

КРАСНОДАРСКИЙ КРАЙ
МУНИЦИПАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ ТБИССКИЙ РАЙОН
МУНИЦИПАЛЬНОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«СРЕДНЯЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА № 2»

СБОРНИК ДИДАКТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА
«Избранные задачи для подготовки к ЕГЭ на профильном уровне»

АВТОР-СОСТАВИТЕЛЬ:

Ходорева Татьяна Викторовна,
учитель математики МАОУ «СОШ № 2»

СТ. ТБИССКАЯ, 2020

Содержание

Содержание	2
Пояснительная записка	3
Блок I. Тригонометрические уравнения и их решение.....	4
Блок II. Логарифмические уравнения и	12
неравенства и их решение.....	123
Блок III. Показательные уравнения, неравенства, иррациональные неравенства и их решение.....	311
Блок IV. Задачи по геометрии и их решение.....	422
Приложение 1. Задачи для самостоятельного решения.....	555
Приложение 2. Ответы к задачам для самостоятельного решения.	566
Список литературы	577

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

ЕГЭ по математике совмещает два экзамена – выпускной школьный и вступительный в ВУЗ. В связи с этим материал, усвоение которого проверяется при сдаче ЕГЭ, значительно шире материала, проверяемого при сдаче выпускного экзамена.

Данный сборник предусматривает возможность изучения математики с различной степенью полноты, обеспечивает сознательное овладение обучающимися учащимися системой математических знаний и умений, достаточных для изучения сложных дисциплин и продолжения образования в высших учебных заведениях.

Цели данного пособия:

- создание условий для дифференциации и индивидуализации обучения, выбора обучающимися разных категорий индивидуальных образовательных траекторий в соответствии с их способностями, склонностями и потребностями;

- интеллектуальное развитие обучающихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых человеку для жизни в современном обществе, для общей социальной ориентации и решения практических проблем.

Задачи:

- подготовить к успешной сдаче ЕГЭ по математике;
- расширить знания и умения в решении различных математических задач, подробно рассмотрев возможные или более приемлемые методы их решения;

- формировать общие умения и навыки по решению задач: анализ содержания, поиск способа решения, составление и осуществление плана, проверка и анализ решения, исследование;

- повышать информационную и коммуникативную компетентность обучающихся;

- помочь обучающимся оценить свой потенциал с точки зрения образовательной перспективы.

Блок I. Тригонометрические уравнения и их решение.

№1. Решите уравнение: $\frac{6\cos^2 x - \cos x - 2}{\sqrt{-\sin x}} = 0$

Решение:

$$\frac{6\cos^2 x - \cos x - 2}{\sqrt{-\sin x}} = 0;$$

$$\begin{cases} 6\cos^2 x - \cos x - 2 = 0; \\ -\sin x > 0 \end{cases};$$

1) $6\cos^2 x - \cos x - 2 = 0,$

Пусть $\cos x = t, |t| \leq 1.$

$$6t^2 - t - 2 = 0$$

$$D = 25$$

$$t_1 = \frac{2}{3}, t_2 = -\frac{1}{2}.$$

Вернемся к первоначальной замене:

а) $\cos x = \frac{2}{3}$

$$x = \pm \arccos \frac{2}{3} + 2\pi n, n \in Z;$$

б) $\cos x = -\frac{1}{2}$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$$

2) $-\sin x > 0$

$\sin x < 0,$ т. е. x — угол 3,4 четвертей, поэтому

$$x = -\arccos \frac{2}{3} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$$

Ответ: $-\arccos \frac{2}{3} + 2\pi n; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in Z.$

№2 Решите уравнение: $\frac{\cos 2x + 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1}{\log_2 \sin x} = 0$.

Решение: $\frac{\cos 2x + 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1}{\log_2 \sin x} = 0$

1. ОДЗ: $\log_2 \sin x \neq 0$, т.к. $0 < \sin x < 1$;

2. $\cos 2x + 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 0$.

Для решения применяем формулу $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

$$2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \cos x;$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

Пусть $\cos x = t, t \in [-1; 1]$, тогда $2t^2 + t - 1 = 0$

$$t_1 = -1, \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

Вернемся к первоначальной замене:

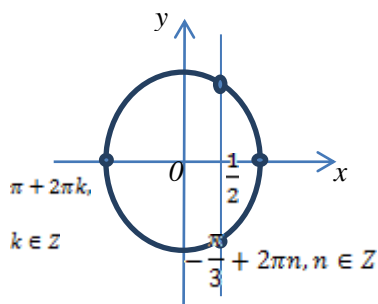
a) $\cos x = -1$;

$$x = \pi + 2\pi k, k \in Z.$$

б) $\cos x = \frac{1}{2}$;

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

в)



3. С учетом ОДЗ имеем $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$.

№3 а) Решите уравнение: $\sqrt{\cos^2 5x - 10\cos 5x + 25} - \sqrt{(7\cos 5x - 10)^2} = -8$;

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

Решение:

$$\sqrt{\cos^2 5x - 10\cos 5x + 25} - \sqrt{(7\cos 5x - 10)^2} = -8$$

$$\sqrt{(\cos 5x - 5)^2} - \sqrt{(7\cos 5x - 10)^2} = -8$$

$$|\cos 5x - 5| - |7\cos 5x - 10| = -8$$

Т.к. $\cos 5x \in [-1; 1]$, то $5\cos 5x > 0$, $10 - 7\cos 5x > 0$, имеем:

$$|\cos 5x - 5| - |7\cos 5x - 10| = -8, \quad 5 - \cos 5x - 10 + 7\cos 5x = -8$$

$$6\cos 5x = -3,$$

$$\cos 5x = -\frac{1}{2} \in [-1; 1].$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}, n \in Z$$

$$\text{б) 1) } x = \frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}, n \in Z, \quad \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right].$$

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5} \leq \pi$$

$$\frac{1}{2} \leq n \leq \frac{13}{6}, n \in Z$$

$$n = 1; 2.$$

$$\text{при } n=1, x = \frac{8\pi}{15};$$

$$\text{при } n=2, x = \frac{14\pi}{15}.$$

$$2) x = -\frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}, n \in Z, \quad \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right].$$

$$\frac{7}{6} \leq n \leq \frac{17}{6}, n \in Z$$

$$\text{При } n=2, x = \frac{2\pi}{3}.$$

Ответ: а) $\pm \frac{2\pi}{15} + \frac{2n}{5}n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{8\pi}{15}, \frac{2\pi}{3}, \frac{14\pi}{15}$.

№4. Решите уравнение: $4\cos^2 x \operatorname{ctg} x + 4\operatorname{ctg} x + \sin x = 0$.

Решение:

Приведем $4\cos^2 x \operatorname{ctg} x + 4\operatorname{ctg} x + \sin x = 0$ к общему знаменателю $\sin x$:

$$1) \frac{4\cos^2 x + 4\cos x + \sin^2 x}{\sin x} = 0,$$
$$\frac{3\cos^2 x + 4\cos x + 1}{\sin x} = 0.$$

$$2) \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x = -1 \\ \cos x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ x = \pm \left(\pi - \arccos \frac{1}{3} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \left(\pi - \arccos \frac{1}{3} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\pm \left(\pi - \arccos \frac{1}{3} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

№5. Решите уравнение: $\sin \left(4x - \frac{\pi}{6} \right) + \sin 2x = -\frac{1}{2}$.

Решение:

$$\sin \left(4x - \frac{\pi}{6} \right) + \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

Используем формулу синуса разности двух углов

$$\sin 4x \cos \frac{\pi}{6} - \cos 4x \sin \frac{\pi}{6} + \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 4x + \sin 2x = -\frac{1}{2} (1 - \cos 4x),$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 4x + \sin 2x = -\frac{1}{2} \cdot 2\sin^2 2x,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 4x + \sin 2x = -\sin^2 2x,$$

т.к. $\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x$, то уравнение примет вид:

$$\sqrt{3} \sin 2x \cos 2x + \sin 2x + \sin^2 2x = 0,$$

$$\sin 2x (\sqrt{3} \cos 2x + 1 + \sin 2x) = 0.$$

Решаем методом введения вспомогательного угла:

$$\sin 2x = 0, \text{ или } \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x = -1,$$

$$2x = \pi n, n \in Z, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x = -\frac{1}{2},$$

$$x = \frac{\pi}{2} n, n \in Z. \quad \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2},$$

$$2x - \frac{\pi}{6} = \pm \frac{2\pi}{3} = 2\pi m, m \in Z;$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in Z, \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5\pi}{12} + \pi m, m \in Z, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z; \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} n; \frac{5\pi}{12} + \pi m; -\frac{\pi}{4} + \pi k; n, m, k \in Z.$

№6. Решите уравнение: $\cos\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin 3x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Решение:

$$\cos\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin 3x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

Используем формулу косинуса разности двух углов

$$\cos 6x \cos \frac{\pi}{4} + \sin 6x \sin \frac{\pi}{4} - \sin 3x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 6x - \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \cos 6x).$$

т.к. $\sin 6x = 2 \sin 3x \cos 3x, 1 - \cos 6x = 2 \sin^2 3x$, то:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \sin 3x \cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} \sin^2 3x,$$

$$\sin 3x (\sqrt{2} \cos 3x - 1 - \sqrt{2} \sin 3x) = 0$$

Решаем методом введения вспомогательного угла:

$$\sin 3x = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x = \frac{1}{2}$$

$$3x = \pi n, n \in Z \quad \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} n, n \in Z. \quad 3x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$$

$$\begin{cases} 3x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi k, k \in Z \\ 3x = -\frac{5\pi}{12} + 2\pi m, m \in Z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{36} + \frac{2\pi}{3} k, k \in Z \\ x = -\frac{5\pi}{36} + \frac{2\pi}{3} m, m \in Z \end{cases}$$

Можно и по-другому:

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z, \text{ или}$$

$$\begin{cases} 3x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \\ 3x - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in Z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{36} + \frac{2\pi}{3} k, k \in Z \\ x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2\pi}{3} m, m \in Z \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} n; -\frac{\pi}{36} + \frac{2\pi}{3} k; -\frac{5\pi}{36} + \frac{2\pi}{3} m; n, k, m \in Z.$

или $\frac{\pi}{3} n; \frac{\pi}{36} + \frac{2\pi}{3} k; -\frac{7\pi}{36} + \frac{2\pi}{3} m, n, k, m \in Z.$

№7. Решите уравнение: $\cos x - \cos 3x + \sin 4x = 0$.

Решение:

$$\cos x - \cos 3x + \sin 4x = 0$$

Воспользуемся одной из формул разности одноименных функций и формулой синуса двойного угла.

$$-2\sin 2x \sin(-x) + 2\sin 2x \cos 2x = 0;$$

$$2\sin 2x(\sin x + \cos 2x) = 0;$$

$$2\sin 2x(\sin x + 1 - 2\sin^2 x) = 0;$$

$$1) \sin 2x = 0, \quad \text{или} \quad 2) 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0,$$

$$2x = \pi n, n \in Z, D = 9,$$

$$x = \frac{\pi}{2} n, n \in Z. \sin x = 1, \quad \text{или} \quad 3) \sin x = -\frac{1}{2},$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z. \quad x = (-1)^{m+1} \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z.$$

Решение 1 и 2 уравнений можно записать как $x = \frac{\pi}{2} n, n \in Z$.

$$\text{Решение исходного уравнения: } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} n, n \in Z; \\ x = (-1)^{m+1} \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z. \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{2} n; (-1)^{m+1} \frac{\pi}{6} + \pi m; n, m \in Z.$$

№8. Решите уравнение: $\sin 2x \cos 2x = \sin^4 2x + \cos^4 2x$.

Решение:

$$\sin 2x \cos 2x = \sin^4 2x + \cos^4 2x,$$

$$\sin 2x \cos 2x = (\sin^2 2x + \cos^2 2x)^2 - 2\sin^2 2x \cos^2 2x,$$

$$\sin 2x \cos 2x = 1 - 2\sin^2 2x \cos^2 2x,$$

$$2\sin 2x \cos 2x = 2 - 4\sin^2 2x \cos^2 2x,$$

$$\sin 4x = 2 - \sin^2 4x,$$

$$\sin^2 4x + \sin 4x - 2 = 0,$$

Пусть $\sin 4x = t$, тогда

$$t^2 + t - 2 = 0,$$

$$D = 1 + 8 = 9,$$

$$t_1 = \frac{-1 + 3}{2} = 1; \quad t_2 = \frac{-1 - 3}{2} = -2,$$

отсюда

$$\sin 4x = 1, \quad \text{или} \quad \sin 4x = -2,$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, \quad \text{нет корней, т.к. } -2 < -1.$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n, n \in Z.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n, n \in Z.$$

№9. Решите уравнение: $\sin^2 x + \sin^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$.

Решение:

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x,$$

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2},$$

$$2 - \cos 2x - \cos 4x - 2 - \cos 6x - \cos 8x = 0,$$

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = 0,$$

$$2\cos \frac{2x+8x}{2} \cos \frac{2x-8x}{2} + 2\cos \frac{4x+6x}{2} \cos \frac{4x-6x}{2} = 0,$$

$$2\cos 5x \cos(-3x) + 2\cos 5x \cos(-x) = 0,$$

$$2\cos 5x \cos 3x + 2\cos 5x \cos x = 0,$$

$$2\cos 5x (\cos 3x + \cos x) = 0,$$

$$2\cos 5x 2\cos \frac{3x+x}{2} \cdot \cos \frac{3x-x}{2} = 0,$$

$$4\cos 5x \cos 2x \cos x = 0,$$

$$\cos 5x \cos 2x \cos x = 0,$$

$$\cos 5x = 0, \quad \text{или} \quad \cos 2x = 0, \quad \text{или} \quad \cos x = 0,$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} n, n \in Z. \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, n \in Z.$$

Решение уравнения $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ – подмножество решений уравнения $\cos 5x = 0$,

поэтому решением заданного уравнения являются: $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} n$; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5} n$; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, n \in Z$.

№10 а) Решите уравнение: $8\sin^4 x - 3\cos 2x + 1 = 0$;

б) Запишите множество решений, принадлежащих отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $8\sin^4 x - 3\cos 2x + 1 = 0$,

$$8\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 - 3\cos 2x + 1 = 0,$$

$$2\cos^2 2x - 7\cos 2x + 3 = 0,$$

Введем замену: пусть $\cos 2x = t, t \in [-1; 1]$, тогда

$$2t^2 - 7t + 3 = 0,$$

$$D = 25,$$

$$t_1 = 3 \notin [-1; 1], t_2 = \frac{1}{2} \in [-1; 1],$$

Возвращаемся к замене:

$$\cos 2x = \frac{1}{2},$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z,$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z,$$

$$\text{при } n=1: x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right];$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right].$$

$$\text{Ответ: а) } \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z; \quad \text{б) } \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}.$$

Блок II. Логарифмические уравнения и неравенства и их решение.

№1. Решить неравенство: $\log_{2x+2}(x^2 - 7x + 10) < \frac{1}{2} \log_{|x-3|}(3-x)^2$.

В ответе указать множество решений, сумму целых значений из этого множества.

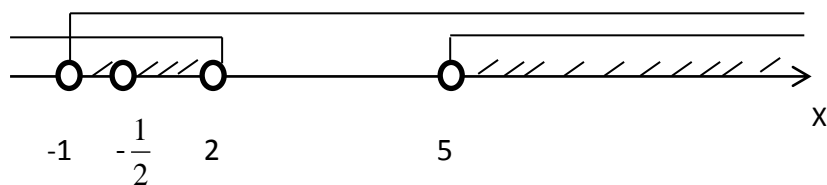
Решение:

$$\log_{2x+2}(x^2 - 7x + 10) < \frac{1}{2} \log_{|x-3|}(3-x)^2$$

1) ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 10 > 0, \\ 3 - x \neq 0, \\ 2x + 2 > 0, \\ 2x + 2 \neq 1, \\ |x - 3| \neq 1, \\ x - 3 \neq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 2) \cup (5; \infty), \\ x \neq 3, \\ x > -1, \\ x \neq -\frac{1}{2}, \\ x - 3 \neq 1, \\ x - 3 \neq -1, \\ x \neq 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 2) \cup (5; \infty), \\ x > -1, \\ x \neq -\frac{1}{2}, \\ x \neq 4, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Найдем решение системы при помощи числовой прямой



$$X \in (-1; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; 2) \cup (5; \infty)$$

$$2) \log_{2x+2}(x^2 - 7x + 10) < \frac{1}{2} \log_{|x-3|}(3-x)^2$$

$$\frac{1}{2} \log_{|x-3|}(3-x)^2 = \log_{|x-3|}|3-x| = \log_{|x-3|}|x-3| = 1$$

Запишем уравнение в упрощенном виде:

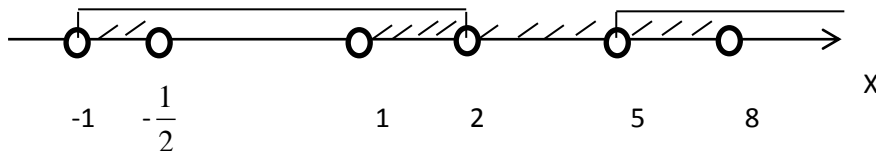
$$\log_{2x+2}(x^2 - 7x + 10) < 1$$

$$\log_{2x+2}(x^2 - 7x + 10) < \log_{2x+2}(2x + 2)$$

$$a) \begin{cases} 0 < 2x + 2 < 1, \\ x^2 - 7x + 10 > 2x + 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 < 2x < -1, \\ x^2 - 9x + 8 > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < -\frac{1}{2}, \\ x \in (-\infty; 1) \cup (8; \infty); \end{cases} \Rightarrow x \in (-1; -\frac{1}{2})$$

$$b) \begin{cases} 2x + 2 > 1, \\ x^2 - 7x + 10 < 2x + 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2}, \\ x^2 - 9x + 8 < 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\frac{1}{2}; \infty), \\ x \in (1; 8); \end{cases} \Rightarrow x \in (1; 8).$$

Объединяя найденные множества решений, учитывая ОДЗ, получаем решение неравенства



$$x \in (-1; -\frac{1}{2}) \cup (1; 2) \cup (5; 8)$$

6+7=13- сумма целых решений

Ответ: $(-1; -\frac{1}{2}) \cup (1; 2) \cup (5; 8)$;

сумма целых значений из множества решений 13.

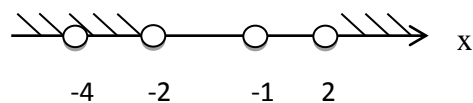
№2. Решите уравнение.

$$2\log_2(x^2 - 4) - \log_2(x + 4)^2 - \log_2(x + 1)^2 = 0.$$

Решение.

$$2\log_2(x^2 - 4) - \log_2(x + 4)^2 - \log_2(x + 1)^2 = 0$$

$$a) \text{ ОДЗ: } \begin{cases} x^2 - 4 > 0, \\ x + 4 \neq 0, \\ x + 1 \neq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty), \\ x \neq -4, \\ x \neq -1; \end{cases}$$



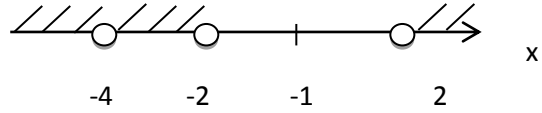
$$x \in (-\infty; -4) \cup (-4; -2) \cup (2; \infty).$$

$$\text{б) } 2\log_2(x^2 - 4) = 2\log_2 |x + 4| + 2\log_2 |x + 1|$$

$$\log_2(x^2 - 4) = \log_2 |x + 4| \cdot |x + 1|$$

$$x^2 - 4 = |x + 4| \cdot |x + 1|$$

$$X = -4 \quad X = -1$$



Нули подмодульных выражений

$$\text{а) } \begin{cases} x \in (-\infty; -4), \\ x^2 - 4 = (-x - 4)(-x - 1); \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; -4), \\ x^2 - 4 = x^2 + 5x + 4; \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; -4), \\ x = -\frac{8}{5} = -1,6 \end{cases} \Rightarrow \text{нет решений}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x \in (-4; -2), \\ x^2 - 4 = (x + 4)(-x - 1); \end{cases} \begin{cases} x \in (-4; -2), \\ x^2 - 4 = -x^2 - 5x - 4; \end{cases} \begin{cases} x \in (-4; -2), \\ 2x^2 + 5x = 0; \end{cases} \begin{cases} x \in (-4; -2), \\ x = 0, \\ x = -2,5; \end{cases} \Rightarrow x = -2,5$$

$$\text{в) } \begin{cases} x \in (2; \infty), \\ x^2 - 4 = (x + 4)(x + 1); \end{cases} \begin{cases} x \in (2; \infty), \\ x^2 - 4 = x^2 + 5x + 4; \end{cases} \begin{cases} x \in (2; \infty), \\ x = -\frac{8}{5} = -1,6 \end{cases} \Rightarrow \text{нет решений}$$

$x = -2,5$ – решение исходного уравнения

Ответ: -2,5.

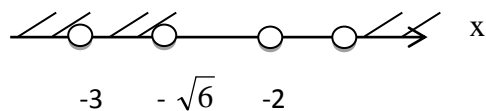
№3. Решите уравнение $2\log_6(x^2 - 6) - \log_6(x + 3)^2 - \log_6(x + 2)^2 = 0$.

Решение

а) Найдем область допустимых значений x :

$$\begin{cases} x^2 - 6 > 0, \\ x + 3 \neq 0, \\ x + 2 \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x \in (-\infty; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; \infty), \\ x \neq -3, \\ x \neq -2; \end{cases}$$

Покажем на числовой оси:



$$x \in (-\infty; -3) \cup (-3; -\sqrt{6}) \cup (-\sqrt{6}; -2)$$

$$\text{б) } 2\log_6(x^2 - 6) - \log_6(x + 3)^2 - \log_6(x + 2)^2 = 0,$$

$$2\log_6(x^2 - 6) = 2\log_6 |x + 3| + 2\log_6 |x + 2|,$$

$$\log_2(x^2 - 6) = \log_6(|x + 3| \cdot |x + 2|),$$

$$x^2 - 6 = |x + 3| \cdot |x + 2|,$$

$$x^2 - 6 = |(x + 3) \cdot (x + 2)|,$$

$$x^2 - 6 = |x^2 + 5x + 6| \quad \text{Данное уравнение равносильно системе:}$$

$$\begin{cases} x^2 - 6 = x^2 + 5x + 6, \\ x^2 + 5x + 6 \geq 0 \\ x^2 - 6 = -x^2 - 5x - 6, \\ x^2 + 5x + 6 < 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = -12, \\ x \in (-\infty; -3] \cup [-2; \infty); \\ 2x^2 + 5x = 0 \\ x \in (-3; -2); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2, 4, \\ x \in (-\infty; -3] \cup [-2; \infty); \\ x = 0, \\ x = -2, 5, \\ x \in (-3; -2); \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{неткорней} \\ x = -2, 5, \end{cases} \Rightarrow x = -2, 5 \in \text{ОДЗ.}$$

Ответ: -2,5.

№4. Решите уравнение $\log_{2x^2-9} 21 = \frac{1}{\log_7 3x} + \frac{1}{\log_3 x+1}$.

Решение:

1) Найдем область допустимых значений:

$$\begin{cases} 2x^2 - 9 > 0, \\ 2x^2 - 9 \neq 1, \\ 3x > 0, \\ 3x \neq 1, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{1}{3}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -\frac{3}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{3}{\sqrt{2}}; \infty), \\ x \neq \pm\sqrt{5}, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{1}{3}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (\frac{3}{\sqrt{2}}; \infty), \\ x \neq \sqrt{5}; \end{cases} \Rightarrow x \in (\frac{3}{\sqrt{2}}; \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; \infty).$$

2) Решим, используя свойства логарифмов и формулу перехода к логарифму с другим основанием:

$$\log_{2x^2-9} 21 = \log_{3x} 7 + \frac{1}{\log_3 x + \log_3 3}$$

$$\log_{2x^2-9} 21 = \log_{3x} 7 + \frac{1}{\log_3 3x}$$

$$\log_{2x^2-9} 21 = \log_{3x} 21$$

$$2x^2 - 9 = 3x$$

$$2x^2 - 3x - 9 = 0$$

$$D = 9 + 72 = 81$$

$$x_1 = 3 \in \text{ОДЗ}$$

$x_2 = -1,5$ - не удовлетворяет ОДЗ

Ответ: 3.

№5. При каких значениях x соответственные значения функций $f(x) = \log_2 x$ и $g(x) = \log_2(3-x)$ будут отличаться меньше, чем на 1?

Решение:

$$|f(x) - g(x)| < 1,$$

$$|\log_2 x - \log_2(3-x)| < 1;$$

Используя определение и свойства логарифмов имеем систему неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ x < 3, \\ \left| \log_2 \frac{x}{3-x} \right| < 1. \end{cases}$$

$$1) \left| \log_2 \frac{x}{3-x} \right| < 1,$$

$$-1 < \log_2 \frac{x}{3-x} < 1,$$

$$\log_2 \frac{1}{2} < \log_2 \frac{x}{3-x} < \log_2 2,$$

$$\frac{1}{2} < \frac{x}{3-x} < 2,$$

$$\begin{cases} \frac{x}{3-x} < 2, \\ \frac{x}{3-x} > \frac{1}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x-6}{3-x} < 0, \\ \frac{3x-6}{2(3-x)} > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 2) \cup (3; \infty), \\ x \in (1; 3); \end{cases} \Rightarrow x \in (1; 2)$$

2) С учетом ОДЗ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 2.$$

Ответ: (1;2).

№6. Решить уравнение $\left|1 - \log_{\frac{1}{2}} x\right| + 2 = \left|3 - \log_{\frac{1}{2}} x\right|$.

Решение

Находим ОДЗ уравнения: $x > 0$. Введем обозначение $\log_{\frac{1}{2}} x = t$, тогда уравнение примет вид

$$|1 - t| + 2 = |3 - t| \text{ или } |t - 1| + 2 = |t - 3| \text{ (в силу свойства } |a| = |-a| \text{)}. \text{ Рассмотрим три случая:}$$

- $t \geq 3$, тогда по определению абсолютной величины имеем $|t - 3| = t - 3$ и $|t - 1| = t - 1$. Подставляя в уравнение, получим $t - 1 + 2 = t - 3 \Rightarrow 1 = -3$, что невозможно. Следовательно, решений нет.
- $1 \leq t < 3$, тогда $|t - 3| = 3 - t$ и $|t - 1| = t - 1$, уравнение примет вид $t - 1 + 2 = 3 - t \Rightarrow 2t = 2 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \log_{1/2} x = 1 \Rightarrow x = 1/2$
- $t < 1 \Rightarrow |t - 3| = 3 - t, |t - 1| = 1 - t$ и $1 - t + 2 = 3 - t \Rightarrow 3 = 3$, т.е. уравнение верно при всех $t < 1$, откуда $\log_{1/2} x < 1 \Rightarrow x > 1/2$ и имеем бесчисленно множество решений.

Объединив второй и третий случаи, получим ответ $x \in \left[\frac{1}{2}; \infty\right)$.

Ответ: $\left[\frac{1}{2}; \infty\right)$.

№7. Решить уравнение $\frac{1}{\log_{\frac{1}{20}} (2x^2 - 3)} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{4}} 5x} - \frac{1}{1 - \log_{\frac{1}{5}} x}$.

Решение:

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{20}} (2x^2 - 3)} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{4}} 5x} - \frac{1}{1 - \log_{\frac{1}{5}} x}$$

1) Найдем область допустимых значений x :

$$\begin{cases} 2x^2 - 3 > 0, \\ \log_{\frac{1}{20}}(2x^2 - 3) \neq 0, \\ 5x > 0, \\ 5x \neq 1, \\ x > 0, \\ \log_{\frac{1}{5}} x \neq 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -\sqrt{\frac{3}{2}}) \cup (\sqrt{\frac{3}{2}}; \infty) \\ 2x^2 - 3 \neq 1; \\ x > 0; \\ x \neq \frac{1}{5}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -\sqrt{\frac{3}{2}}) \cup (\sqrt{\frac{3}{2}}; \infty) \\ x \neq \pm 2, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{1}{5}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in (\sqrt{\frac{3}{2}}; \infty), \\ x \neq \sqrt{2}, \\ x \neq \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Сравним $\sqrt{\frac{3}{2}}$ и $\frac{1}{5}$:

$$\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} = \frac{5\sqrt{3} - \sqrt{2}}{5\sqrt{2}} > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{3}{2}} > \frac{1}{5}$$

Следовательно, областью допустимых значений x является:

$$x \in (\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty)$$

2) выполним преобразование, используя свойства логарифмов

$$\log_{2x^2-3} \frac{1}{20} = \log_{5x} \frac{1}{4} - \frac{1}{\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5} - \log_{\frac{1}{5}} x}$$

$$\log_{2x^2-3} \frac{1}{20} = \log_{5x} \frac{1}{4} - \frac{1}{-\log_{\frac{1}{5}} 5 - \log_{\frac{1}{5}} x}$$

$$\log_{2x^2-3} \frac{1}{20} = \log_{5x} \frac{1}{4} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{5}} 5x}$$

$$\log_{2x^2-3} \frac{1}{20} = \log_{5x} \frac{1}{4} + \log_{5x} \frac{1}{5}$$

$$\log_{2x^2-3} \frac{1}{20} = \log_{5x} \frac{1}{20}$$

$$2x^2 - 3 = 5x$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$D = 49$$

$$x_1 = 3 \in \text{ОДЗ}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} \notin \text{ОДЗ}$$

Ответ: 3.

№8. Решить уравнение $\log_2(x^2 - 3) + \log_{\frac{1}{2}}(6x - 10) + 1 = 0$.

Решение:

$$\log_2(x^2 - 3) + \log_{\frac{1}{2}}(6x - 10) + 1 = 0$$

1) Найдем область допустимых значений

$$\begin{cases} x^2 - 3 > 0 \\ 6x - 10 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty) \\ x \in (1\frac{2}{3}; \infty) \end{cases} \Rightarrow x \in (\sqrt{3}; \infty)$$

Сравним $1\frac{2}{3}$ и $\sqrt{3}$:

$$1\frac{2}{3} = \frac{5}{3} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \sqrt{2\frac{7}{9}};$$

$$\sqrt{2\frac{7}{9}} < \sqrt{3} \Rightarrow 1\frac{2}{3} < \sqrt{3}.$$

$$2) \log_2(x^2 - 3) - \log_2(6x - 10) + \log_2 2 = 0$$

$$(x^2 - 3)2 = 6x - 10$$

$$x^2 - 3 = 3x - 5$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$D = 1$$

$$x_1 = 2 \in \text{ОДЗ}$$

$$x_2 = 1 \notin \text{ОДЗ}$$

Ответ: 2.

№9. Решите уравнение $\log_{3-4x^2}(9 - 16x^4) = 2 + \frac{1}{\log_2(3-4x^2)}$.

Решение:

$$\log_{3-4x^2}(9 - 16x^4) = 2 + \frac{1}{\log_2(3 - 4x^2)}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 3 - 4x^2 > 0, \\ 3 - 4x^2 \neq 1, \\ 9 - 16x^4 > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{3} - 2x)(\sqrt{3} + 2x) > 0, \\ 2 - 4x^2 \neq 0, \\ (3 - 4x^2)(3 + 4x^2) > 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{3} - 2x)(\sqrt{3} + 2x) > 0, \\ x \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \\ x \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Решаем уравнение, применяя свойства логарифмов.

$$\log_{3-4x^2}(9 - 16x^4) = 2 + \frac{1}{\log_2(3 - 4x^2)},$$

$$\log_{3-4x^2}(3 - 4x^2) + \log_{3-4x^2}(3 + 4x^2) = 2 + \log_{3-4x^2} 2,$$

$$1 + \log_{3-4x^2}(3 + 4x^2) = 2 + \log_{3-4x^2} 2,$$

$$\log_{3-4x^2} \frac{3 + 4x^2}{2} = 1,$$

$$\frac{3 + 4x^2}{2} = 3 - 4x^2; \quad 3 + 4x^2 = 6 - 8x^2;$$

$$12x^2 - 3 = 0; \quad x^2 = \frac{1}{4}; \quad x = \pm \frac{1}{2}.$$

$x = \pm \frac{1}{2}$ удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $\pm \frac{1}{2}$.

№10. Решите уравнение $\sqrt{9 - \frac{24}{\log_x 4}} = 5 \log_4 \left(2^{\frac{4}{5}} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^{0,4} \right)$.

Решение:

$$\sqrt{9 - \frac{24}{\log_x 4}} = 5 \log_4 \left(2^{\frac{4}{5}} \cdot \left(\frac{2}{x}\right)^{0,4} \right).$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ 9 - \frac{24}{\log_x 4} \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ 9 - 24 \log_4 x \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \log_4 x \leq \frac{9}{24}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x \leq 4^{\frac{9}{24}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (0; 1) \cup \left(1; 4^{\frac{9}{24}}\right].$$

Решаем уравнение, применяя свойства логарифмов.

$$\sqrt{9 - 24 \log_4 x} = 4 \log_4 2 + 2 \log_4 \frac{2}{x},$$

$$\sqrt{9 - 24 \log_4 x} = 2 + 1 - 2 \log_4 x,$$

$$\sqrt{9 - 24 \log_4 x} = 3 - 2 \log_4 x \text{ равносильно системе}$$

$$\begin{cases} 3 - 2 \log_4 x \geq 0, \\ 9 - 24 \log_4 x = 9 - 12 \log_4 x + 4 \log_4^2 x; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_4 x \leq \frac{3}{2}, \\ 4 \log_4^2 x + 12 \log_4 x = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_4 x \leq \frac{3}{2}, \\ 4 \log_4 x (\log_4 x + 3) = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_4 x \leq \frac{3}{2}, \\ \log_4 x = 0, \\ \log_4 x = -3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 4^{-3}. \end{cases}$$

$$x = 1 \notin \text{ОДЗ},$$

$$x = \frac{1}{64} \in \text{ОДЗ}.$$

Ответ: $\frac{1}{64}$.

№ 11 Решите уравнение $\frac{8 - \lg(x-5)}{\sqrt{x+7} - \lg 2} = 1$.

Решение:

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} x-5 > 0 \\ \sqrt{x+7} > 0 \\ \lg \sqrt{x+7} - \lg 2 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x > 5 \\ x > -7 \\ \sqrt{x+7} \neq 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x > 5 \\ x > -7 \\ x \neq -3 \end{array} \Rightarrow x > 5 \end{array}$$

$$2)\lg 8 - \lg(x-5) = \lg \sqrt{x+7} - \lg 2$$

$$\lg 8 + \lg 2 = \lg \sqrt{x+7} + \lg(x-5)$$

$$\lg(8 \cdot 2) = \lg(\sqrt{x+7}(x-5))$$

$$16 = \sqrt{x+7}(x-5)$$

$$\begin{cases} ((x-5)\sqrt{x+7} = 16 \\ > 5 \end{cases}$$

Можно методом подбора :

Пусть $x=9$, тогда

$$(9-5)\sqrt{9+7} = 16 \text{ — верное}$$

Поэтому $x=9$.

Ответ 9.

№12. Решить уравнение $\log_{\sqrt{2}} x + \log_{x\sqrt{x}} 8 = 3 - \log_{1/\sqrt{2}} \sqrt{x}$.

Решение:

$$\log_{\sqrt{2}} x + \log_{x\sqrt{x}} 8 = 3 - \log_{1/\sqrt{2}} \sqrt{x}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 & \Leftrightarrow x \in (0; 1) \cup (1; \infty) \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Применяя формулу $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ рассмотрим:

$$1) \log_{\sqrt{2}} x + \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{\log_2 x}{1/2} = 2 \log_2 x;$$

$$2) \log_{x\sqrt{x}} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 x\sqrt{x}} = \frac{3}{\log_2 x^{3/2}} = \frac{3}{3/2 \log_2 x} = \frac{2}{\log_2 x};$$

$$3) \log_{1/\sqrt{2}} \sqrt{x} = \frac{\log_2 \sqrt{x}}{\log_2 1/\sqrt{2}} = \frac{\log_2 x^{1/2}}{-1/2} = -2 \cdot 1/2 \log_2 x = -\log_2 x.$$

Решим уравнение

$$2\log_2 x + \frac{2}{\log_2 x} = 3 + \log_2 x.$$

$$2\log_2 x - \log_2 x + \frac{2}{\log_2 x} = 3$$

$$\log_2 x + \frac{2}{\log_2 x} = 3$$

$$\log_2^2 x + 2 = 3\log_2 x$$

$$\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$$

Пусть $\log_2 x = y$, тогда

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$y_1 = \frac{3+1}{2} = 2; \quad y_2 = \frac{3-1}{2} = 1, \text{ отсюда}$$

$$\log_2 x = 2 \quad \text{и} \quad \log_2 x = 1$$

$$x = 4 \in \text{ОДЗ} \quad x = 2 \in \text{ОДЗ}$$

Ответ: 2;4.

№ 13. Решите неравенство $\frac{x^2 - 4}{\log_{1/2}(x^2 - 1)} < 0.$

$$\text{Решение: } \frac{x^2 - 4}{\log_{1/2}(x^2 - 1)} < 0$$

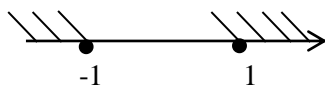
$$\frac{(x-2) \cdot (x+2)}{\log_{1/2}(x^2 - 1)} < 0$$

Решим методом интервалов.

1) $(x-2) \cdot (x+2) = 0$
 $x = 2$ или $x = -2$

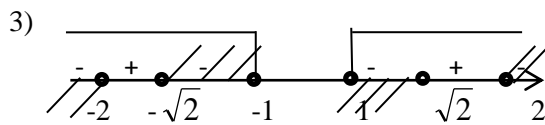
2) $\log_{1/2}(x^2 - 1) \neq 0$

а) ОДЗ $x^2 - 1 > 0$
 $(x-1)(x+1) > 0$



$$x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & x^2 - 1 \neq 1 \\ & x^2 \neq 2 \\ & x \neq \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$



$$x \in (-\infty; -2) \cup (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2}) \cup (2; \infty);$$

Ответ: $x \in (-\infty; -2) \cup (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2}) \cup (2; \infty);$

№14. Решите неравенство $5\log_8(x^2 - 15x + 56) \leq 6 + \log_8 \frac{(x-7)^5}{x-8}$.

Решение:

$$5\log_8(x^2 - 15x + 56) \leq 6 + \log_8 \frac{(x-7)^5}{x-8}$$

Разложим на множители квадратный трехчлен $x^2 - 15x + 56$:

$$X^2 - 15X + 56 = 0$$

$$D = (-15)^2 - 4 \cdot 56 = 225 - 224 = 1$$

$$X_1 = \frac{15 + 1}{2} = 8;$$

$$X_2 = 7;$$

$$X^2 - 15X + 56 = (X - 8)(X - 7)$$

$$5\log_8(x-8)(x-7) \leq 6 + \log_8 \frac{(x-7)^5}{x-8}$$

1) ОДЗ:

$$\begin{cases} (x-8)(x-7) > 0 \\ \frac{(x-7)^5}{x-8} \end{cases} \Rightarrow (x-8)(x-7) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 7) \cup (8; \infty).$$

$$2) \log_8(x-8)^5(x-7)^5 - \log_8 \frac{(x-7)^5}{x-8} \leq 6$$

$$\log_8 \frac{(x-8)^5 (x-7)^5}{\frac{(x-7)^5}{x-8}} \leq 6$$

$$\log_8 \frac{(x-8)^5 (x-7)^5 \times (x-8)}{(x-7)^5} \leq 6$$

$$\log_8 (x-8)^6 \leq 6$$

$$\log_8 (x-8)^6 \leq \log_8 8^6$$

I способ

$$\log_8 (x-8)^6 \leq \log_8 8^6$$

$$6 \log_8 |x-8| \leq 6 \log_8 8$$

т.к. функция $y = \log_8 u$ - возрастает, то $|x-8| \leq 8$;

$$-8 \leq x-8 \leq 8$$

$$0 \leq x \leq 16$$

II способ

$$\log_8 (x-8)^6 \leq \log_8 8^6$$

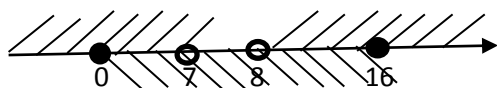
$$3 \log_8 (x-8)^2 \leq 3 \log_8 8^2$$

$$(x-8)^2 \leq 8^2$$

$$(x-8)^2 - 8^2 \leq 0$$

$$x \in [0; 16]$$

3.С учетом ОДЗ



$x \in [0; 7) \cup (8; 16]$ - решение неравенства

Ответ: $x \in [0; 7) \cup (8; 16]$.

№15. Решите неравенства $9 \log_{12}(x^2 - 3x - 4) \leq 10 + \log_{12} \frac{(x+1)^9}{x-4}$.

Решение:

$$9\log_{12}(x^2-3x-4) \leq 10 + \log_{12} \frac{(x+1)^9}{x-4}$$

Разложим на множители выражение x^2-3x-4 .

$$x^2-3x-4=0$$

$$x_1=4$$

$$x_2=-1$$

$$x^2-3x-4=(x-4)(x+1)$$

$$9\log_{12}(x-4)(x+1) \leq 10 + \log_{12} \frac{(x+1)^9}{x-4}$$

1) ОДЗ:

$$\begin{cases} (x-4)(x+1) > 0 \\ \frac{(x+1)^9}{x-4} > 0 \end{cases} \Rightarrow (x-4)(x+1) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (4; \infty);$$

$$2) \log_{12}(x-4)^9(x+1)^9 \leq 10 + \log_9 \frac{(x+1)^9}{x-4}$$

$$\log_{12} \frac{(x-4)^9(x+1)^9(x-4)}{(x+1)^9} \leq 10$$

$$\log_{12}(x-4)^{10} \leq 10 \Rightarrow$$

1 способ

$$\log_{12}|x-4|^{10} \leq 10$$

$$10\log_{12}|x-4| \leq 10$$

$$\log_{12}|x-4| \leq 1$$

$$\log_{12}|x-4| \leq \log_{12}12$$

Функция $y=\log_{12}u$ -возрастает, $\Rightarrow |x-4| \leq 12$

$$-12 \leq x-4 \leq 12$$

$$-8 \leq x \leq 16$$

2 способ

$$\log_{12}(x-4)^{10} \leq 10$$

$$\log_{12}(x-4)^2 \leq 2$$

$$\log_{12}(x-4)^2 \leq \log_{12}12^2$$

$$(x-4)^2 \leq 12^2$$

$$x^2 - 8x + 16 - 144 \leq 0$$

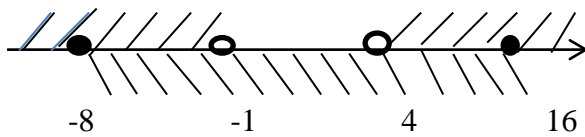
$$x^2 - 8x - 128 \leq 0$$

$$x_1 = -8$$

$$x_2 = 16$$

$$x \in [-8; 16];$$

3) С учетом ОДЗ:



$$x \in [-8; -1) \cup (4; 16].$$

Ответ: [-8; -1) ∪ (4; 16].

№16. Решите неравенство $7\log_{12}(x^2 - 13x + 42) \leq 8 + \log_{12} \frac{(x-7)^7}{x-6}$.

Решение:

$$7\log_{12}(x^2 - 13x + 42) \leq 8 + \log_{12} \frac{(x-7)^7}{x-6}$$

Разложим на множители выражение $x^2 - 13x + 42$.

$$x^2 - 13x + 42 = 0$$

$$x_1 = 7 \quad x_2 = 6$$

$$x^2 - 13x + 42 = (x-7)(x-6)$$

$$7\log_{12}(x-7)(x-6) \leq 8 + \log_{12} \frac{(x-7)^7}{x-6}$$

1) ОДЗ:

$$\begin{cases} (x-7)(x-6) > 0 \\ \frac{(x-7)^7}{x-6} > 0 \end{cases} \Rightarrow (x-7)(x-6) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 6) \cup (7; \infty).$$

$$2)\log_{12}(x-7)^7(x-6)^7-\log_{12}\frac{(x-7)^7}{x-6}\leq 8$$

$$\log_{12}\frac{(x-7)^7(x-6)^7(x-6)}{(x-7)^7}\leq 8$$

$$\log_{12}(x-6)^8\leq 8 \Rightarrow$$

I способ

$$\log_{12}(x-6)^8\leq 8$$

$$8\log_{12}|x-6|\leq 8$$

$$\log_{12}|x-6|\leq \log_{12}12$$

Так как функция вида $y=\log_{12}u$ -возрастает, то

$$|x-6|\leq 12$$

$$-12\leq x-6\leq 12$$

$$-6\leq x\leq 18$$

II способ

$$4\log_{12}(x-6)^2\leq 8$$

$$\log_{12}(x-6)^2\leq 2$$

$$\log_{12}(x-6)^2\leq \log_{12}12^2$$

$$(x-6)^2\leq 12^2$$

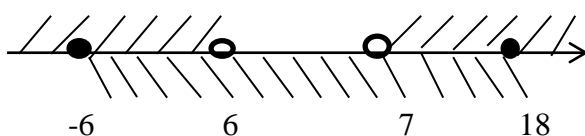
$$(x-6)^2-12^2\leq 0$$

$$(x-6-12)(x-6+12)\leq 0$$

$$(x-18)(x+6)\leq 0$$

$$x\in[-6;18];$$

3)С учетом ОДЗ:



$$x\in[-6;6)\cup(7;18].$$

Ответ: $x \in [-6; 6) \cup (7; 18]$.

№ 17. Найдите все значения x , при каждом из которых выражения :

$10x \log_4 \sqrt{2x+5} - 2x^2 \log_{\frac{1}{4}}(2x+5)$ и $2x^2 + 5x$ принимают равные значения.

Решение:

1. Из условия задания следует:

$$10x \log_4 \sqrt{2x+5} - 2x^2 \log_{\frac{1}{4}}(2x+5) = 2x^2 + 5x$$

2. Решим составленное уравнение:

$$10x \log_4 \sqrt{2x+5} - 2x^2 \log_{\frac{1}{4}}(2x+5) = 2x^2 + 5x \Leftrightarrow 5x \log_4(2x+5) + 2x^2 \log_4(2x+5) = 2x^2 + 5x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x^2 + 5x)(\log_4(2x+5) - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5x = 0 \\ 2x + 5 > 0 \\ 2x + 5 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x > -2,5 \\ x = -0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0,5 \end{cases}$$

Ответ: **-0,5; 0.**

№18. Решите уравнение $\log_{2x^2-9} 21 = \frac{1}{\log_7 3x} + \frac{1}{\log_3 x+1}$.

Решение:

1) Найдем область допустимых значений:

$$\begin{cases} 2x^2 - 9 > 0, \\ 2x^2 - 9 \neq 1, \\ 3x > 0, \\ 3x \neq 1, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{1}{3}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -\frac{3}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{3}{\sqrt{2}}; \infty), \\ x \neq \pm\sqrt{5}, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{1}{3}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (\frac{3}{\sqrt{2}}; \infty), \\ x \neq \sqrt{5}; \end{cases} \Rightarrow x \in (\frac{3}{\sqrt{2}}; \sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; \infty).$$

2) Решим, используя свойства логарифмов и формулу перехода к логарифму с другим основанием:

$$\log_{2x^2-9} 21 = \log_{3x} 7 + \frac{1}{\log_3 x + \log_3 3}$$

$$\log_{2x^2-9} 21 = \log_{3x} 7 + \frac{1}{\log_3 3x}$$

$$\log_{2x^2-9} 21 = \log_{3x} 21$$

$$2x^2 - 9 = 3x$$

$$2x^2 - 3x - 9 = 0$$

$$D = 9 + 72 = 81$$

$$x_1 = 3 \in \text{ОДЗ}$$

$x_2 = -1,5$ - не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: 3.

Блок III. Показательные уравнения, неравенства, иррациональные неравенства и их решение.

№1. Решить неравенство $(3^{\sqrt{x+1}} + 2 \cdot 3^{-\sqrt{x}} - 7) \cdot \sqrt{2-x} \leq 0$

Решение

$$(3^{\sqrt{x+1}} + 2 \cdot 3^{-\sqrt{x}} - 7) \cdot \sqrt{2-x} \leq 0$$

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 2-x \geq 0, \\ 3^{\sqrt{x+1}} + 2 \cdot 3^{-\sqrt{x}} - 7 \leq 0, \\ x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \leq 2, \\ x \geq 0, \\ 3 \cdot 3^{\sqrt{x}} + \frac{2}{3^{\sqrt{x}}} - 7 \leq 0 \end{cases}$$

1) Решим неравенство $3 \cdot 3^{\sqrt{x}} + \frac{2}{3^{\sqrt{x}}} - 7 \leq 0$.

Пусть $3^{\sqrt{x}} = t, t > 0$, но при $x \geq 0, t \geq 1$, тогда

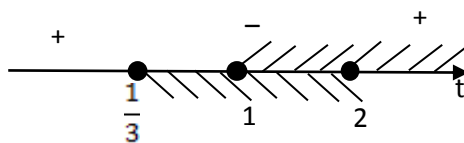
$$3t + \frac{2}{t} - 7 \leq 0,$$

$$\frac{3t^2 - 7t + 2}{t} \leq 0, \text{ решаем методом интервалов}$$

$$3t^2 - 7t + 2 \leq 0 \text{ при } t \geq 1.$$

$$D = 49 - 24 = 25$$

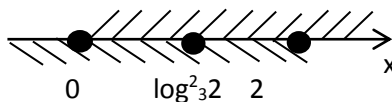
$$t_1 = \frac{7+5}{6} = 2; \quad t_2 = \frac{1}{3}$$



$$t \in [1; 2] \Rightarrow \begin{cases} 3^{\sqrt{x}} \leq 2, \\ 3^{\sqrt{x}} \geq 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{\sqrt{x}} \leq 3^{\log_3 2}, \\ 3^{\sqrt{x}} \geq 3^0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \leq \log_3 2, \\ \sqrt{x} \geq 0; \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq \log_3 2 \Rightarrow 0 \leq x \leq \log_3^2 2$$

2) С учетом ОДЗ получаем

$$\begin{cases} x \leq 2, \\ x \geq 0, \\ 0 \leq x \leq \log_3^2 2 \end{cases} \Rightarrow x \in [0; \log_3^2 2] \cup \{2\}, \text{ т.к.}$$



Ответ: $[0; \log^2_3 2] \cup \{2\}$.

№2. Решите неравенство: $\frac{2-2x-\sqrt{21-14x}}{x+3} \leq -1$

Решение:

$$\frac{2-2x-\sqrt{21-14x}}{x+3} \leq -1$$

а) Найдем область допустимых значений x :

$$\begin{cases} 21-14x \geq 0, \\ x+3 \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1,5, \\ x \neq -3, \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 1,5]$$

б) Переведем исходное неравенство к стандартному виду

$$\begin{aligned} \frac{2-2x-\sqrt{21-14x}}{x+3} \leq -1 &\Leftrightarrow \frac{2-2x-\sqrt{21-14x}+x+3}{x+3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x+5-\sqrt{21-14x}}{x+3} \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{5-x-\sqrt{21-14x}}{x+3} \leq 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{5-x-\sqrt{21-14x}}{x+3}$.

Используем метод интервалов. Найдем точки в которых числитель и знаменатель дроби обращаются нуль:

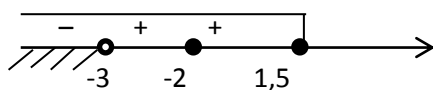
$$\begin{aligned} 1) \quad 5-x-\sqrt{21-14x} &= 0, \\ \sqrt{21-14x} &= 5-x, \\ 21-14x &= 25-10x+x^2, \\ x^2+4x+4 &= 0, (x+2)^2=0, \end{aligned}$$

$$x=-2$$

Проверка $\sqrt{21-14 \cdot (-2)} = 7$; $5 - (-2) = 7$, значит, $x=-2$ – корень уравнения

$$2) \quad x+3=0 \\ x=-3$$

3) Точки $x=-2$, $x=-3$ разбивают область допустимых значений числовой прямой на интервалы с учетом ОДЗ имеем



$$f(-4) = \frac{5+4-\sqrt{21-14 \cdot (-4)}}{-4+3} = \frac{9-\sqrt{77}}{-1} < 0,$$

$$f(-2.5) = \frac{5 + 2.5 - \sqrt{21 - 14 \cdot (-2.5)}}{-2.5 + 3} = \frac{7.5 - \sqrt{56}}{0.5} = \frac{\sqrt{56.25} - \sqrt{56}}{0.5} > 0,$$

$$f(0) = \frac{5 - \sqrt{21}}{3} > 0,$$

$$x \in (-\infty; -3) \cup \{-2\}.$$

Ответ: $(-\infty; -3) \cup \{-2\}$.

№3. Решите неравенство: $2^{1-x} \cdot 15 \cdot 2^{-x-3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{11 - \sqrt{x^2 + 3x - 18}}$

Решение:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \cdot 15 \cdot 2^{-x-3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{11 - \sqrt{x^2 + 3x - 18}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \left(1 - 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4\right) < \left(\frac{1}{2}\right)^{11 - \sqrt{x^2 + 3x - 18}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \left(1 - \frac{15}{16}\right) < \left(\frac{1}{2}\right)^{11 - \sqrt{x^2 + 3x - 18}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1+4} < \left(\frac{1}{2}\right)^{11 - \sqrt{x^2 + 3x - 18}}$$

Т.к. функция вида $y = \left(\frac{1}{2}\right)^u$ - убывает ($0 < \frac{1}{2} < 1$),

$$\text{То } x+3 > 11 - \sqrt{x^2 + 3x - 18},$$

$$\sqrt{x^2 + 3x - 18} > 8 - x.$$

Полученное неравенство равносильно совокупности 2-х систем неравенств:

1) Решим первую систему неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} 8-x > 0 \\ x^2 + 3x - 18 > (8-x)^2; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 8-x < 0, \\ x^2 + 3x - 18 \geq 0. \end{array} \right.$$

2) Решим вторую систему неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} 8-x < 0, \\ x^2 + 3x - 18 \geq 0; \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 8 \\ x \in (-\infty; -6] \cup [3; +\infty); \end{array} \right. \Rightarrow x \in (8; \infty)$$

Решение исходного неравенства найдем из систем:

$$3) \left\{ \begin{array}{l} x \in \left(4\frac{6}{19}; 8\right] \Leftrightarrow x \in \left(4\frac{6}{19}; \infty\right). \\ x \in (8; \infty) \end{array} \right.$$

Ответ: $\left(4\frac{6}{19}; \infty\right)$.

№4. Решите неравенство $5 \cdot 15^x + 225 \leq 45 \cdot 5^x + 25 \cdot 3^x$

Варианты ответа:

а) $(-\infty; 1]$; б) $(-\infty; 1] \cup [2; \infty)$; в) $[1; 2]$; г) **(1; 2)**.

Решение:

$$5 \cdot 15^x + 225 \leq 45 \cdot 5^x + 25 \cdot 3^x$$

$$5 \cdot 15^x + 225 - 45 \cdot 5^x - 25 \cdot 3^x \leq 0,$$

$$5 \cdot 5^x (3^x - 9) - 25(3^x - 9) \leq 0,$$

$$(3^x - 9)(5 \cdot 5^x - 25) \leq 0,$$

$$5(3^x - 9)(5^x - 5) \leq 0$$

$$(3^x - 9)(5^x - 5) \leq 0$$

I способ. Данное неравенство равносильно совокупности 2-х систем

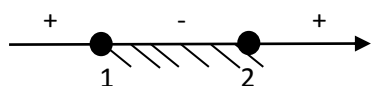
$$\left[\begin{array}{l} 3^x - 9 \leq 0, \\ 5^x - 5 \geq 0; \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 2, \\ x \geq 1; \end{array} \right. \Rightarrow x \in [1; 2]$$
$$\left[\begin{array}{l} 3^x - 9 \geq 0, \\ 5^x - 5 \leq 0; \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2, \\ x \leq 1 \end{array} \right. \Rightarrow x \in \emptyset$$

II способ. Решим неравенство методом интервалов

Рассмотрим функцию $y = (3^x - 9)(5^x - 5)$

Найдем нули функции:

$Y(x)=0$, при $x=2$ или $x=1$



$x \in [1; 2]$.

Ответ: в).

№5. Решите уравнение $4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12 \cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0$.

Решение:

ОДЗ: $x^2 - 5 \geq 0$, $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) \geq 0$, $x \in (-\infty; -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}; \infty)$.

$$4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12 \cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0,$$

$$4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12 \cdot 2^{-1} \cdot 2^{x-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0,$$

$$(2^{x-\sqrt{x^2-5}})^2 - 6 \cdot 2^{x-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0.$$

Пусть $2^{x-\sqrt{x^2-5}} = t$, тогда

$$t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$\frac{D}{4} = \left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 8 = 1$$

$$t_1 = 3 + 1 = 4 \quad t_2 = 3 - 1 = 2$$

Возвращаемся к замене:

$$2^{x-\sqrt{x^2-5}} = 4 \quad \text{или} \quad 2^{x-\sqrt{x^2-5}} = 2$$

$$x - \sqrt{x^2 - 5} = 2 \quad x - \sqrt{x^2 - 5} = 1$$

$$x - \sqrt{x^2 - 5} = 2 \quad x - 1 = \sqrt{x^2 - 5}$$

$$x - 2 = \sqrt{x^2 - 5} \quad (x - 1)^2 = (\sqrt{x^2 - 5})^2$$

$$x^2 - 4x + 4 = x^2 - 5 \quad x^2 - 2x + 1 = x^2 - 5$$

$$x^2 - 4x - x^2 = -5 - 4 \quad x^2 - 2x - x^2 = -5 - 1$$

$$-4x = -9 \quad -2x = -6$$

$$x = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4} \in \text{ОДЗ} \quad x = 3 \in \text{ОДЗ}$$

$$\text{так как } 2\frac{1}{4} = \frac{9}{4} = \sqrt{\frac{81}{16}} = \sqrt{5\frac{1}{16}} > \sqrt{5}.$$

Ответ: $2\frac{1}{4}; 3$.

№6. Решите уравнение: $2^{2x^2-2} - 2^{3-4x} + 7 \cdot 2^{x^2-2x-1} = 0.$

Решение:

$$2^{2(x^2-1)} - 2^3 \cdot 2^{-4x} + 7 \cdot 2^{x^2-1} \cdot 2^{-2x} = 0,$$

$$(2^{x^2-1})^2 - 2^3 \cdot (2^{-2x})^2 + 7 \cdot 2^{x^2-1} \cdot 2^{-2x} = 0,$$

Пусть $a = 2^{x^2-1}$, $b = 2^{-2x}$, $a > 0$, $b > 0$, тогда

$$a^2 - 8b^2 + 7ab = 0$$

$$\frac{a^2}{b^2} - 8 \frac{b^2}{b^2} + 7 \frac{a}{b} = 0$$

$$\frac{a^2}{b^2} - 8 + 7 \frac{a}{b} = 0$$

Пусть $b = t$, где $t > 0$, тогда

$$t^2 + 7t - 8 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = 49 + 32 = 81 > 0$$

$$t_1 = 1, t_2 = -8 < 0$$

$$\text{отсюда } \frac{a}{b} = 1,$$

$$a = b \Rightarrow 2^{x^2-1} = 2^{-2x} \Rightarrow x^2 - 1 = -2x,$$

$$\text{т.е. } x^2 + 2x - 1 = 0.$$

$$\frac{D}{4} = 2,$$

$$x_1 = -1 + \sqrt{2}, \quad x_2 = -1 - \sqrt{2}.$$

Ответ: $-1 \pm \sqrt{2}.$

№7. Решить неравенство $\frac{8 \cdot 3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

Решение:

$$\frac{8 \cdot 3^{x-2}}{3^x - 2^x} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x; \quad \frac{8 \cdot 3^x \cdot 3^{-2}}{3^x \left(1 - \frac{2^x}{3^x}\right)} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x;$$

$$\frac{8}{9 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^x\right)} > 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^x;$$

Пусть $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, тогда

$$\frac{8}{9(1-t)} > 1+t;$$

$$\frac{8}{9(1-t)} - 1 - t > 0;$$

$$\frac{8 - 9(1-t) - t(1-t)9}{9(1-t)} > 0;$$

$$\frac{8 - 9 + 9t - 9t + 9t^2}{9(1-t)} > 0;$$

$$\frac{9t^2 - 1}{9(1-t)} > 0;$$

$$\frac{(3t-1)(3t+1)}{9(1-t)} > 0; \quad \frac{(3t-1)(3t+1)}{1-t} > 0;$$

Найдем нули числителя и знаменателя дроби:

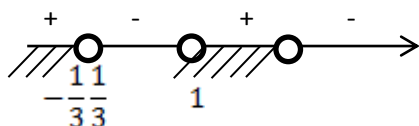
1)

$$t = \frac{1}{3} \text{ или } t = -\frac{1}{3};$$

$$(3t-1)(3t+1)=0$$

2)

$$1-t=0, \quad t=1.$$



$$t \in (-\infty; -\frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}; 1).$$

$$\begin{cases} t < -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} < t < 1 \end{cases} \text{ . Возвращаемся к замене}$$

- 1) $(\frac{2}{3})^x < -\frac{1}{3}$ - неверно.
- 2) $\frac{1}{3} < t < 1$, отсюда

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_2 \frac{1}{3}} < \left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^0.$$

Так как функция вида $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ - убывающая ($0 < \frac{2}{3} < 1$), то $0 < x < \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3}$,

то есть $x \in (0; \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3})$.

Ответ: $x \in (0; \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3})$.

№8. Решите неравенство $\left(\frac{1}{5}\right)^x - 4 \cdot 5^{-x-1} > \left(\frac{1}{5}\right)^{3-\sqrt{21-4x-x^2}}$.

Решение:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x - 4 \cdot 5^{-x-1} > \left(\frac{1}{5}\right)^{3-\sqrt{21-4x-x^2}},$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x - 4 \cdot 5^{-1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x > \left(\frac{1}{5}\right)^{3-\sqrt{21-4x-x^2}},$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right) > \left(\frac{1}{5}\right)^{3-\sqrt{21-4x-x^2}},$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} > \left(\frac{1}{5}\right)^{3-\sqrt{21-4x-x^2}},$$

Из определения убывающей функции получаем:

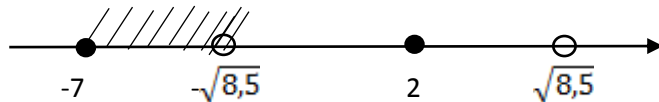
$$x + 1 < 3 - \sqrt{21 - 4x - x^2},$$

$$\sqrt{21 - 4x - x^2} < 2 - x.$$

Полученное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 21 - 4x - x^2 \geq 0, \\ 2 - x > 0, \\ 21 - 4x - x^2 < 4 - 4x + x^2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 21 \leq 0, \\ x < 2, \\ 2x^2 - 17 > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-7; 3], \\ x \in (-\infty; 2), \\ x \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{17}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{17}{2}}; \infty\right). \end{cases}$$

Вспользуемся методом интервалов



$$x \in [-7; -\sqrt{8,5}).$$

Ответ: $[-7; -\sqrt{8,5}).$

№9. Решите неравенство $\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \leq x\sqrt{x} + 27$.

Решение:

$$\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \leq x\sqrt{x} + 27$$

$$\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}-3} \leq x\sqrt{x} + 27$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x}-3 \neq 0 \\ \sqrt{x}+3 \leq x\sqrt{x} + 27 \\ x \geq 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x \neq 9 \\ (\sqrt{x}+3) - ((\sqrt{x})^3 + 3^3) \leq 0 \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

$$a) (\sqrt{x}+3) - ((\sqrt{x}+3)(x-3\sqrt{x}+9)) \leq 0$$

$$(\sqrt{x}+3)(1-x+3\sqrt{x}-9) \leq 0$$

Т.к. $\sqrt{x}+3 > 0$, то $-x+3\sqrt{x}-8 \leq 0$

$$(\sqrt{x})^2 - 3\sqrt{x} + 8 \geq 0$$

Пусть $\sqrt{x} = t$,

$$t^2 - 3t + 8 \geq 0$$

$$t^2 - 3t + 8 = 0$$

$D = 9 - 32 < 0$ – уравнение не имеет корней $\Rightarrow t^2 - 3t + 8 \geq 0$ при $t \in [0, \infty) \Rightarrow$

$$-x + 3\sqrt{x} - 8 \leq 0 \Rightarrow \text{при } x \in [0; 9) \cup (9; \infty).$$

Ответ: $x \in [0; 9) \cup (9; \infty)$.

№10. Решите неравенство $\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \leq x\sqrt{x} + 8$.

Решение:

$$\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2} \leq x\sqrt{x} + 8$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \neq 4 \\ x \geq 0 \\ \sqrt{x} + 2 \leq x\sqrt{x} + 8 \end{array} \right.$$

$$a) \sqrt{x} + 2 - ((\sqrt{x})^3 + 2^3) \leq 0$$

$$(\sqrt{x} + 2) - (\sqrt{x} + 2)(x - 2\sqrt{x} + 4) \leq 0$$

$$(\sqrt{x} + 2)(1 - x + 2\sqrt{x} - 4) \leq 0$$

Т.к. $\sqrt{x} + 2 > 0$, то

$$-x + 2\sqrt{x} - 3 \leq 0$$

$$x - 2\sqrt{x} + 3 \geq 0$$

$$(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} + 3 \geq 0$$

Пусть $\sqrt{x} = t$,

$$t^2 - 2t + 3 \geq 0$$

$$t^2 - 2t + 3 = 0$$

$D = 4 - 12 < 0$ – уравнение не имеет корней, поэтому

$t^2 - 2t + 3 > 0$ при $t \in [0, \infty)$, а

$$(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} + 3 \geq 0$$

$x \geq 0$; но с учетом ОДЗ

$$x \in [0; 4) \cup (4; \infty)$$

Ответ: $x \in [0; 4) \cup (4; \infty)$.

Блок IV. Задачи по геометрии и их решение.

Задача №1

В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние от точки D до плоскости (CAD_1) .

Дано:

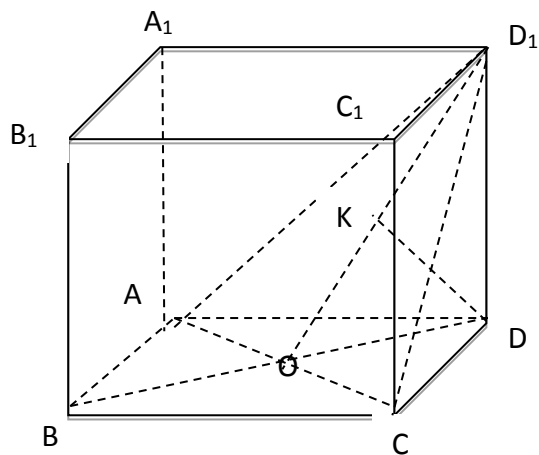
$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб

$BC=1$

Определить:

$\rho(D, (CAD_1))$

Решение:



$$\rho(D; (CAD_1)) = DK \quad (DK \perp OD_1)$$

I способ. Работаем по формуле $h = \frac{ab}{c}$, т.к. $\triangle OD_1D$ – прямоугольный

$$D_1D=1; \quad OD = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad OD_1 = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ из } \triangle ODD_1 - \text{прямоугольного}$$

$$KD = \frac{OD \cdot DD_1}{OD_1}, \quad KD = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

II способ. 1) $\triangle ODD_1$ – прямоугольный

$$\sin \angle D_1OD = \frac{DD_1}{OD_1}; \quad DD_1 = 1; \quad OD = \frac{1}{2} \cdot BD = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$OD_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \angle D_1OD = 1 : \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

2) $\triangle OKD$ - прямоугольный

$$KD = OD \sin \angle KOD$$

$$KD = \frac{\sqrt{2}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Задача №2

В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние между прямыми AD и CA_1 .

Дано:

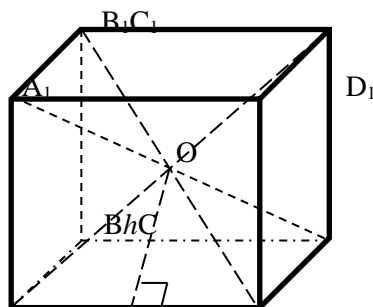
$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ - куб

$AB=1$.

Определить: $\rho(AD, CA_1)$

AD

Решение:



1) AD и CA_1 - скрещивающиеся прямые. За расстояние между скрещивающимися прямыми принимают расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую, параллельно первой. Но (A_1AC) не параллельна AD . В этом случае расстояние между скрещивающимися прямыми – это расстояние от точки одной прямой до другой, т.е. это длина перпендикуляра от точки одной прямой до другой. За данную точку удобно взять точку пересечения диагоналей плоскости A_1AC , т.е. точку O , O - точка пересечения всех диагоналей куба (проведем B_1D_1).

2) $\rho(AD; A_1C) = \rho(O; AD) = OK$, т.к. $OK \perp AD$.

$\triangle AOD$ - равнобедренный, OK - высота, медиана и биссектриса $\triangle AOD$.

$$OK = \sqrt{AO^2 - AK^2}, AO = \frac{1}{2} AC_1, AC_1 = A_1C = B_1D = \sqrt{3}, AO = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$AK = \frac{1}{2}; OK = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\rho(AD; A_1C) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача №3

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, стороны основания которой равны 2, а боковые ребра 3, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 .

Дано:

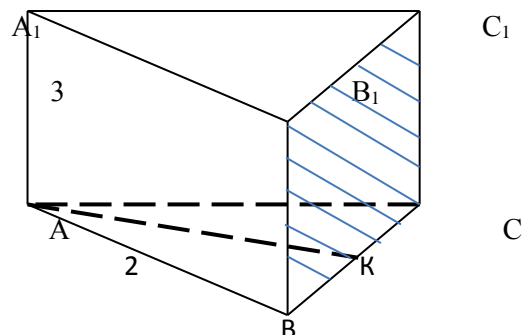
$ABCA_1B_1C_1$ - правильная

треугольная призма

$AB=2, AA_1=3$;

Определить: $\rho(AA_1; BC_1)$

Решение:



1) AA_1, BC_1 - скрещивающиеся прямые. За расстояние между скрещивающимися прямыми принимают расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую, параллельно первой.

$AA_1 \parallel (B_1BC)$.

2) $\rho(AA_1; BC_1) = \rho(AA_1; (BB_1C_1)) = AK$, где $AK \perp (BB_1C)$, т.к.

а) $B_1B \perp (ABC) \Rightarrow BB \perp AK$;

б) $AK \perp BC$.

3) $AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, где $a=2$, т.к. $\triangle ABC$ - правильный.

$AK = \sqrt{3}$, значит, $\rho(AA_1, BC_1) = \sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

Задача №4

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямой AC_1 и плоскостью BB_1C_1 .

Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ -правильная

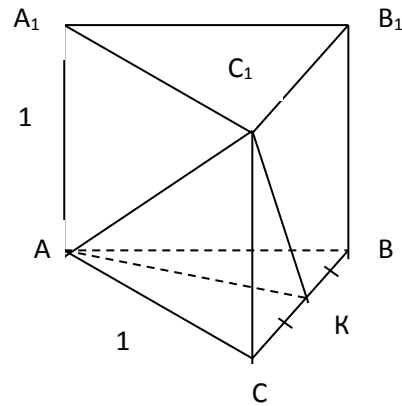
треугольная призма

$AA_1=1$

$AC=1$

Определить $\cos(AC_1; (BB_1C_1))$

Решение:



- 1) Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость

$$AK \perp BC \Rightarrow C_1K - \text{проекция } AC_1 \text{ на } (BCC_1) \quad \angle(AC_1; (BCC_1)) = \angle(AC_1; C_1K) = \angle AC_1K.$$

- 2) Косинус угла AC_1K можно найти по теореме косинусов:

$$AK^2 = AC_1^2 + C_1K^2 - 2AC_1 * C_1K \cos AC_1K.$$

а) $AK = \frac{\sqrt{3}}{2}$ из правильного ΔABC по формуле $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

б) $AC_1 = \sqrt{2}$ из прямоугольного ΔACC_1 ;

в) $C_1K = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ из прямоугольного ΔC_1CK .

$$\frac{3}{4} = 2 + \frac{5}{4} - 2\sqrt{2} * \frac{\sqrt{5}}{2} \cos AC_1K;$$

$$\cos AC_1K = \frac{\sqrt{10}}{4}, \text{ значит, } \cos(AC_1; (BB_1C_1)) = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{4}$

Задача №5

Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $2\sqrt{13}$, а диагональ боковой грани равна 13. Найдите угол между плоскостью C_1AB и плоскостью основания призмы.

Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ – правильная
треугольная призма

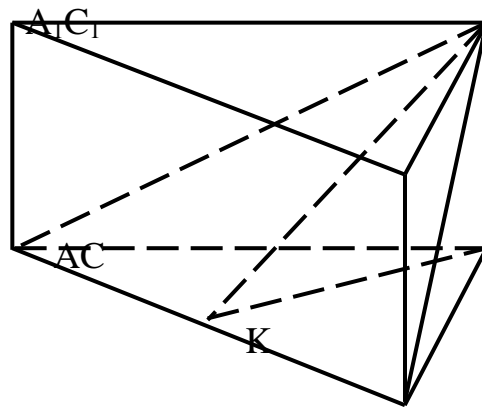
$$AB=2\sqrt{13} \quad B_1C_1=2\sqrt{13}$$

$$BC_1=13$$

Определить:

$$\angle((C_1AB);(ABC)).$$

Решение:



$$2\sqrt{13}$$

B

1) Угол между двумя плоскостями C_1AB и ABC с их общей границей называют двугранным углом. $\angle C_1ABC$ – двугранный. Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла.

$\angle((C_1AB);(ABC)) = \angle C_1KC$, т.к. $CK \perp AB$, CK – проекция C_1K , поэтому $C_1K \perp AB$.

2) Рассмотрим $\triangle C_1KC$ – прямоугольный и найдем $\operatorname{tg} C_1KC = \frac{C_1C}{KC}$.

$$C_1C = \sqrt{13^2 - (2\sqrt{13})^2} = \sqrt{169 - 52} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13} \text{ из прямоугольного } \triangle BC_1C.$$

$$KC = \frac{AB\sqrt{3}}{2}; \quad KC = \frac{2 * \sqrt{13} * \sqrt{3}}{2} = \sqrt{13} * \sqrt{3} \text{ - из правильного } \triangle ABC.$$

$$\operatorname{tg} C_1KC = \frac{3 * \sqrt{13}}{\sqrt{13} * \sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3};$$

$$\angle C_1KC = 60^\circ \Rightarrow \angle((C_1AB);(ABC)) = 60^\circ$$

Ответ: 60° .

Задача №6

Диагонали трапеции $CEKM$ (EK и CM – основания) пересекаются в точке O .
Площадь треугольника COE равна 16, $CO = 2 OK$. Найдите площадь трапеции.

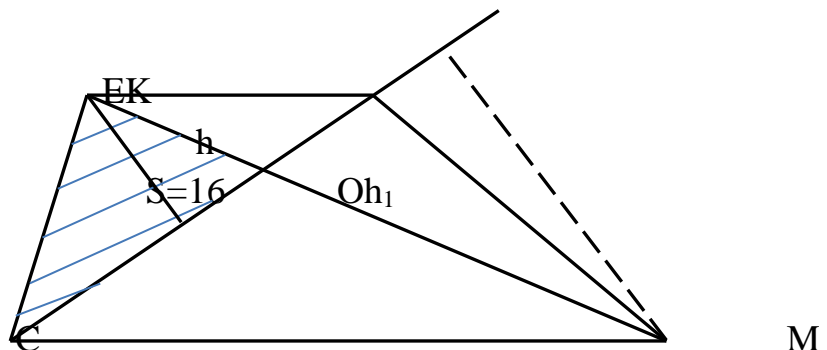
Дано:

$CEKM$ – трапеция
 EK, CM – основания
 $CK \cap EM = O$
 $S_{\triangle COE} = 16$
 $CO = 2OK$

Определить:

$S_{\text{трапеции}}$

Решение:



$$1) S_{\triangle COE} = \frac{1}{2} CO * h, S_{\triangle COE} = 16, OK = \frac{1}{2} CO$$

$$2) S_{\triangle EOK} = \frac{1}{2} OK * h = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * CO * h = \frac{1}{4} * CO * h = \frac{1}{2} * 16 = 8, \text{ где } h \text{ – высота } \triangle COE \text{ и } \triangle EOK.$$

3) $\triangle EOK$ подобен $\triangle MOC$ по 2 углам ($\angle EOK = \angle COM$, как вертикальные, $\angle OEK = \angle OMC$, как накрест лежащие при $EK \parallel CM$ и секущей EM) с коэффициентом подобия

$$k = \frac{OK}{CO} = \frac{OK}{2OK} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{S_{\triangle EOK}}{S_{\triangle MOC}} = k^2, \text{ поэтому } \frac{S_{\triangle EOK}}{S_{\triangle MOC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \text{ следовательно, } \frac{8}{S_{\triangle MOC}} = \frac{1}{4}; S_{\triangle MOC} = 32.$$

$$4) S_{\triangle KOM} = \frac{1}{2} h_1 * OK = \frac{1}{2} * h_1 * \frac{1}{2} CO = \frac{1}{2} S_{\triangle MOC} = 16, \text{ т.к. } h_1 \text{ – высота } \triangle MOC \text{ и } \triangle KOM.$$

$$5) S_{\text{трап}} = 16 + 8 + 32 + 16 = 72.$$

Ответ: 72.

Задача №7

Основанием прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является прямоугольник $ABCD$, стороны которого равны $6\sqrt{5}$ и $12\sqrt{5}$. Высота призмы равна 8. Секущая плоскость проходит через вершину D_1 и середины ребер AD и CD . Найдите косинус угла между плоскостью основания и плоскостью сечения.

Дано:

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ -прямая призма

$ABCD$ - прямоугольник

$$DC=6\sqrt{5}$$

$$BC=12\sqrt{5}$$

$$DD_1=8$$

M -середина DA

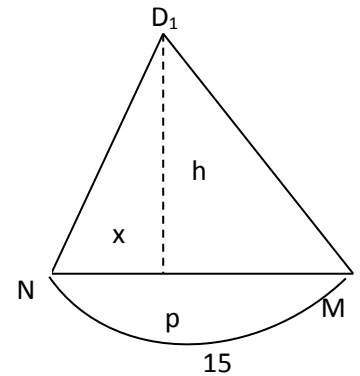
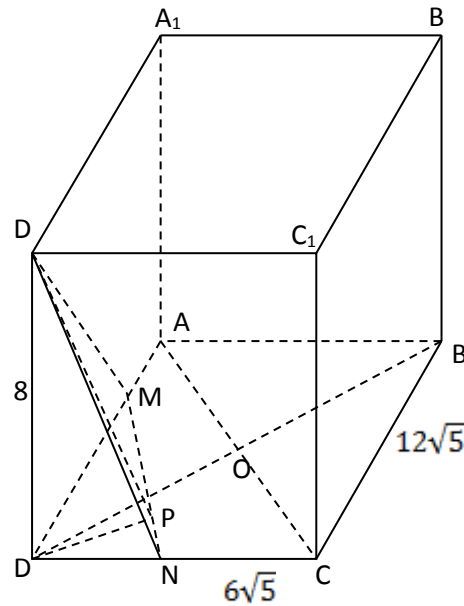
N -середина DC

(D_1NM) -секущая

Определить

$$\cos((ABC), (D_1NM)).$$

Решение:



Заметим, что $\cos((ABC), (D_1NM)) = \cos \angle D_1PD = \cos \varphi$, где $D_1P \perp NM$, $DP \perp NM$, $\angle D_1PD$ - линейный угол двугранного $\angle D_1NMD$.

$$1) DB=AC=\sqrt{(6\sqrt{5})^2 + (12\sqrt{5})^2} = 30, NM=15, D_1P=h, P \notin DB. NP \neq PM.$$

$$2) \text{ а) } ND_1 = \sqrt{8^2 + (6\sqrt{5})^2} = \sqrt{109} \text{ из } \triangle D_1DN \text{-прямоугольного.}$$

$$\text{ б) } MD_1 = \sqrt{8^2 + (12\sqrt{5})^2} = \sqrt{244} \text{ из } \triangle D_1DM \text{-прямоугольного.}$$

3) $\triangle ND_1M$, $NP=x$, тогда

$$109 - x^2 = 244 - (15-x)^2,$$

$$109 - x^2 = 244 - 225 + 30x - x^2,$$

$$x=3, \text{ т.е. } NP=3.$$

$$4) h=D_1P = \sqrt{(\sqrt{109})^2 - 3^2} = 10 \text{ из } \triangle D_1NP \text{-прямоугольного}$$

$$5) \sin \varphi = \frac{DD_1}{D_1P}; \sin \varphi = \frac{8}{10} = 0.8$$

$$6) \cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \text{ из } \triangle D_1DP; \cos \varphi = 0,6$$

Ответ: $\cos((ABC), (D_1NM)) = 0,6$.

Задача №8

Трапеция ABCD вписана в окружность. Найдите среднюю линию трапеции, если ее большее основание AD равно 15, синус угла BAC равен $\frac{1}{3}$, синус угла ABD равен $\frac{5}{9}$.

Дано:

ABCD – трапеция, вписанная

в окружность,

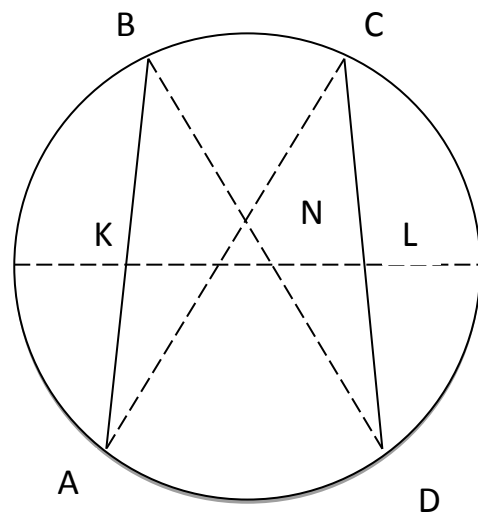
AD=15,

$$\sin \angle ABD = \frac{5}{9}$$

Определить:

Среднюю линию трапеции

Решение:



1) ABCD- равнобедренная трапеция.

а) $\triangle ABN = \triangle DCN$ по 2 признаку равенства треугольников ($AB = CD$; $\angle BAN = \angle CDN$, как вписанные, опирающиеся на дугу BC ;

аналогично,

$\angle ABD = \angle ACD$). Следовательно, $BN = NC$, $AN = ND$.

б) $\triangle BCN \sim \triangle DAN$, т.к. $\angle BNC = \angle AND$, как вертикальные, и

$$\frac{ND}{NC} = \frac{AN}{NB}.$$

2) По теореме синусов:

$$\frac{ND}{\sin NCD} = \frac{NC}{\sin NDC}; \frac{ND}{NC} = \frac{\sin NCD}{\sin NDC}; \frac{ND}{NC} = \frac{5}{\frac{1}{3}}; \frac{ND}{NC} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{ND}{BN} = \frac{5}{3}.$$

$$3) \frac{BC}{AD} = \frac{BN}{ND} = \frac{NC}{AN}; \frac{BC}{AD} = \frac{3}{5}, \text{ но } AD=15, \text{ поэтому } \frac{BC}{15} = \frac{3}{5}; BC=9.$$

4) Найдем среднюю линию трапеции ABCD.

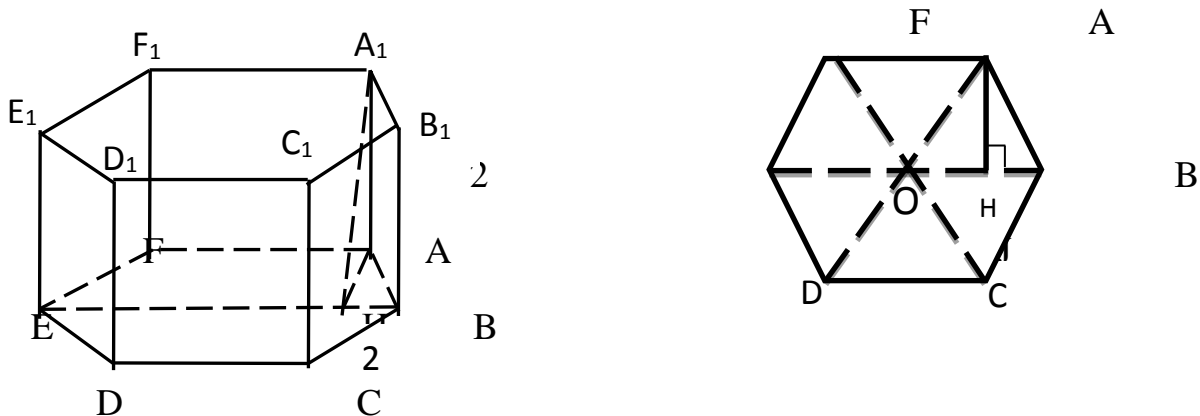
$$KL = \frac{BC + AD}{2}; KL = \frac{15 + 9}{2} = 12.$$

Ответ: средняя линия трапеции равна 12.

Задача №9

В правильной 6-угольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 2, найдите расстояние от точки В до прямой $A_1 F_1$.

Решение:



1) $\rho(B, A_1 F_1) = \rho(BE, A_1 F_1)$, где $BE \parallel A_1 F_1$, $B \in BE$, т.к. $BE \parallel AF$, $AF \parallel A_1 F_1$.

2) $A_1 H \perp BE$, поэтому $\rho(BE, A_1 F_1) = A_1 H$.

3) $\triangle A_1 A H$ – прямоугольный. $A_1 H = \sqrt{AA_1^2 + AH^2}$, где AH – проекция $A_1 H$ на плоскость.

4) а) $\triangle A H B$ – прямоугольный, $\sin 60^\circ = \frac{AH}{AB}; \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AH}{2}; AH = \sqrt{3}$

Или

б) $\triangle OAB$ – равносторонний. AH (высота) $= \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $AH = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

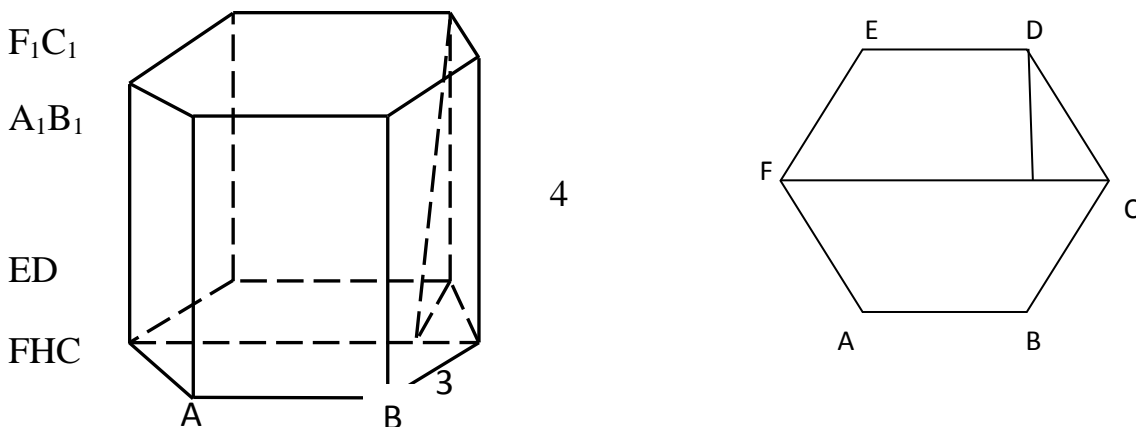
Значит, $A_1H = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$.

Ответ: $\sqrt{7}$.

Задача №10

В правильной 6-угольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, стороны основания которой равны 3, а боковые ребра 4, найдите расстояние от точки C до прямой $E_1 D_1$.

Решение: $E_1 D_1$

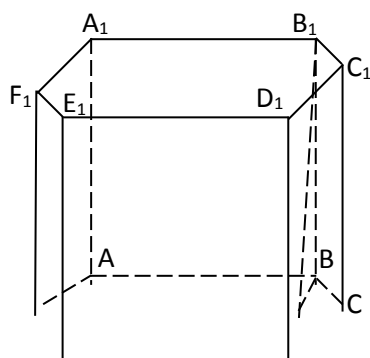


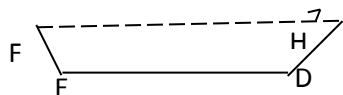
За расстояние от C до $E_1 D_1$ берем расстояние между $E_1 D_1$ и FC , $\rho(E_1 D_1; FC) = D_1 H$, где $D_1 H \perp FC$.

Задача №11

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, стороны основания которой равны 4, а боковые ребра равны 3, найдите расстояние от точки C до прямой $A_1 B_1$.

Решение:

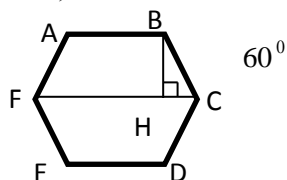




- 1) Расстояние от точки до прямой есть расстояние между двумя параллельными прямыми, на одной из которых лежит точка.

$$(A_1B_1 \parallel AB, AB \parallel FC) \Rightarrow A_1B_1 \parallel FC. \rho(C; A_1B_1) = \rho(FC; A_1B_1) = B_1H, \text{ где } B_1H \perp A_1B_1.$$

- 2) $\triangle B_1HB$ – прямоугольный. $B_1H = \sqrt{B_1B^2 + BH^2}$, BH из $\triangle BHC$ – прямоугольного (BH – проекция B_1H).



$$\sin 60^\circ = \frac{HB}{BC}; \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{HB}{4}; \quad HB = 2\sqrt{3}. \quad B_1H = \sqrt{3^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 12} = \sqrt{21}.$$

Ответ: $\sqrt{21}$.

Задача №12

В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M , стороны основания равны 6, а боковые ребра равны 5. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку A и середину ребра MC , параллельно прямой BD .

Дано:

$MABCD$ -правильная пирамида.

$DC=6$; $MC=5$.

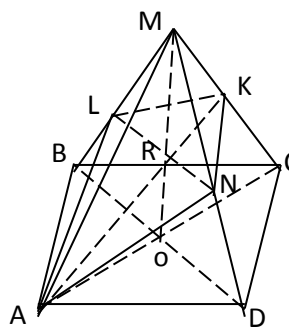
K -середина MC

Определить:

$S_{\text{сеч}}$, проходящего через A и K ,

параллельно BD .

Решение:



$$1) S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2} RK \cdot LN + \frac{1}{2} AR \cdot LN = \frac{1}{2} LN (RK + AR) = \frac{1}{2} LN \cdot AK;$$

2) $\triangle AMC$; OM, AK -медианы. $AK=AR+RK$; $RK=\frac{1}{2}AR$, из $\triangle AOR$ – прямоугольного.

$$AR = \sqrt{AO^2 + OR^2}, AO = \frac{1}{2}AC; OR = \frac{1}{3}OM; AC = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}; AO = 3\sqrt{2}$$

$$OM = \sqrt{MC^2 - OC^2}; OM = \sqrt{5^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{25 - 18} = \sqrt{7}; OR = \frac{1}{3}\sqrt{7} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$AR = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2} = \sqrt{18 + \frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{18 \cdot 9 + 7}}{3} = \frac{13}{3} \Rightarrow RK = \frac{1}{2} * \frac{13}{3} = \frac{13}{6};$$

$$AK = \frac{13}{3} + \frac{13}{6} = \frac{39}{6} = \frac{13}{2};$$

3) $\triangle LNM$ подобен $\triangle BDM$ подвуглам; $K = \frac{2}{3}$ (MO – медиана, AK – медиана из $\triangle AMC$, $\frac{MK}{MO} = \frac{2}{3}$)

$$LN = \frac{2}{3}BD, \text{ т.е. } LN = \frac{2}{3} * 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2};$$

$$4) S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2} * \frac{13}{2} * 4\sqrt{2} = 13\sqrt{2};$$

Ответ: $S_{\text{сеч}} = 13\sqrt{2}$.

Задача №13

В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые ребра 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью проходящей через точку B и середину ребра MD , параллельно прямой AC .

Дано:

$MABCD$ -правильная пирамида.

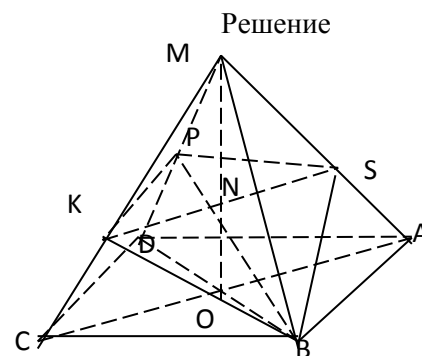
$BC=3; MD=8$

P -середина MD

Секущая плоскость

параллельна AC

Определить: $S_{\text{сеч}}$



1) Сечение правильной пирамиды – $KPSB$, где $KB=BS$ из равенства треугольников $СKB$ и ASB , аналогично, $KP=PS$. PM - высота (медиана) равнобедренного треугольника $\triangle KPS$, BM - высота (медиана) $\triangle KBS$, т.е. $PM \perp KS$ и $BM \perp KS$.

$$S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2} KS * PM + \frac{1}{2} KS * BM = \frac{1}{2} KS * PB;$$

2) $KS \parallel AC$ по условию; В $\triangle DMBMO$ -медиана, BP -медиана, т.е. $NO = \frac{1}{3} MO, MN = \frac{2}{3} MO$;

$\triangle KMS$ подобен $\triangle CMA$ с $K = \frac{2}{3} \Rightarrow KS = \frac{2}{3} AC$; $AC = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$; $KS = \frac{2}{3} * 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$;

3) $MO = \sqrt{8^2 - OB^2} = \sqrt{64 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{64 - \frac{9*2}{4}} = \frac{\sqrt{256-18}}{2} = \frac{\sqrt{238}}{2}$; $NO = \frac{\sqrt{238}}{6}$;

$OB = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} AC = \frac{3\sqrt{2}}{2}$;

4) $NB = \sqrt{OB^2 + ON^2}$;

$$NB = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{238}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{9*2}{4} + \frac{238}{36}} = \frac{\sqrt{162+238}}{6} = \frac{\sqrt{400}}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$
;

$PN = \frac{1}{2} NB$; $PN = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$, т.к. BP -медиана $\triangle DMB$; $PB = \frac{10}{3} + \frac{5}{3} = 5$;

5) $S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2} * 2\sqrt{2} * 5 = 5\sqrt{2}$

Ответ: $5\sqrt{2}$.

Приложение 1. Задачи для самостоятельного решения.

1) Тригонометрические уравнения.

Решите уравнение:

1. $\sin\left(4x = \frac{\pi}{3}\right) + \cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2};$

2. $\sin\left(6x = \frac{\pi}{4}\right) + \sin 3x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

2) Логарифмические уравнения.

Решите уравнение:

1. $\frac{1}{\log_{\frac{1}{15}}(3x^2-2)} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{8}} 5x} - \frac{1}{1-\log_{\frac{1}{5}} x};$

2. $\frac{1}{\log_{\frac{1}{12}}(3x^2-32)} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{8}} 4x} - \frac{1}{1-\log_{\frac{1}{4}} x};$

3. $\log(2x^2-22) \cdot 14 = \frac{1}{\log_2 7x} + \frac{1}{\log_7 x+1};$

4. $\log(3x^2-96) \cdot 18 = \frac{1}{\log_9 2x} + \frac{1}{1+\log_2 x};$

5. Найдите все значения x , при каждом из которых выражения $6x \log_2 \sqrt[3]{2-5x} + 5x^2 \log_{\frac{1}{2}}(2-5x)$ и $5x^2 - 2x$

принимают равные значения.

3) Показательные неравенства.

Решите неравенство:

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^x + 6 \cdot 3^{-x-1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{2-\sqrt{16-6x-x^2}};$

2. $3^{x-1} - 8 \cdot 3^{x-3} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}-4};$

3. $6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} + 5 \cdot 2^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{1-\sqrt{20+8x-x^2}};$

4. $5^{-x-1} + 24 \cdot 5^{-x-3} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{x^2+3x-28}-7};$

4) Геометрические задачи.

1. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ – треугольник ABC , в котором $AC = 10, \sin C = 0,2$. Высота призмы равна 17. Найдите тангенс угла между плоскостью основания призмы и плоскостью A_1BC .

2. Высота ромба $ABCD$ равна $3\sqrt{5}$, косинус угла A равен $\frac{2}{3}$, высота BH пересекает диагональ AC в точке M . Найдите длину отрезка BM .
3. Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ - правильный треугольник ABC , сторона которого равна $8\sqrt{3}$. На ребре BB_1 отмечена точка P так, что $BP:PB_1 = 3:5$. Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и ACP , если расстояние между прямыми BC и A_1C_1 равно 16.
4. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 4, а боковые ребра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC .
5. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 15, а боковые ребра равны 16. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку D и середину ребра MB параллельно прямой AC .
6. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны $\frac{9}{2}$, а боковые ребра равны 12. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD .
7. В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между плоскостями ABD и CAD_1 .
8. Высота прямоугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 4. Основание призмы - треугольник ABC , в которой $AB = BC$, $AC = 6$, $\operatorname{tg}A = 0,5$. Найдите тангенс угла между прямой A_1B и плоскостью ACC_1 .
9. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ со стороной 2 и боковым ребром 3 точка M делит ребро SD в отношении 1:2 (считая от вершины S). Найдите угол между прямой BM и плоскостью AEC .

Приложение 2. Ответы к задачам для самостоятельного решения.

Задание	Ответ	Задание	Ответ
1.1	$x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\pi n;$ $x = \frac{5}{12}\pi + \pi k; n, k \in Z.$	1.2	$x = \frac{1}{3}\pi n; x = \frac{5}{36}\pi + \frac{2}{3}\pi k;$ $x = \frac{13}{36}\pi + \frac{2}{3}\pi k; n, k \in Z.$
2.1	$x = 2$	2.2	$x = 4$
2.3	$x = 5,5$	2.4	$x = 6$
2.5	$x = 0; 0,3$	3.1	$x \in \left[-8; -\sqrt{\frac{7}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{7}{2}}; 2\right]$
3.2	$x \in (-\infty; 2] \cup \left[5; \frac{59}{11}\right)$	3.3	$x \in [-2; -\sqrt{2}] \cup (\sqrt{2}; 10]$

3.4	$x \in \left[-\frac{128}{17}; -7\right] \cup [4; \infty)$	4.1	8,5
4.2	3	4.3	$\frac{1}{2}$
4.4	$10\frac{2}{3}$	4.5	$85\sqrt{2}$
4.6	$11, 25\sqrt{2}$	4.7	$\sqrt{2}$
4.8	0,3	4.9	$\arctg \frac{\sqrt{65}}{13}$

Список литературы

1. Заочный курс абитуриента Всероссийская школа математики и физики «Авангард».
2. Лаппо Л.Д., Попов М. А. Математика. Экзаменационные тесты, профильный уровень. Практикум по выполнению типовых тестовых заданий ЕГЭ. – М: Экзамен, 2015.
3. Варианты заданий по математике на вступительных экзаменах в РЭА им. Г. В. Плеханова.
4. Методические указания для поступающих в Санкт-Петербургский государственный технический университет.
5. Типовые тестовые задания 2013 г.