно рассмотреть все силы, действующие на один заряд (на другие будет также). Расставим кулоновские силы, действующие на заряд в вершине 2 и найдем результирующую как векторную сумму:

$$\boldsymbol{F_p} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_0} + \boldsymbol{F_3} + \boldsymbol{F_4}.$$

По закону Кулона $F_1 = F_3$, $F_4 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q^2}{2a^2}$ (диагональ квадрата равна $r_{24} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$), $F_0 = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2qq_0}{a^2}$ (половина диагонали квадрата равно $r_{24}/2 = a\sqrt{2}/2$). Так как все заряды находятся в равновесии, то результирующая сила будет равна нулю. Спроецируем все силы на ось OX:

$$2F_1 \cos 45° + F_4 - F_0 = 0,$$

$$F_0 = 2F_1 \cos 45° + F_4,$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q|q_0|}{a^2} = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2a^2},$$

$$2q|q_0| = q^2\sqrt{2} + \frac{q^2}{2},$$

$$|q_0| = q\left(\frac{2\sqrt{2}+1}{4}\right) = 0,29\ нКл.$$

Напряженность поля точечных зарядов

Основные формулы

- Напряженность электрического поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}},$$

где $\vec{F}$ – сила, действующая на пробный заряд $q_{пр}$, помещенный в данную точку поля.

- Сила, действующая на всякий точечный заряд q в точке поля с напряженностью $\vec{E}$

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

- Напряженность электрического поля, создаваемого точечным зарядом на расстоянии r от заряда

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r,$$

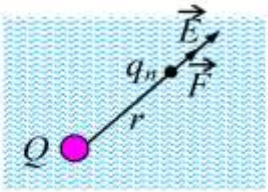
где ε – диэлектрическая проницаемость вещества, для воздуха $\varepsilon \approx 1$.

- Принцип суперпозиции электрических полей, согласно которому напряженность $\vec{E}$ результирующего поля, созданного несколькими точечными зарядами, равна векторной (геометрической) сумме напряженностей складываемых полей

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i.$$

Задача 1. Определить напряженность E электрического поля, создаваемого точечным зарядом Q = 10 нКл на расстоянии r = 10 см от него. Диэлектрик – масло (ε = 2,2).

Решение.



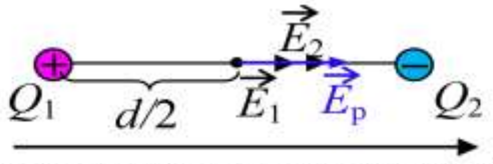
Заряд Q создает вокруг себя поле. Поместим на расстоянии r пробный точечный заряд q_n. Напряженность электрического поля, созданная зарядом Q на расстоянии r равна $E = \dfrac{F}{q_n}$, где F – кулоновская сила взаимодействия точечных зарядов $F = \dfrac{Qq_n}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$, тогда напряженность $E = \dfrac{Qq_n}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\dfrac{1}{q_n} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$, где $\varepsilon = 2{,}2$ – диэлектрическая проницаемость масла.

$$E = 9\cdot10^9\frac{10^{-8}}{2{,}2\cdot0{,}1^2} = 4{,}09\cdot10^3\frac{В}{м} = 4{,}09\frac{кВ}{м}.$$

Задача 2. Расстояние d между двумя точечными зарядами $Q_1 = +8$ нКл и $Q_2 = -5{,}3$ нКл равно 40 см. Вычислить напряженность E поля в точке, лежащей посередине между зарядами. Чему равна напряженность, если второй заряд будет положительным?

Решение.

Согласно принципу суперпозиции электрических полей, каждый заряд создает поле независимо от присутствия в пространстве других зарядов. Поэтому напряженность $\boldsymbol{E_p}$ электрического поля в искомой точке может быть найдена как векторная сумма напряженностей $\boldsymbol{E_1}$ и $\boldsymbol{E_2}$ полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности: $\boldsymbol{E_p} = \boldsymbol{E_1} + \boldsymbol{E_2}$.



Напряженности электрического поля, создаваемого в вакууме первым и вторым зарядами, соответственно равны

$$E_1 = \frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} \text{ и } E_2 = \frac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}.$$

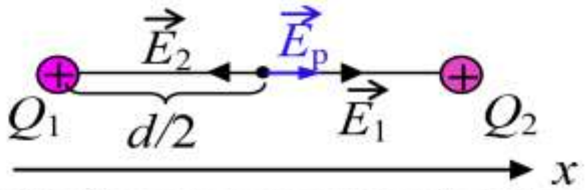
Вектор $\boldsymbol{E_1}$ (см. рис.) направлен по силовой линии от заряда Q_1, так как заряд $Q_1 > 0$; вектор $\boldsymbol{E_2}$ направлен также по силовой линии, но к заряду Q_2, так как $Q_2 < 0$. Модуль вектора E_p найдем как сумму проекций напряженностей E_1 и E_2 на ось x

$$E_p = E_1 + E_2,$$

$$E_p = \frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0\left(\dfrac{d}{2}\right)^2} + \frac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon_0\left(\dfrac{d}{2}\right)^2} = \frac{4}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left(|Q_1| + |Q_2|\right),$$

$$E_p = 9\cdot10^9\frac{4}{0{,}4^2}(8+5{,}3)\cdot10^{-9} = 2993\frac{В}{м} \approx 2{,}99\frac{кВ}{м}.$$

В случае, когда второй заряд положительный направление вектора $\boldsymbol{E_2}$ изменится на противоположное (см. рис.).



Модуль вектора E_p найдем как сумму проекций напряженностей E_1 и E_2 на ось x

$$E_p = E_1 - E_2,$$

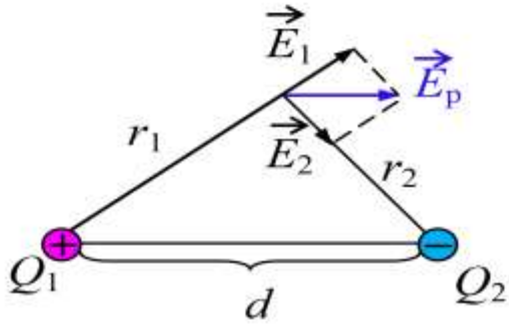
$$E_p = \frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{4}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left(|Q_1| - |Q_2|\right),$$

$$E_p = 9\cdot10^9\frac{4}{0,4^2}(8-5,3)\cdot10^{-9} = 607,5\frac{В}{м}.$$

Задача 3. Расстояние d между двумя точечными зарядами $Q_1 = +9$ нКл и $Q_2 = -16$ нКл равно 5 см. Вычислить напряженность E поля в точке, удаленной от первого заряда на $r_1 = 3$ см и от второго на $r_2 = 4$ см.

Решение.

Согласно принципу суперпозиции электрических полей, каждый заряд создает поле независимо от присутствия в пространстве других зарядов. Поэтому напряженность $\boldsymbol{E_p}$ электрического поля в искомой точке может быть найдена как векторная сумма напряженностей $\boldsymbol{E_1}$ и $\boldsymbol{E_2}$ полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности: $\boldsymbol{E_p} = \boldsymbol{E_1} + \boldsymbol{E_2}$.



Напряженности электрического поля, создаваемого в вакууме первым и вторым зарядами, соответственно равны

$$E_1 = \frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} = k\frac{|Q_1|}{r_1^2} \text{ и } E_2 = \frac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} = k\frac{|Q_2|}{r_2^2}.$$

Вектор $\boldsymbol{E_1}$ (см. рис.) направлен по силовой линии от заряда Q_1, так как заряд $Q_1 > 0$; вектор $\boldsymbol{E_2}$ направлен также по силовой линии, но к заряду Q_2, так как $Q_2 < 0$. Так как по условию задачи выполняется соотношение $d^2 = r_1^2 + r_2^2$ $\left(5^2 = 3^2 + 4^2\right)$, то треугольник прямоугольный. Тогда модуль вектора напряженности равен:

$$E_p = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{\left(k\frac{|Q_1|}{r_1^2}\right)^2 + \left(k\frac{|Q_2|}{r_2^2}\right)^2} = k\sqrt{\left(\frac{|Q_1|}{r_1^2}\right)^2 + \left(\frac{|Q_2|}{r_2^2}\right)^2},$$

$$E_p = 9\cdot10^9\sqrt{\left(\frac{9\cdot10^{-9}}{3^2\cdot10^{-4}}\right)^2 + \left(\frac{16\cdot10^{-9}}{4^2\cdot10^{-4}}\right)^2} =$$

$$= 9\cdot10^9\sqrt{2}\cdot10^{-5} = 12,7\cdot10^4\frac{В}{м} = 127\frac{кВ}{м}.$$

ПОТЕНЦИАЛ. РАБОТА ПО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ ЗАРЯДА В ПОЛЕ

Основные формулы

- Потенциал электростатического поля

$$\varphi = \frac{W}{q} = \frac{A_\infty}{q},$$

где W – потенциальная энергия заряда в поле другого заряда, A_∞ – работа сил поля по перемещению точечного положительного заряда из данной точки поля в бесконечность.

- Потенциал электрического поля, создаваемый точечным зарядом Q на расстоянии r от заряда

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}.$$

- Потенциал электрического поля, созданного системой n точечных зарядов, в данной точке в соответствии с принципом суперпозиции электрических полей равен алгебраической сумме потенциалов φ_1, φ_2, …, φ_n, создаваемых отдельными точечными зарядами Q_1, Q_2, …, Q_n:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i.$$

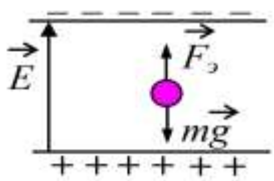
- Энергия W взаимодействия системы точечных зарядов Q_1, Q_2, …, Q_n определяется работой, которую эта система зарядов может совершить при удалении их относительно друг друга в бесконечность, и выражается формулой

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i\varphi_i,$$

где φ_i – потенциал поля, создаваемого всеми n–1 зарядами (за исключением 1-го) в точке, где расположен заряд Q_i.

Задача 1. В плоском, горизонтально расположенном конденсаторе заряженная капелька ртути находится в равновесии при напряженности электрического поля E = 60 кВ/м. Заряд капли Q = 1 нКл. Найти радиус капли. ($\rho_{ртути} = 13{,}6\cdot10^3$ кг/м^3).

Решение.



На каплю действуют электрическая сила $\boldsymbol{F}_э$ и сила тяжести $m\boldsymbol{g}$. Так как капля находится в равновесии, то согласно второму закону Ньютона

$$\boldsymbol{F}_э + m\boldsymbol{g} = 0,$$

$$F_э = mg. \qquad (1)$$

Электрическая сила равна $F_э = Q\,E$, масса капли $m = \rho_{ртути}\,V$, объем капли $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Подставляя все выражения в (1) получим

$$QE = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{ртути} g \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3QE}{4\pi\rho_{ртути} g}}.$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3\cdot10^{-9}\cdot60\cdot10^3}{4\cdot3{,}14\cdot13{,}6\cdot10^3\cdot9{,}8}} = 0{,}48\cdot10^{-3}\,м = 0{,}48\,мм.$$

Задача 2. 562 одинаковых шарообразных капелек ртути диаметром 0,25 мм заряжены до одного и того же потенциала 65 В. Каков будет потенциал и заряд большой капли, полученной в результате слияния этих капель.

Решение.

Потенциал одной капли

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} = k\frac{q}{r}, \qquad (1)$$

потенциал полученной капли

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} = k\frac{Q}{R}. \qquad (2)$$

По закону сохранения заряда, заряд полученной капли $Q = N\cdot q$, выразим из (1) заряд маленькой капли $q = \frac{\varphi_0 r}{k}$, тогда

$$Q = N\frac{\varphi_0 r}{k} = N\frac{\varphi_0 d}{k2} = 562\cdot\frac{65\cdot 0,25\cdot 10^{-3}}{9\cdot 10^9\cdot 2} = 507\cdot 10^{-12}\,Кл.$$

Для того чтобы посчитать по формуле (2) потенциал полученной капли, необходимо знать её радиус. Объем полученной капли $V = N\cdot V_0$,

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = N\frac{4}{3}\pi r^3, \quad \Rightarrow \quad R^3 = Nr^3, \quad \Rightarrow \quad R = r\sqrt[3]{N}.$$

Подставим полученный результат в (2)

$$\varphi = k\frac{Q}{R} = k\frac{Q}{r\sqrt[3]{N}} = kN\frac{\varphi_0 r}{k}\frac{1}{r\sqrt[3]{N}} = \varphi_0\sqrt[3]{N^2}.$$

$$\varphi = 65\sqrt[3]{562^2} = 4427\,В.$$

Задача 3. Капля ртути заряжена до потенциала 20 В, ее разбили на 100 одинаковых частей. Найти потенциал каждой части.

Решение.

Капля представляет собой шар радиуса R, тогда ее потенциал

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} = k\frac{Q}{R}, \qquad (1)$$

потенциал маленькой капли (после разделения)

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} = k\frac{q}{r}. \qquad (2)$$

По закону сохранения заряда, заряд полученной капельки $q = Q/N$, а ее радиус (т. к. объем капли $V_0 = N\cdot V$)

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = N\frac{4}{3}\pi r^3, \quad \Rightarrow \quad R^3 = Nr^3, \quad \Rightarrow \quad r = R/\sqrt[3]{N}.$$

Подставляя в (1) получим

$$\varphi = k\frac{q}{r} = k\frac{Q}{Nr} = k\frac{Q\sqrt[3]{N}}{NR} = k\frac{Q}{R}\frac{1}{\sqrt[3]{N^2}} = \varphi_0\frac{1}{\sqrt[3]{N^2}}.$$

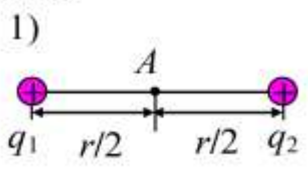
$$\varphi = \frac{20}{\sqrt[3]{100^2}} = \frac{20}{10\sqrt[3]{10}} \approx 1\,В.$$

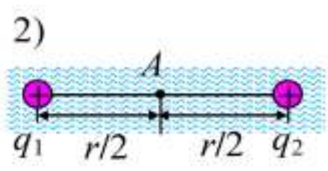
Задача 4. Два одинаковых точечных положительных заряда, по 1 нКл каждый, отстоят на расстоянии 100 см друг от друга. Найти потенциал точки поля, находящейся посередине между зарядами, когда

1) заряды находится в вакууме $\varepsilon = 1$;

2) заряды находятся в оливковом масле $\varepsilon = 3,1$.

Решение.





1) Потенциал в точке A по принципу суперпозиции равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых в этой точке зарядами q_1 и q_2.

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = k\frac{q_1}{r/2} + k\frac{q_2}{r/2} = k\frac{4q}{r},$$

$$\varphi = 9\cdot 10^9\frac{4\cdot 10^{-9}}{1} = 36\text{В}.$$

2) Заряды находятся в оливковом масле с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 3{,}1$, следовательно, их потенциал уменьшится в ε раз. По принципу суперпозиции

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = k\frac{q_1}{\varepsilon r/2} + k\frac{q_2}{\varepsilon r/2} = k\frac{4q}{\varepsilon r},$$

$$\varphi = 9\cdot 10^9\frac{4\cdot 10^{-9}}{3{,}1\cdot 1}\text{В} \cong 12\,\text{В}.$$

Задача 5. Расстояние между двумя металлическими шарами велико по сравнению с их размерами. Радиус первого шара $R_1 = 6$ см, заряжен до потенциала $\varphi_1 = 300$ В, а шар радиусом $R_2 = 4$ см – до потенциала $\varphi_2 = 500$ В. Определить потенциал φ шаров после того, как их соединили металлическим проводником. Емкостью соединительного проводника пренебречь.

Решение.

До соединения шаров каждый обладал потенциалом

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_1}{R_1} = k\frac{q_1}{R_1} \quad \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{q_2}{R_2} = k\frac{q_2}{R_2}$$

Выразим заряд каждого шара через их потенциалы

$$q_1 = \frac{\varphi_1 R_1}{k},\ q_2 = \frac{\varphi_2 R_2}{k}.$$

После соединения металлическим проводником, заряды будут на телах перераспределяться до тех пор, пока не выровняются их потенциалы $\varphi'_1 = \varphi'_2 = \varphi$,

$$\varphi'_1 = k\frac{q'_1}{R_1},\ \varphi'_2 = k\frac{q'_2}{R_2},$$

а заряды

$$q'_1 = \frac{\varphi R_1}{k},\ q'_2 = \frac{\varphi R_2}{k}.$$

По закону сохранения зарядов $q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2$. Подставим выражения для зарядов, получим

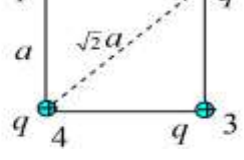
$$\frac{\varphi_1 R_1}{k} + \frac{\varphi_2 R_2}{k} = \frac{\varphi R_1}{k} + \frac{\varphi R_2}{k},$$

$$\varphi_1 R_1 + \varphi_2 R_2 = \varphi(R_1 + R_2),$$

$$\varphi = \frac{\varphi_1 R_1 + \varphi_2 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{300\cdot 6\cdot 10^{-2} + 500\cdot 4\cdot 10^{-2}}{6\cdot 10^{-2} + 4\cdot 10^{-2}} = \frac{1800 + 2000}{10} = 380\,B.$$

Задача 6. В вершинах квадрата со стороной a находятся одинаковые по абсолютной величине заряды q. Определить энергию взаимодействия системы.

Решение.



1 *способ.* Пусть в вершинах квадрата находятся все положительные заряды. Каждый заряд попарно взаимодействуют между собой, а энергия всей системы определится как сумма

$$W = W_{12} + W_{13} + W_{14} + W_{23} + W_{24} + W_{34}.$$

Энергия взаимодействия двух точечных зарядов $W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}}$, где r_{12} – расстояние между зарядами q_1 и q_2. Так как все заряды одинаковые по величине, и находятся на одном и том же расстоянии, то

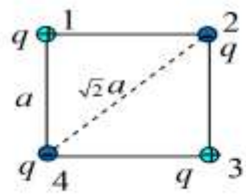
$$W_{12} = W_{13} = W_{23} = W_{34} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}} = k\frac{q^2}{a}\ (r_{12} = a),$$

$$W_{13} = W_{42} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r_{13}} = k\frac{q^2}{a\sqrt{2}}\ (r_{13} = a\sqrt{2}).$$

Перепишем энергию системы $W = 4\cdot W_{12} + 2\cdot W_{13}$

$$W = 4k\frac{q^2}{a} + 2k\frac{q^2}{a\sqrt{2}} = k\left(4 + \frac{2}{a\sqrt{2}}\right)\frac{q^2}{a}.$$

2 *способ.* Пусть в вершинах квадрата на диагонали 24 находятся отрицательные заряды. Определим энергию всей системы по формуле



$$W = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi(i),$$

где $\varphi(i)$ – потенциал в точке, где находится i заряд, создаваемый всеми другими зарядами (кроме i-того заряда).

Энергия системы

$$W = \frac{1}{2}\left(q_1\varphi(1) - q_2\varphi(2) + q_3\varphi(3) - q_4\varphi(4)\right), \quad (1)$$

где $\varphi(1)$ – потенциал в точке 1, создаваемый зарядами q_2, q_3 и q_4; $\varphi(2)$ – потенциал в точке 2, создаваемый зарядами q_1, q_3 и q_4 и т. д.

Потенциал в точке 1 определим по принципу суперпозиции, как алгебраическая сумма всех потенциалов

$$\varphi(1) = -k\frac{q_2}{a} - k\frac{q_4}{a} + k\frac{q_3}{a\sqrt{2}} = -2k\frac{q}{a} + k\frac{q}{a\sqrt{2}},$$

$$\varphi(2) = k\frac{q_1}{a} + k\frac{q_3}{a} - k\frac{q_4}{a\sqrt{2}} = 2k\frac{q}{a} - k\frac{q}{a\sqrt{2}} = -\varphi(1),$$

$$\varphi(3) = -k\frac{q_2}{a} - k\frac{q_4}{a} + k\frac{q_1}{a\sqrt{2}} = -2k\frac{q}{a} + k\frac{q}{a\sqrt{2}} = \varphi(1),$$

$$\varphi(4) = k\frac{q_1}{a} + k\frac{q_3}{a} - k\frac{q_2}{a\sqrt{2}} = 2k\frac{q}{a} - k\frac{q}{a\sqrt{2}} = -\varphi(1).$$

Подставим полученные выражения в (1)

$$W = \frac{1}{2}\left(q\varphi(1) - q\left(-\varphi(1)\right) + q\varphi(1) - q\left(-\varphi(1)\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(q\varphi(1) + q\varphi(1) + q\varphi(1) + q\varphi(1)\right) = 2q\varphi(1)$$

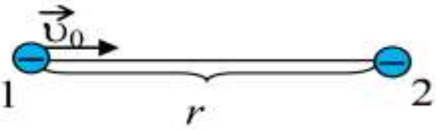
Подставляя выражение для потенциала в точке 1 получим энергию взаимодействия системы

$$W = 2q\left(-2k\frac{q}{a} + k\frac{q}{a\sqrt{2}}\right) = 2k\frac{q^2}{a}\left(-2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = k\frac{q^2}{a}\left(\sqrt{2} - 4\right).$$

Энергия взаимодействия будет отрицательной, это означает, что «некие силы пытаются держать вместе заряды», иначе говоря, получили энергию связи зарядов.

Задача 7 . До какого расстояния r могут сблизиться два электрона, если они движутся навстречу друг другу с относительной скоростью $\upsilon_0 = 10^6$ м/с?

Решение.



Так как υ_0 – относительная скорость, то можно считать, что один электрон движется, другой покоится (пусть покоится второй электрон), тогда в точке 1 он создает потенциал $\varphi_2 = \dfrac{q_e}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

Первый электрон движется со скоростью υ_0, значит, обладает кинетической энергией $E_к = \dfrac{m_e\upsilon_0^2}{2}$, эта энергия тратится на работу против кулоновских сил отталкивания $A = qU = q_e\varphi_2 = \dfrac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$. По закону изменения кинетической энергии $\Delta E_к = A$, получим

$$\frac{m_e\upsilon_0^2}{2} = \frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow r = \frac{q_e^2}{2\pi\varepsilon_0 m_e\upsilon_0^2}.$$

$$r = \frac{1{,}6^2\cdot\left(10^{-19}\right)^2}{2\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 10^{12}} = 5\cdot 10^{-10}\,м.$$

Задача 8 **.** Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком (слюдой, $\varepsilon = 7$). Площадь пластин конденсатора равна 50 см^3. Определить поверхностную плотность связанных зарядов на слюде, если пластины конденсатора притягивают друг друга с силой 1 мН.

Решение.

Напряженность поля в диэлектрике можно найти по принципу суперпозиции полей

$$E = E_0 - E',$$

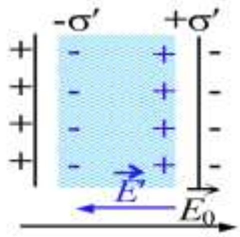
где E_0 – напряженность поля, созданная пластинами конденсатора, E' – напряженность поля связанных зарядов на поверхности слюды, E – напряженность поля в слюде. Здесь учли, что напряженность связанных зарядов противоположно направлена напряженности поля пластин. Поле в диэлектрике всегда меньше поля в вакууме в ε раз, т. е. напряженность поля в слюде $E = E_0/\varepsilon$, тогда

$$E_0/\varepsilon = E_0 - E',$$
$$E' = E_0 - E_0/\varepsilon = E_0\,(1 - 1/\varepsilon),$$
$$k4\pi\sigma' = k4\pi\sigma\,(1 - 1/\varepsilon),$$
$$\sigma' = \sigma\,(1 - 1/\varepsilon). \qquad (1)$$

Пластины конденсатора притягиваются с силой F, которая связана с напряженностью поля пластин: $F = E_0\,q$, где q – заряд пластин, который равен $q = \sigma\,S$, а $E_0 = \sigma/\varepsilon_0$. Тогда сила $F = \sigma^2 S/\varepsilon_0$, выразим поверхностную плотность зарядов σ и подставим в (1):

$$\sigma = \sqrt{\frac{F\varepsilon_0}{S}},\ \boxed{\sigma' = \sqrt{\frac{F\varepsilon_0}{S}}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

Задача 9 **.** Эбонитовая ($\varepsilon = 3$) плоскопараллельная пластина помещена в однородное электрическое поле напряженностью 2 МВ/м. Грани пластины перпендикулярны линиям напряженности. Определить поверхностную плотность связанных зарядов на гранях пластины.



Решение.

При помещении пластины в электрическое

поле в ней происходит перераспределение зарядов, таким образом, что на её противоположных гранях появляются отрицательные и положительные связанные заряды (см. рисунок), которые образуют электрическое поле с напряженностью E'. Напряженность электрического поля $\boldsymbol{E}$ в пластине находится по принципу суперпозиции полей:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E'} + \boldsymbol{E_0},$$

где $\boldsymbol{E'}$ – вектор напряженности электрического поля, созданного связанными зарядами; $\boldsymbol{E_0}$ – вектор напряженности внешнего электрического поля.

В проекциях на горизонтальное направление получим:

$$E = E_0 - E',$$
$$E' = \sigma'/\varepsilon_0.$$

Поле в диэлектрике всегда меньше поля в вакууме в ε раз, т. е. напряженность поля в пластине $E = E_0/\varepsilon$, тогда

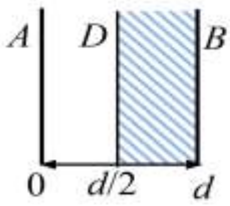
$$E_0/\varepsilon = E_0 - \sigma'/\varepsilon_0,$$
$$\sigma'/\varepsilon_0 = E_0 - E_0/\varepsilon,$$
$$\sigma' = E_0\varepsilon_0(1 - 1/\varepsilon).$$
$$\sigma' = \pm 11{,}8 \text{ мкКл/м}^2.$$

Задача 10. Как изменится ёмкость плоского воздушного конденсатора, если между его обкладками поместить стеклянную пластину ($\varepsilon = 6$), толщина которой равна половине расстояния между обкладками (см. рисунок)?

Решение.

Обозначим: C_0 – ёмкость конденсатора AB до введения стеклянной пластины, C – ёмкость конденсатора AB после введения стеклянной пластины.

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \text{ т. к. для воздуха } \varepsilon \cong 1$$



После введения стеклянной пластины конденсатор AB можно рассматривать как два последовательно соединенных конденсатора AD и DB. Ёмкость C конденсатора AB после введения стеклянной пластины можно найти по формуле для последовательного соединения конденсаторов.

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{AD}} + \frac{1}{C_{DB}} \Rightarrow C = \frac{C_{AD} \cdot C_{DB}}{C_{AD} + C_{DB}} \qquad (1)$$

Находим C_{AD} и C_{DB}. Конденсатор AD – воздушный конденсатор, для него $\varepsilon \cong 1$, электроемкость конденсатора AD

$$C_{AD} = \frac{\varepsilon_0 S}{d/2} = \frac{2\varepsilon_0 S}{d} = 2C_0.$$

Между обкладками конденсатора DB диэлектрик (стекло) и электроемкость конденсатора DB

$$C_{DB} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d/2} = \frac{2\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} = 2\varepsilon C_0.$$

Подставим значение емкостей конденсаторов AD и DB в (1)

$$C = \frac{2C_0 2\varepsilon C_0}{2C_0 + 2\varepsilon C_0} = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} C_0.$$

Отсюда,

$$\frac{C}{C_0} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1},\ \frac{C}{C_0} = \frac{2\cdot 6}{6+1} = 1,7 \text{ или } C = 1,7C_0.$$

Задача 11 . Конденсатор ёмкостью 3 мкФ заряжен до разности потенциалов 300 В, конденсатор ёмкостью 2 мкФ – до 200 В. Оба конденсатора соединены после зарядки параллельно одноименными полюсами. Какая разность потенциалов установится на обкладках конденсаторов после их соединения?

Решение.

Делаем чертеж. После параллельного соединения конденсаторов разность потенциалов U между обкладками будет одной и той же для обоих конденсаторов. Ёмкость батарей C из двух параллельно соединенных конденсаторов

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q_1 + q_2}{U}.$$

С другой стороны $C = C_1 + C_2$.

Следовательно,

$$C_1 + C_2 = \frac{q_1 + q_2}{U},$$

$$U = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2}. \quad (1)$$

Находим заряды q_1 и q_2, находящиеся на обкладках конденсаторов C_1 и C_2

$$C_1 = \frac{q_1}{U_1};\ C_2 = \frac{q_2}{U_2}$$

Отсюда

$$q_1 = C_1 U_1,\ q_2 = C_2 U_2.$$

Подставим в (1)

$$U = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{C_1 + C_2},$$

$$U = \frac{3\cdot 10^{-6}\cdot 300 + 2\cdot 10^{-6}\cdot 200}{(3+2)\cdot 10^{-6}} = 260B.$$

Задача 12 **. Плоский воздушный конденсатор имеет емкость** C **и заряжен до разности потенциалов** U**. Какую работу** A **надо совершить, чтобы вдвое увеличить расстояние между его обкладками?**

Решение.

Согласно закону сохранения энергии, работу можно найти как разность энергий поля конденсатора в начальном и конечном состояниях

$$A = W_2 - W_1.$$

Первоначальная энергия конденсатора

$$W_1 = \frac{C_1 U^2}{2},$$

где емкость конденсатора $C_1 = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d_1}$.

Конечная энергия конденсатора

$$W_2 = \frac{C_2U^2}{2}.$$

Ёмкость конденсатора изменилась, т. к. изменилось расстояние между обкладками, и стала равной

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d_2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{2d_1} = \frac{C}{2}.$$

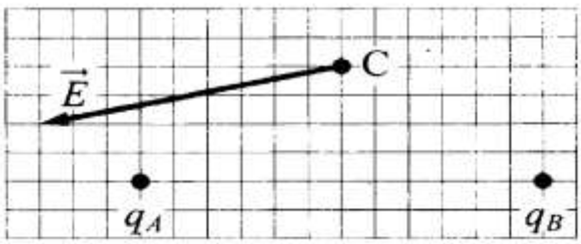
Тогда

$$W_2 = \frac{C}{2}\frac{U^2}{2} = \frac{CU^2}{4},$$

$$A = \frac{CU^2}{4} - \frac{CU^2}{2} = \frac{CU^2}{4}.$$

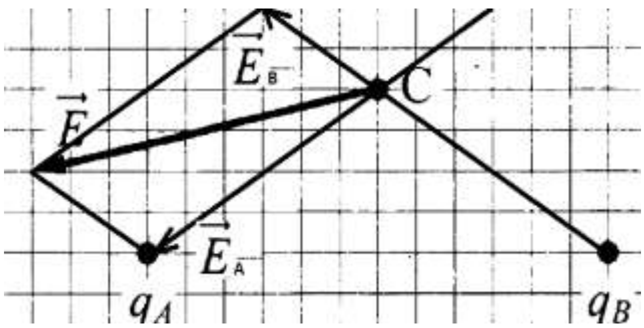
Задача №11 из Демидова М Ю « 1000 задач»

На рисунке показан вектор напряженности $\vec{E}$ электростатического поля в точке С, созданного двумя точечными зарядами: q_A и q_B. Чему равен заряд q_B, если заряд q_A равен –2 нКл?



Решение

Разложим вектор **Е** на составляющие **ЕА** и **ЕВ**



Заметим, что точка С образует с зарядами равнобедренный треугольник и поэтому расстояние r для электрического поля обоих зарядов одинаково. Считая клетки и применяя теорему Пифагора, находим

EA = $K\frac{q_A}{r^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$

EB = $K\frac{q_B}{r^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Разделив первое уравнение на второе получим

$\frac{q_A}{q_B} = \frac{\sqrt{52}}{\sqrt{13}} = 2$

Откуда находим$q_B = \frac{q_A}{2} = 1$ нКл

Задача №19 из Демидова М Ю « 1000 задач»(задачи с развернутым ответом)

По гладкой горизонтальной направляющей длины $2l$ скользит бусинка с положительным зарядом $Q > 0$ и массой m. На концах направляющей находятся положительные заряды $q > 0$ (см. рис.). Бусинка совершает малые колебания относительно положения равновесия, период которых равен T.

Чему будет равен период колебаний бусинки, если ее заряд увеличить в 2 раза?

Решение

При небольшом смещении x $(|x| \ll l)$ бусинки от положения равновесия на нее действует возвращающая сила:

$F_x = K\frac{Qq}{(l+x)^2} - K\frac{Qq}{(l-x)^2} = KQq[\frac{1}{(l+x)^2} - \frac{1}{(l-x)^2}] = KQq[\frac{(l-x)^2-(l+x)^2}{(l+x)^2(l-x)^2}] = KQq[\frac{-4lx}{(l^2-x^2)^2}]$

При малых смещениях $x \ll x^2$ пренебрегая последним в знаменателе получим:

$F_x = -\frac{4KQq}{l^3}x$

По второму закону Ньютона $F_x = ma$

Отсюда $ma = -\frac{4KQq}{l^3}x$ или $ma + \frac{4KQq}{l^3}x = 0$

Разделив на m и учитывая, что $a = \ddot{x}$ получим

$\ddot{x} + \frac{4KQq}{ml^3}x = 0$ где обозначив $\omega^2 = \frac{4KQq}{ml^3}$ будем иметь

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Решением последнего является $x = \sin(\omega x)$

Здесь $\omega = 2\pi\gamma$ – циклическая частота

Отсюда $\gamma = \frac{\omega}{2\pi}$ и

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml^3}{4KqQ}}$$

При увеличении заряда Q в два раза период уменьшится в $\sqrt{2}$ раз