

РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ К ВЫЧИСЛЕНИЮ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

Кузьмина К.А,
старший преподаватель кафедры МИиТО
ГБОУ ИРО Краснодарского края

ПОДХОДЫ К НАХОЖДЕНИЮ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

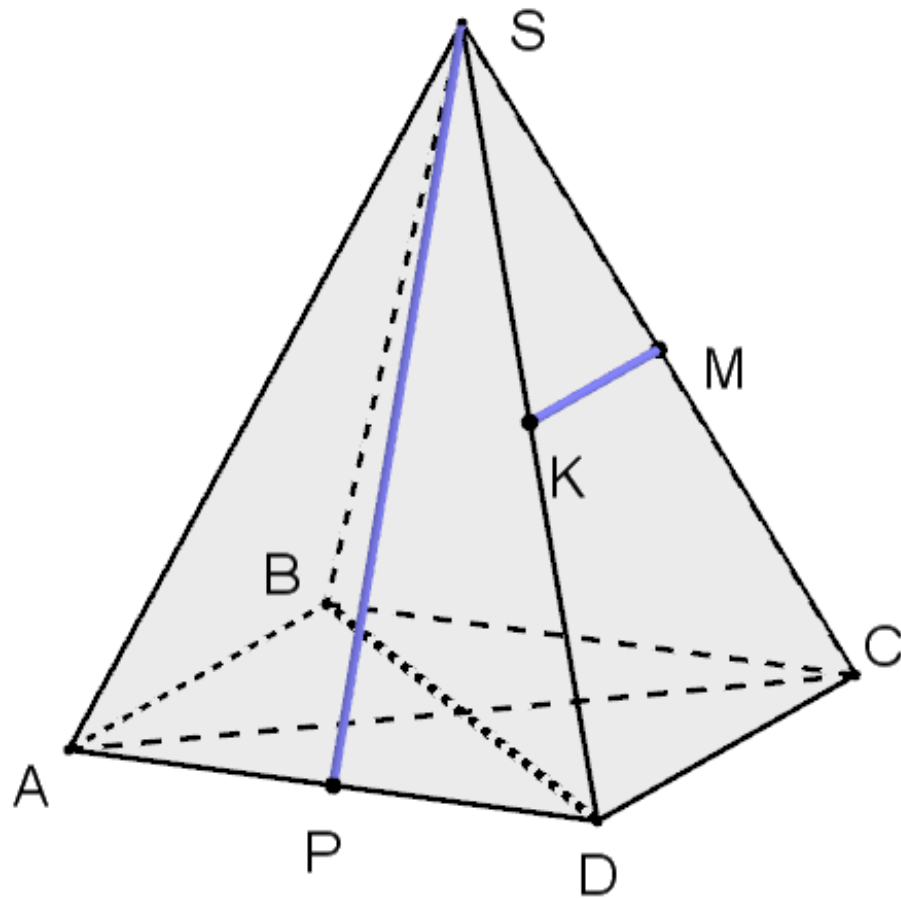
Подходы	Методы решения
Геометрический	• Метод построения общего перпендикуляра. • Метод параллельных прямой и плоскости. • Метод параллельных плоскостей. • Метод ортогонального проектирования. • Метод, основанный на применении формулы объёма тетраэдра, в котором известны длины двух скрещивающихся рёбер, угол и расстояние между ними.
Аналитический	• Метод введения произвольного базиса. • Координатно-векторный метод.

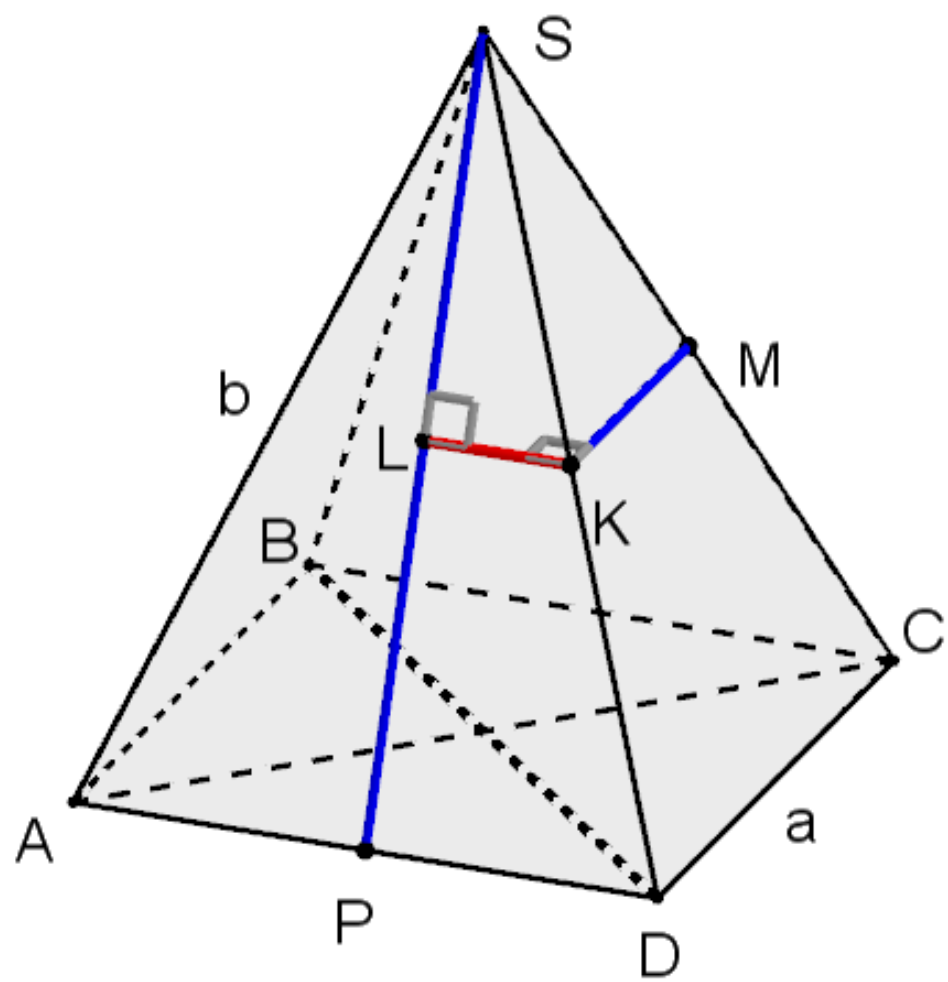
Геометрический подход

1. Метод построения общего перпендикуляра.

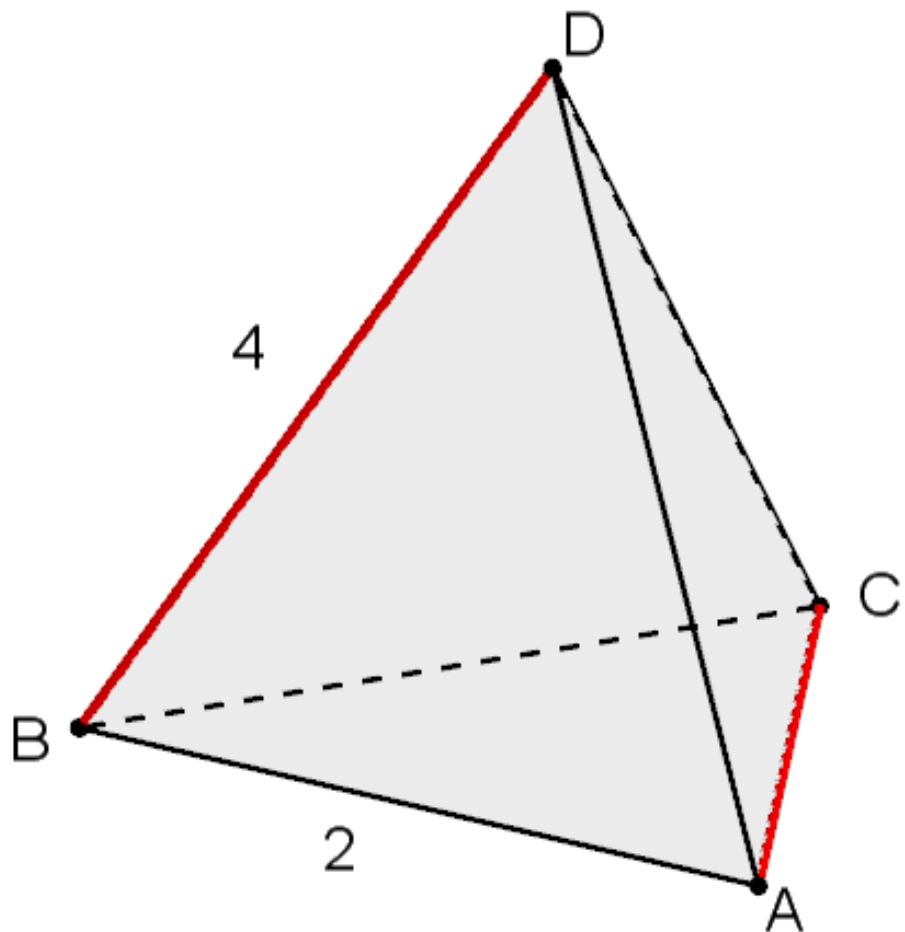
Строится общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых (отрезок с концами на этих прямых и перпендикулярный каждой из них) и находится его длина.

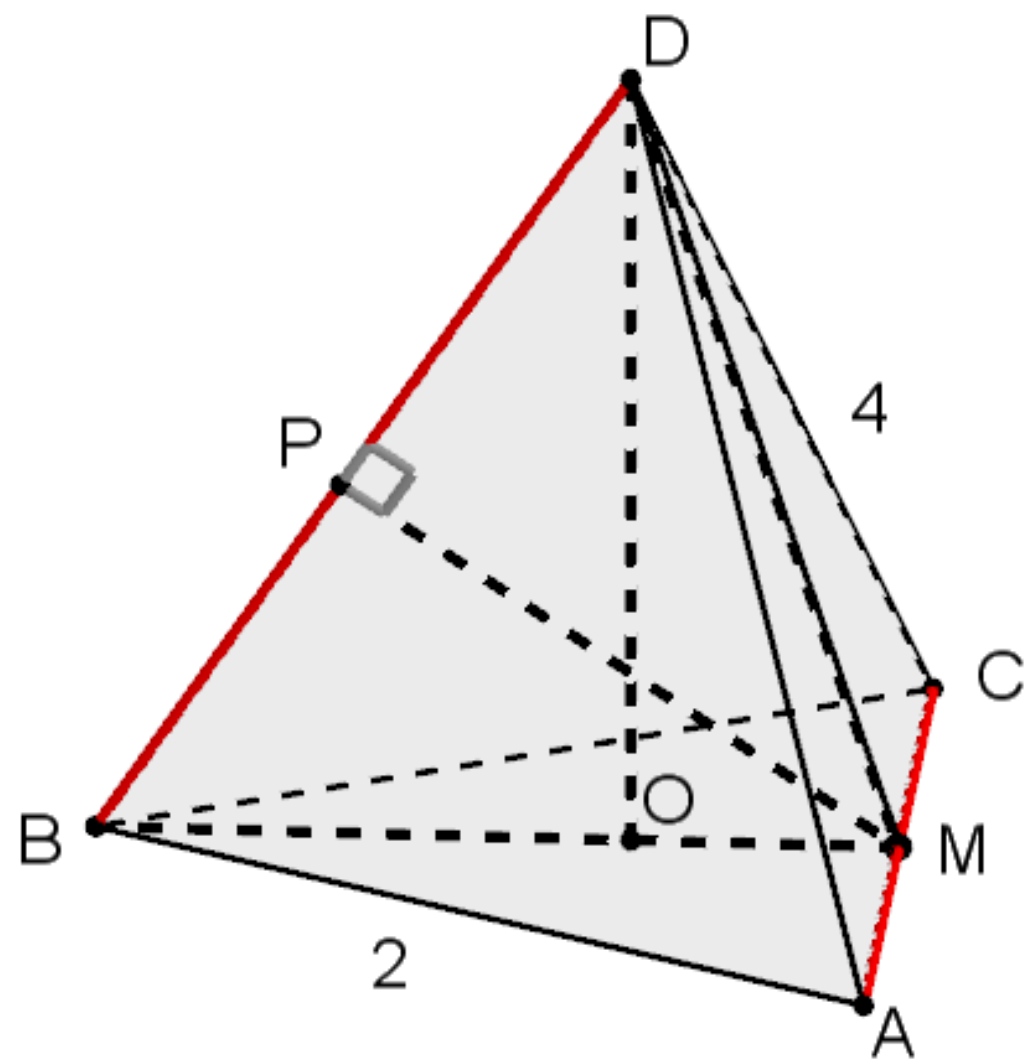
№1. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ (S - вершина) с ребром основания a и боковым ребром b . Найдите расстояние между прямыми SP и MK , где точки P, K, M – середины рёбер AD, SD и SC соответственно.





№2. Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ (D - вершина) с ребром основания 2 и боковым ребром 4. Найдите расстояние между прямыми AC и DB .



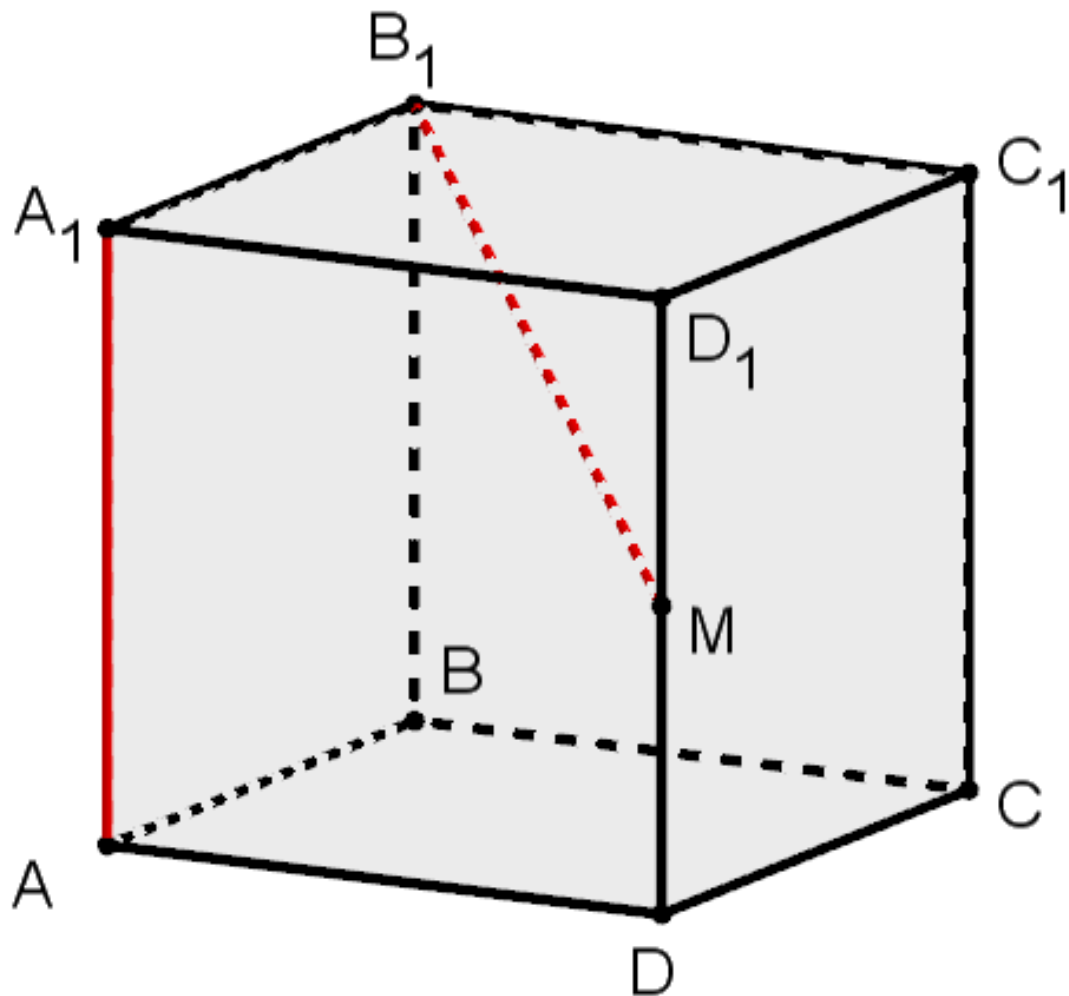


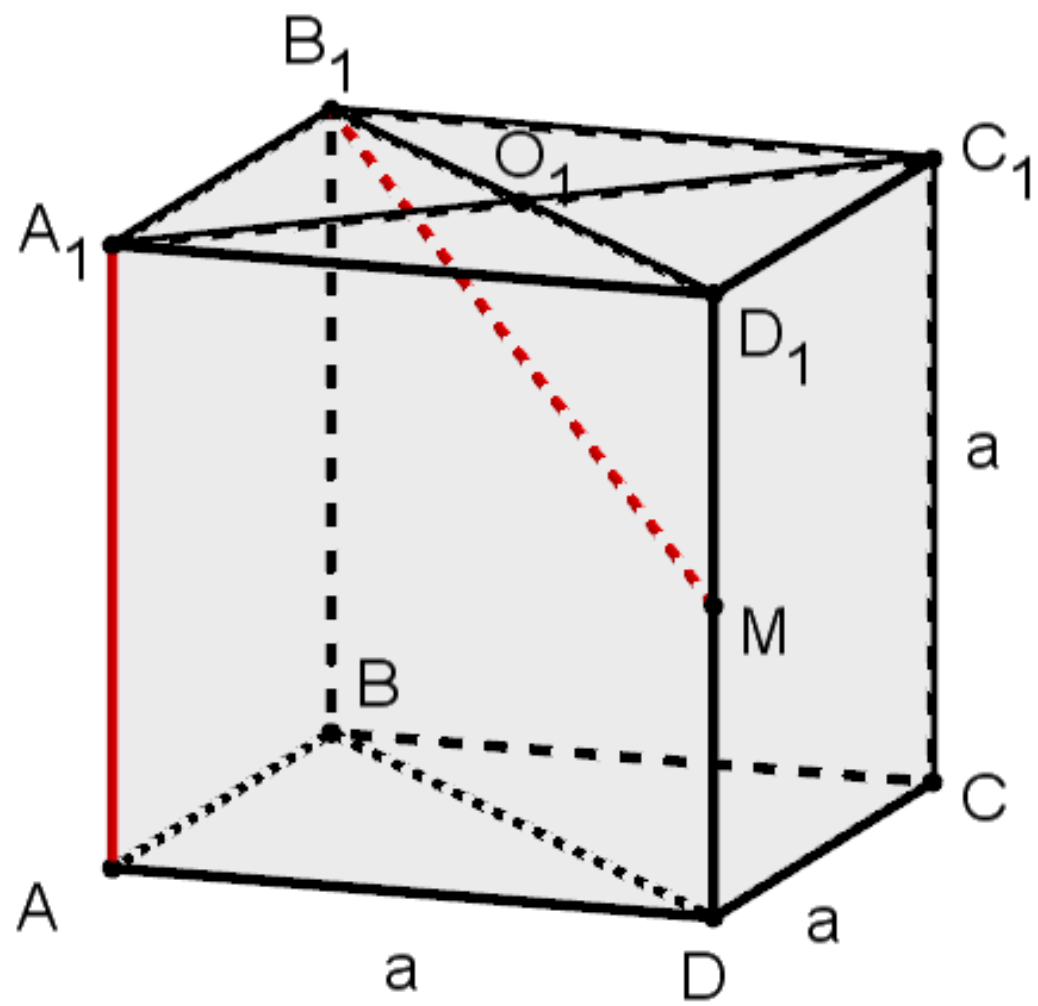
Геометрический подход

2. Метод параллельных прямой и плоскости.

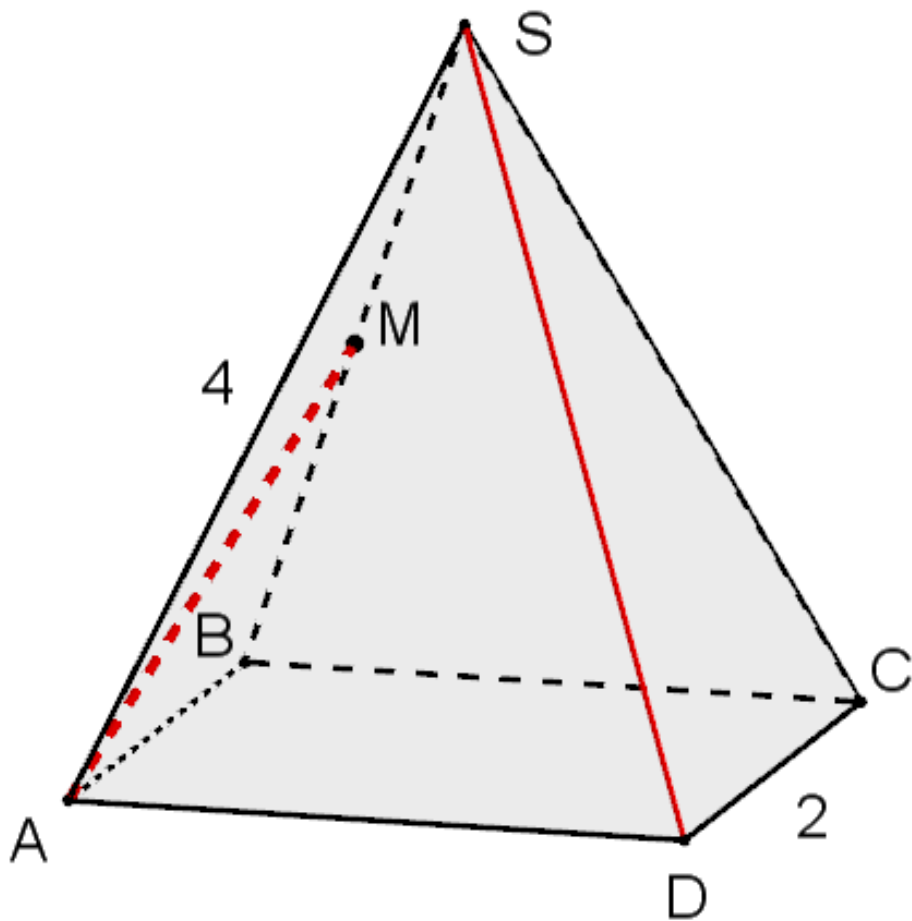
Строится плоскость, содержащая одну из прямых и параллельная второй. Искомое расстояние равно расстоянию от произвольной точки второй прямой до построенной плоскости.

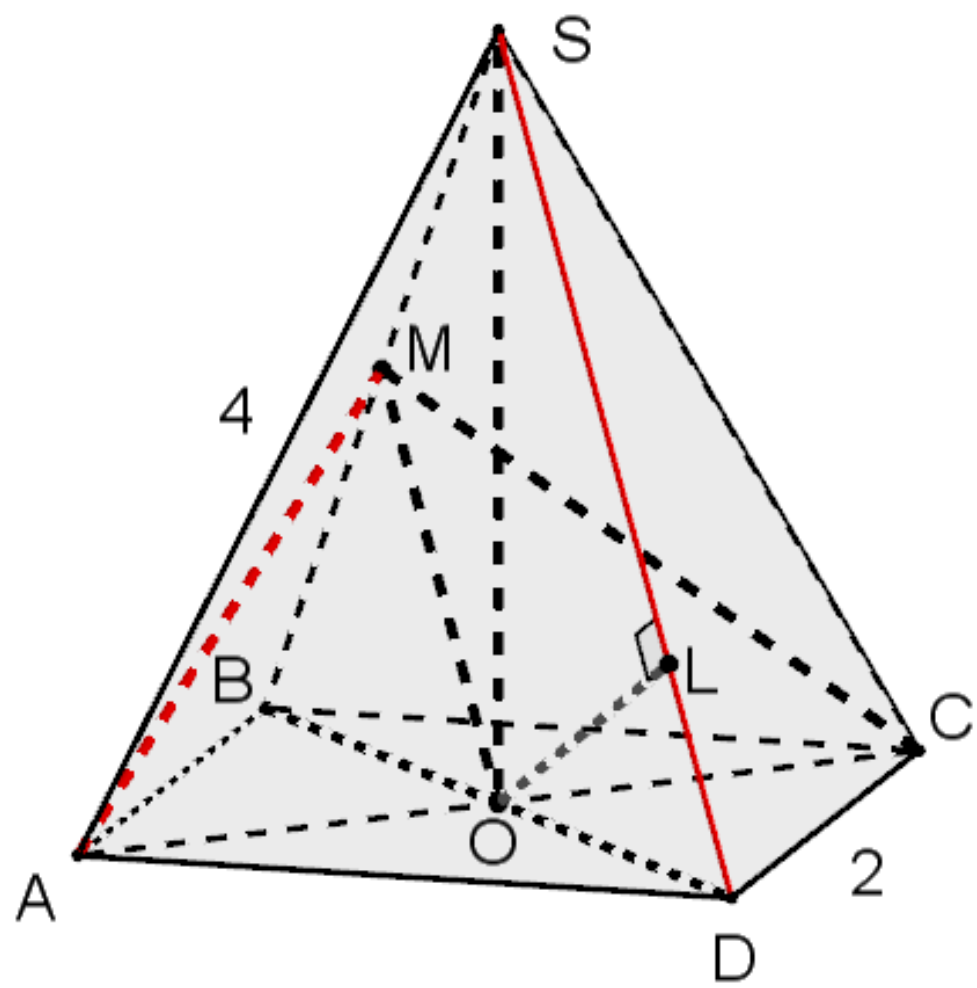
№3. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a . Найдите расстояние между прямыми AA_1 и $B_1 M$, где точка M – середина ребра DD_1 .





№4. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ (S - вершина) с ребром основания 2 и боковым ребром 4. Найдите расстояние между прямыми SD и AM , где точка M – середина ребра SB .



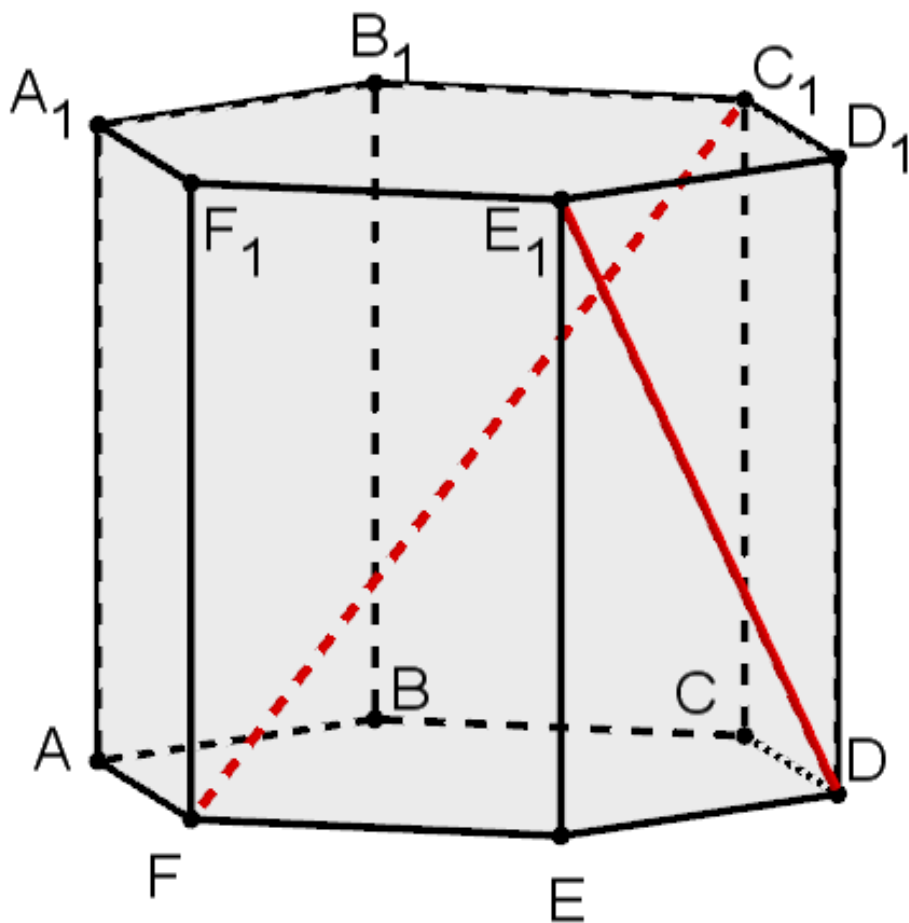


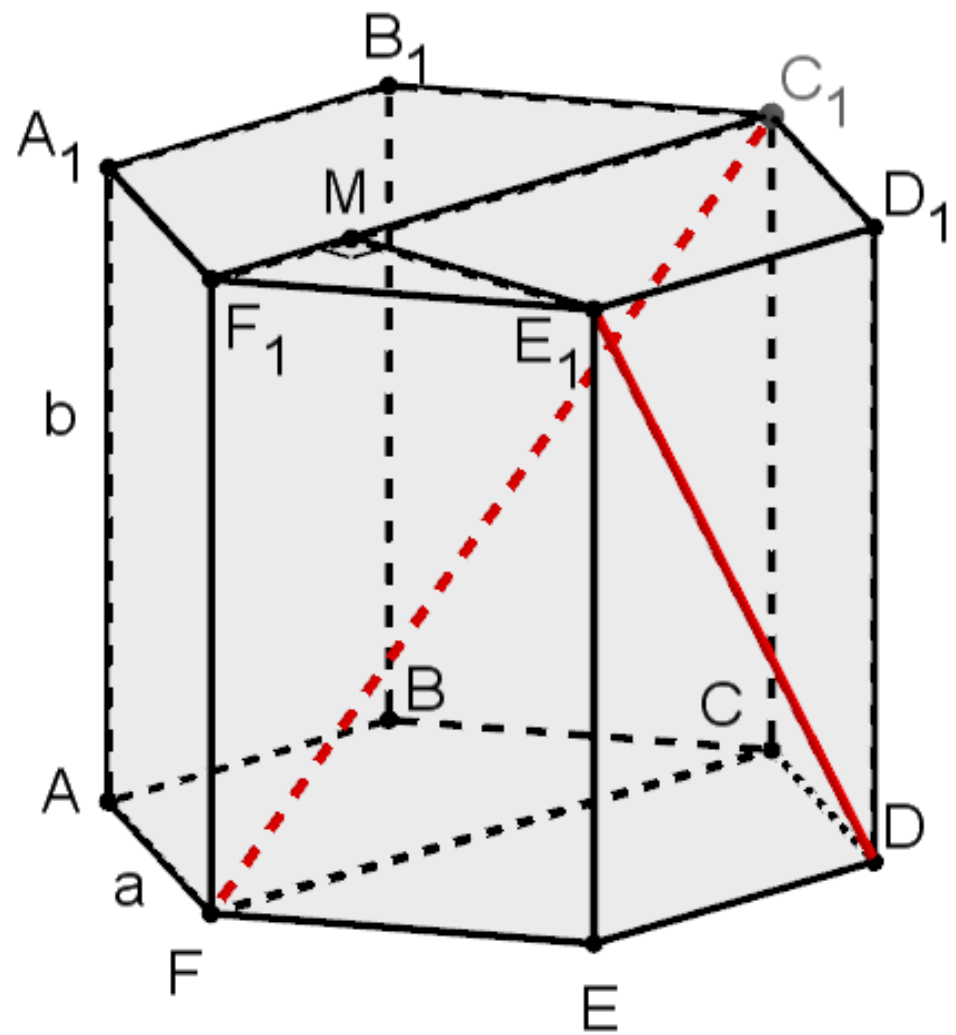
Геометрический подход

3. Метод параллельных плоскостей.

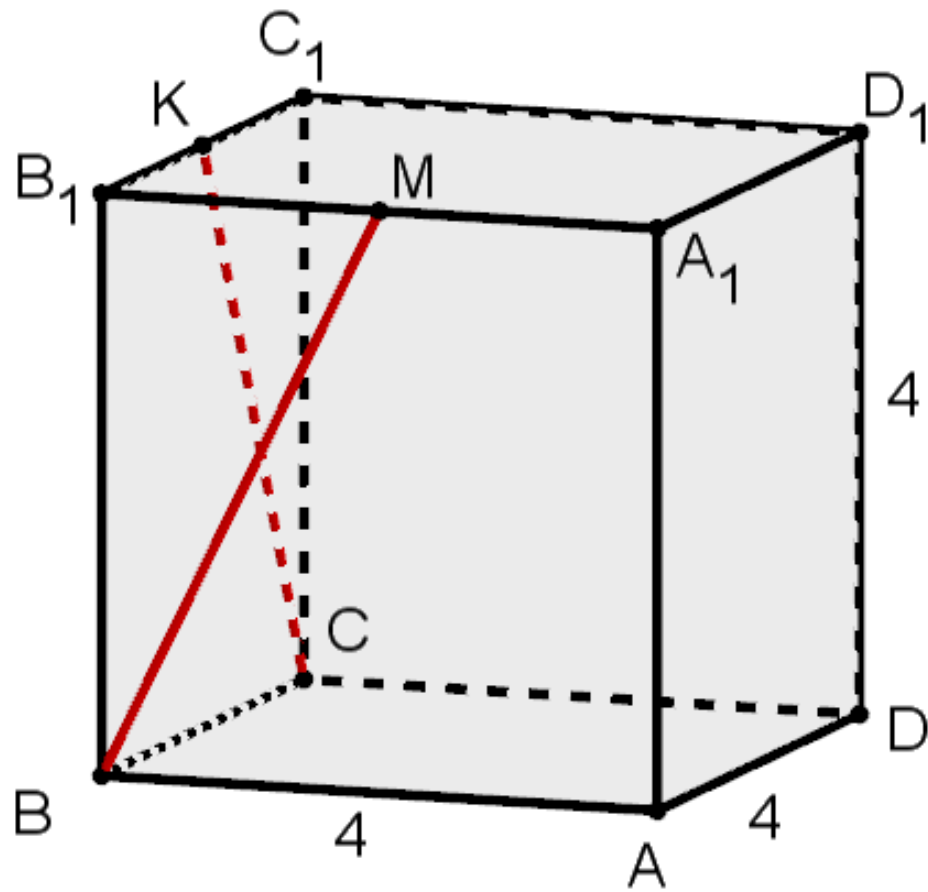
Через данные скрещивающиеся прямые проводятся параллельные плоскости и находится расстояние между построенными плоскостями.

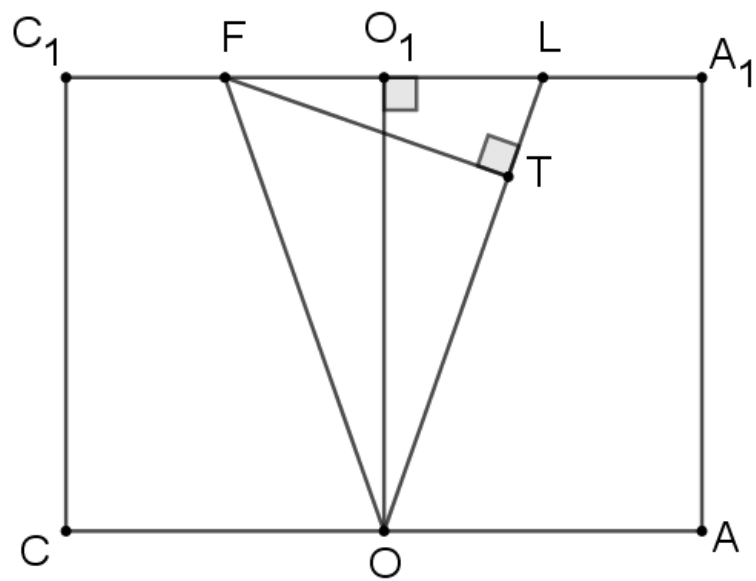
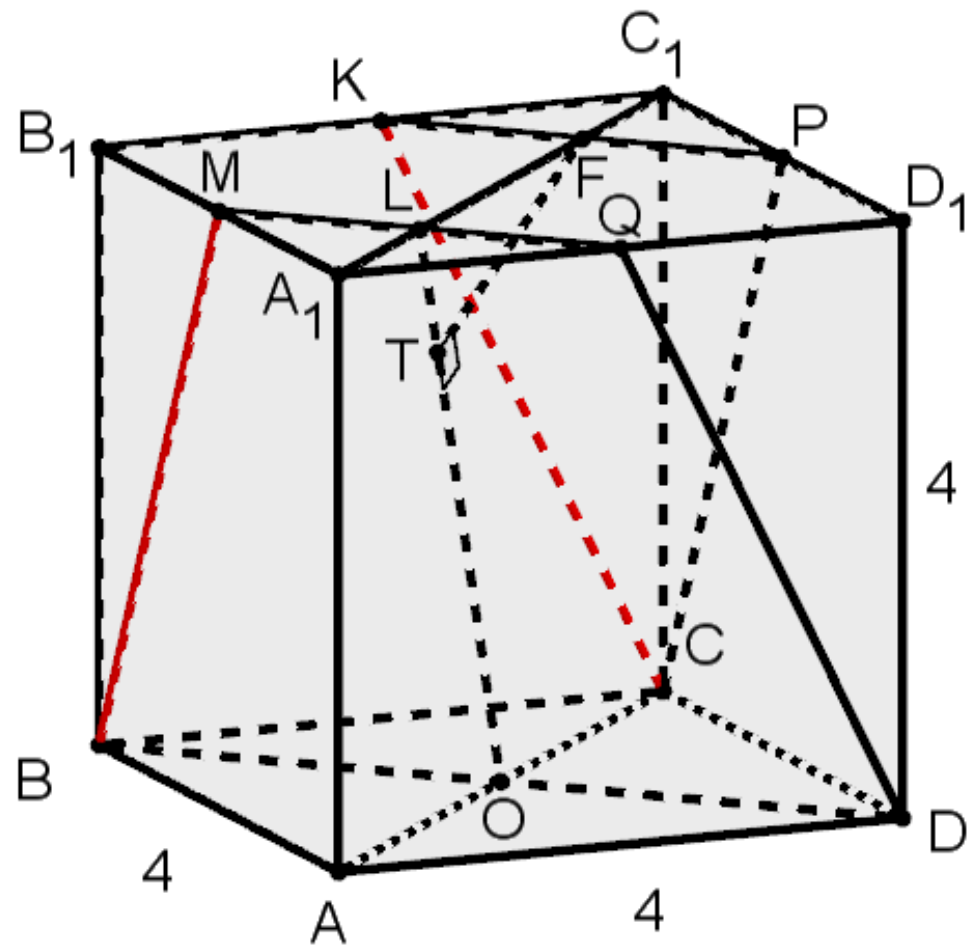
№5. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ с ребром основания a и боковым ребром b . Найдите расстояние между прямыми FC_1 и DE_1 .





№6. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 4. Найдите расстояние между прямыми BM и CK , где точки M, K – середины рёбер $A_1 B_1$ и $B_1 C_1$ соответственно.

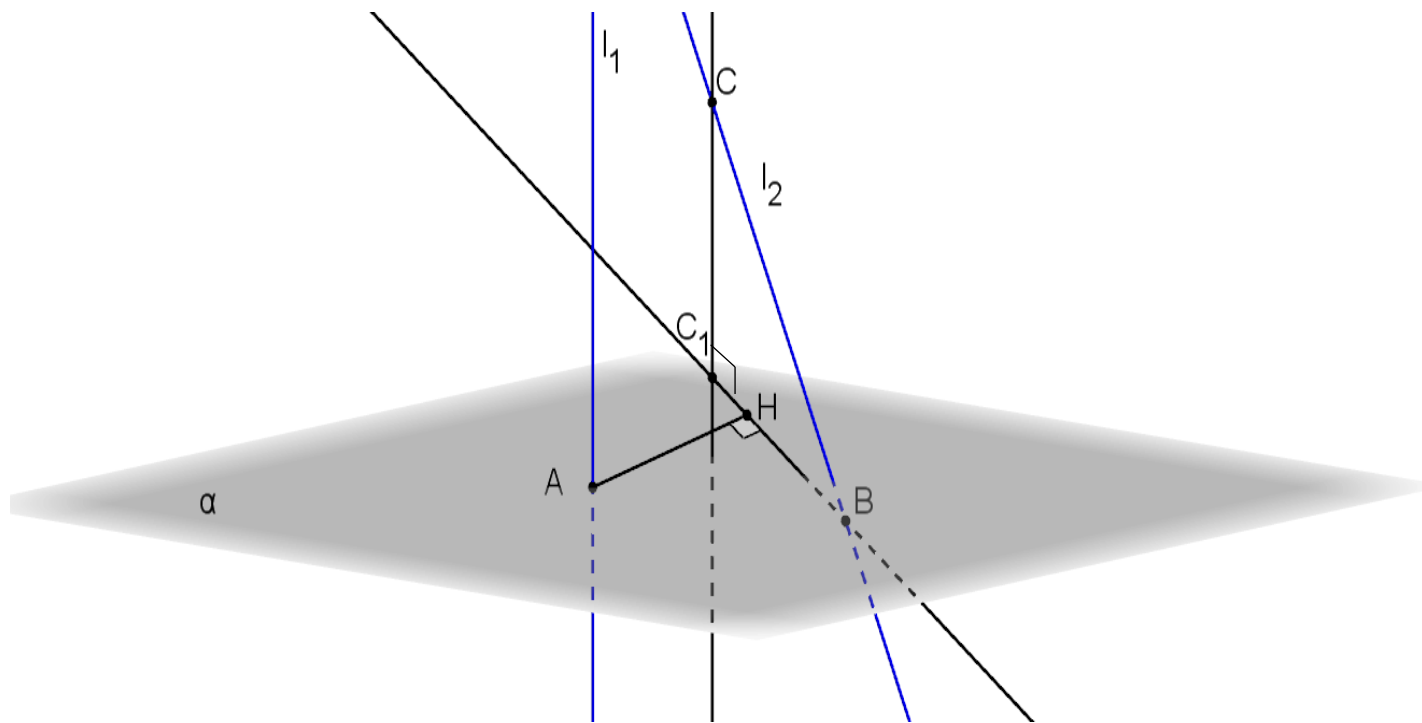




Геометрический подход

4. Метод ортогонального проектирования.

Вначале проводится плоскость α , перпендикулярная одной из данных прямых (например, l_1). Затем прямая l_2 проектируется (ортогонально) на эту плоскость.



$$\rho(l_1; l_2) = \rho(A; BC_1) = AH$$

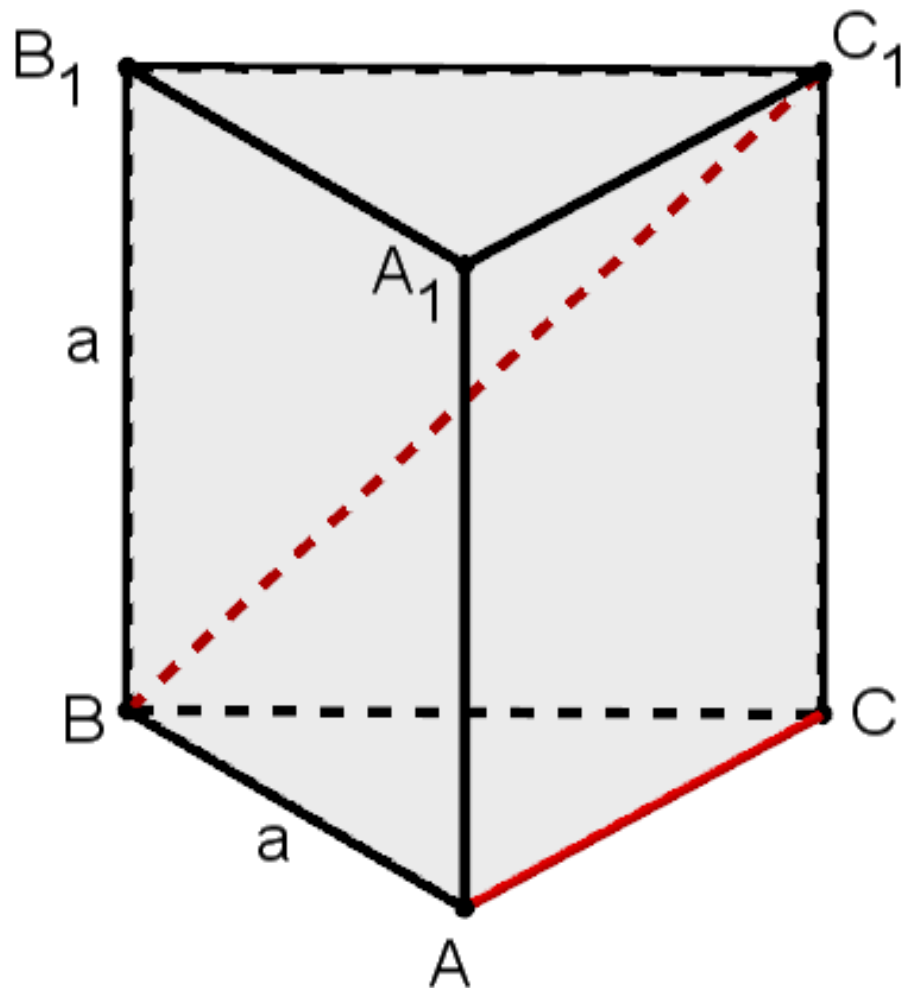
$$A = l_1 \cap \alpha$$

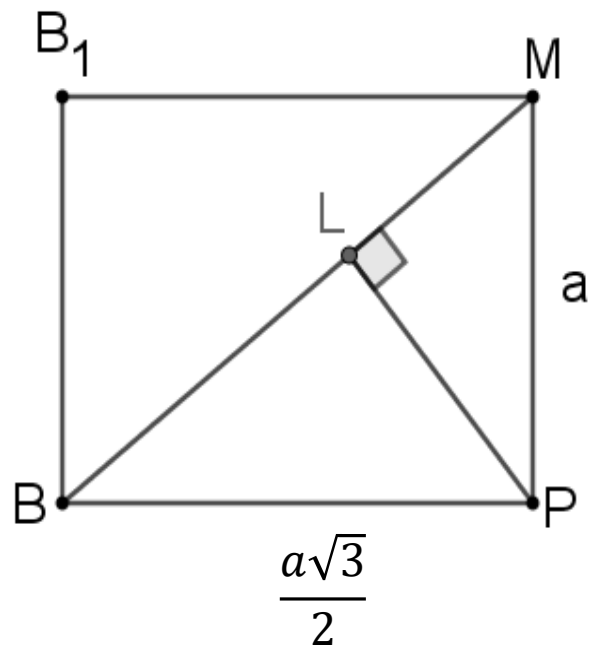
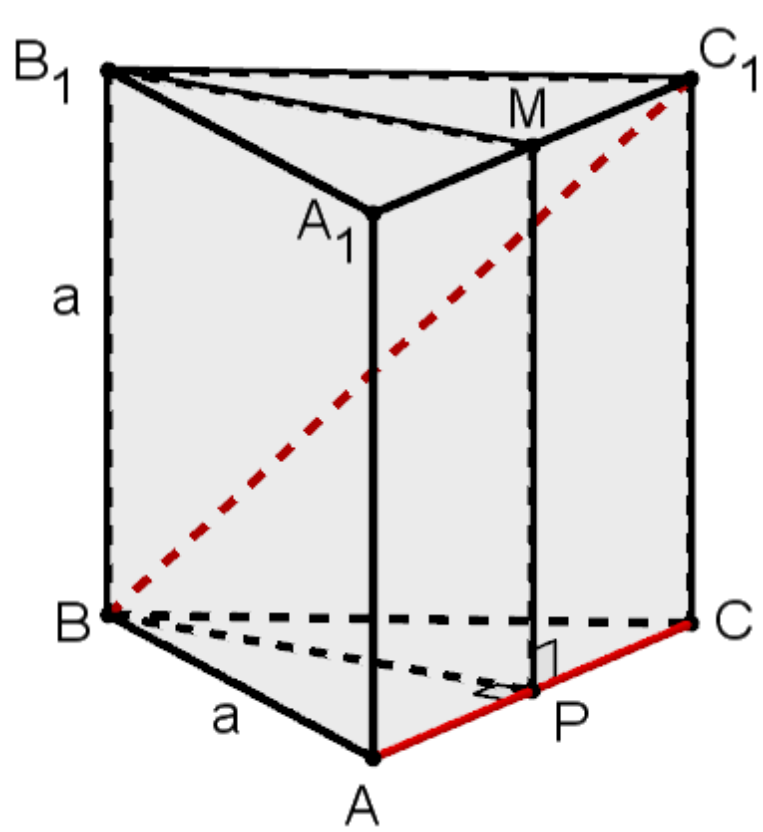
$$\alpha \perp l_1$$

BC_1 – ортогональная проекция l_2 на плоскость α .

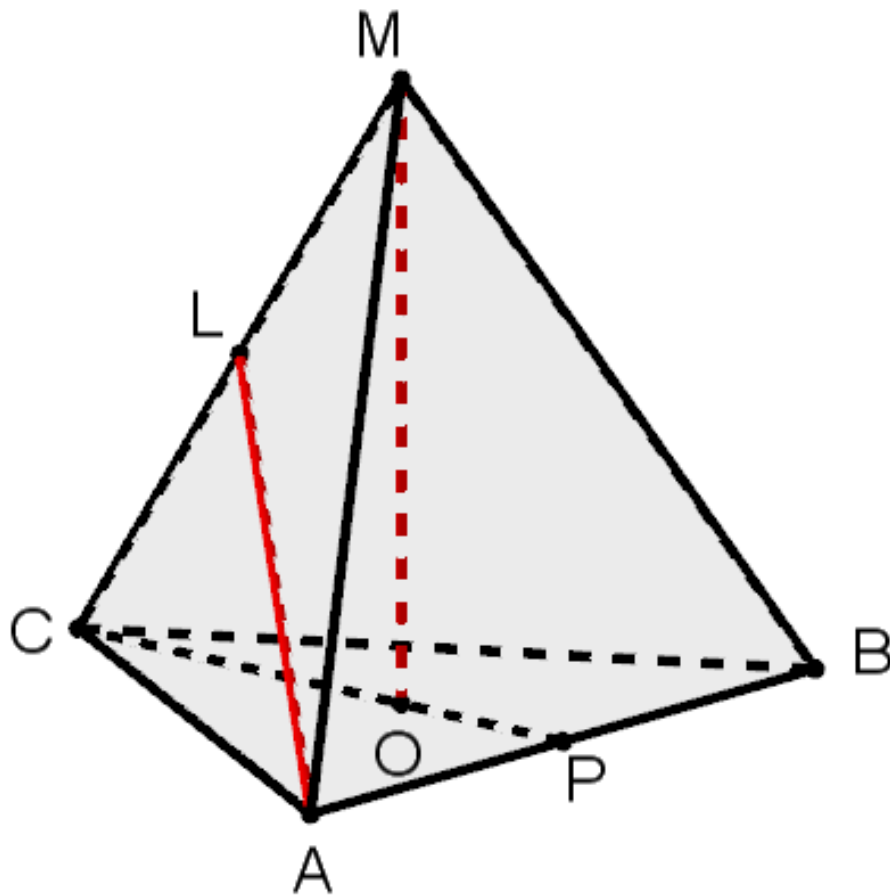
H – основание перпендикуляра, опущенного из A на BC_1 .

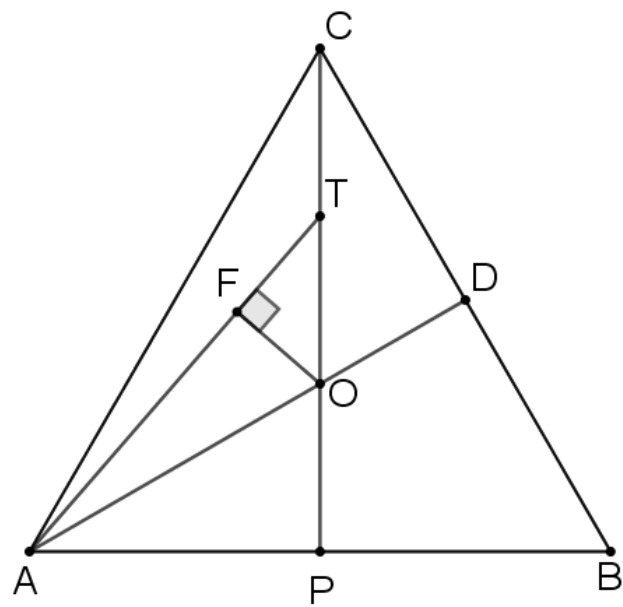
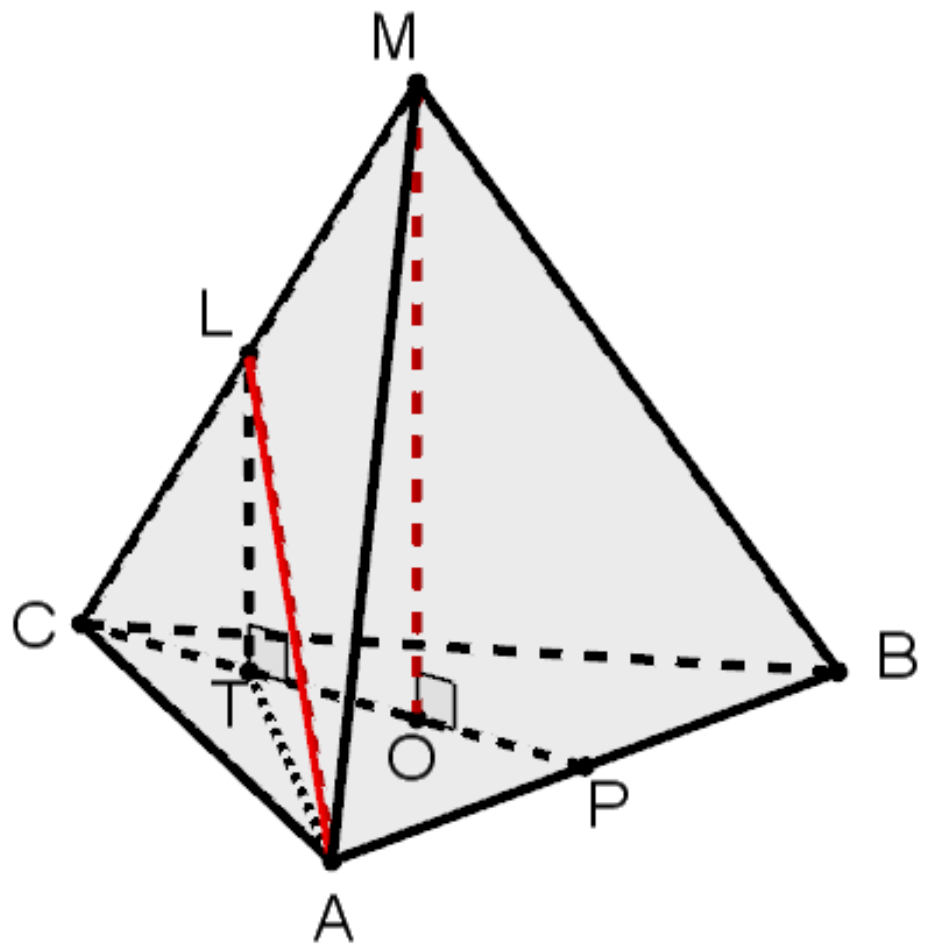
№7. Боковые грани правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ являются квадратами со стороной a . Найдите расстояние между прямыми BC_1 и AC .





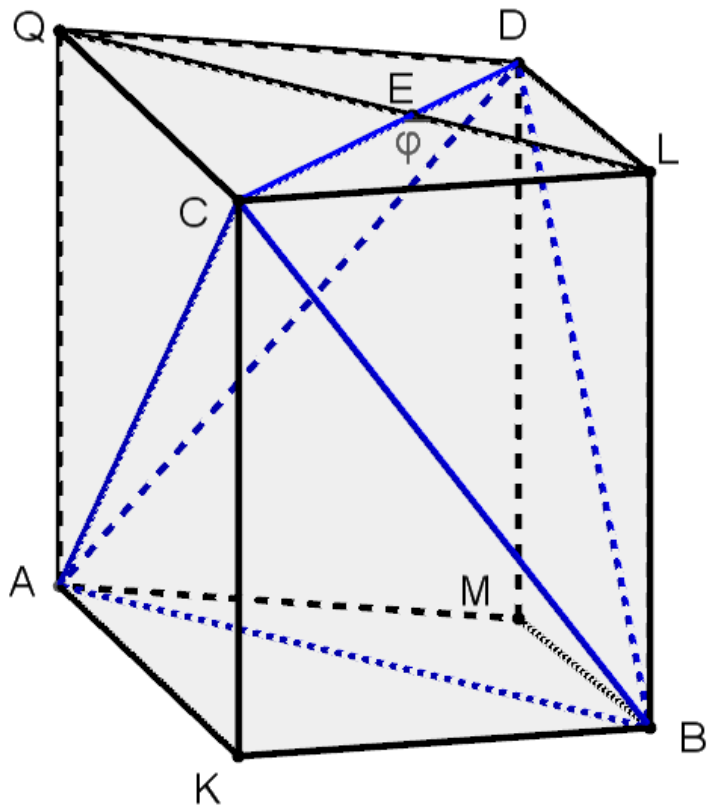
№8. Дан правильный тетраэдр $MABC$ с ребром 1. Найдите расстояние между прямыми AL и MO , где точка L – середина ребра MC , а точка O – центр грани ABC .





Геометрический подход

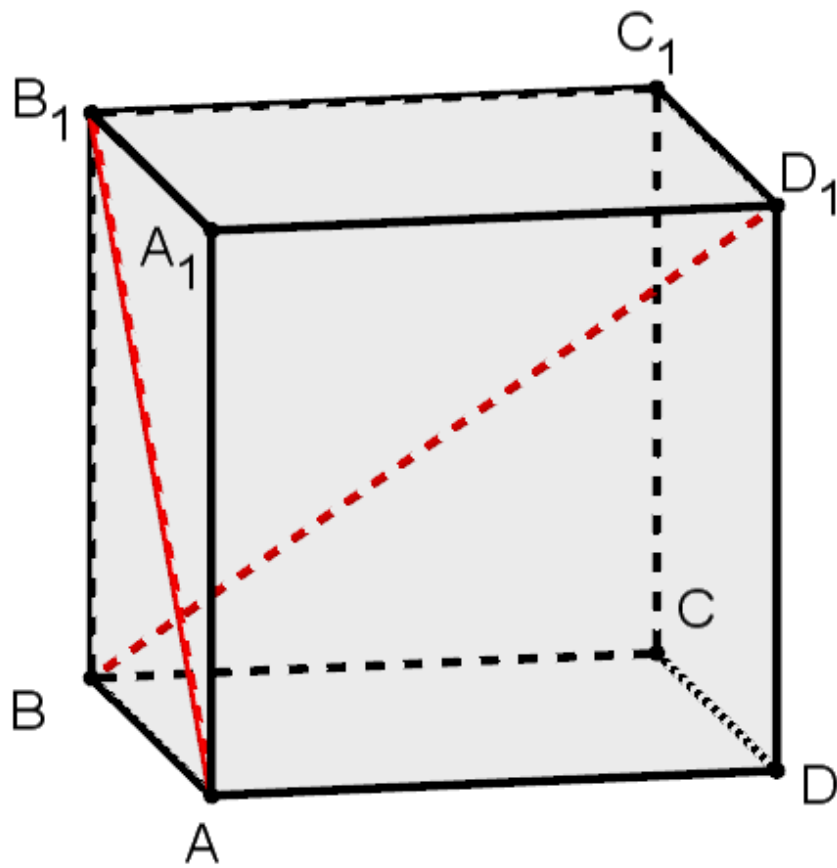
5. Метод, основанный на применении формулы объёма тетраэдра, в котором известны длины двух скрещивающихся рёбер, угол и расстояния между ними.

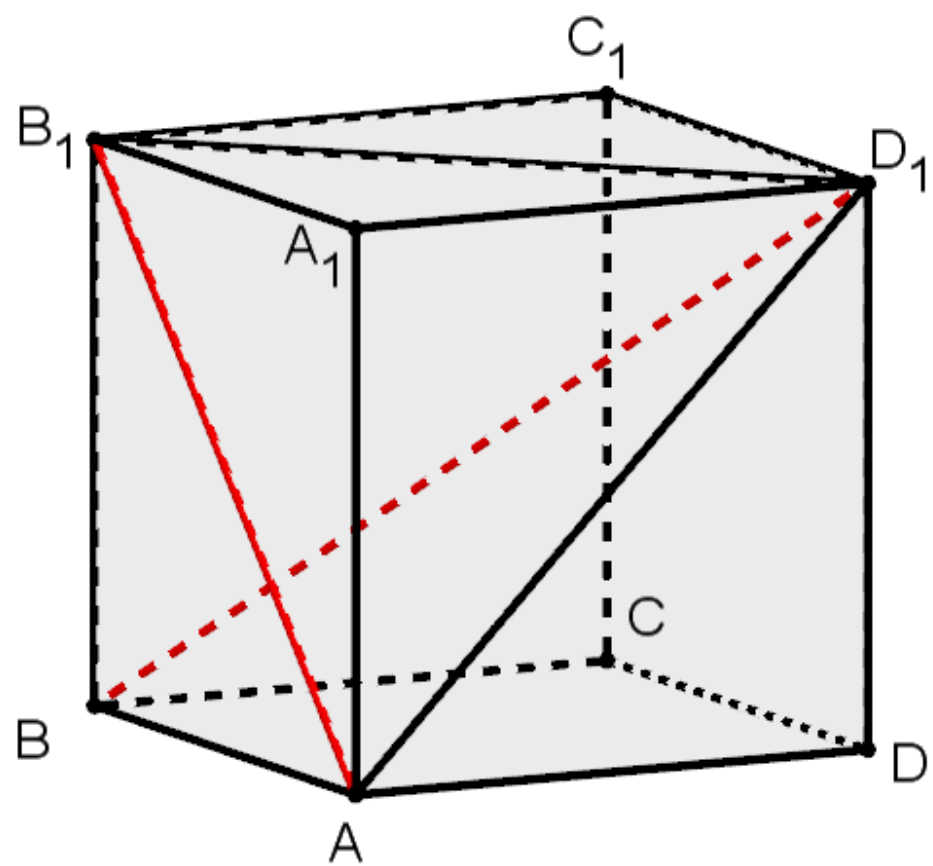


V – объём пирамиды ABCD,
 $AB = a$, $CD = b$ – скрещивающиеся рёбра,
 d – расстояние,
 φ – угол между ними

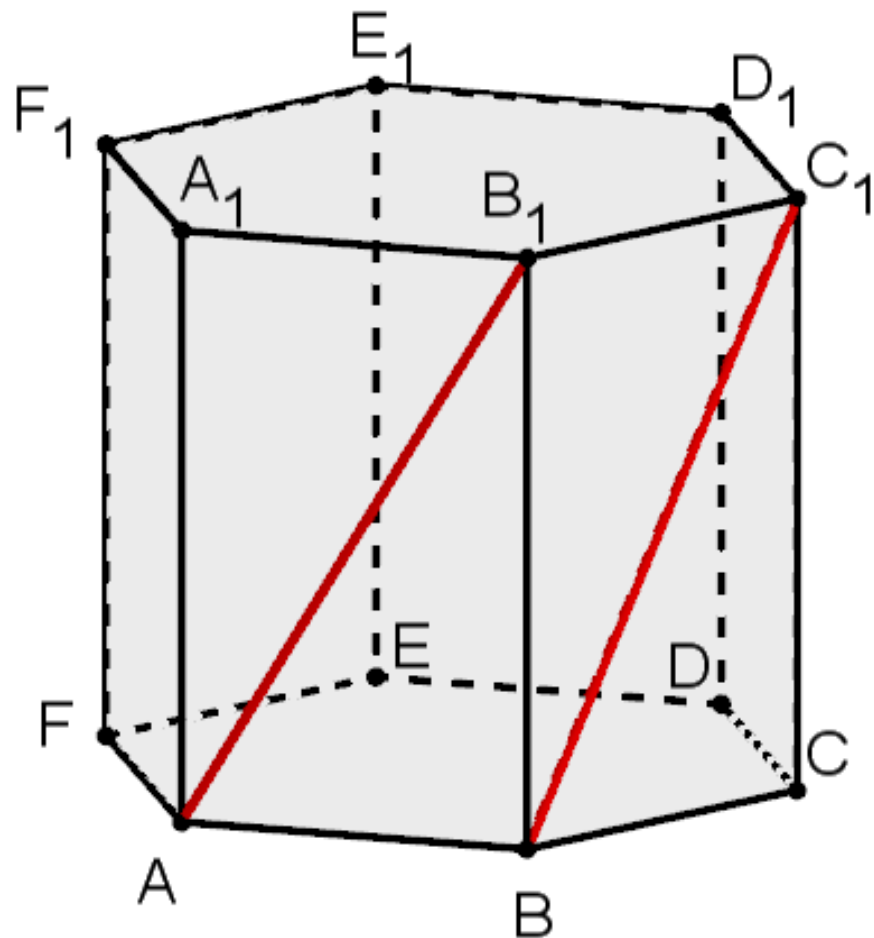
$$d = \frac{6V}{ab \sin \varphi}$$

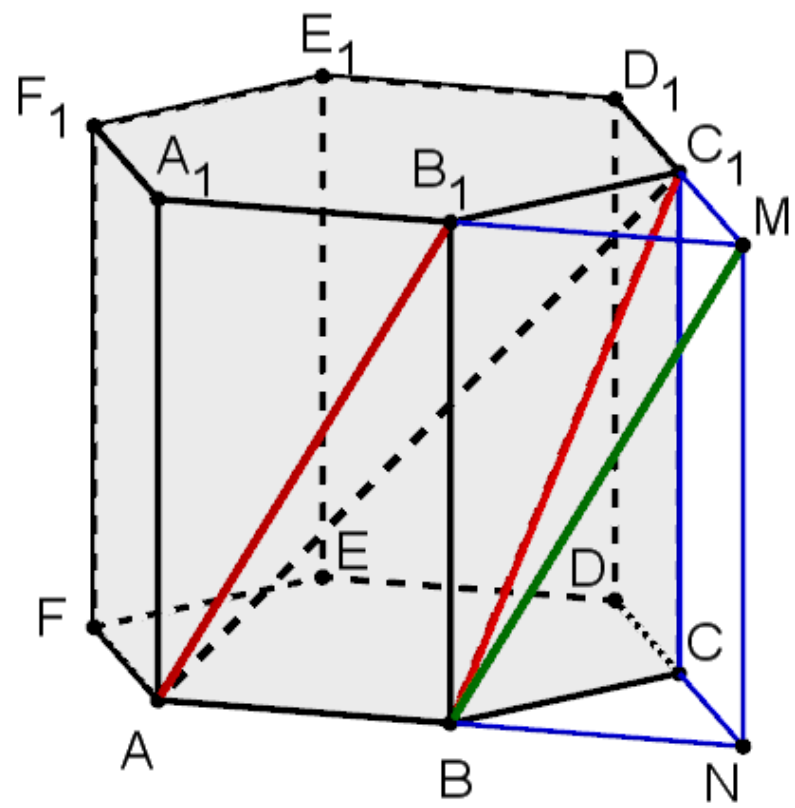
№9. В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние между диагональю куба BD_1 и диагональю грани AB_1 .





№10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1 .



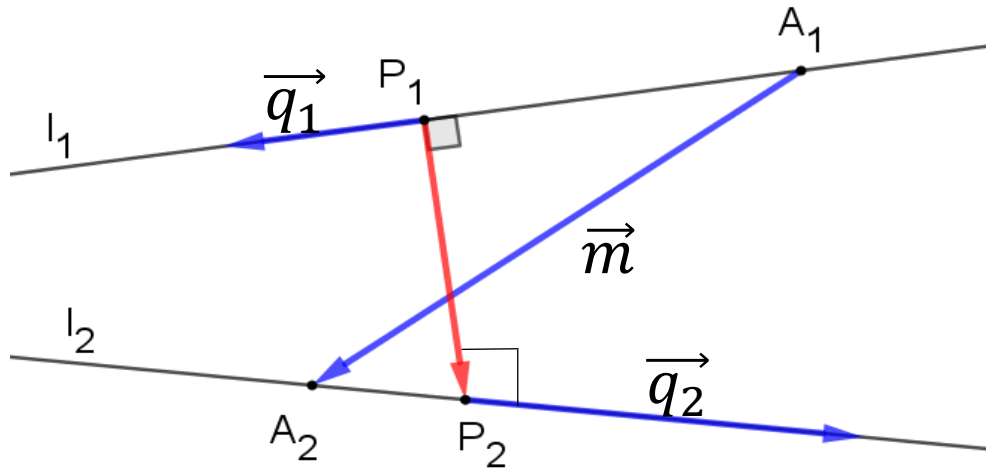


Аналитический подход

1. Метод введения произвольного базиса.

Базис в пространстве – это упорядоченная тройка некопланарных векторов.

$\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{m}$ образуют базис



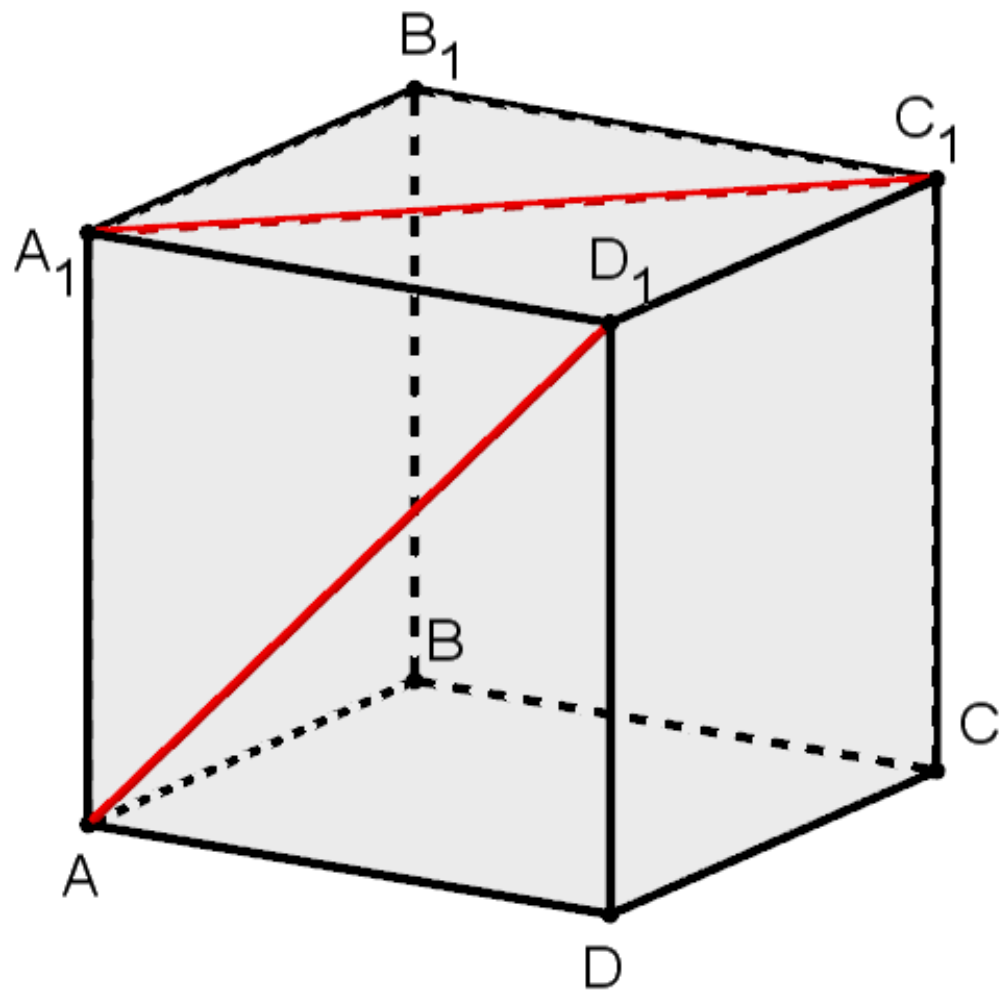
$$\rho(l_1; l_2) = P_1P_2$$

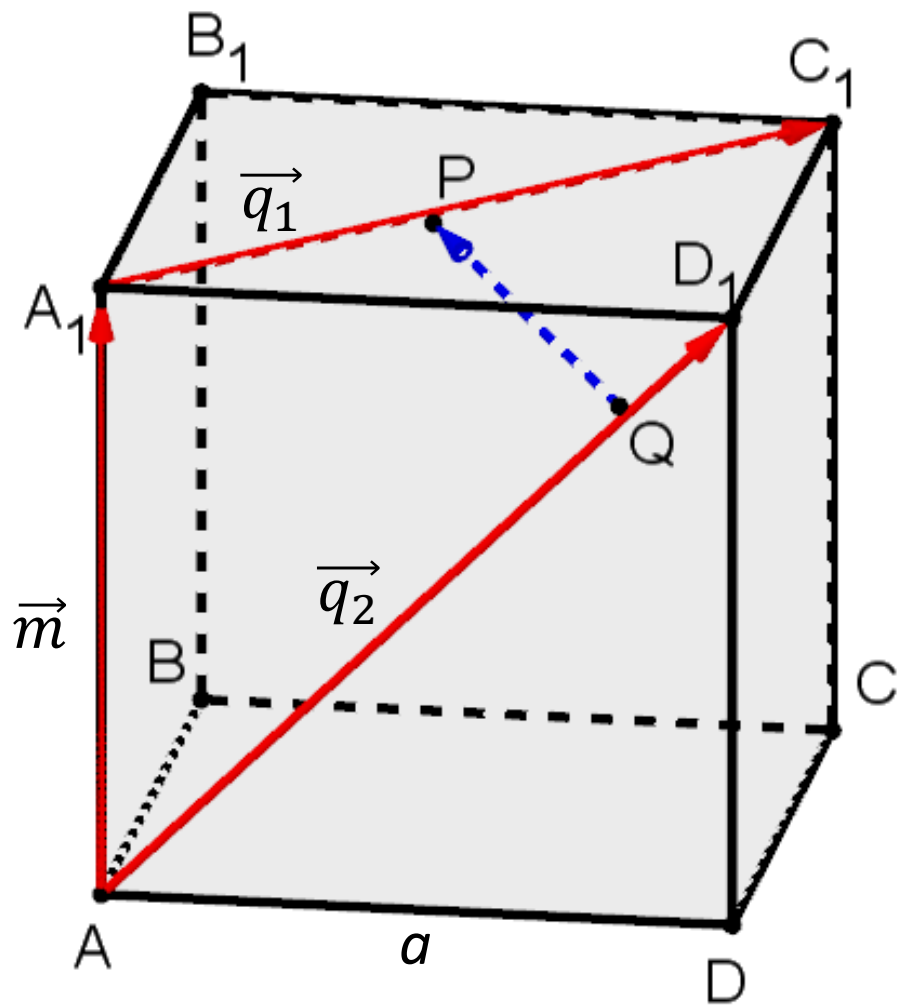
$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2P_2} = \lambda \cdot \vec{q}_1 + \vec{m} + \mu \cdot \vec{q}_2$$

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(\lambda \cdot \vec{q}_1 + \vec{m} + \mu \cdot \vec{q}_2)^2}$$

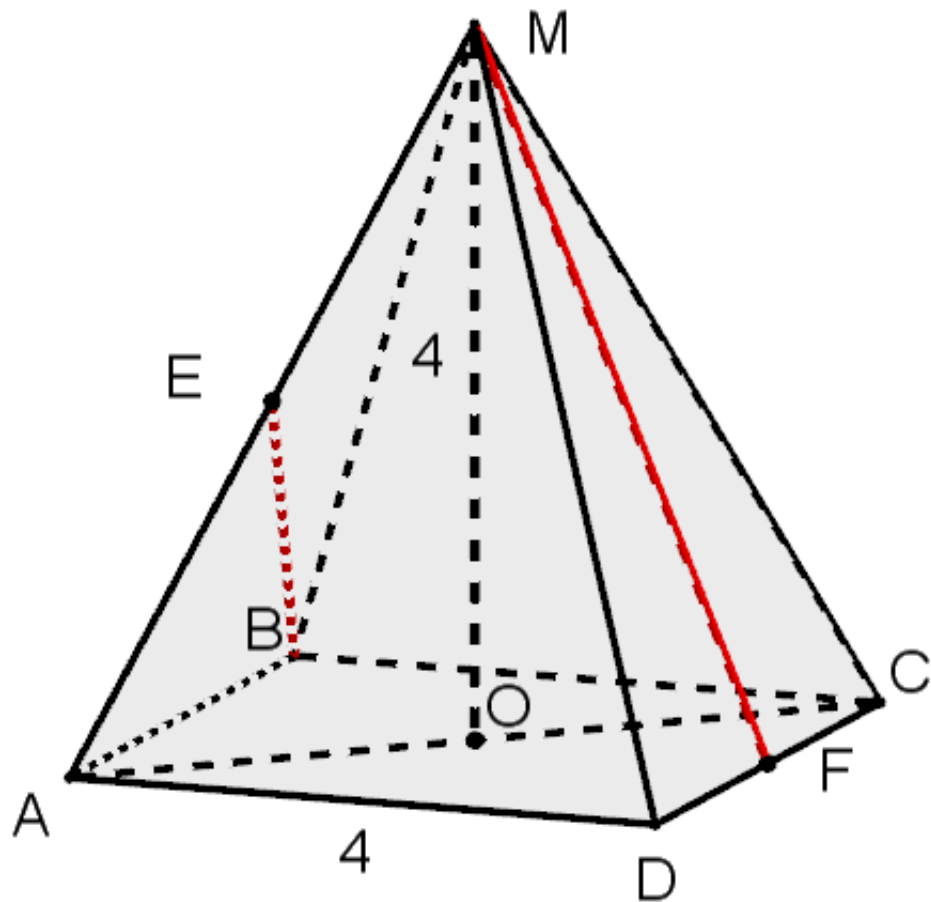
Часто используется комбинированный подход, связанный с дополнительным введением прямоугольной системы координат. В этом случае нужно выразить векторы $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{m}$ через базисные векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ прямоугольной системы координат и провести вычисления.

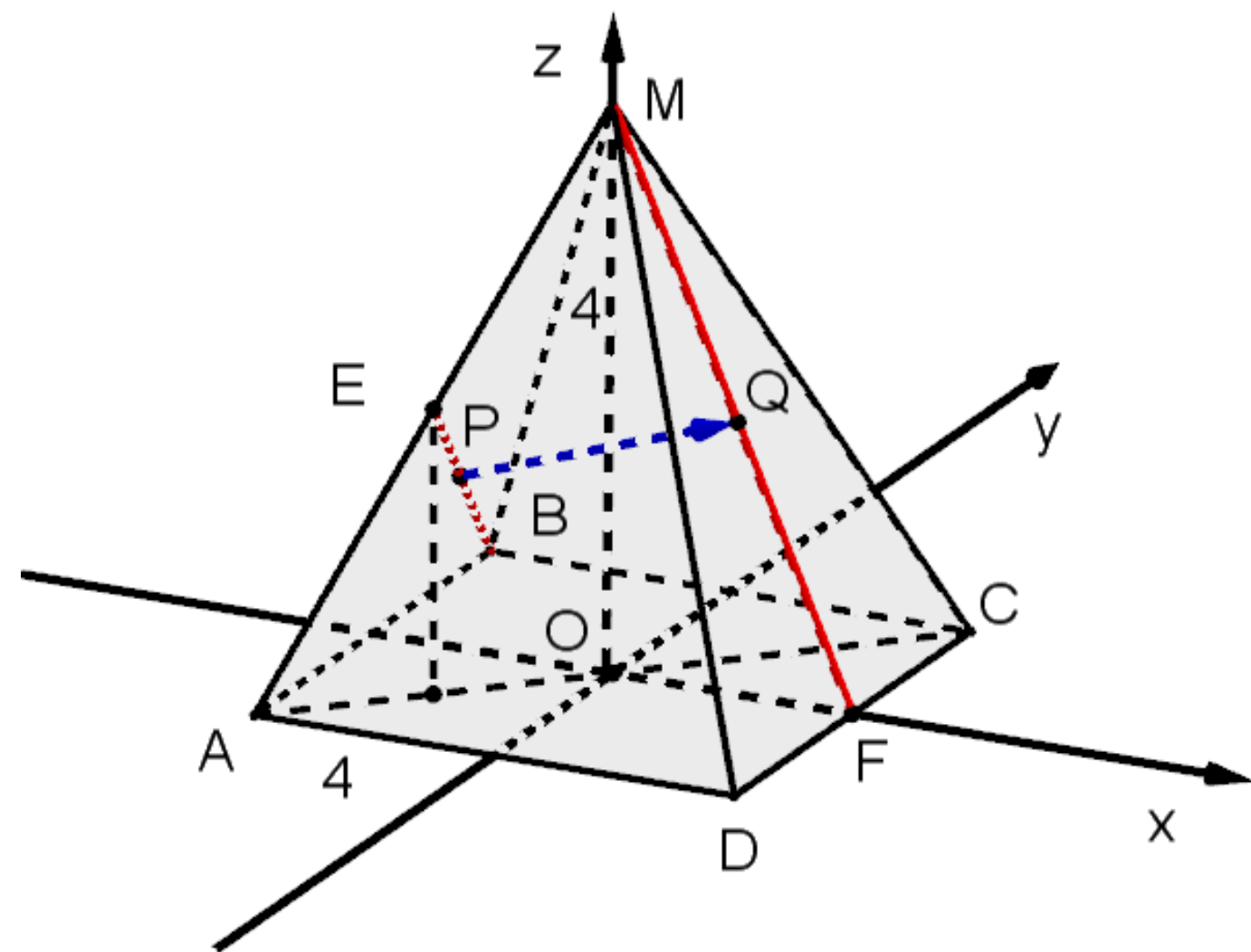
№11. Найдите расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба, длина ребра которого равна a .





№12. В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с основанием $ABCD$ высота и сторона основания равны 4, точки E и F – середины рёбер AM и CD соответственно. Найдите расстояние между прямыми BE и FM .





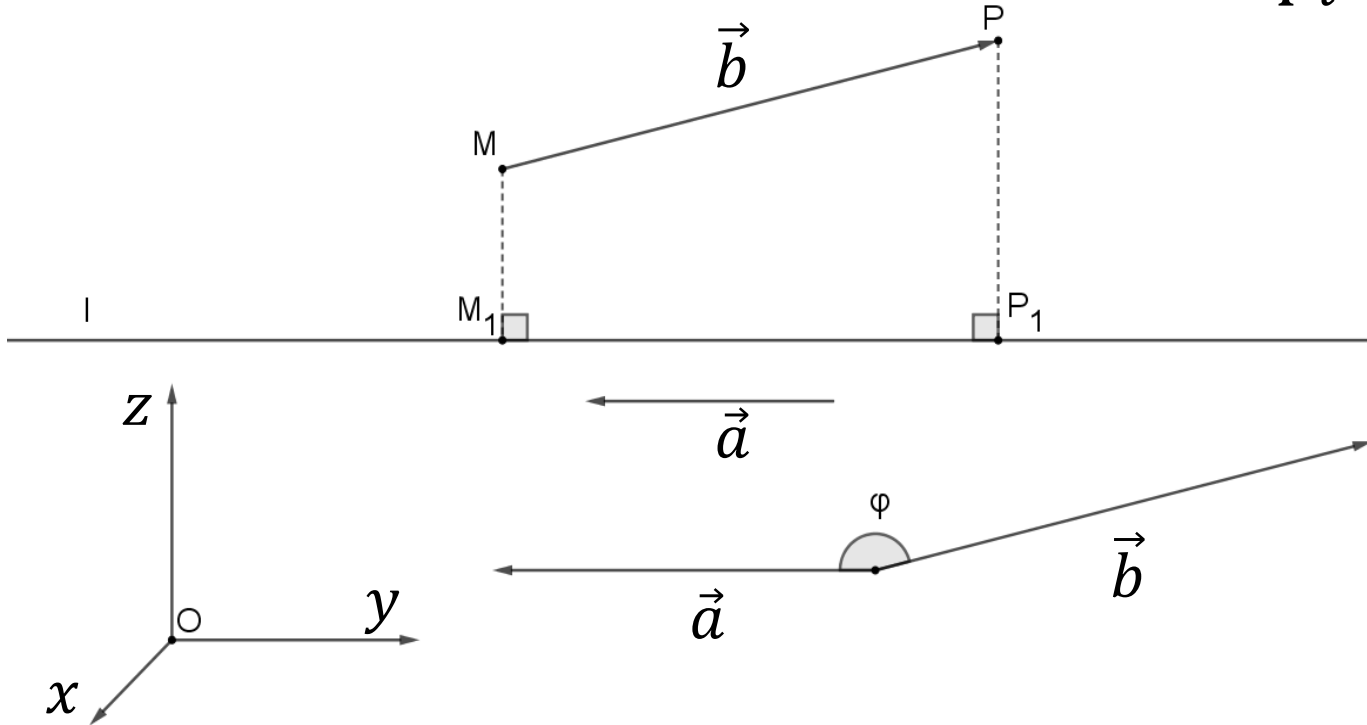
Аналитический подход

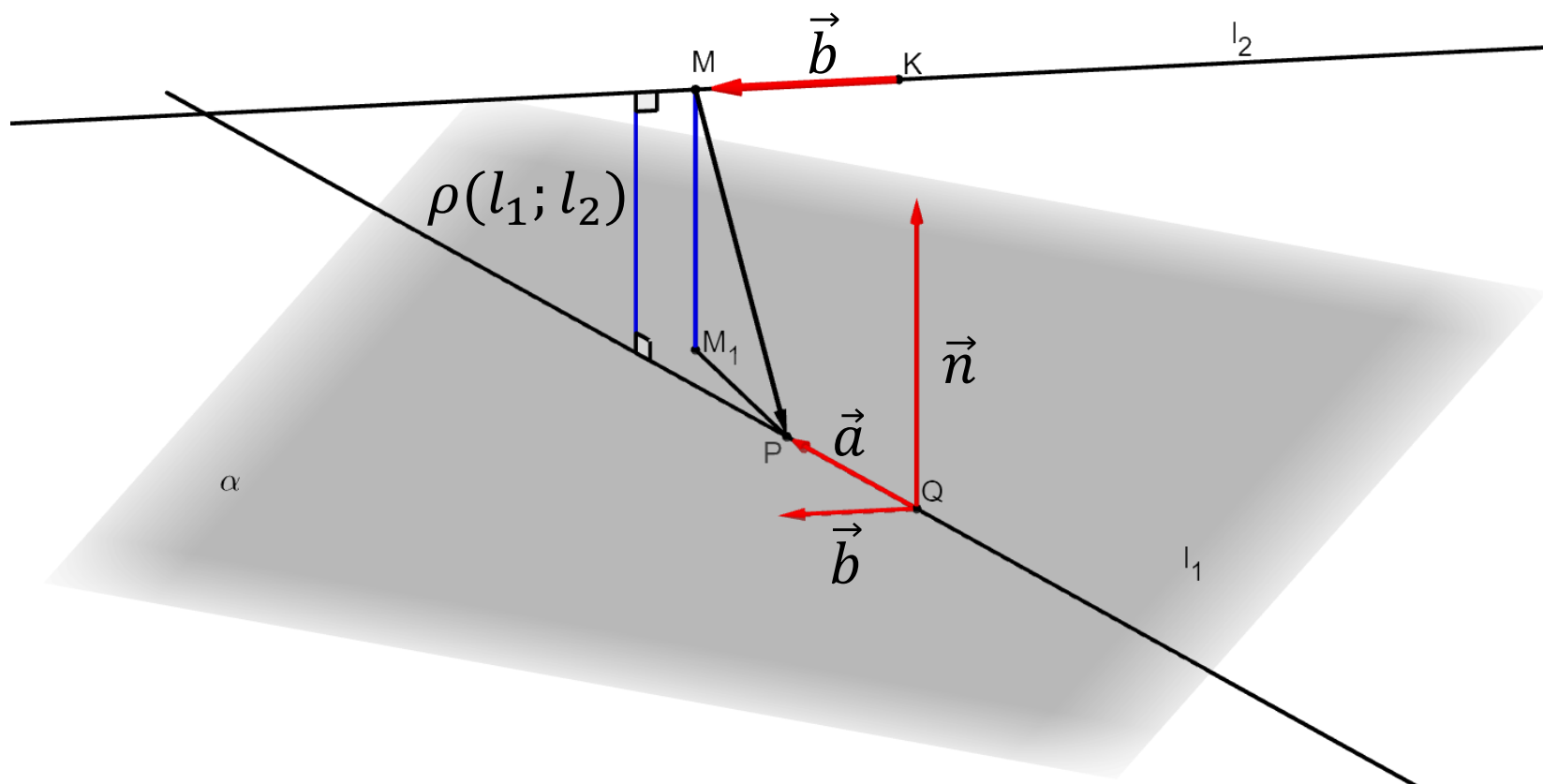
2. Координатно-векторный метод.

Направляющим вектором прямой l называется произвольный ненулевой вектор $\vec{a}$, параллельный l .

$$\text{пр}_l \overrightarrow{MP} = \text{пр}_l \vec{b} = \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

$$\text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$$





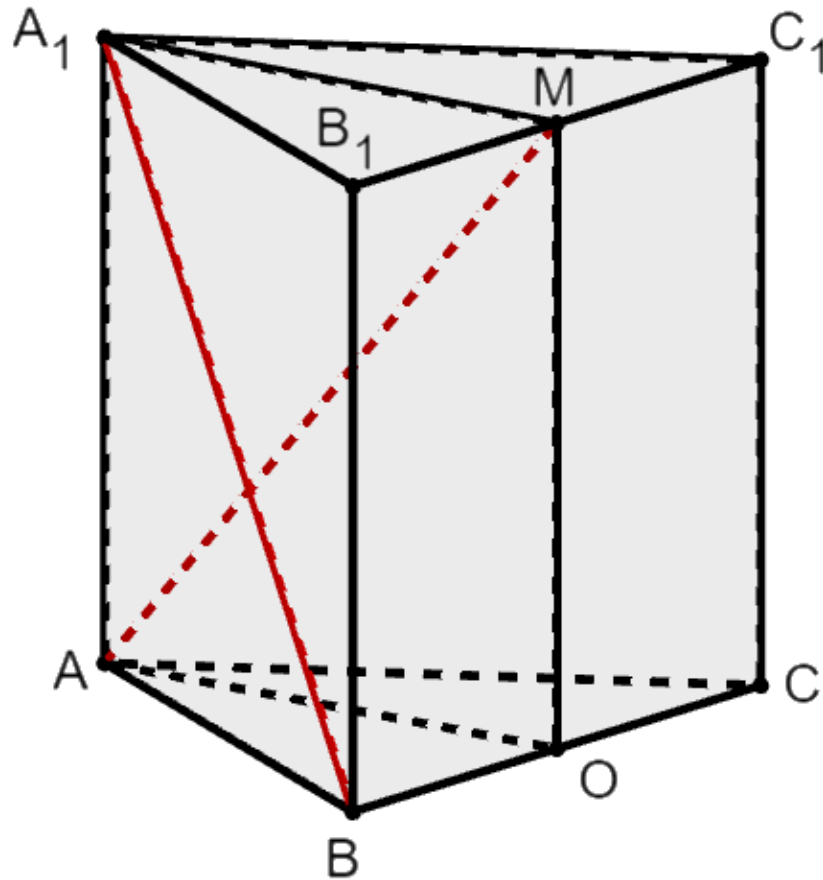
$$\rho(l_1; l_2) = \rho(M; \alpha) = MM_1 = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{MP}|}{|\vec{n}|}$$

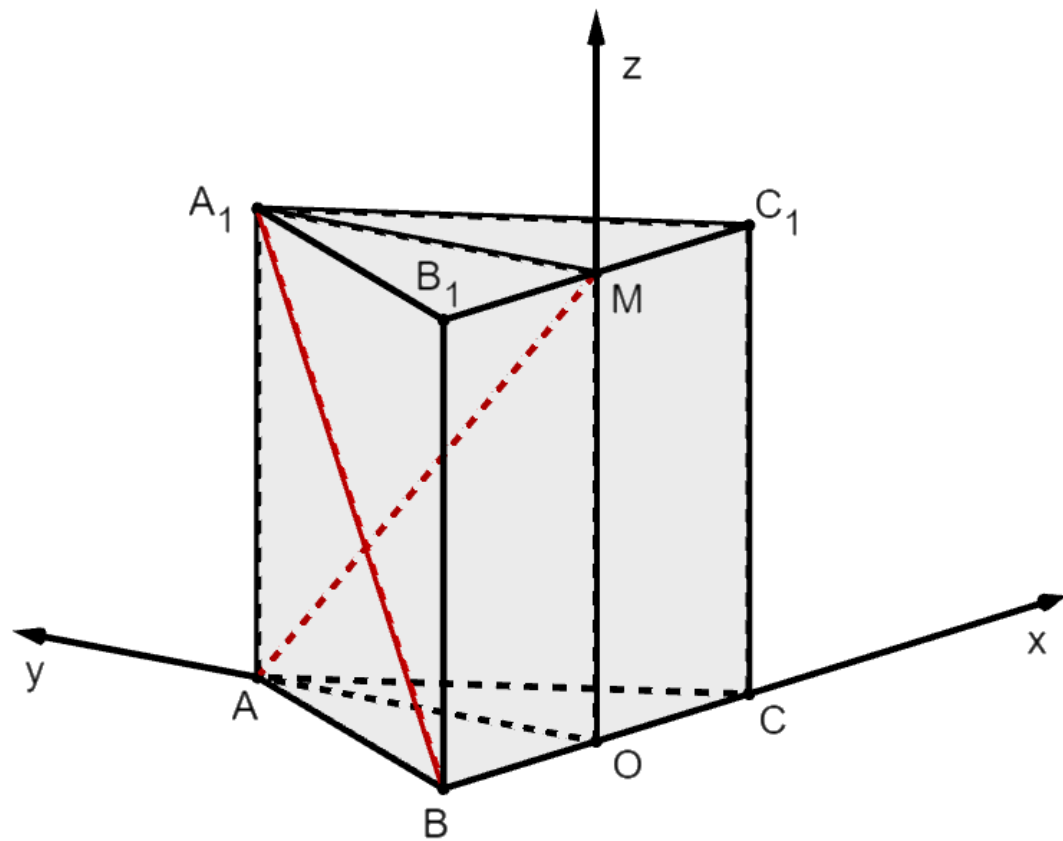
$$M_1 \in \alpha, \quad MM_1 \perp \alpha$$

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ КООРДИНАТНО-ВЕКТОРНЫМ МЕТОДОМ

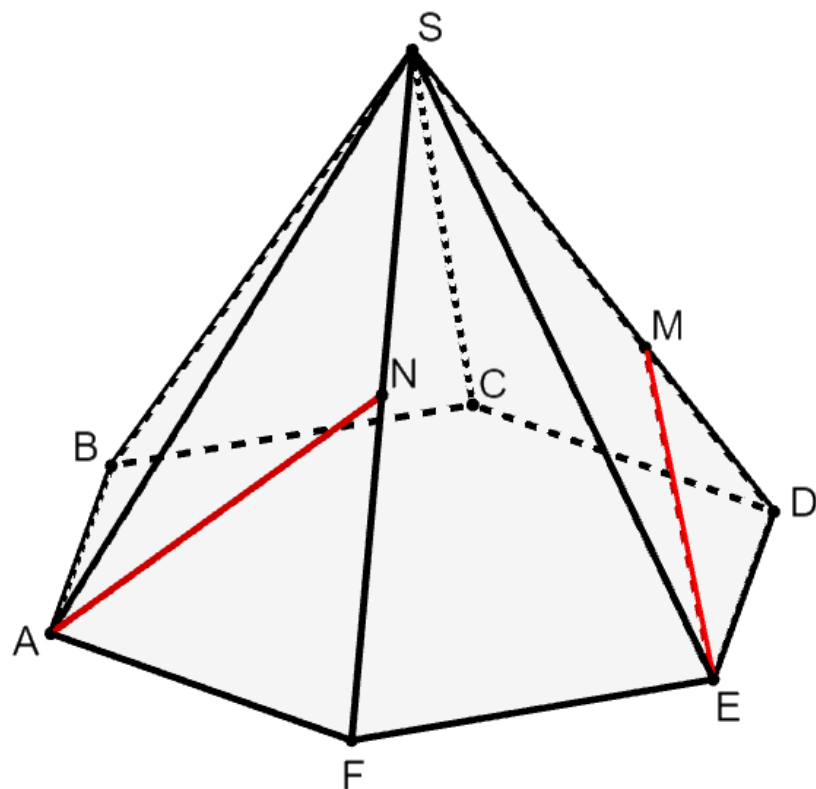
1. Ввести пск.
2. Найти координаты точек $P, Q \in l_1$ и направляющего вектора $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ для прямой l_1 .
3. Найти координаты точек $K, M \in l_2$ и направляющего вектора $\vec{b} = \overrightarrow{MK}$ для прямой l_2 .
4. Найти координаты вектора $\vec{n}\{p; q; r\}$ - нормали к плоскости α , используя условие $\vec{n} \perp \vec{a}, \vec{n} \perp \vec{b}$. Для этого нужно решить систему:
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{a} = 0, \\ \vec{n} \cdot \vec{b} = 0. \end{cases}$$
5. Найти координаты вектора, началом которого служит любая точка прямой l_1 , а концом – произвольная точка прямой l_2 (на рисунке $\overrightarrow{MP}$).
6. Вычислить $\rho(l_1; l_2) = |\text{пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{MP}| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{MP}|}{|\vec{n}|}$.

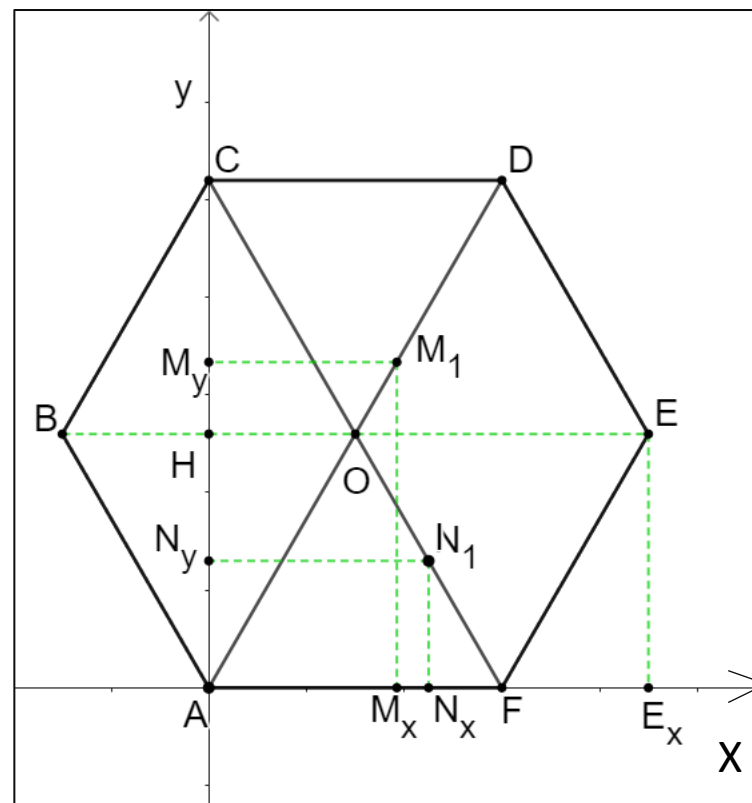
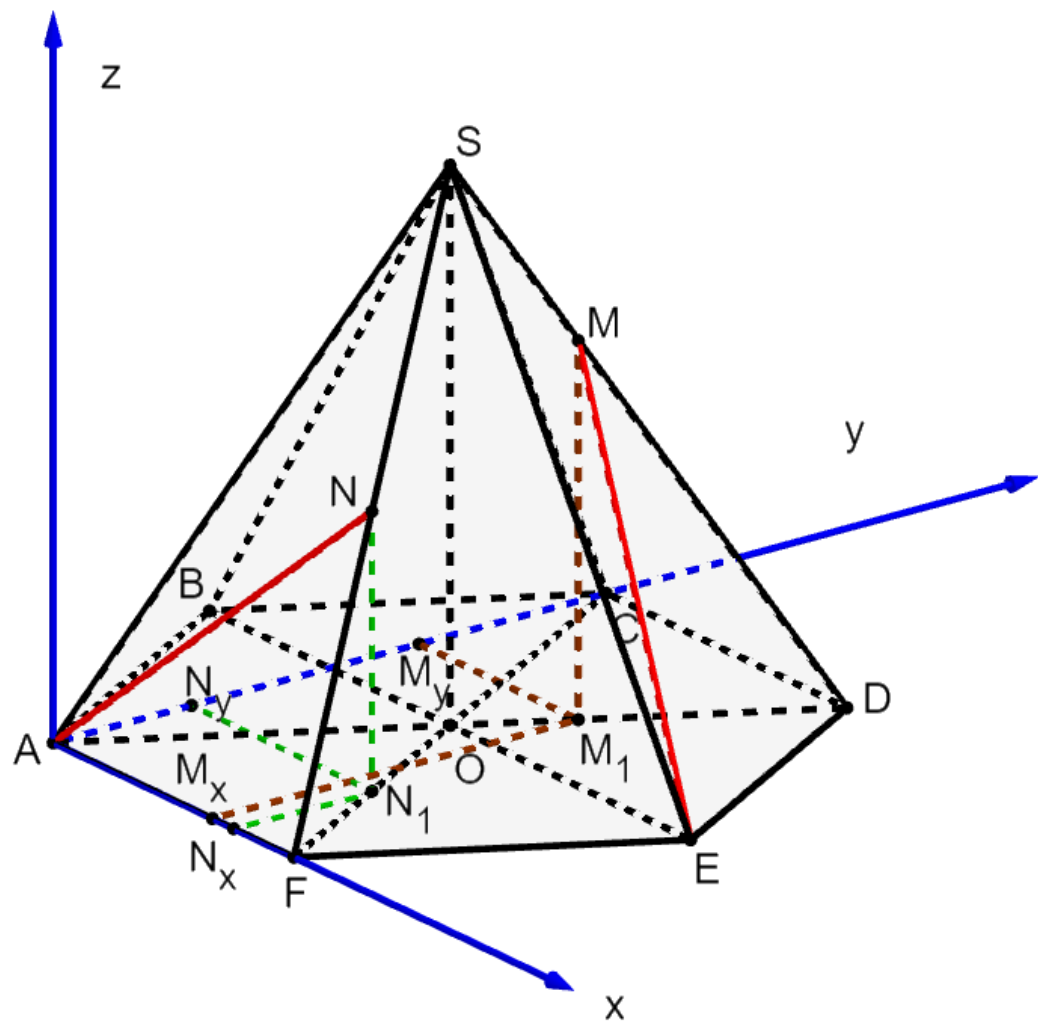
№13. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра основания которой равны $2\sqrt{7}$. Сечение, проходящее через боковое ребро AA_1 и середину M ребра B_1C_1 , является квадратом. Найдите расстояние между прямыми A_1B и AM .

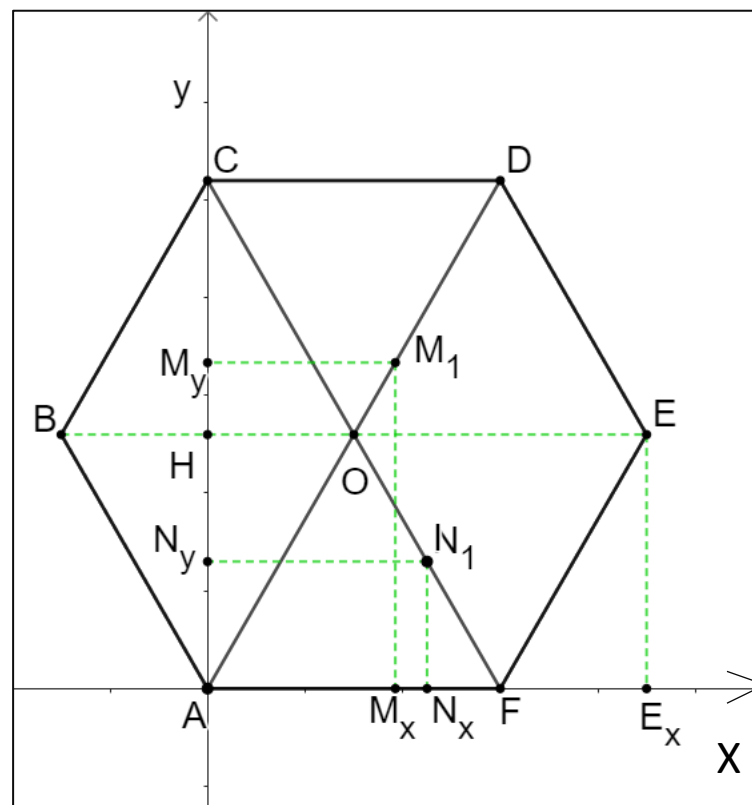
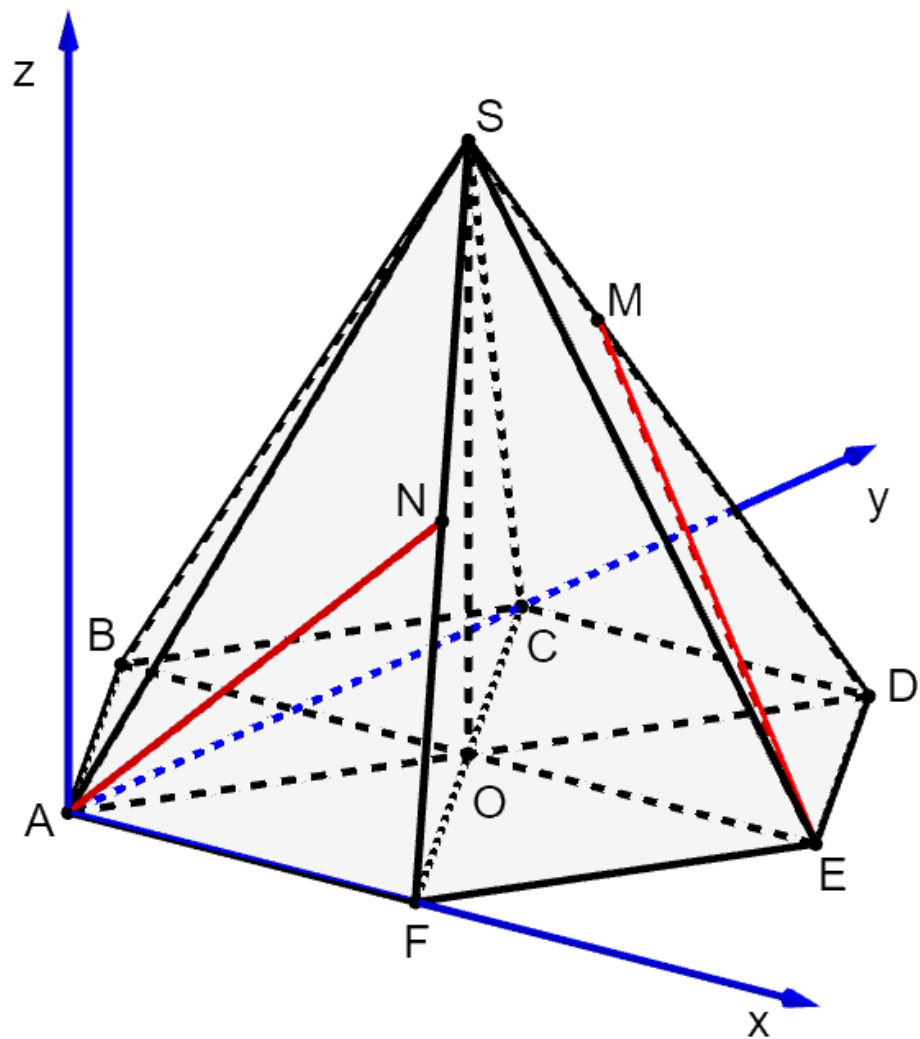




№14. В правильной шестиугольной пирамиде $SAB CDEF$ (S – вершина) боковое ребро и сторона основания равны 4 и 3 соответственно. Точка N – середина ребра SF , а точка M делит ребро SD так, что $SM:MD = 1:3$. Найдите расстояние между прямыми AN и EM .



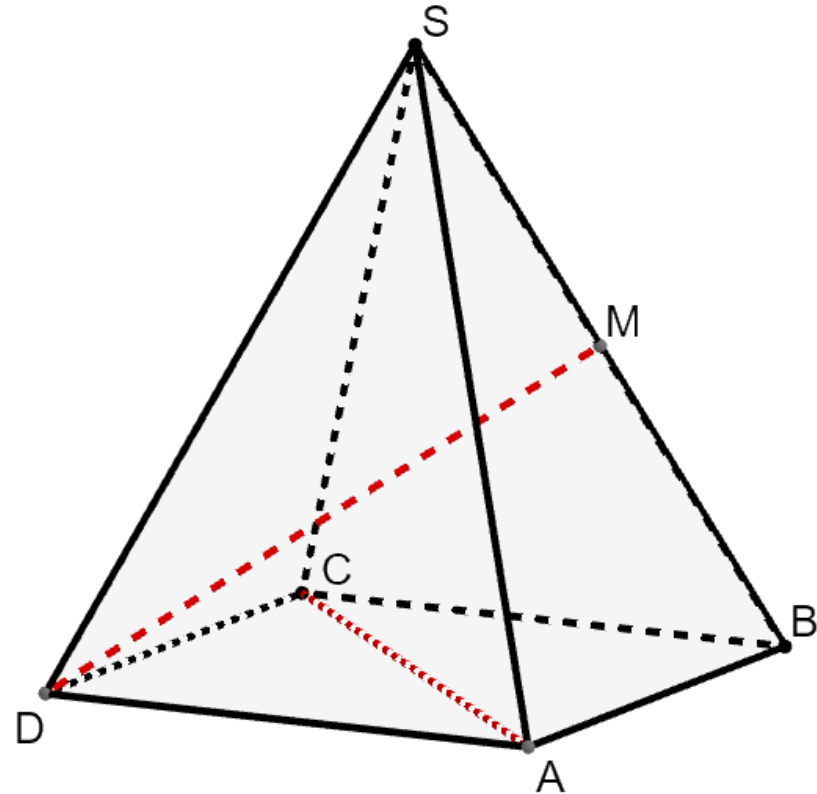


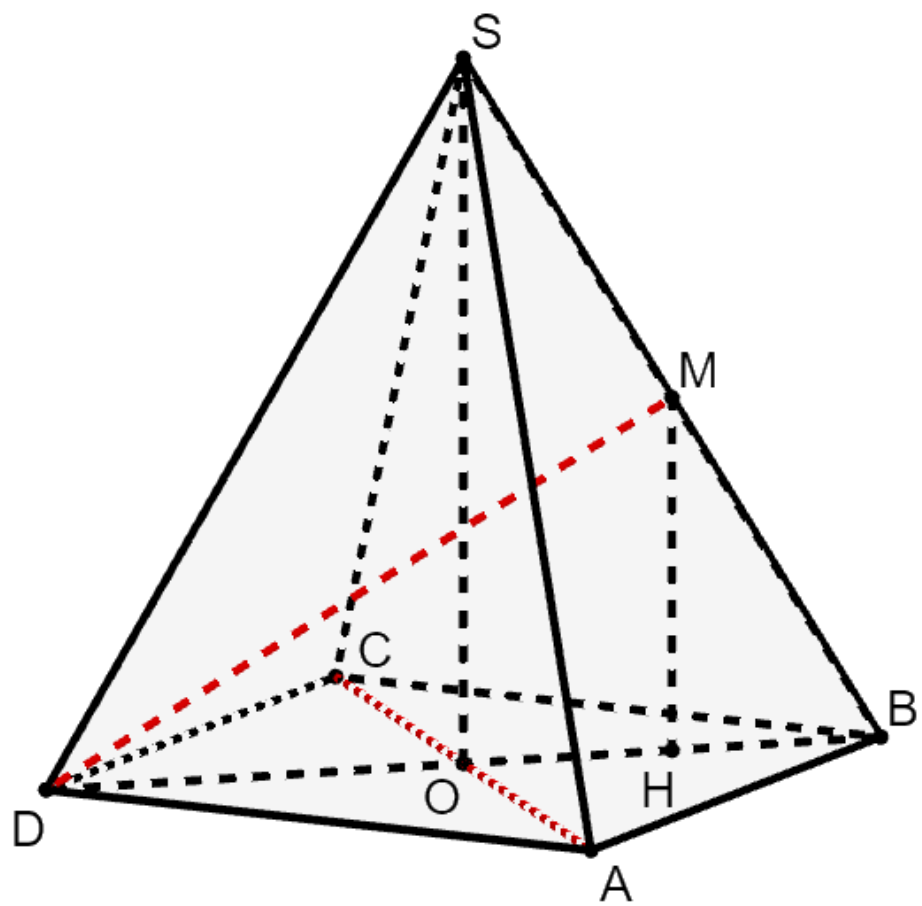


*№15. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ (S - вершина) относится к боковому ребру как $1:\sqrt{2}$. Через вершину D проведена плоскость α , перпендикулярная боковому ребру SB и пересекающая его в точке M .

а) Докажите, что M – середина SB .

б) Найдите расстояние между прямыми AC и DM , если высота пирамиды равна $6\sqrt{3}$.

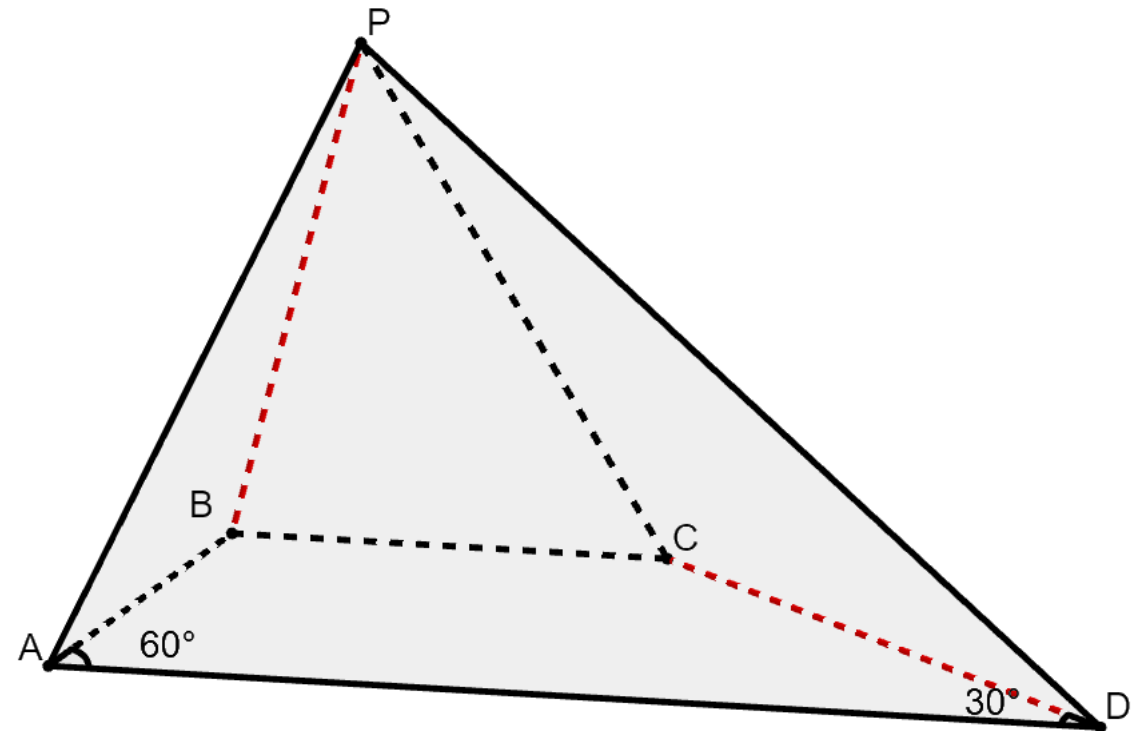


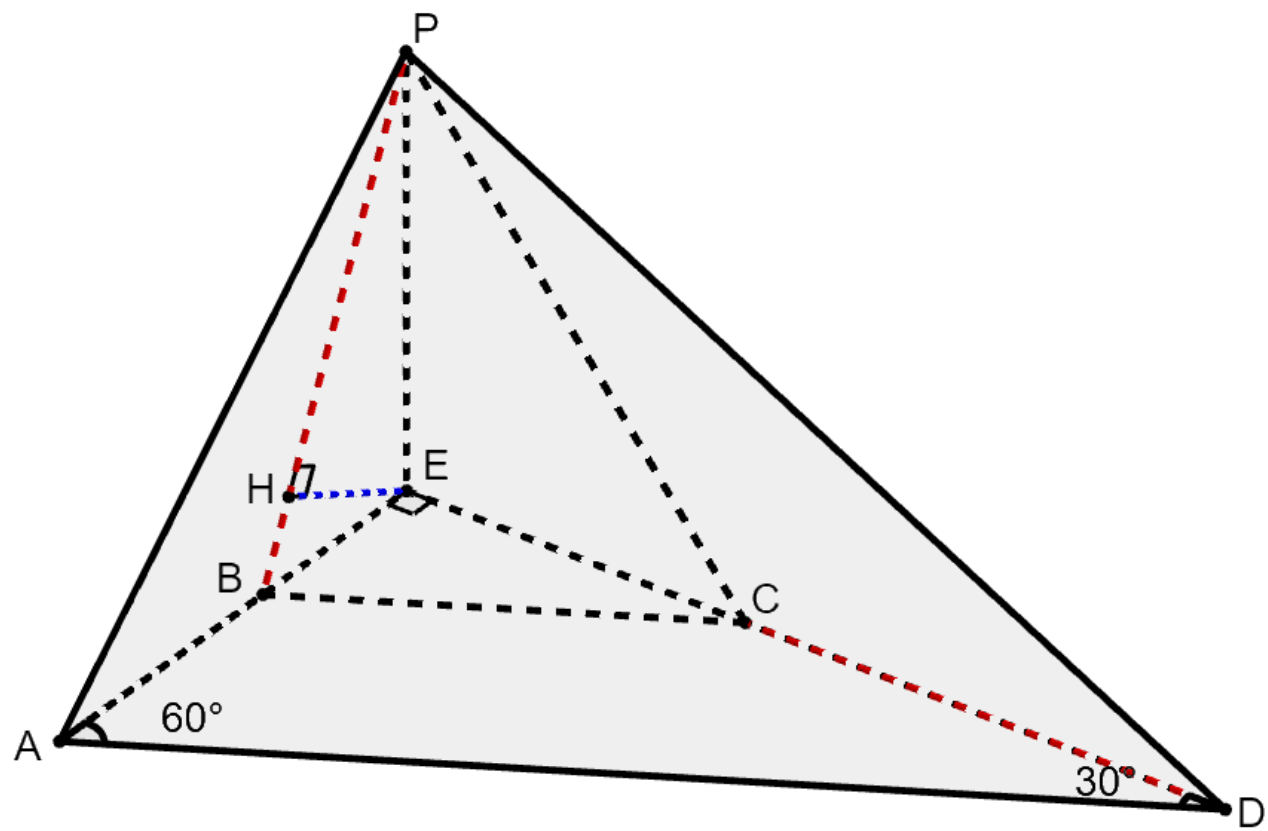


*№16. В основании $PABCD$ лежит трапеция $ABCD$, в которой $\angle BAD = 60^\circ$, $\angle CDA = 30^\circ$. Боковые грани PAB и PCD перпендикулярны основанию пирамиды.

а) Докажите, что плоскости (PAB) и (PCD) перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми PB и CD , если известно, что $BC = 6$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 4.





САМОСТОЯТЕЛЬНО

№1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a . Найдите расстояние между прямыми $A_1 M$ и $K Q$, где точки M – середина ребра $B_1 C_1$, точка K лежит на ребре BB_1 и $BK = \frac{1}{4} BB_1$, точка Q – на ребре DD_1 и $D_1 Q = \frac{3}{4} DD_1$.

(Ответ: $\frac{3a}{4}$)

№2. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ (S - вершина) с ребром основания a и боковым ребром b . Найдите расстояние между прямыми SO и KM , где точка K – середина ребра AC , точка M – середина ребра BC , точка Q – центр основания ABC . (Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{12}$)

№3. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ с ребром основания 2 и боковым ребром 4 . Найдите расстояние между прямыми $A_1 F$ и $E_1 E$.

(Ответ: $\sqrt{3}$)