

Решение заданий ЕГЭ типа №14

Позиционные системы счисления

(повышенный уровень, время – 3 мин)

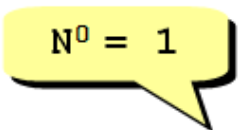
Песоцкая Светлана Николаевна,
учитель математики и
информатики
МБОУ СОШ №3

Что нужно знать:

- принципы кодирования чисел в позиционных системах счисления
- чтобы перевести число, скажем, 12345_N , из системы счисления с основанием N в десятичную систему, нужно умножить значение каждой цифры на N в степени, равной ее разряду:

4 3 2 1 0 ← разряды

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5_N = 1 \cdot N^4 + 2 \cdot N^3 + 3 \cdot N^2 + 4 \cdot N^1 + 5 \cdot N^0$$


$$N^0 = 1$$

- последняя цифра записи числа в системе счисления с основанием N — это остаток от деления этого числа на N

Значение арифметического выражения

$$7 * 512^{120} + 6 * 64^{100} + 8^{210} - 255$$

записали в системе счисления с основанием 8. Сколько цифр 0 содержится в этой записи?

1

```
q2.py - C:/Users/Svetlana/AppData/Local/Programs/Python/Python38-32/q2.py (3.8.10)
File Edit Format Run Options Window Help
s = 7 * 512 ** 120 + 6 * 64 ** 100 + 8 ** 210 - 255
print(oct(s) [2:].count('0'))

IDLE Shell 3.8.10
File Edit Shell Debug Options Window Help
Python 3.8.10 (tags/v3.8.10:3d8993a, May 3 2021, 11:34:34) [
Intel)] on win32
Type "help", "copyright", "credits" or "license()" for more i
>>>
== RESTART: C:/Users/Svetlana/AppData/Local/Programs/Python/E
159
>>>
```

Значение арифметического выражения $3^{100} - x$, где x – целое положительное число, не превышающее 2030, записали в троичной системе счисления. Определите наибольшее значение x , при котором в троичной записи числа, являющегося значением данного арифметического выражения, содержится максимальное количество нулей.

В ответе запишите число в десятичной системе счисления.

2

File Edit Format Run Options Window Help

```
mx=0
for x in range (1 ,2030+1) :
    a=3**100-x
    s=''
    while a>0:
        s = str(a%3)+s
        a=a//3
    if s.count('0')>=mx:
        mx=s.count('0')
        otv=x
print(otv)
```

Python Shell 3.8.10

File Edit Shell Debug Options

Python 3.8.10 (tags/v3.8.1
Intel)] on win32

Type "help", "copyright",

>>>

== RESTART: C:/Users/Svetl

2025

>>> |

Значение арифметического выражения $7^{170} + 7^{100} - x$, где x - целое положительное число, не превышающее 2030, записали в 7-ричной системе счисления. Определите наибольшее значение x , при котором в 7-ричной записи числа, являющегося значением данного арифметического выражения, содержится ровно 71 нуль. В ответе запишите число в десятичной системе счисления.

3

```
File Edit Format Run Options Window Help
for x in range(2030, 0, -1):
    a = 7 ** 170 + 7 ** 100 - x
    k = 0
    while a > 0:
        if a % 7 == 0:
            k = k + 1
            a //= 7
    if k == 71:
        print(x)
        break
```

```
IDLE Shell 3.8.10
File Edit Shell De
Python 3.8.10 (
Intel)] on win3
Type "help", "c
>>>
== RESTART: C:/
2029
>>> |
```

Значение арифметического выражения

$$4^{2018} + 7^{2022} + 2024 + 13^{2018} + 2020 - 17 * 4$$

4

записали в системе счисления с основанием 27. Какова сумма цифр данного выражения?

```
File Edit Format Run Options Window Help
a =4**2018 + 7**2022 + 2024 + 13**2018 + 2020 - 17 * 4**2020
s=[]
while a>0:
    s = [a%27]+s
    a=a//27
print(sum(s))
```



IDLE Shell 3.8.10

File Edit Shell Debug Options Window Help

Python 3.8.10 (tags/v3.8.10:3d8993a, May
Intel)] on win32

Type "help", "copyright", "credits" or "li

>>>

== RESTART: C:/Users/Svetlana/AppData/Local
20286

>>>

Операнды арифметического выражения записаны в системе счисления с основанием 19. $98897x21_{19} + 2x923_{19}$

В записи чисел переменной x обозначена неизвестная цифра из алфавита 19-ричной системы счисления. Определите наибольшее значение x , при котором значение данного арифметического выражения кратно 18. Для найденного x вычислите частное от деления значения арифметического выражения на 18 и укажите его в ответе в десятичной системе счисления. Основание системы счисления указывать не нужно.

5

```
alph = '0123456789abcdefghi'

for x in alph:
    a = int(f'98897{x}21', 19) + int(f'2{x}923', 19)
    if a % 18 == 0:
        print(a // 18)
```

```
File Edit Shell Debug Options
Python 3.8.10 (tags/v3.8.1
Intel)] on win32
Type "help", "copyright",
>>>
== RESTART: C:/Users/Svetl
469030538
469034148
>>>
>>> наибольшее 469034148|
```

В выражении $654x_{37} + 5x47_{37}$ x обозначает некоторую цифру из алфавита системы счисления с основанием 37. Определите наименьшее значение x , при котором значение данного выражения кратно 79. Для найденного x вычислите частное от деления данного выражения на 79 и запишите его в ответе в десятичной системе счисления.

6

File Edit Format Run Options Window Help

```
for x in range(0,37):
    a=(6*37**3+5*37**2+4*37**1+x*37**0)+(5*37**3+x*37**2+4*37**1+7*37**0)
    if a%79==0:
        print(x,a//79)
```

IDLE Shell 3.8.10

File Edit Shell Debug Options Window Help

Python 3.8.10 (tags/v3.8.10:3d8993a, May 3 2021, 11:34:34) [MSC v.1928 32 bi Intel)] on win32

Type "help", "copyright", "credits" or "license()" for more information.

>>>

== RESTART: C:/Users/Svetlana/AppData/Local/Programs/Python/Python38-32/q7.py

28 7629

>>> |

В системе счисления с основанием p выполняется равенство $12 \cdot 34 = xy2$. Буквами x, y обозначены некоторые цифры из алфавита системы счисления с основанием p . Определите значение числа yx_p и запишите это значение в десятичной системе счисления.

7

File Edit Format Run Options Window Help

```
for p in range(5,30):
    for x in range(0,p):
        for y in range(0,p):
            a1=(1*p**1+2*p**0)*(3*p**1+4*p**0)
            a2=x*p**2+y*p**1+2*p**0
            if a1==a2:
                n=y*p**1+x*p**0
                print(p,n)
```

File Edit Shell

```
Python 3.8.
Intel)] on
Type "help"
>>>
== RESTART:
6 34
>>>
```

В числах $BA3x98ADF_{153}$ и $C1x78A75_{153}$ переменная x обозначает некоторую цифру из алфавита системы счисления с основанием 153. Определите наибольшее значение x , при котором произведение приведённых чисел кратно 152. В ответе запишите значение числа $5xA_{153}$ в десятичной системе счисления.

8

File Edit Format Run Options Window Help

```
for x in range(0,153):  
    a1=11*153**8+10*153**7+3*153**6+x*153**5+9*153**4+8*153**3+10*153**2+13*153**1+15*153**0  
    a2=12*153**7+1*153**6+x*153**5+7*153**4+8*153**3+10*153**2+7*153**1+5  
    if (a1*a2)%152==0:  
        n=5*153**2+x*153**1+10  
        print(n)
```

>>>

== RESTART: C:\Users\
125317

128224

132661

135568

>>>

|

Решение заданий ЕГЭ типа №15

Основные понятия математической логики (повышенный уровень, время – 3 мин)

ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ЕГЭ №15

1. Отрезки
2. ДЕЛ (а, m)
3. Поразрядная конъюнкция
4. Графики

Р-35 (демо-2021). Обозначим через $\text{ДЕЛ}(n, m)$ утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого наибольшего натурального числа A формула

$$\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 6) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 9))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение (теоретическое):

- 1) для сокращения записи введём обозначения:

$$\text{ДЕЛ}(x, A) = A$$

$$\text{ДЕЛ}(x, 6) = D_6$$

$$\text{ДЕЛ}(x, 9) = D_9$$

- 2) перепишем выражение в виде $\bar{A} \rightarrow (D_6 \rightarrow \bar{D}_9) = 1$

- 3) используя формулу $A \rightarrow B = \bar{A} + B$, раскроем первую импликацию:

$$A + (D_6 \rightarrow \bar{D}_9) = 1$$

- 4) и вторую:

$$A + \bar{D}_6 + \bar{D}_9 = 1$$

- 5) согласно правилу де Моргана $\bar{D}_6 + \bar{D}_9 = \overline{D_6 \cdot D_9}$, так что

$$A + \overline{D_6 \cdot D_9} = 1$$

- 6) сведём выражение к единственной импликации

$$D_6 \cdot D_9 \rightarrow A = 1$$

- 7) сформулируем правило, которое мы получили: если значение x делится на 6 и делится на 9, то оно делится на A ;

- 8) если значение x делится на 6 и делится на 9, то оно делится на наименьшее общее кратное $\text{НОК}(6, 9) = 18$, поэтому наибольшее значение A , удовлетворяющее условию, равно 18

- 9) Ответ: 18.

Задачи с поразрядными операциями

Как вычислять выражение с поразрядными операциями

В задачах ЕГЭ до настоящего времени использовалась только поразрядная логическая операция «И» (она обозначается символом &), которая выполняется между соответствующими битами двоичной записи двух целых чисел. Не забывайте, что

Результат поразрядной операции между целыми числами – это целое число!

Например, найдём результат поразрядной операции $29 \& 11$:

$$29 = 11101_2$$

$$11 = 01011_2$$

$$9 = 01001_2$$

Серым фоном отмечены биты, которые в обоих числах равны 1. Только они и будут равны 1 в числе-результате. Таким образом, $29 \& 11 = 9$.

Теперь найдём результат операции $(29 \& 11 = 9)$. Не забывайте, что

Результаты операций $(a \& b = 0)$ и $(a \& b \neq 0)$ – это логические значения (истина/ложь)!

Вычислим значение выражения:

$$((x \& 26 = 0) \vee (x \& 13 = 0)) \rightarrow ((x \& 78 \neq 0) \rightarrow (x \& A = 0))$$

при $x = 5, A = 57$:

$$((5 \& 26 = 0) \vee (5 \& 13 = 0)) \rightarrow ((5 \& 78 \neq 0) \rightarrow (5 \& 57 = 0))$$

Вычисляем результаты поразрядного И (это числа!):

$$5 \& 26 = 0 \qquad 5 \& 13 = 5$$

$$5 \& 78 = 4 \qquad 5 \& 57 = 1$$

Теперь вычисляем логические значения (И – истина, Л – ложь):

$$(5 \& 26 = 0) = \text{И} \qquad (5 \& 13 = 0) = \text{Л}$$

$$(5 \& 78 \neq 0) = \text{И} \qquad (5 \& 57 = 0) = \text{Л}$$

Наконец, подставляем эти логические значения в заданное выражение:

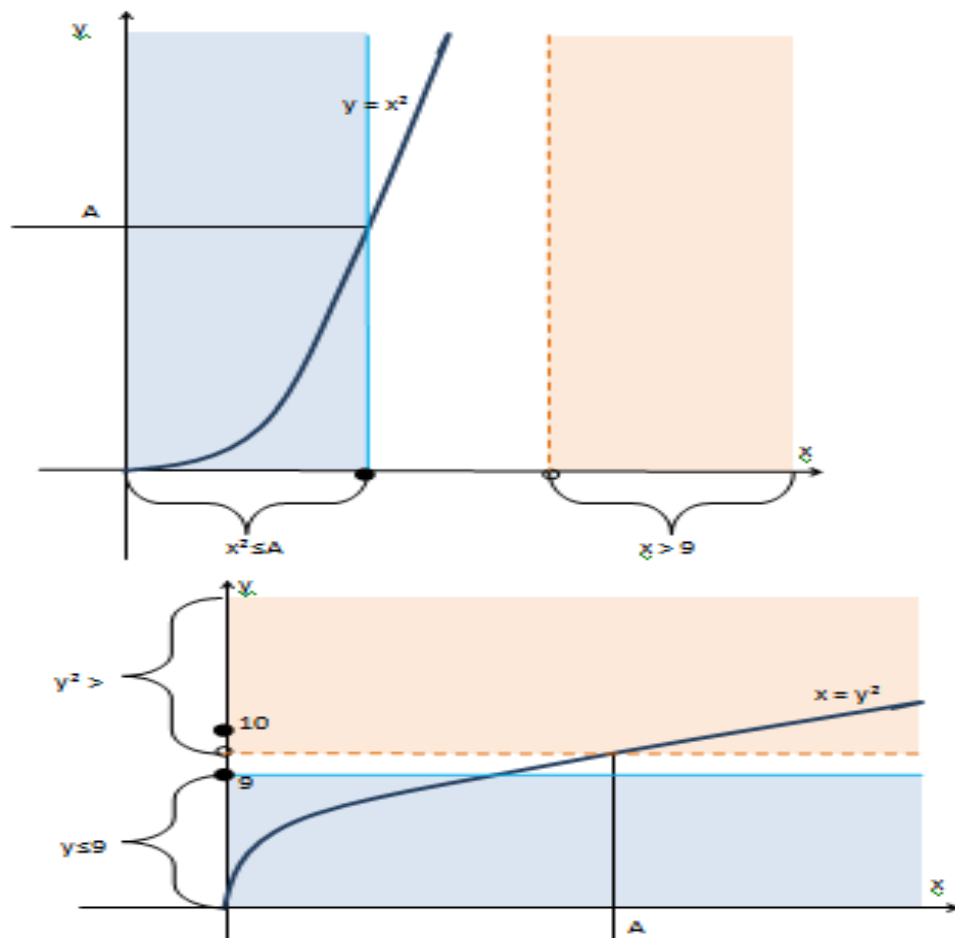
$$(\text{И} \vee \text{Л}) \rightarrow (\text{И} \rightarrow \text{Л})$$

$$\text{И} \rightarrow \text{Л} = \text{Л}$$

Для какого наибольшего целого числа A формула

$$((x \leq 9) \rightarrow (x \cdot x \leq A)) \wedge ((y \cdot y \leq A) \rightarrow (y \leq 9))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных x и y)?



- 4) значение A можно увеличивать и дальше, пока в область объединения прямоугольников не перестанет попадать целое значение y . A это произойдет при $A=100$, для $y=10$ неравенство $y^2 > A$ перестанет выполняться. Наибольшее значение $A=99$.

5) Ответ: 99.

название	для И	для ИЛИ
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
операции с константами	$A \cdot 0 = 0, A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A, A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

105) На числовой прямой даны два отрезка: $P = [44; 49]$ и $Q = [28; 53]$. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка A , что формула

$$((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

Ответ: 25

239) На числовой прямой даны два отрезка: $D = [155; 177]$ и $B = [111; 130]$. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A , что формула

$$(x \in D) \rightarrow ((\neg(x \in B) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in D))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x .

Ответ: 22

283) На числовой прямой даны отрезки $A = [80; 90]$, $B = [30; 50]$ и $C = [10; N]$ и функция

$$F(x) = (\neg(x \in A) \rightarrow (x \in B)) \wedge (\neg(x \in C) \rightarrow (x \in A))$$

При каком наименьшем числе N функция $F(x)$ истинна более чем для 25 целых чисел x ?

Ответ: 44

573) На числовой прямой даны три отрезка: $P = [194321; 390876]$, $Q = [123456; 830214]$, $R = [919265; 1023456]$. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A , что формула

$$(x \in Q) \rightarrow (\neg(x \in P) \rightarrow ((\neg(x \in R) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in Q)))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x ?

Ответ: 706758

Р-35 Обозначим через ДЕЛ (n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого наибольшего натурального числа A формула $\neg \text{ДЕЛ}(x, A) \rightarrow (\text{ДЕЛ}(x, 6) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 9))$ тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

1

```
1.py - C:/Users/Svetlana/AppData/Local/Programs/Python/Python38-32/1.py (3.8.10)
File Edit Format Run Options Window Help

for a in range (1, 100):
    f=0
    for x in range (1, 1000):
        if ((x%a!=0)<=((x%6==0)<=(x%9!=0)))==0:
            f=1
            break
    if f ==0:
        print(a)

IDLE Shell 3.8.10
File Edit Shell Debug Options Window Help
Python 3.8.10 (tags/v3.8.10:3d8993a, May 3
Intel)] on win32
Type "help", "copyright", "credits" or "lice
>>>
=== RESTART: C:/Users/Svetlana/AppData/Local
1
2
3
6
9
18
>>>
```

417) Определите наименьшее натуральное число A , такое что выражение

$$(X \& 87 = 0) \rightarrow ((X \& 31 \neq 0) \rightarrow (X \& A \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной X)?

2

```
3.py - C:/Users/Svetlana/AppData/Local/Programs/Python/Python38-32/3.py (3.8.10)
File Edit Format Run Options Window Help

for a in range (1, 1000):
    f=0
    for x in range (1, 10000):
        if ((x&87==0) <= ((x&31!=0) <= (x&a!=0)))==0:
            f=1
            break
    if f ==0:
        print(a)
        break
```

```
IDLE Shell 3.8.10
File Edit Shell Debug Options Window Help

Python 3.8.10 (tags/v3.8.10:3d8993a, May 3 202
Intel)] on win32
Type "help", "copyright", "credits" or "license
>>>
=== RESTART: C:/Users/Svetlana/AppData/Local/Pr
8
>>> |
```

251) Сколько существует целых значений A , при которых формула

$$((y \cdot y < A) \rightarrow (y \leq 8)) \wedge ((x \leq 5) \rightarrow (x \cdot x \leq A))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных x и y)?

3

```
номер 3.py - C:/Users/Svetlana/AppData/Local/Programs/Python/Python38-32/номер 3.py (3.8.10)
File Edit Format Run Options Window Help

k=0
for a in range (-20, 100):
    f=0
    for x in range (0, 1000):
        for y in range (0, 1000):
            if(((y * y) >= a) or (y <=8)) and ((x > 5) or ((x * x)<= a))==0:
                f=1
                break
        if f ==1:
            break
    if f == 0 :
        k=k+1
print (k)

IDLE Shell 3.8.10
File Edit Shell Debug Options Window Help
Python 3.8.10 (tags/v3.8.10:3d8993a, May 3 2021, 11:34:34
win32
Type "help", "copyright", "credits" or "license()" for mor
>>>
= RESTART: C:/Users/Svetlana/AppData/Local/Programs/Python
57
>>> |
```

Обозначим через ДЕЛ(n, m) утверждение «натуральное число n делится без остатка на натуральное число m ». Для какого наименьшего натурального числа A формула $(\text{ДЕЛ}(x, 2) \rightarrow \neg \text{ДЕЛ}(x, 3)) \vee (x + A \geq 100)$ тождественно истинна (т.е. принимает значение 1) при любом натуральном значении переменной x ?

4

File Edit Format Run Options Window Help

```
def Del(n, m):  
    return n % m == 0  
  
for A in range(1, 1000):  
    f=0  
    for x in range(1, 1000):  
        if (((Del(x, 2)) <= (not(Del(x, 3)))) or (x + A >= 100)) == 0:  
            f=1  
            break  
    if f==0:  
        print(A)  
        break
```

IDLE Shell 3.8.10

File Edit Shell Debug Options Window Help

```
Python 3.8.10 (tags/v3.8.10:3d8993a, May 3 2021,  
Intel)] on win32  
Type "help", "copyright", "credits" or "license()">>>  
== RESTART: C:/Users/Svetlana/AppData/Local/Progra  
94  
>>> |
```