Муниципальное казенное общеобразовательное учреждение
гимназия  города Слободского Кировской области

МЕТОДИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА

# «Методические приемы изучения темы «Делимость чисел»

Автор: Рычкова Ольга Валерьевна, учитель математики
МКОУ гимназии г. Слободского

# Содержание

***Аннотация.*** *В разработке описывается один из подходов к построению урока математики с целью усиления его развивающего эффекта. Показано использование видоизмененного варианта структуры креативного урока (моноурок), внедренного в системе НФТМ-ТРИЗ. Средством достижения формирования универсальных учебных действий избраны открытые задачи на различных этапах урока математики. В разработке также представлен сценарий урока математики в 6-ом классе по теме «Делимость чисел».*

## Теоретическая основа разработки

Российское образование находится в режиме модернизации, в процессе которой принимаются новые документы федерального уровня. Обновлены задачи, стоящие перед учителем, сформулированы новые виды результатов.

ФГОС нацеливает нас на *«…обеспечение роста творческого потенциала учеников, их готовности к применению универсальных учебных действий в жизненных ситуациях…»*

Концепция развития математического образования в Российской Федерации определяет следующие задачи развития:

- модернизация содержания учебных программ математического образования на всех уровнях;
- повышение качества работы преподавателей математики, создание и реализация ими собственных подходов и авторских программ;
- обеспечение обучающимся, имеющим высокую мотивацию и проявляющим способности, условий для развития;
- популяризация математических знаний и образования.

Принятые документы не предлагают детальную методику формирования и оценки УУД школьника. Возникает необходимость самому учителю разработать инструментарий, который позволял бы достигать четко прописанные результаты, в том числе и метапредметные.

**Место темы в курсе математики**

Курс математики 5-6 классов является фундаментом для математического образования и развития школьников, доминирующей функцией при его изучении в этом возрасте является интеллектуальное развитие учащихся. Одной из основных целей изучения математики является развитие мышления, прежде всего формирование абстрактного мышления. С точки зрения воспитания творческой личности особенно важно, чтобы в структуру мышления учащихся, кроме алгоритмических умений и навыков, которые сформулированы в стандартных правилах, формулах и алгоритмах действий, вошли эвристические приемы как общего, так и конкретного характера. Значительное внимание в изложении теоретического материала курса уделяется его мотивации, раскрытию сути основных понятий, идей, методов. Обучение построено на базе теории развивающего обучения, что достигается особенностями изложения теоретического материала и упражнениями на сравнение, анализ, выделение главного, установление связей, классификацию, обобщение и систематизацию. Особо акцентируются содержательное раскрытие математических понятий, толкование сущности математических методов и области их применения, демонстрация возможностей применения теоретических знаний для решения задач прикладного характера. Содержание математического образования в 5-6 классах представлено в виде следующих содержательных разделов: «Арифметика», «Числовые и буквенные выражения. Уравнения», «Геометрические фигуры», «Элементы статистики, вероятности. Комбинаторные задачи», «Математика в историческом развитии».

Содержание раздела «Арифметика» служит базой для дальнейшего изучения учащимися математики и смежных дисциплин, способствует развитию вычислительной культуры и логического мышления, формированию умения пользоваться алгоритмами, а также приобретению практических навыков, необходимых в повседневной жизни.

**Цель данной разработки**: показать приемы и продемонстрировать дидактический материал, которые можно использовать на уроках математики при изучении темы «Делимость чисел» (в частности, использование задач открытого типа для усиления развивающего эффекта урока, в раскрытии творческого потенциала ученика и достижения метапредметных результатов обучения).

**Теоретическая база** строится на следующих понятиях и идеях:

- интеллектуального и творческого потенциала человека (С. С. Бакулевкая);
- основ ТРИЗ (Г. С. Альтшуллер);
- основ НФТМ-ТРИЗ (М. М. Зиновкина);
- открытой задачи (А. А. Гин);
- систем творческих заданий (П. М. Горев, В. В. Утёмов);
- обучения поиску новых идей и самостоятельного составления заданий (М. Ю. Шуба);

**Закрытые и открытые задачи**

Большинство задач из школьного учебника по математике – это задачи закрытого типа. Условие задачи содержит все необходимые данные в явном виде. Метод решения известен и представляет собой цепочку формальных операций. Правильный ответ задачи определен однозначно.

В открытой задаче условие «размытое», содержит неопределенности. Методы решения разнообразны. Допускается любое количество возможных ответов.

Для решения жизненных проблем очень важно уметь решать задачи открытого типа. Подобные задачи позволяют развивать творческий потенциал ученика, подготовить его к применению знаний в различных ситуациях, а, значит, в полной мере реализовать требования новых образовательных стандартов.

Сравнительный анализ УМК по математике разных авторов показывает, что открытые и (или) частично открытые задачи в учебниках встречаются редко. Это задачи в «узком» смысле открытости. Например, задача на вычисление углов равнобедренного треугольника, один угол которого равен 53°.

## Приемы использования открытых задач

**Мотивационная часть урока**

Представляет собой специально отобранную систему оригинальных объектов-сюрпризов, интересных фактов, способных вызвать удивление учащегося. Этот блок обеспечивает мотивацию учащегося к занятиям и развивает его любознательность. Для компенсации информационных перегрузок и с целью пробуждения поисковой активности наилучшим способом включения учеников в интеллектуальную работу является акт удивления.

*Приёмы:*

- удивление ученика от возникшей проблемы (противоречие, которого не должно быть),
- «математические фокусы»,
- удивление от сообщенного факта,
- «нематематическое» начало урока.
- в начале урока показано применение материала, который еще только предстоит изучить.

*Примеры:*

| Тема урока | Описание приема |
|---|---|
| «Признаки делимости» | Учитель показывает на доске одновременно несколько многозначных чисел и, не производя никаких вычислений, говорит, что конкретное число делится на 2, другое делится на 5, на 9 и т. д. Ученикам разрешается проверить правоту учителя, используя калькуляторы. Учитель задает вопрос: «Как он (учитель) об этом узнал, в чем суть фокуса?» Чаще всего ученики отвечают, что числа были к уроку специально подобраны, вычисления были сделаны до урока. Далее предлагается эксперимент: ученик на доске пишет любое многозначное число, про которое учитель говорит, что оно точно делится (не делится) на 2, 3, 5, 9. Ученики проверяют на калькуляторе. Эксперимент повторяется несколько раз, ученики убеждаются в эффекте «фокуса» и готовы ему научиться. |
| «Простые и составные числа» 5, 6 класс | Среди чисел есть особый класс. Вот несколько первых чисел из этого класса: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17.... Самое большое из известных на сегодня чисел этого класса было найдено в августе 2008 года и состоит из 12 978 189 цифр. Для математиков эти числа очень важны, но как они распределяются по числовому ряду до сих пор до конца не ясно. В 1859 году немецкий математик Б. Риман предложил свой способ их поиска, найдя метод, по которому можно определить максимальное количество таких чисел, не превышающих определенное заданное число. Математики подвергли проверке этот метод уже на полутора триллионах подобных чисел, но никто не может доказать, что и дальше проверка будет успешной. Гипотеза Римана широко используется при расчете систем безопасности передачи данных, поэтому ее доказательство имеет большой практический смысл. Тому, кто докажет гипотезу Римана, институт Клэя обещает выплатить 1 млн долларов. Что это за числа? Посмотрите на записанные числа и предположите, как они связаны, по какому признаку они попадают в общий числовой класс? (гипотезы учеников) |

Приведенные примеры организации начала (мотивационной части) урока позволяют формировать все виды УУД школьника:

*Регулятивные:* целеполагание, прогнозирование, планирование, саморегуляция, оценка.

*Познавательные:* осознанное и произвольное построение речевого высказывания, построение логической цепи рассуждений, участие в постановке и формулировании проблемы, моделирование.

*Коммуникативные:* умение выражать свои мысли в соответствии с условиями коммуникации, планирование учебного сотрудничества с учителем и одноклассниками.

*Личностные:* установление учащимися связи между целью учебной деятельности и ее мотивом.

**Содержательная часть урока**

Соединяет программный материал учебного предмета с системой заданий, направленных на развитие дивергентного, логического мышления, творческих способностей учащихся, способности к острому, живому восприятию, абстрактному и сложному мышлению, речевой, математической и технической грамотности.

*Приёмы:*

- задачи на использование контрпримера,
- отсутствие вопроса к данным,
- использование в формулировке задачи лишних данных,
- задачи, для решения которых необходимо самостоятельно «добыть» числовые данные,
- смена размерности пространства для решения задачи,
- самостоятельное изобретение учениками «новых» способов решений, которых нет в учебнике.

*Примеры* (степень самостоятельности и степень открытости задач можно менять в зависимости от готовности класса к исследовательской деятельности).

| Тема урока | Описание приема |
|---|---|
| Тема «Наибольший общий делитель» | В учебниках задания сформулированы на прямое применение (отработку) алгоритма нахождения НОД чисел: «Вычислите НОД чисел…». Предлагаю использовать задания в следующих формулировках:<br>- для каких двух (нескольких) чисел число 7 является наибольшим делителем?<br>- приведите примеры двух (нескольких) чисел, для которых число 7 не может быть наибольшим общим делителем.<br><br>При изучении данной темы ученики, как правило, знакомятся с единственным способом нахождения НОД чисел.<br>Можно ли найти НОД другим способом?<br>Предлагаю рассмотреть геометрическую интерпретацию алгоритма Евклида для нахождения НОД двух чисел (при изучении способа возможно продумать цепочку экспериментов с обыкновенным тетрадным листом).<br>Найти НОД (а, в) (Длины сторон прямоугольника из тетрадного листа измеряются количеством клеточек).<br>В прямоугольнике с длинами сторон a и b ($a > b$) закрашивается квадрат максимального размера (со стороной b). Эта операция повторяется для не закрашенной части сколько возможно.<br>Если такие квадраты замощают весь прямоугольник, то число b и есть НОД.<br>Если остаётся прямоугольник (со сторонами b и r1), в нём закрашивается наибольшее возможное число квадратов максимального размера (со стороной r1).<br>Если квадраты со стороной r1 замощают весь прямоугольник, то r1 и есть НОД.<br>Если остаётся прямоугольник (со сторонами r1 и r2), в нём закрашивается наибольшее возможное число квадратов максимального размера (со стороной r2).<br>И так далее до тех пор, пока весь исходный прямоугольник не покроется квадратами. (Рано или поздно это произойдёт, поскольку стороны квадратов уменьшаются и в любом случае можно заполнить оставшийся прямоугольник квадратами со стороной единица).<br>Длина стороны минимального квадрата и есть НОД исходных чисел. |
| «Признаки делимости» | Предлагаю к содержанию данной темы, определенному стандартом, добавить изучение признака делимости на 4 следующим образом:<br>- Какой год называется високосным?<br>- Определите, является ли 2076 год (или любой другой) високосным?<br>- Как (по какому признаку) можно устно определить, делится ли данное число на 4?<br>Учитель при необходимости только направляет рассуждения учеников, которые самостоятельно формулируют признак делимости на 4.<br>(Известно, что число 100 делится на 4, значит, любое количество сотен делится на 4. Чтобы выяснить, делится ли число на 4, достаточно проверить делимость на 4 только его «хвостика», состоящего из последних двух цифр.)<br><br>В теме «Признаки делимости» можно рассмотреть задания, подобные за- |

| | |
|---|---|
| | данию № 19 базового уровня ЕГЭ по математике:<br>1) Найдите шестизначное натуральное число, которое записывается только цифрами 0 и 2 и делится на 24.<br>2) Вычеркните в числе 181615121 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 12. |

Приведенные примеры заданий и организации учебной деятельности на уроке позволяет формировать все виды УУД школьника:

*Регулятивные:* саморегуляция, коррекция, контроль.

*Познавательные:* поиск и выделение необходимой информации, структурирование знаний, рефлексия способов и условий действия, самостоятельное создание алгоритмов деятельности при решении проблем творческого и поискового характера, анализ, синтез, подведение под понятие, моделирование.

*Коммуникативные:* постановка вопросов (инициативное сотрудничество в поиске и сборе информации); выявление, идентификация проблемы, поиск и оценка альтернативных способов разрешения конфликта, принятие решения и его реализация.

*Личностные:* оценивание усваиваемого содержания, исходя из социальных и личностных ценностей, обеспечивающее личностный моральный выбор.

## Сценарий урока-обобщения темы «Делимость чисел»

Приведу в качестве примера урок математики в 6-ом классе по теме «Признаки делимости» (обобщающее повторение материала).

**Мотивация**

После приветствия ученикам предлагается просмотреть слайд-фильм.

– Фильм очень короткий, но в нем такие важные слова. Вслушайтесь в них!

*«…В бесконечном множестве натуральных чисел, так же как среди звезд Вселенной, выделяются отдельные числа и целые их «созвездия» удивительной красоты, числа с необыкновенными свойствами и своеобразной, только им присущей гармонией. Надо только уметь увидеть эти числа, заметить их свойства. Всмотритесь в натуральный ряд чисел – и вы найдете в нем много удивительного и диковинного, забавного и серьезного, неожиданного и курьезного. Видит тот, кто смотрит. Ведь люди и в летнюю звездную ночь не заметят… сияние Полярной звезды, если не направят свой взор в безоблачную высь…»*

– И что же интересного в этом мире чисел? Чем они могут нас удивить? Например, фокусами. Сейчас я вам покажу один из них.

Фокус. Записать на листочке бумаги любое трехзначное число, приписать к этому числу справа такое же число, разделить данное число на 7, разделить этот результат на 11, разделить результат на 13. Если все вычисления были выполнены правильно, то получится трехзначное число, которое было написано первоначально. Почему? (*Гипотезы учеников.*)

Вместе разгадываем фокус (*фронтальная работа*).

– 1001 – какое интересное число. У этого числа есть даже имя. Да какое! Во всем мире его называют числом Шахерезады. А почему это число так называется? (*Гипотезы учеников.*)

– Магия не обязательно подразумевает ловкость рук. Можно использовать также математику с ее логическими механизмами, в том числе и тему «Делимость чисел».

Далее формулируем цели урока.

– Вы завершаете изучение темы «Делимость чисел», познакомились с новыми понятиями, алгоритмами. Если тема изучена, зачем нужен сегодняшний урок? (*Ответы учеников.*)

В качестве акта удивления здесь использовались видеофрагмент и математический фокус. Кроме фокуса удивляющим моментом является возможность на уроке математики пользоваться калькулятором, ведь задача этого этапа не в формировании вычислительных умений. Все это вместе приводит совместную деятельность учителя и учащихся к постановке и принятию темы и целей урока.

**Содержательный блок**

Особенностью урока, его ключевой идеей является включение в его содержание заданий открытого типа, которые активизируют, способствуют вовлечению учащихся в универсальную учебную деятельность. На уроке уделяется внимание овладению общими методами научного творчества: классификацией с незаданными критериями, построению контрпримера, мозговой атаке.

***Задание «Классификация чисел».*** На какие группы можно разбить числа: 25, 146, 90, 5, 12, 17, 26, 180, 3, 11111? (*Ученики предлагают разные варианты.*)

– Как среди этих чисел вы увидели числа, которые делятся (не делятся) на какое-то число, не выполняя операцию деления? (*Использовали признаки делимости*.)

***Задание «Найди пару».*** У каждого ученика карточка, на которой написана половина формулировки одного из признаков делимости. Необходимо найти половинки каждого признака и сформулировать его.

***Задание «Придумай число».*** Придумать число, которое:

- не делится на 3;
- делится на 5, но не делится на 10;
- делится на 9, но не делится на 3 (*нет такого числа*).

– Выясняем, почему такое число не смогли придумать?

***Задание «Подбери цифру».*** В числе *4* вместо звездочек поставьте цифры так, чтобы полученное число делилось и на 3, и на 10.

Показываем все возможные варианты: всего можно получить три числа: 240, 540, 840.

– Среди чисел есть особый класс. Вот несколько первых чисел из этого класса: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17. Что это за числа? (*Простые числа.*)

– Для математиков эти числа очень важны, но как они распределяются по числовому ряду до сих пор до конца не ясно. В 1859 году немецкий математик Георг Риман предложил свой способ их поиска. Математики подвергли проверке этот метод уже на полутора триллионах подобных чисел, но никто не может доказать, что и дальше проверка будет успешной. Гипотеза Римана широко используется при расчете систем безопасности передачи данных, поэтому ее доказательство имеет большой практический смысл. Тому, кто докажет гипотезу Римана, институт Клэя обещает выплатить миллион долларов.

– Если есть числа простые, значит, есть и… (*составные числа*).

***Задание.*** Можно ли все натуральные числа разбить на простые и составные? Все ли натуральные числа охвачены данной классификацией?

– Есть число 1, которое не относится ни к простым, ни к составным.

– Мы озвучили одну из проблем современной науки – недоказанность гипотезы Римана, – а сейчас я расскажу вам сказку.

***Сказка с заданиями***

– 28 сентября число 28 решило пригласить в гости всех своих делителей, меньших, чем оно само. Первой прибежала единица, за ней двойка, за ней... Какие еще числа пришли в гости к числу 28? (*1; 2; 4; 7; 14*)

– Когда все гости собрались, число 28 увидело, что их немного. Оно огорчилось и предложило, чтобы каждый из гостей привел еще и своих делителей. Сколько придет новых гостей? (*больше никто не придет*). Почему?

– Какой же праздник без хоровода. Все гости числа 28 соединились знаком «плюс» и о чудо! Какой же оказалось сумма? (*28*).

– Единица сказала, что всякое число, которое равно сумме своих меньших делителей, называется... (*совершенным*).

– Число 28 обрадовалось и спросило, какие есть еще совершенные числа. (*6; 28; 496*).

– Наступило 29 сентября, и число 29 тоже решило пригласить в этот день в гости своих меньших делителей. Первой как всегда пришла единица. Кто еще пришел в гости? (*Никто.*)

– Что можно сказать про число 29? Какое оно? (*Простое.*)

– И в октябре продолжался тот же обычай.

– Только одно число не дождалось гостей. Что это за число? (*1*).

– А сколько раз единица побывала в гостях? (*30*). У каких чисел был только один гость? (*2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31*). Что это за гость? (*1*)

**Психологическая разгрузка**

Психологическая разгрузка на уроке реализована через игру-соревнование, игру «Да-нетка», игру «Кто больше?».

***Игра-соревнование по рядам.*** На доске для каждого ряда приготовлено задание, ученики по очереди выходят и подписывают ответ. Побеждает команда, которая раньше других без ошибок выполнила задание. Призом победившей команде является карточка с цифрой (любой).

НОД (25, 3) =

НОД (10, 4) =

НОК (25, 3) =

НОД (7, 30) =

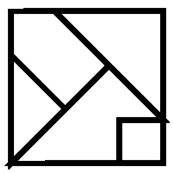
***Игра «Да-нет-ка».*** Учитель загадывает трёхзначное число. Побеждает тот, кто первым его угадает. Можно задавать только те вопросы, на которые ответ – либо «да», либо «нет». Победитель получает карточку с цифрой.

***Задание «Кто больше?»*** На слайде набор чисел: 29, 6, 76, 39, 45, 7, 10, 101, 85, 400. Посмотрите на слайд и предположите, какое задание сейчас будет сформулировано?

После этого слайд закрывается. Задание: воспроизвести на память числа со слайда. Побеждает тот, кто вспомнит больше чисел. Победители получают карточку с цифрой.

**Головоломка**

В этом блоке используется головоломка «Неугомонный квадрат» [7].



***Задание.*** Головоломка состоит из пяти частей. Возьмите четыре из них – все, кроме квадратика составьте из них квадрат. А теперь попытайтесь составить квадрат из всех пяти частей.

Предложенная головоломка тоже является заданием открытого типа: в формулировке содержится противоречие: как, добавив новый элемент, можно снова сложить квадрат?

**Содержательный блок**

Цель урока – не только в повторении темы и подготовке к контрольной работе. Главное назначение урока – в формировании у детей понимания того, зачем они изучали тему большое количество времени. Поэтому в качестве дидактического материала используются реальные жизненные ситуации.

– Где нам могут пригодиться знания по теме «Делимость чисел», кроме уроков математики?

– Умение вычислять НОД и НОК чисел может помочь людям разных профессий.

***Задачи***

1. Заведующая хозяйством Раиса Ивановна дала поручение учителю технологии Андрею Петровичу закупить самые короткие доски, которые можно распилить на равные части и по 30 см, и по 40 см. Какой длины доски будет покупать Андрей Петрович?

2. Родители Артема – люди очень интересных профессий. Мама – стюардесса, а папа – машинист скорого поезда. Мама бывает дома один раз в четыре дня, а папа – один раз в семь дней. Так получилось, что оба они 1 сентября ушли в рейс. Этот текст можно назвать задачей? (*Нет.*) Сформулируйте вопрос, чтобы данный текст можно было считать задачей. Выбираем из предложенных вопросов: «Когда Артем увидит своих родителей дома вместе?», – и решаем задачу.

3. Вчера в цветочный магазин привезли 660 белых роз, 165 красных и 173 желтых. Целый день продавец магазина пытается составить наибольшее количество одинаковых букетов из красных и белых роз, так, чтобы не осталось ни одной лишней. Но пока ничего не выходит. Зашедшая к ней в магазин дочка-шестиклассница быстро решила эту задачу, сообщив, сколько надо сделать букетов и какое количество каждого вида цветов в них войдет. Как рассуждала дочь Маша?

***Игра «Что? Где? Когда?»*** (один раунд). Одновременно играют 3 команды знатоков (по рядам). Вопрос: «Всё самое важное и ценное я храню в сейфе, на котором кодовый замок. Код замка – семизначное число, состоящее из двоек и троек. Двоек больше чем троек, а само число делится и на 3, и на 4. Уважаемые знатоки, через одну минуту назовите код замка моего сейфа».

Команда-победитель получает карточку с цифрой.

**Резюме**

В данном компоненте урока предусмотрены развитие навыков качественной оценки и самооценки личной и коллективной деятельности; проверка достижения целей. На этом этапе дети получили продукт своей деятельности (число с описанием). Рефлексивные моменты включены в разные этапы урока и заключаются в понимании учителем степени успешности и осознанности выполнения заданий.

Все три команды учеников, используя все заработанные в ходе урока карточки с цифрами, составляют из них число и описывают свойства этого числа в терминах темы «Делимость чисел».

## Анализ урока

При построении урока я опираюсь на структуру креативного урока с использованием теории НФТМ-ТРИЗ, автором которой является М. М. Зиновкина.

Согласно выбранной технологии на этом уроке можно выделить следующие блоки: мотивация, содержательный блок, блок психологической разгрузки, головоломка и блок резюме.

В мотивационном блоке я не просто обеспечиваю включение детей в урок, а ещё и вызываю у них на поисковую активность. Как акт удивления здесь был использован видеоролик, а также математический фокус. Удивило детей то, что на уроке математики можно пользоваться калькуляторами (это возможно, потому что мы не формируем и не проверяем вычислительные навыки, и учебная программа по предмету предполагает работу с калькулятором). Завершением этого блока явилась организация совместной деятельности учителя (меня) и детей по формулированию и принятию темы урока, что явилось логическим переходом к следующему блоку.

Содержательный блок подготовлен так, чтобы соединить освоение программного материала с системой заданий, направленных на развитие логического, творческого мышления, а также на развитие способности к очень острому и живому восприятию материала и на развитие речевой и математической грамотности.

Цель урока-обобщения не только в том, чтобы повторить ключевые моменты темы и подготовить детей к уроку контроля знаний. Его назначение в том, чтобы попытаться сформировать у детей полное понимание того, а зачем они изучали эту тему такое количество уроков. Особенностью урока является включение в его содержание заданий открытого типа, которых в школьных учебниках практически нет. Открытые задачи по своей формулировке приближены к тем, которые ставит перед нами жизнь, и абсолютно разбивают стереотипное понимание учебной задачи, когда все данные предлагаются в явном виде; ровно столько, сколько нужно; алгоритм решения изучен предварительно; и мы приходим чаще всего к единственному правильному ответу. Поэтому в содержание урока включены:

- задания, в которых несколько правильных ответов (задания, где заменены цифры звездочками),
- задачи, у которых размыто условие (задача про букеты из роз – задача с лишними данными),

- задание – текст, в котором не определена четкая цель, т. е. нет вопроса. Дети формулируют вопрос сами, выбирают цель, что можно понимать как высшую степень свободы человека.

Содержательный блок разбит на две части, между которыми включены блоки психологической разгрузки и головоломка.

На блоке психологической разгрузки я устроила не только некоторую двигательную активность. Этот блок нужен, чтобы раскрепостить детей как в общении и поведении, так и в проявлении чувств. Реализовала я этот блок через включение соревновательной линии (игра «да»-«нет», упражнение на развитие памяти, соревновательная эстафета).

Головоломка – это работа с предметом, в котором заключена оригинальная идея. Это задание тоже открытого типа, т. к. содержит противоречие. Именно решение противоречий заставляет детей развиваться.

Блок «резюме» – подводим итоги, даём оценку достижения цели.

В урок включены приёмы, которые развивают не только интеллект, а заставляют работать душу ребенка. Это художественные приемы (использование видео), приемы, вызывающие всплеск эмоций. Очень важно сопроводить изучение программного материала созданием положительного эмоционального фона урока.

## Приложения

### Приложение 1

**Дополнительные задачи, которые можно использовать при изучении темы**

1. Может ли быть такое число, которое при делении на 3 дает в остатке 1, при делении на 4 дает в остатке 2, при делении на 5 дает в остатке 3 и при делении на 6 дает в остатке 4?
2. Женщина несла на рынок корзину яиц. Прохожий нечаянно толкнул женщину, корзина упала, яйца разбились. Виновник несчастья, желая возместить потерю, спросил:
   - Сколько всего яиц было в корзине?
   –Точно не помню,— ответила женщина, – но знаю, что когда я вынимала из корзины по 2, по 3, по 4, по 5 по 6 яиц, в корзине оставалось одно яйцо, а когда я вынимала по 7, в корзине ничего не оставалось. Сколько яиц было в корзине?
3. Если от задуманного мной трехзначного числа отнять 7, то оно разделится на 7, а если отнять от него 8, то оно разделится на 8, если отнять от него 9, то оно разделится на 0. Какое число я задумал?
4. В порту пришвартовались 4 теплохода. В полдень 2 января 1953 г. они одновременно покинули порт.
   Известно, что первый теплоход возвращается в этот порт через каждые 4 недели, второй – через каждые 8 недель, третий – через 12 недель, а четвертый – через 16 недель.
   Когда в первый раз теплоходы снова сойдутся все вместе в этом порту?
5. Обращаясь к кассиру магазина, покупатель сказал:
   – Получите, пожалуйста, с меня за 2 пачки соли по 9 копеек; за 2 куска мыла по 27 копеек, за 3 пачки сахару и за 6 пирожных, но стоимость сахара и пирожных я не помню.
   Кассир выдал покупателю чек на 2 руб. 92 коп. Взглянув на чек, покупатель вернул его кассиру и сказал:
   – Вы, несомненно, ошиблись в подсчете общей суммы.
   Кассир проверил и согласился. Пришлось извиниться и выдать покупателю другой чек.
   Каким образом обнаружил покупатель ошибку?
6. Если класс, в котором 30 учащихся, делить на одинаковые группы, то сколько человек может быть в группе?
7. В магазин привезли упаковки с полотенцами – по 5 полотенец в каждой упаковке. Может ли быть всего 48 полотенец? 140 полотенец? 275 полотенец? 987 полотенец? 1295 полотенец? 54 378 полотенец?
8. В каждом стойле 3 лошади. Может ли быть, что во всех стойлах 102 лошади? 124 лошади? 173 лошади? 234 лошади? 4572 лошади? 72 903 лошади?
9. Длина прямоугольника 10 см, ширина – любое натуральное число сантиметров. Определите, верно ли, что значение площади (см2 ) кратно: 5; 2; 10; 8; 100; 4.
10. Ширина прямоугольника 120 м, длина – любое натуральное число метров. Определите, верно ли, что значение площади (м2 ) кратно: 5; 2; 10; 8; 100; 4.
11. На экскурсию по рекам и каналам отправились несколько катеров, где было одинаковое количество мест. В 12 ч отправились 387 человек, а в 13 ч – 430 человек. Все места на катерах были заняты. Сколько катеров отправилось на экскурсию и сколько мест было на каждом катере?

### Приложение 2

**Ещё один фокус с числами (признак делимости на 37)**

Объявите своим друзьям, что если даже ограничиться только шестизначными и девятизначными числами, делящимися на 37, то все равно их чрезвычайно много, и тем не менее вы знаете наизусть все такие числа.

Чтобы усилить эффект, скажите, что вы беретесь моментально приписать к любому заранее назначенному 3-значному числу еще 3 цифры или даже 6 цифр так, что образовавшееся шестизначное или девятизначное число непременно будет делиться на 37.

Положим, вам назначили число 412. Припишите к нему 143 справа или слева — безразлично. Получатся числа 143 412 или 412 143, каждое из которых делится на 37.

Здесь дело, конечно, не в феноменальной памяти. Память вы можете иметь самую обыкновенную, но надо знать довольно простой признак делимости на 37, заключающийся в следующем.

Разбиваем данное число справа налево на грани по 3 цифры (последняя грань слева может быть неполной). Рассматривая каждую грань как самостоятельное число, сложим эти числа. Если полученная сумма делится на 37, то делится и данное число.

Например, число 153 217 делится на 37, так как 153 + 217 = 370 тоже делится на 37.

Доказательство. Пусть N – число, разбивающееся на 2 грани. Представим его в следующей форме: N = 1000а+Ь, где а – число, составляющее левую грань, Ь — трехзначное число, составляющее правую грань данного числа. Если N делится на 37, то 1000a+b = 37к

(к — целое положительное число). Докажем, что в таком случае а+Ь тоже делится на 37.

В самом деле, выразим b из первого равенства и подставим в а+Ь. Тогда

а+Ь = а + (37 к – 1000а) = 37k — 999а = 37(к — 27) делится на 37.

Обратно, пусть а+Ь делится на 37, тогда а + Ь = 37к.

Выразим отсюда b и подставим в равенство N=1000а+Ь. Получаем:

N = 1000а+37к – а = 999а + 37к=37(27+к), то есть N делится на 37.

Для чисел, разбивающихся на большее количество граней, рассуждения аналогичные.

Секрет фокуса, следовательно, в умелом приписывании к назначенному вашими друзьями трехзначному числу одного (для числа шестизначного) или двух (для числа девятизначного) своих трехзначных чисел таких, чтобы сумма всех приписанных вами чисел и числа, назначенного друзьями, делилась на 37.

Как же этого достигнуть?

Очень просто. Приписывайте, например, такие числа, которые в сумме с назначенным составляли бы трехзначное число с одинаковыми цифрами: 111 или 222, или 333 и т. д. до 999, так как всякое трехзначное число, состоящее из одинаковых цифр, непременно делится на 37.

Если назначенное число, скажем, 341, то приписывайте 103 (дополнение до 444) или 214 (дополнение до 555) и т. д. Такое дополнение в уме произвести очень легко. Это и обеспечит вам обещанную быстроту осуществления фокуса.

В случае требования написать девятизначное число, делящееся на 37, приписывайте три цифры произвольно, но с таким расчетом, чтобы последними тремя цифрами можно было образовать число, дополняющее всю сумму до какого-либо трехзначного числа с одинаковыми цифрами.

Так, например, если вам назначено число 412, то можно приписать, скажем, сначала 101, а затем 042 как дополнение контрольной суммы до 555. Получится число 412 101 042.

При этом помните, что для разнообразия вы можете приписывать свои числа по разные стороны от назначенного.

Если назначенное число само состоит из одинаковых цифр, например 333, то приписывать к нему число, состоящее тоже из одинаковых цифр, рискованно: таким приписыванием можно легко разоблачить себя. Чтобы этого набежать, прибавьте в уме 37 или 74 к числу, которое вы хотели бы приписать, или, наоборот, уменьшите его на 37 или 74.

Можно разрешить назначить двузначное или однозначное число. В таком случае сначала припишите к нему любую третью цифру или вторую и третью, а дальше действуйте, как рассказано.

## Приложение 3

### Старое и новое о делимости на 7

Почему-то число 7 очень полюбилось народу и вошло в народное творчество. Его песни и поговорки:

Семь раз примерь, один раз отрежь.
Семь бед, один ответ.
Семь пятниц на неделе.
Один с сошкой, а семеро с ложкой.
У семи нянек дитя без глазу.
Было у тещеньки семеро зятьев…

Число 7 богато не только поговорками, но и разнообразными признаками делимости. Два признака делимости на 7 (в объединении с другими числами) вы уже знаете. Имеется также несколько индивидуальных признаков делимости на 7.

Выбирайте для себя любой, какой покажется наиболее интересным из следующих:

Первый признак делимости на 7. Возьмем для испытания число 5236. Запишем это число следующим образом:

$10^2 \cdot 5+10^2 \cdot 2+10 \cdot 3+6$

(так называемая «систематическая» форма записи числа), и всюду основание 10 заменим основанием 3:

$3^3 \cdot 5+3^2 \cdot 2+3 \cdot 3+6=178.$

Если получившееся число делится (не делится) на 7, то и данное число делится (не делится) на 7. Так как 168 делится на 7, то и 5236 делится на 7.

Доказательство. Пусть

$a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ — цифры последовательных разрядов m-значного числа N, тогда N=

$10^{m-1}a_{m-1}+10^{m-2}a_{m-2}+\ldots+10^2a_2+10a_1+a_0,$

P=

$3^{m-1}a_{m-1}+3^{m-2}a_{m-2}+\ldots+3^2a_2+3a_1+a_0.$

Вычтем из первого выражения второе:

N – P =

$(10^{m-1}-3^{m-1})a_{m-1}+(10^{m-2}-3^{m-2})a_{m-2}+\ldots$
$+(10^2-3^2)a_2+(10-3)a_1.$

На основании формул можно утверждать, что все двучлены в скобках делятся на 10—3 = 7. Следовательно, если при этом вычитаемое P делится (не делится) на 7, то и уменьшаемое N делится (не делится) на 7, а также, если уменьшаемое N делится (не делится) на 7, то и вычитаемое P делится (не делится) на 7.

Видоизменение первого признака делимости на 7. Умножьте первую слева цифру испытуемого числа на 3 и прибавьте следующую цифру; результат умножьте на 3 и прибавьте следующую цифру и т. д. до последней цифры. Для упрощения после каждого действия разрешается из результата вычитать 7 или число, кратное семи.

Если окончательный результат делится (не делится) на 7, то и данное число делится (не делится) на 7.

Пример. Определим делимость числа 48 916 на 7. Умножаем первую слева цифру на 3:
4 X 3=12.

Для дальнейших расчетов число 12 можно заменить числом 5, которое получается от уменьшения 12 на 7. Заменяя число а числом Ь, которое отличается от а на 7 или на число, кратное семи, будем ставить между ними значок =. Запись первого действия примет вид 4 X 3 = 12= 5. Затем прибавляем к 5 вторую цифру 8 и снова делаем соответствующую замену:

$5+8=13\equiv 6.$

Далее:

$6\times 3=18\equiv 4,\quad 4+9=13\equiv 6,\quad 6\times 3=18\equiv 4,$
$4+1=5,\quad 5\times 3=15\equiv 1,\quad 1+6=7.$

Окончательный результат 7. Следовательно, число 48 916 делится на 7.

Преимущество этого правила в том, что оно легко применяется в уме. Разберитесь теперь в его доказательстве.

Доказательство. Пусть

$$N=10^{m-1}a_{m-1}+10^{m-2}a_{m-2}+\ldots+10^2a_2+10a_1+a_0.$$

Действуя в соответствии с правилом, получаем последовательно:

$$3a_{m-1}+a_{m-2},$$
$$3^2a_{m-1}+3a_{m-2}+a_{m-3},$$
$$3^3a_{m-1}+3^2a_{m-2}+3a_{m-3}+a_{m-4},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P=3^{m-1}a_{m-1}+3^{m-2}a_{m-2}+\ldots+3a_1+a_0.$$

Найдем разность чисел N и P:

N–P=

Так как т – число целое, положительное (число цифр), то все биномы в скобках делятся на 10–3 = 7 (гм. формулы (***) и замечание 4 на стр. 254). Следовательно, делимость числа P на 7 связана с делимостью числа N на 7.

Замечание. Любопытно, что окончательный результат, уменьшенный на 7 или на 14, показывает остаток от деления данного числа N на 7. Проверьте!

Второй признак делимости на 7. В этом признаке надо действовать точно так же, как и в предыдущем, с той лишь разницей, что умножение следует начинать не с крайней левой цифры данного числа, а с крайней правой и умножать не на 3, а на 5.

Пример. Делится ли на 7 число 37 184?

4X5=20 = 6, 6 + 8=14 = 0, 0·5 = 0, 0+1=1, 1 X 5 = 5; прибавление цифры 7 можно пропустить; 5X5 = 25==4, 4 + 3 = 7 = 0. Число 37 184 делится на 7,

Доказательство. Пусть

$$10^{m-1}a_{m-1}+10^{m-2}a_{m-2}+\ldots+10^2a_2+10a_1+a_0.$$

Действуя в соответствии с указанным признаком, получаем последовательно:

$$5a_0+a_1,$$
$$5^2a_0+5a_1+a_2,$$
$$5^3a_0+5^2a_1+5a_2+a_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P=5^{m-1}a_0+5^{m-2}a_1+\ldots+5a_{m-2}+a_{m-1}.$$

Умножим обе части последнего равенства на $10^{m-1}$ и из полученного результата вычтем N:

$$10^{m-1}P=50^{m-1}a_0+10\cdot50^{m-2}a_1+\ldots$$
$$+10^{m-2}\cdot50a_{m-2}+10^{m-1}a_{m-1},$$
$$10^{m-1}P-N=a_0(50^{m-1}-1)+10a_1(50^{m-2}-1)+\ldots$$
$$+10^{m-2}a_{m-2}(50-1).$$

Все двучлены в скобках делятся на 50—1 — 49, значит и на 7, но $10^{m-1}$ не делится на 7. Следовательно, делимость на 7 числа N связана с делимостью на 7 числа P.

Третий признак делимости на 7. Этот признак менее легок для осуществления в уме, но он тоже очень интересен.

Удвойте последнюю цифру и вычтите вторую справа, удвойте результат и прибавьте третью справа и т. д., чередуя вычитание и сложение и уменьшая каждый результат, где возможно, на 7 или на число, кратное семи. Если окончательный результат делится (не делится) на 7, то и испытуемое число делится (не делится) на 7.

Проверьте этот признак на числах, а кто пожелает, тот сам выполнит и доказательство. Для числа общего вида оно, правда, несколько затруднительно, поэтому выполните его хотя бы для числа четырехзначного или пятизначного.

Доказательства трех следующих довольно любопытных теорем вы найдете в решениях, но прежде попытайтесь выполнить их самостоятельно.

Теорема 1. Если какое-либо двузначное число делится на 7, то делится на 7 и число обращенное, увеличенное на цифру десятков данного числа.

Например, 14 делится на 7, следовательно, делится на 7 и число 41 + 1.

Теорема 2. Если какое-либо трехзначное число делится на 7, то делится на 7 и число обращенное, уменьшенное на разность цифр единиц и сотен данного числа.

Пример 1. Число 126 делится на 7. Следовательно, делится на 7 и 621 — (6—1), то есть 616.

Пример 2. Число 693 делится на 7. Следовательно, делится на 7 и 396 — (3—6), то есть 399.

# Приложение 4

## Упрощение признака делимости на 8

В школе обычно сообщают такой признак делимости на 8:

Если число, которое составляют последние три цифры данного числа, делится на 8, то и все данное число делится на 8.

Значит, вопрос сводится к делимости на 8 некоторого трехзначного числа.

Но при этом ничего не говорится о том, как в свою очередь быстро узнать, делится ли это трехзначное число на 8. Делимость трехзначного числа на 8 тоже ведь не всегда сразу видна, приходится фактически производить деление.

Признак делимости на 4 проще. Здесь требуется, чтобы делилось на 4 число, состоящее только из двух последних цифр испытуемого числа.

Естественно возникает вопрос: нельзя ли упростить и признак делимости на 8? Можно, если дополнить его специальным признаком делимости трехзначного числа на 8.

На 8 делится всякое трехзначное число, у которого двузначное число, образованное цифрами сотен и десятков, сложенное с половиной числа единиц, делится на 4.

Пример. Данное число 592. Для решения вопроса о делимости его на 8 отделяем единицы и половину их числа прибавляем к числу из следующих двух цифр (десятков и сотен). Получаем 59 + 1 = 60.

Число 60 делится на 4, значит, число 592 делится на 8.

Докажите справедливость высказанного здесь признака делимости на 8 для трехзначного числа и сформулируйте упрощенный признак делимости на 8 для всякого числа.

Замечание 1. Ясно, что число, оканчивающееся нечетной цифрой, не может делиться на 8.

Замечание 2. В огромном большинстве случаев сумма двузначного числа, упомянутого в признаке, с половиной единиц данного числа будет давать двузначное же число.

Сумма будет трехзначной только для чисел в промежутке от 984 до 998, но даже и в этих случаях она не превысит числа 103(99+4=103).

# Приложение 5

## Курьёз делимости

В заключение хочется представить вам четыре изумительных десятизначных числа:

2 438 195 760;  4 753 869 120;

3 785 942 160;  4 876 391 520.

В каждом из них есть все цифры от 0до 9, но каждая цифра только по одному разу и каждое из этих чисел делится на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 и 18.

## Литература


Использованы материалы с сайтов:

1. http://www.trizland.ru/
2. http://www.fipi.ru/
3. http://www.etudes.ru/
4. http://festival.1september.ru/