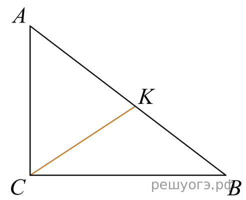
1. В прямоугольном треугольнике *ABC* с прямым углом *C* известны катеты: $AC = 6,\ BC = 8$. Найдите медиану *CK* этого треугольника.

Решение. Медиана, проведенная к гипотенузе, равна её половине:

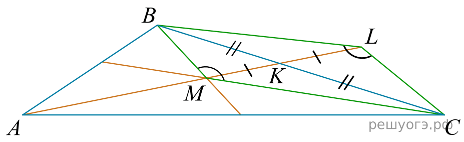


$$CK = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36+64} = 5.$$

Ответ: 5.

2. Медианы треугольника *ABC* пересекаются в точке *M*. Найдите длину медианы, проведённой к стороне *BC*, если угол *BAC* равен 47°, угол *BMC* равен 133°, $BC = 4\sqrt{3}$.

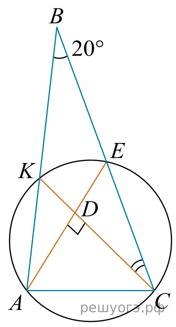
Решение. Обозначим середину стороны *BC* за *K*. Продлим *MK* на свою длину за точку *K* до точки *L*. Четырёхугольник *BLCM*— параллелограмм, потому что $MK = KL$ и $BK = KC$. Значит, $\angle BLC = \angle BMC$ =133°, поэтому четырёхугольник *ABLC*— вписанный. Тогда $AK \cdot KL = BK \cdot KC;\ \frac{AK^2}{3} = \frac{BC^2}{4};\ AK = 6$.



Ответ: 6.

3. Окружность проходит через вершины *A* и *C* треугольника *ABC* и пересекает его стороны *AB* и *BC* в точках *K* и *E* соответственно. Отрезки *AE* и *CK* перпендикулярны. Найдите ∠*KCB*, если ∠*ABC* = 20°.

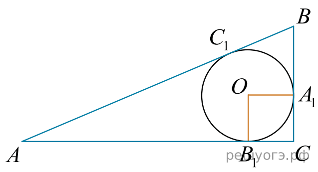
Решение. Углы *AKC* и *AEC* равны, т.к. опираются на одну дугу окружности; следовательно, ∠*BKC* = ∠*BEA*, как смежные с ними. Из четырёхугольника *BKDE*: $\angle BKC = \frac{1}{2}(360^\circ - 90^\circ - 20^\circ) = 125^\circ$. Из Δ*BKC*: ∠*KCB* = 180° − 125° − 20° = 35°.



Ответ: 35°.

4. В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, радиус вписанной окружности равен 3. Найдите площадь треугольника *ABC*, если *AB* = 15.

Решение. Пусть A_1, B_1 и C_1— точки касания вписанной окружности со сторонами *BC*, *AC* и *AB* соответственно. Радиус вписанной окружности обозначим *r*. Тогда $AC_1 = AB_1$ и $CA_1 = CB_1 = r$. Периметр треугольника *ABC* равен $2AC_1 + 2BC_1 + 2CA_1 = 2AB + 2r$. Полупериметр *p* равен *AB* + *r*.

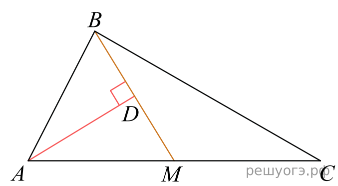


По формуле площади треугольника находим

$$S = p \cdot r = (AB + r) \cdot r = (15+3) \cdot 3 = 54.$$

Ответ: 54.

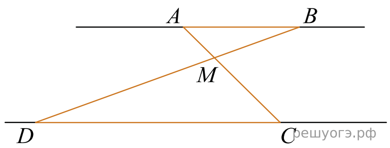
5. Прямая *AD*, перпендикулярная медиане *BM* треугольника *ABC*, делит её пополам. Найдите сторону *AC*, если сторона *AB* равна 4.



Решение. Так как высота AD, проведенная к медиане BM делит ее пополам, то треугольник ABM является равнобедренным, поэтому AB=AM=4. Так как BM- медиана, то AM=MC, таким образом, AC=2AM=8.

Ответ: 8.

6. Отрезки *AB* и *DC* лежат на параллельных прямых, а отрезки *AC* и *BD* пересекаются в точке *M*. Найдите *MC*, если *AB* = 16, *DC* = 24, *AC* = 25 .



Решение. Углы *DCM* и *BAM* равны как накрест лежащие, углы *DMC* и *BMA* равны как вертикальные, следовательно, треугольники *DMC* и *BMA* подобны по двум углам.

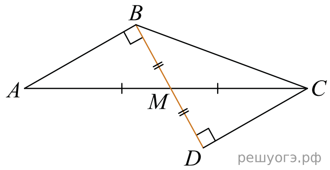
Значит, $\frac{AM}{MC}=\frac{AB}{CD}=\frac{16}{24}=\frac{2}{3}$. Следовательно,

$$AC=AM+MC=\frac{2}{3}MC+MC=\frac{5}{3}MC.$$

Откуда $MC=\frac{AC}{5}\cdot 3=\frac{25}{5}\cdot 3=15.$

Ответ: 15.

7. Найдите отношение двух сторон треугольника, если его медиана, выходящая из их общей вершины, образует с этими сторонами углы в 30° и 90°.



Решение. Пусть в треугольнике *ABC* отрезок *BM* служит медианой, при этом $\angle ABM$ =90°, $\angle CBM$=30°. Возьмем на продолжении отрезка *BM* точку *D* так, что $BM=MD$. Тогда треугольники *ABM* и *CDM* равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle BDC$=90°. Поэтому треугольник BDC— прямоугольный с углом *CBD* , равным 30°. Следовательно, $\frac{AB}{BC}=\frac{CD}{BC}=\frac{1}{2}.$

Приведем решение Марии Васильевны.

Пусть в треугольнике *ABC* отрезок *BM* служит медианой, при этом $\angle ABM$ = 90°, $\angle CBM$ = 30°.

Площадь треугольника *ABM*: $S_{ABM}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BM\sin\angle ABM=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BM\sin 90^\circ=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BM$.

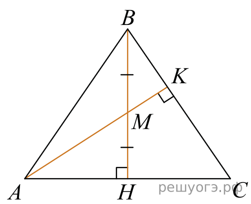
Площадь треугольника *MBC*: $S_{MBC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot BM\sin\angle MBC=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot BM\sin 30^\circ=\frac{1}{4}\cdot BC\cdot BM$.

Площади треугольников *ABM* и *MBC* равны, поскольку *BM* - медиана.

Тогда $\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BM=\frac{1}{4}\cdot BC\cdot BM$, откуда $AB=\frac{1}{2}\cdot BC$, следовательно, $\frac{AB}{BC}=\frac{1}{2}.$

Ответ: 1:2.

8. Высота треугольника разбивает его основание на два отрезка с длинами 8 и 9. Найдите длину этой высоты, если известно, что другая высота треугольника делит ее пополам.



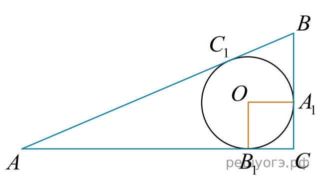
Решение. Пусть высота *BH* треугольника *ABC* разбивает основание *AC* на отрезки $AH=8$ и $CH=9$, высота *AK* пересекает высоту *BH* в точке *M*, причем $BM=MH=x$. Треугольники *AHM*, *BKM* и *BHC* подобны, поскольку они прямоугольные и первые два имеют равные углы (углы *AMH* и *BMK* равны как вертикальные), а вторые два имеют общий угол. Получаем пропорцию

$$\frac{MH}{AH}=\frac{CH}{BH}, \text{ то есть } \frac{x}{8}=\frac{9}{2x}, \text{ откуда } x^2=36.$$

Следовательно, $BM=6$ и $BH=12.$

Ответ: 12.

9. В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, радиус вписанной окружности равен 2. Найдите площадь треугольника *ABC*, если *AB* = 12.



Решение. Пусть A_1, B_1 и C_1— точки касания вписанной окружности со сторонами *BC*, *AC* и *AB* соответственно. Радиус вписанной окружности обозначим *r*. Тогда $AC_1 = AB_1$, $BC_1 = BA_1$ и $CA_1 = CB_1 = r$. Периметр треугольника *ABC* равен

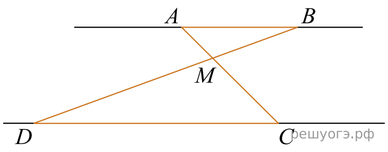
$$2AC_1 + 2BC_1 + 2CA_1 = 2AB + 2r,$$

а его полупериметр *p* равен *AB* + *r*.

По формуле площади треугольника находим $S=p\cdot r=(AB+r)\cdot r=28.$

Ответ: 28.

10. Отрезки *AB* и *DC* лежат на параллельных прямых, а отрезки *AC* и *BD* пересекаются в точке *M*. Найдите *MC*, если *AB* = 13, *DC* = 65, *AC* = 42.



Решение. Углы *DCM* и *BAM* равны как накрест лежащие при параллельных прямых, углы *DMC* и *BMA* равны как вертикальные, следовательно, треугольники *DMC* и *BMA* подобны по двум углам. Значит,

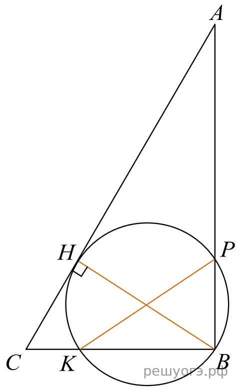
$$\frac{AM}{MC}=\frac{AB}{CD}=\frac{13}{65}=0,2.$$

Следовательно, $AM=0,2MC$.

Тогда $AC=AM+MC=0,2MC+MC=1,2MC$, а значит, $MC=\frac{AC}{1,2}=35$.

Ответ: 35.

11. Точка *H* является основанием высоты *BH*, проведённой из вершины прямого угла *B* прямоугольного треугольника *ABC*. Окружность с диаметром *BH* пересекает стороны *AB* и *CB* в точках *P* и *K* соответственно. Найдите *PK*, если *BH* = 11.



Решение. Угол *PBK* — вписанный, он равен 90° и опирается на дугу *KHP*, следовательно, дуга *KHP* равна 180°, значит, хорда *PK* — диаметр окружности и $PK=11$.

Ответ: 11.