Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Республики Дагестан

«Колледж экономики и предпринимательства»

Конспект лекций для студентов направления подготовки

по дисциплине:

«Математика»

Заочной формы обучения

Г. Буйнакск

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математика - это наука, изучающая пространственные формы и количественные отношения действительного мира.

Математика играет важную роль в естественнонаучных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. В то же время математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также элементом общей культуры. Поэтому основной задачей курса математики в образовательных заведениях среднего профессионального образования является обеспечение обучающихся математическими знаниями и умениями, необходимыми для изучения специальных дисциплин.

Теоретический материал, который содержится в каждом методическом пособии, призван систематизировать и обобщить имеющиеся у учащихся знания по уже изученной теме. Разобранные и решённые типовые примеры позволяют учащимся вспомнить основные приёмы и методы решения того или иного примера, сформировать алгоритм действий при выполнении заданий.

Предусмотренная индивидуальность (30 вариантов) контрольной работы помогает определить полноту и прочность знаний каждого учащегося, умения применять полученные знания при решении практических задач, а также навыков самостоятельной работы с учебной литературой, и что немаловажно, позволяют учитывать темп работы каждого учащегося.

Каждая контрольная работа состоит из нескольких заданий, (каждое задание может содержать в себе несколько примеров). Задания для выполнения индивидуальных домашних контрольных работ отвечают следующим требованиям: - охватывают основные вопросы материала (по разделам и темам); - степень сложности всех вариантов заданий одинакова;

Новизна предлагаемого учебно-методического пособия обусловлена тем, что имеющаяся в продаже литература, а также информационные ресурсы в сети Internet, не предлагают комплектности и системности таких разработок как по объёму , так и по содержанию.

Общие методические рекомендации при изучении темы

Изучение материала по учебнику. При самостоятельном изучении материала полезно вести конспект. В конспект по мере проработки материала рекомендуется вписывать определения, теоремы, формулы, уравнения и т.п. Поля конспектов могут послужить для выделения тех вопросов, на которые необходимо получить письменную или устную консультации. Ведение конспекта должно быть аккуратным, расположение текста хорошо продуманным. Конспект поможет в подготовке к выполнению контрольной работы.

Решение задач. Чтение учебника должно сопровождаться разбором предлагаемых решений задач. Каждый этап решения задачи должен быть обоснован, исходя из теоретических положений курса. Решение задач и примеров следует излагать подробно, вычисления

располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных. В промежуточные вычисления не следует вводить приближенные значения корней, числа π и других математических констант.

Консультации. При изучении теоретического материала или при решении задач у обучающегося могут возникнуть вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается. В такой ситуации следует обратиться к преподавателю для получения от него письменной или устной консультации, при этом следует указать характер затруднения, привести план решения.

Контрольная работа. В процессе изучения темы обучающийся должен выполнить одну контрольную работу, которая проходит рецензирование. По полученным результатам обучающийся может сделать выводы о степени усвоения им темы, внести коррективы в процесс последующей самостоятельной работы по изучению следующей темы.

К выполнению контрольной работы следует приступать после тщательного разбора имеющихся в учебно-методическом комплексе задач решений с ответами.

Контрольные работы должны выполняться самостоятельно, так как в противном случае рецензирование работы как диалог общения преподавателя – обучающегося с целью оказания последнему методической помощи не достигнет цели.

1. СВОЙСТВА СТЕПЕНИ И РАДИКАЛА

Определение. Степенью числа $\boldsymbol{a}$ с натуральным показателем $\boldsymbol{n}$ называется произведение $\boldsymbol{n}$ множителей, каждый из которых равняется $\boldsymbol{a}$.

Степень числа $\boldsymbol{a}$ с показателем $\boldsymbol{n}$ обозначают $\boldsymbol{a^n}$, например:

$a^1 = a$, $a^2 = a * a$, $a^3 = a * a * a, \dots\dots$.

В общем случае при $n > 1$ имеем

$$a^n = a * a * a * \dots\dots * a \ \ n \text{ раз} \qquad (1)$$

Число $\boldsymbol{a}$ называется **основой степени**, число $\boldsymbol{n}$ – **показателем степени**.

Приведем основные свойства действий со степенями.

1. $a^m * a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n * b^n$
4. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (2)
5. $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
6. $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

Приведенные свойства обобщаются для любых показателей степени

Часто в вычислениях используются степени с рациональным показателем. При этом удобным оказалось такое обозначение:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad (3)$$

Корнем $\boldsymbol{n}$-*ой* степени из числа $\boldsymbol{a}$ называется число $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{n}$ - я степень которого равняется $\boldsymbol{a}$:

$$b = \sqrt[n]{a^m} \qquad b^n = a \qquad (4)$$

Корень также называется **радикалом**.

Корень нечетной степени $\boldsymbol{n}$ всегда существует. Корень четной степени $\boldsymbol{2n}$ из отрицательного числа не существует. Существуют два противоположных числа, которые являются корнями четной степени из положительного числа $a > 0$.

Положительный корень n- ой степени из положительного числа называют **арифметическим корнем**.

Приведем свойства радикала:

1. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
2. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
3. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$
4. $\sqrt[mn]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^k}$
5. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
6. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
7. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ (5)
8. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$
9. $\sqrt{a^2} = |a|$
10. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$
11. $\left(\sqrt[2n+1]{a}\right)^{2n+1} = a$
12. $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$

Если степень корня n=2, то показатель корня обычно не пишется.

Пример 1.1. Найти значение выражения $\sqrt{18 * 50}$.

Подкоренное выражение разложим на простые множители:

$$\sqrt{18 * 50} = \sqrt{3^2 * 5^2 * 2^2} = 3 * 5 * 2 = 30 .$$

Пример 1.2. Упростить выражение $\sqrt{36x^{10}y^6}$ при $x > 0$, $y < 0$

Имеем:

$$\sqrt{36x^{10}y^6} = \sqrt{6^2 * (x^5)^2 * (y^3)^2} = 6|x^5| * |y^3| = -6x^5y^3 .$$

Пример 1.3. Извлечь корень

$$\sqrt{\frac{16x^2}{y^6}} \quad \text{при } x < 0\,, \qquad y > 0\,.$$

Имеем:

$$\sqrt{\frac{16x^2}{y^6}} = \frac{4|x|}{y^3} = \frac{-4x}{y^3}\,.$$

Пример 1.4. Упростить выражение $\sqrt{a^2 - 2a + 1} - \sqrt{a^2 + 2a + 1}$ при $a \le -1$.

Поскольку при

$$a \le -1 \ \sqrt{a^2 - 2a + 1} = \sqrt{(a-1)^2} = |a - 1| = -(a-1) = 1 - a\,, \sqrt{a^2 + 2a + 1} = \sqrt{(a+1)^2} = |a + 1| = -a - 1\,, \text{то} \sqrt{a^2 - 2a + 1} - \sqrt{a^2 + 2a + 1} = 2\,.$$

2. Действия с радикалами

1) Преобразование корня по формуле (7) называется внесением множителя под знак радикала.

Пример 2.1. Внести множитель под знак корня $5\sqrt{2}$ **.**

Исходя из формулы (7) получим $5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 * 2} = \sqrt{50}$.

Пример 2.2. Вынести множитель из-под знака корня в выражении

$$\sqrt{x^5} \text{ при } x \ge 0\,.$$

Получим: $\sqrt{x^5} = \sqrt{(x^2)^2 x} = x^2\sqrt{x}$.

Пример 2.3. Вынести множитель из-под знака корня $\sqrt{2x^2}$ при $x \le 0$.

Имеем: $\sqrt{2x^2} = \sqrt{(-x)^2 * 2} = -x\sqrt{2}$.

Пример 2.4. Вынести множитель из-под знака корня:

$\sqrt[3]{-a^6b^9c^2} = -a^2 * b^3\sqrt[3]{c^2}$.

$\sqrt[4]{a^{12}b^{16}c^3} = a^3 * b^4\sqrt[4]{c^3}\,, a > 0$.

$\sqrt[5]{a^9b^{11}} = ab^2\sqrt[5]{a^4b}$.

Пример 2.5. Упростить:

$$\sqrt{8}-\sqrt{18}+\sqrt{32}=\sqrt{4\cdot 2}-\sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{16\cdot 2}=2\sqrt{2}-3\sqrt{2}+4\sqrt{2}=3\sqrt{2}.$$

Пример 2.6. Сложить радикалы:

$$\sqrt{18}-\sqrt{12}+\sqrt{32}+\sqrt{27}=\sqrt{9\cdot 2}-\sqrt{4\cdot 3}+\sqrt{16\cdot 2}+\sqrt{9\cdot 3}=$$
$$=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+4\sqrt{2}-3\sqrt{3}=7\sqrt{2}-5\sqrt{3}.$$

Пример 2.7. Выполнить действие:

$$\frac{1}{2}\sqrt{8}-\frac{1}{2}\sqrt{27}+\frac{1}{2}\sqrt{50}-\frac{3}{4}\sqrt{12}=\frac{1}{2}\sqrt{9\cdot 2}-\frac{1}{2}\sqrt{9\cdot 3}+\frac{1}{2}\sqrt{25\cdot 2}-$$
$$-\frac{3}{4}\sqrt{4\cdot 3}=\frac{3}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{5}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}=4\sqrt{2}-3\sqrt{3}.$$

Приведем примеры умножения радикалов.

Пример 2.8.

$$2\sqrt{3}\,5\sqrt{2}=10\sqrt{3}\sqrt{2}=10\sqrt{6},$$

$$\sqrt{2}\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)=\sqrt{2}\sqrt{8}+\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{16}+\sqrt{6}=4+\sqrt{6}$$

Аналогично освобождаются от кубических иррациональностей в знаменателе:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)}=\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-1}=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1;$$

$$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{4^2}+\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{4^2}+\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2}\right)}=2\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{18}.$$

Рассмотрим **более сложные примеры** рационализации знаменателей:

$$\frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{6\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}=\frac{6\sqrt{2}+6\sqrt{3}-6\sqrt{5}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-5}=$$
$$=\frac{6\sqrt{2}+6\sqrt{3}-6\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\frac{3}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{30};$$

$$\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3-\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(3-\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(3-\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$
$$=\frac{9+6\sqrt{3}+3-2}{9-6\sqrt{2}+2-3}=\frac{5+3\sqrt{3}}{4-3\sqrt{2}}=\frac{\left(5+3\sqrt{3}\right)\left(4+3\sqrt{2}\right)}{\left(4-3\sqrt{2}\right)\left(4+3\sqrt{2}\right)}=$$
$$=\frac{20+15\sqrt{2}+13\sqrt{3}+9\sqrt{6}}{-2}.$$

Чтобы перемножить радикалы с разными степенями, их сначала превращают в радикалы с одинаковыми степенями.

Пример 2.10. Перемножим радикалы:

$$\left(3\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}+3\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=$$
$$=6\sqrt{4}+3\sqrt{6}+2\sqrt{6}+3=15+5\sqrt{6}.$$

Во время умножения радикалов можно использовать формулы сокращенного умножения. Например:

$$\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=12+4\sqrt{6}+2=14+\sqrt{6};$$
$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^3=\left(\sqrt{3}\right)^3+3\left(\sqrt{3}\right)^2\sqrt{2}+3\sqrt{3}\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^3=$$
$$=3\sqrt{3}+9\sqrt{2}+6\sqrt{3}+2\sqrt{2}=9\sqrt{3}+11\sqrt{2};$$
$$\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=8-3=5.$$

Если радикалы находятся в знаменателе дроби, то, используя свойства радикалов, можно избавиться от иррациональности.

Пример 2.11. Рационализируем знаменатели дробей

$$\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}}=\sqrt{\frac{33}{11}}=\sqrt{3};\quad \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{16}{8}}=\sqrt{2};$$
$$\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$
$$\sqrt{\frac{7}{10}}=\sqrt{\frac{70}{100}}=\frac{\sqrt{70}}{10};\quad \sqrt{\frac{7}{4\cdot 3}}=\sqrt{\frac{7\cdot 3}{4\cdot 9}}=\frac{\sqrt{21}}{6};$$
$$\sqrt[3]{\frac{1}{10}}=\sqrt[3]{\frac{100}{1000}}=\frac{\sqrt[3]{100}}{10};\quad \sqrt[3]{\frac{7}{12}}=\sqrt[3]{\frac{7}{3\cdot 4}}=\sqrt[3]{\frac{7\cdot 9\cdot 2}{27\cdot 8}}=\frac{\sqrt[3]{126}}{6}.$$

Выражения $a\sqrt{b}+c\sqrt{d},\ a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$ называются **сопряженными**. Произведение сопряженных выражений не содержит радикалов: $\left(a\sqrt{b}+c\sqrt{d}\right)\left(a\sqrt{b}-c\sqrt{d}\right)=a^2b-c^2d.$

Это свойство используется для рационализации знаменателей.

Пример 2.12. Избавиться от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2};$$

$$\frac{\sqrt{3}+5}{5-\sqrt{3}}=\frac{\left(5+\sqrt{3}\right)^2}{\left(5-\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{3}\right)}=\frac{25+10\sqrt{3}+3}{22}=\frac{14+5\sqrt{3}}{11};$$

$$\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{5}\left(3\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)}{\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)}=\frac{6\sqrt{15}+4\sqrt{10}}{19}.$$

$$\sqrt{2}\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{8}\cdot\sqrt[6]{9}=\sqrt[6]{72};$$

$$\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[15]{2^3}\cdot\sqrt[15]{2^5}=\sqrt[15]{8\cdot 32}=\sqrt[15]{256};$$

$$\sqrt[4]{2}\sqrt[3]{3}=\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{9}=\sqrt[4]{18};$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\frac{3}{4}}=\sqrt[6]{\frac{27}{8}}\sqrt[6]{\frac{16}{81}}=\sqrt[6]{\frac{2}{3}}=\sqrt[6]{\frac{2\cdot 3^5}{3^6}}=\frac{1}{3}\sqrt[6]{486}.$$

Избавимся от иррациональности в знаменателе дроби:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt[3]{3}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{3}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt[3]{3}}{3-\sqrt[3]{9}}=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{3}\right)\left(9+3\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{9^2}\right)}{\left(3-\sqrt[3]{9}\right)\left(3^2+3\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{9^2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{6}\left(3+3\sqrt{3}+3\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}+3\sqrt[6]{3}+\sqrt[6]{243}\right).$$

3. Вычисление иррациональных выражений

С помощью свойств корней можно упрощать и вычислять иррациональные выражения.

Пример 3.1. Вычислить

$$\frac{3\sqrt[3]{4\sqrt[3]{192}}+8\sqrt[3]{18\sqrt[3]{81}}}{\sqrt[3]{12\sqrt[3]{24}+6\sqrt[3]{375}}}.$$

Выполним последовательно действия:

1. $\sqrt[3]{192}=\sqrt[3]{2^6\cdot 3}=2^2\sqrt[3]{3}$.
2. $\sqrt[3]{4\cdot 2^2\sqrt[3]{3}}=2\sqrt[3]{2}\sqrt[9]{3}$.
3. $\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{3^4}=3\sqrt[3]{3}$.
4. $\sqrt[3]{18\cdot 3\sqrt[3]{3}}=3\sqrt[3]{2}\sqrt[9]{3}$.
5. $32\sqrt[3]{2}\sqrt[9]{3}+83\sqrt[3]{2}\sqrt[9]{3}=30\sqrt[3]{2}\sqrt[9]{3}$.
6. $\sqrt[3]{24}=2\sqrt[3]{3}$.
7. $\sqrt[3]{375}=5\sqrt[3]{3}$.
8. $12\cdot 2\sqrt[3]{3}+65\sqrt[3]{3}=54\sqrt[3]{3}$.
9. $\sqrt[2]{54\sqrt[3]{3}}=3\sqrt[3]{2}\sqrt[9]{3}$.
10. $\dfrac{30\sqrt[3]{2}\sqrt[9]{3}}{3\sqrt[3]{2}\sqrt[9]{3}}=10$.

Пример 3.2. Вычислить:

$$5\sqrt[3]{6\sqrt{32}}-3\sqrt[3]{9\sqrt{162}}-11\sqrt[6]{18}+2\sqrt[3]{75\sqrt{50}}$$

Выполним действия.

$$\sqrt[3]{6\sqrt{32}}=\sqrt[3]{3\cdot 2\cdot 2^{\frac{5}{2}}}=\sqrt[3]{3}\cdot 2\sqrt[6]{2},$$

$$\sqrt[3]{9\sqrt{162}}=\sqrt[3]{3^2\cdot\sqrt{2\cdot 3^4}}=\sqrt[3]{3^4\sqrt{2}}=3\sqrt[3]{3}\sqrt[6]{2},$$

$$\sqrt[6]{18}=\sqrt[6]{2\cdot 3^2}=\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[3]{3},$$

$$\sqrt[3]{75\sqrt{50}}=\sqrt[3]{5^2\cdot 3\sqrt{5^2\cdot 2}}=5\sqrt[3]{3}\sqrt[6]{2},$$

$$5\cdot 2\sqrt[3]{3}\sqrt[6]{2}-9\sqrt[3]{3}\sqrt[6]{2}-11\sqrt[3]{3}\sqrt[6]{2}+2\cdot 5\sqrt[3]{3}\sqrt[6]{2}=0.$$

Часто используется формула двойного радикала:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\quad\left(a^2\geq b\right)\ (8)$$

Пример 3.3. Исходя из формулы (8) находим:

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{4+\sqrt{12}}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-12}}{2}}+\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-12}}{2}}=\sqrt{3}+1.$$

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{4-\sqrt{12}}=\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-12}}{2}}-\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-12}}{2}}=\sqrt{3}-1.$$

Пример 3.4. Вычислить

$$\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$$

Исходя из формулы (8) находим:

$$\sqrt{29-12\sqrt{5}}=\sqrt{29-\sqrt{720}}=\sqrt{\frac{29+\sqrt{841-720}}{2}}-\sqrt{\frac{29-\sqrt{841-720}}{2}}=\sqrt{20}-3;$$

$$\sqrt{3-\left(\sqrt{20}-3\right)}=\sqrt{6-\sqrt{20}}=\sqrt{\frac{6+\sqrt{36-20}}{2}}-\sqrt{\frac{6-\sqrt{36-20}}{2}}=\sqrt{5}-1.$$

Окончательно получаем:

$$\sqrt{\sqrt{5}-\left(\sqrt{5}-1\right)}=\sqrt{1}=1.$$

Аналогично вычисляются кубические корни. Имеем:

$$\sqrt[3]{a+b\sqrt{c}}=x+y\sqrt{c}.$$

Возводим обе части равенства в куб:

$$a+b\sqrt{c}=x^3+3x^2y\sqrt{c}+3xy^2c+y^3c\sqrt{c}.$$

Сравнивая выражения при $\sqrt{c}$, получаем однородную систему уравнений:

$$x^3+3cxy^2=a,\quad 3x^2y+cy^3=b.$$

Поделив уравнение почленно, приходим к уравнению для $z=y/x$:

$$\frac{1+3cz^2}{3z+cz^3}=\frac{a}{b}.$$

Пример 3.5. Вычислить значение радикала $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}=x+y\sqrt{3}$.

После возведения в куб уравнения приходим к системе уравнений:

$$26=x^3+3xy^2 3,$$
$$-15=3x^2y+y^3\cdot 3$$

Поделив почленно первое уравнение на второе, получим уравнение для $z=y/x$:

$$-\frac{26}{5}=\frac{1+9z^2}{z+z^3},\quad 26z^3+45z^2+26z+5=0.$$

По схеме Горнера находим корень $z=-1/2$

Из системы уравнений и уравнения $y/xz=-1/2$ находим $\boldsymbol{x}$**=2,**$\boldsymbol{y}$**= -1**. Итак,

$$\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}.$$

Пример 3.6. Вычислить $a=\sqrt{3}-\sqrt{3+\sqrt{3}+\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}$.

Возьмем $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}=x+y\sqrt{3}$.

Возведя обе части уравнения в куб, получаем $10+6\sqrt{3}=x^3+3x^2y\sqrt{3}+3xy^2 3+\ +y^3 3\sqrt{3}$, откуда вытекает система уравнений

$$\begin{cases}x^3+9xy^2=10\\3x^2y+3y^3=6.\end{cases}$$

Система уравнений имеет очевидное решение $\boldsymbol{x}$**=1**,$\boldsymbol{y}$**=1**.

Поэтому $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$.

Вычисляем радикал

$$\sqrt{3+\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}=\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{4+\sqrt{12}}=$$
$$=\sqrt{\frac{4+\sqrt{4^2-12}}{2}}+\sqrt{\frac{4-\sqrt{4^2-12}}{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{1}.$$

Окончательно имеем $\boldsymbol{a}$**=-1**.

Пример 3.7. Вычислить

$$a=\left(\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right)\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}.$$

Поскольку $1-\sqrt{2}<0$, то $\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}=-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$.

Дальше имеем:

$$\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}=\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}\sqrt[6]{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}=1$$

$$\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}=\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}\right)^2-1}=1.$$

Итак, a=**-2**.

Пример 3.8. Вычислить $x=\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$.

Возведем уравнение в куб, воспользовавшись равенством

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b).$$

Получили для ***x*** кубическое уравнение

$$x^3=9+\sqrt{80}+9-\sqrt{80}+3\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\cdot x,$$

Или $x^3-3x-18=0$, имеет корни

$$x_1=3,\quad x_{2,3}=\frac{1}{2}\left(-3\pm i\sqrt{15}\right),\quad i=\sqrt{-1}.$$

Во множестве действительных чисел имеем корень $x=3$.

4. Оценки для радикалов

Если

$$\frac{m}{n}>0,\quad a\ge b\ge 0,\ \text{то}\ a^{\frac{m}{n}}\ge b^{\frac{m}{n}}\ge 0,\ \text{или}\ \sqrt[n]{a^m}\ge\sqrt[n]{b^m}.\ (1)$$

Это неравенство можно использовать для доведения неровностей, которые содержат радикалы.

Пример 4.1. Доказать, что $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$.

Возведя неравенство в шестую степень, получим очевидное неравенство

$$\left(\sqrt[3]{3}\right)^6>\left(\sqrt{2}\right)^6,\quad 3^2>2^3,\quad 9>8$$

Можно приводить радикалы к одной и то й же самой степени:

$$\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{9},\quad \sqrt{2}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}.$$

Поскольку $\sqrt[6]{9}>\sqrt[6]{8}$, то $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$.

Пример 4.2. Оценим $\sqrt{90}$.

Поскольку $81<90<100$, то $\sqrt{81}<\sqrt{90}<\sqrt{100}$. Итак, $9<\sqrt{90}<10$.

2. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ, ЕЁ СВОЙСТВА И ГРАФИК

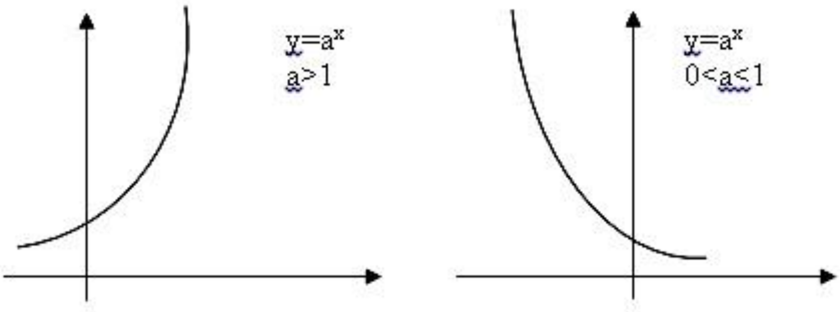
2.1. Определения и понятия

Определение: Функцию $y=a^x$, где $a>0$, $a\neq 1$, называют показательной функцией.

Свойство 1: Область определения показательной функции $y=a^x$ – множество R всех действительных чисел.

Свойство 2: Множество значений показательной функции $y=a^x$ – множество положительных чисел.

Свойство 3: Показательная функция $y=a^x$ является возрастающей, если $a>1$, и убывающей, если $0<a<1$.



Решение показательных уравнений

Определение: Показательным уравнением называется уравнение, в котором неизвестное содержится в показателе степени.

Теорема: *Если* $a^x=a^в$, *где* $a>0$, $a\neq 1$, *то* $x = в$

Решение показательных неравенств

Определение: Показательным неравенством называется неравенство, в котором неизвестное содержится в показателе степени.

Теорема: *Если* $a^x>a^в$, *где,* $a\neq 1$, *то*

1) *Если* $a>0$, *то* $x > в$, *то есть знак сохраняется*

2) *Если* $a<0$, *то* $x < в$, *то есть знак меняется*

2.2. Примеры и упражнения

Пример 1. Упростить выражение:

1) $\frac{a^{3}\cdot в^{7}\cdot a^{4}\cdot в^{5}}{a^{6}\cdot в^{10}\cdot в^{2}}=\frac{a^{3+4}\cdot в^{7+5}}{a^{6}\cdot в^{10+2}}=\frac{a^{7}\cdot в^{12}}{a^{6}\cdot в_{12}}=a^{7-6}\cdot в^{12-12}=a^{1}\cdot в^{0}=a\cdot 1=a$

2) $\frac{\sqrt[3]{a^{7}\cdot в^{4}\cdot c^{9}}\cdot\sqrt[3]{a^{8}\cdot в^{2}\cdot c^{-9}}}{\sqrt[4]{a^{20}\cdot в^{4}}}=\frac{a^{\frac{7}{3}}\cdot в^{\frac{4}{3}}\cdot c^{\frac{9}{3}}\cdot a^{\frac{8}{3}}\cdot в^{\frac{2}{3}}\cdot c^{-\frac{9}{3}}}{a^{\frac{20}{4}}\cdot в^{\frac{4}{4}}}=\frac{a^{\frac{7}{3}+\frac{8}{3}}\cdot в^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}}\cdot c^{\frac{9}{3}+(-\frac{9}{3})}}{a^{5}\cdot a^{1}}=\frac{a^{\frac{15}{3}}\cdot в^{\frac{6}{3}}\cdot c^{0}}{a^{5}\cdot в^{1}}=$

$=\frac{a^{5}\cdot в^{2}\cdot 1}{a^{5}\cdot в^{1}}=a^{5=5}\cdot в^{2-1}=a^{0}\cdot в^{1}=1\cdot в=в$

Пример 2. Решить показательное уравнение: $4^{x-8}=64$

Решение:

$4^{x-8}=4^{3}$

$x-8=3$

$x=3+8$

$x=11$ **Ответ:** $x=11$

Пример 3. Решить показательное уравнение: $3^{x+2}+3^{x}=90$

Решение:

$3^{x}\cdot 3^{2}+3^{x}=90$. Пусть $3^{x}=t$, $t>0$, тогда $t\cdot 3^{2}+t=90$; $9t+t=90$; $10t=90$; $t=\frac{90}{10}$; $t=\frac{90}{10}$ $t=9$

$3^{x}=9$; $3^{x}=3^{2}$; $x=2$ **Ответ:** $x=2$

Пример 4. Решить показательное уравнение: $2^{x-1}+2^{x}=6$

Решение:

$\frac{2^{x}}{2^{1}}+2^{x}=6$, пусть $2^{x}=t$, $t>0$; $\frac{t}{2^{1}}+t=6$; $\frac{t}{2}+t=6$; $\frac{t^{(1}}{2}+\frac{t^{(2}}{1}=\frac{6^{(2}}{1}$; $1t+2t=12$; $3t=12$; $t=\frac{12}{3}$;

$2^{x}=4$; $2^{x}=2^{2}$; $x=2$ **Ответ: x=2.**

Пример 5. Решить показательное уравнение: $9^{x}+8\cdot 3^{x}-9=0$

Решение:

$(3^{2})^{x}+8\cdot 3^{x}-9=0$

$(3^{x})^{2}+8\cdot 3^{x}-9=0$

Пусть $3^{x}=t$, $t>0$

$t^{2}+8\cdot t-9=0$

$a=1$, $b=8$, $c=-9$

$t_{1,2}= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4 \cdot a \cdot c}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2-4 \cdot 1 \cdot (-9)}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 \pm \sqrt{64-(-36)}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-8 \pm 10}{2}$

$t_1 = \frac{-8+10}{2} = \frac{2}{2} = 1 t_2 = \frac{-8-10}{2} = \frac{-18}{2} = -9$

$t_2 = -9$, не уд., так как $t>0$

$t_1 = 1, \qquad 3^x = 1, \qquad 3^x = 3^0 \;\; x=0.$

Ответ: $x=0$.

Пример 6. Решить показательное неравенство: $2^{3x-5}>16$

Решение:

$2^{3x-5}>2^4$, *т.к.* $2>1$, то знак сохраняем

$$3x-5>4$$

$$3x>4+5$$

$$3x>9$$

$$x>\frac{9}{3}$$

$$x>3,$$

Ответ: $x>3$

Пример 8: Решить показательное неравенство: $3^{x+2}+3^{x-1}<28$

Решение:

$3^x \cdot 3^2 + \frac{3^x}{3^1} < 28$. *Пусть* $3^x=t, t>0$ $\; t \cdot 3^2 + \frac{t}{3^1} < 289t + \frac{t}{3} < 28 \frac{9t^{(3}}{1} + \frac{t^{(1}}{3} < \frac{28^{(3}}{1} 27t+t<84$

$28t<84 \qquad t<\frac{84}{28} \;\; t<33^x<3 \; 3^x<3^1$, *т.к.* $3>1$,*то знак сохраняем* $x<1$

Ответ: x<1

Примеры для самостоятельного решения

1. $0{,}4^{x-2} \leq \frac{125}{8}$
2. $2{,}5^{\frac{x+1}{x-2}} \geq 1$
3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} > \frac{1}{32}$
4. $7^x < 12{,}7$
5. $4^{3x+2} = 0{,}5$
6. $25^x \leq (\frac{1}{5})^{2x-3}$.

2.3. Варианты для самостоятельной работы

Задание 1. Упростить выражения

Вариант 1. $\dfrac{\sqrt[8]{a^{11}\cdot в^{19}\cdot c^{2}}\cdot\sqrt[4]{a^{13}\cdot в^{17}\cdot c^{14}}}{a^{2}\cdot в^{3}\cdot c}$

Вариант 2. $\dfrac{a^{3}\cdot(a^{-3})^{-\frac{2}{3}}}{a^{4}}$

Вариант 3. $\dfrac{a^{9}\cdot в^{3}\cdot a^{6}\cdot в^{3}}{a^{10}\cdot в^{3}\cdot a^{4}\cdot в^{2}}$

Вариант 4. $\dfrac{(a^{6})^{-\frac{5}{6}}}{a^{5}}$

Вариант 5. $\dfrac{a^{4}(a^{-5})^{-\frac{3}{5}}}{a^{2}}$

Вариант 6. $\dfrac{\sqrt[5]{a^{7}\cdot в^{13}\cdot c^{4}}\cdot\sqrt[5]{a^{3}\cdot в^{2}\cdot c^{6}}}{\sqrt[7]{a^{3}\cdot в^{10}\cdot c^{11}}\cdot\sqrt[7]{a^{4}\cdot в^{4}\cdot c^{3}}}$

Вариант 7. $\dfrac{в^{6}(в^{-14})^{-\frac{1}{7}}}{в^{7}}$

Вариант 8. $\dfrac{a^{3}\cdot(a^{-9})^{-\frac{4}{9}}}{a^{5}}$

Вариант 9. $\dfrac{a^{4}в^{6}c^{3}a^{5}в^{9}c^{2}}{aв}$

Вариант 10. $\dfrac{в^{3}(в^{-9})^{-\frac{4}{9}}}{в^{5}}$

Вариант 11. $\dfrac{a^{3}\cdot в^{7}\cdot a^{4}\cdot в^{5}}{a^{6}\cdot в^{10}\cdot в^{2}}$

Вариант 12. $(\sqrt[7]{a^{2}})^{14}$

Вариант 13. $\dfrac{\sqrt[3]{a^{7}\cdot в^{4}\cdot c^{9}}\cdot\sqrt[3]{a^{8}\cdot в^{2}\cdot c^{-9}}}{\sqrt[4]{a^{20}\cdot в^{4}}}$

Вариант 14. $\dfrac{(a^{\frac{1}{2}})^{4}\cdot(a^{-\frac{2}{3}})^{-6}}{a^{7}}$

Вариант 15. $\dfrac{a^{7}в^{7}c^{8}a^{3}в^{5}c^{4}}{a^{2}в^{3}c}$

Вариант 16. $\dfrac{\sqrt[3]{a^7 \cdot в^4 \cdot c^9} \cdot \sqrt[3]{a^8 \cdot в^2 \cdot c^{-9}}}{\sqrt[4]{a^{20} \cdot в^4}}$

Вариант 17. $\dfrac{\sqrt[3]{a^{10} \cdot в^{20} \cdot c^2} \cdot \sqrt[4]{a^8 \cdot в^4 \cdot c}}{a^2 \cdot в^3 \cdot c}$

Вариант 18. $\dfrac{a^6 \cdot (a^{-14})^{-\frac{1}{7}}}{a^7}$

Вариант 19. $\dfrac{a^5 \cdot в^6 \cdot a^4 \cdot в^2}{a^2 \cdot в}$

Вариант 20. $\dfrac{a^4 \cdot (a^{-5})^{\frac{4}{5}}}{a^2}$

Вариант 21. $\dfrac{\sqrt[3]{a^{10} \cdot в^5 \cdot c^2} \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot в^4 \cdot c}}{\sqrt[4]{a^{20} \cdot в^4}}$

Вариант 22. $\dfrac{\sqrt[3]{a^4 \cdot в^6 \cdot c^5} \cdot \sqrt[7]{a^5 \cdot в^6 c}}{a^2 вc}$

Вариант 23. $\dfrac{\sqrt[4]{a^9 \cdot в^3 \cdot c^2} \cdot \sqrt[7]{a^7 \cdot в^{17} c^2}}{a^2 в^3 c}$

Вариант 24. $\dfrac{\sqrt[5]{a^7 \cdot в \cdot c^8} \cdot \sqrt[5]{a^3 \cdot в^4 c^7}}{aвc^2}$

Вариант 25. $\dfrac{\sqrt[7]{a^{14} \cdot в^9 \cdot c^7} \cdot \sqrt[7]{a^7 \cdot в^5}}{a^2 вc}$

Вариант 26. $\dfrac{\sqrt[3]{a^5 \cdot в^4 \cdot c^7} \cdot \sqrt[3]{a \cdot в^8 c^2}}{a^2 вc}$

Вариант 27. $\dfrac{\sqrt[5]{a^9 \cdot в^4 \cdot c^2} \cdot \sqrt[5]{a^6 \cdot в^{11} c^8}}{a^2 вc}$

Вариант 28. $\dfrac{4^{\sqrt{3}} \cdot 4^{2-\sqrt{3}}}{(2^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}}}$

Вариант 29. $\dfrac{\sqrt[4]{a^7 \cdot в^9 \cdot c^2} \cdot \sqrt[4]{a^5 \cdot в^7 \cdot c^6}}{a^2 \cdot в^3 \cdot c}$

Вариант 30. $\dfrac{\sqrt[4]{a^7}}{\sqrt[4]{a^3}}$

Задание 2. Решить показательное уравнение

Вариант 1.

$a)\ 3^{x+1} = 1$; б) $3^x - 2 * 3^{x-2} = 7$.

Вариант 2.

$a)\ 4^{x+5} = 16$; б) $3^{x-1} + 3^x = 36$.

Вариант 3.

$a)\ 4^x = 1$; б) $3^{x+2} + 3^x = 810$.

Вариант 4.

$a)\ 3^{2x} = 3$; б) $4 * 3^{x+2} + 5 * 3^{x+1} - 6 * 3^x = 5$.

Вариант 5.

$a)\ 3^x = 27$; б) $4^x - 3 * 4^{x-2} = 13$.

Вариант 6.

$a)\ 3^x * 3^2 = 9$; б) $4 * 3^{x-1} + 3^{x+1} = 117$.

Вариант 7.

$a)\ 17^{x+1} = 1$; б) $2^{x+1} + 2^{x-1} = 5$.

Вариант 8.

$a)\ 13^{x+1} = 13$; б) $2^{x+1} + 5 * 2^{x-2} = 104$.

Вариант 9.

$a)\ 4^x = 256$; б) $7^x - 7^{x-1} = 6$.

Вариант 10.

$a)\ 3^{x+4} = 81$; б) $10 * 5^{x-1} + 5^{x+1} = 7$.

Вариант 11.

$a)\ 17^{3x-5} = 17$; б) $8 * 2^{x-1} - 2^x = 48$.

Вариант 12.

$a)\ 3^{2+x} = 37$; б) $3^{x+1} - 4 * 3^{x-2} = 69$.

Вариант13.

$a)\ 16^{4x} = 16$; б) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 31$.

Вариант 14.

$a)\ 4^{x-1} = 16$; б) $3^x - 3^{x-2} = 24$.

Вариант 15.

$a)\ 3^{2x-1} = 1$;   б) $4^{x+1} + 4^{x-2} = 260$.

Вариант 16.

$a)\ 5^{3x} = 125$;   б) $3^{x+2} - 5 * 3^{x} = 36$.

Вариант 17.

$a)\ 17^{x-1} = 17$;   б) $7^{x+2} - 14 * 7^{x} = 5$.

Вариант18.

$a)\ 4^{3x-4} = 16$;   б) $5^{x+1} + 5^{x-2} = 630$.

Вариант 19.

$a)\ 4^{32x-4} = 64$;   б) $2^{x+4} - 2^{x} = 120$.

Вариант 20.

$a)\ 9^{3x-4} = 81$;   б) $9^{x} - 4 * 3^{x} - 45 = 0$.

Вариант 21.

$a)\ 4^{3x+4} = 64$;   б) $25^{x} - 6 * 5^{x} + 5 = 0$.

Вариант 22.

$a)\ 5^{3x-4} = 5$;   б) $4^{x} + 2^{x+3} - 20 = 0$.

Вариант 23.

$a)\ 14^{3x-4} = 1$;   б) $4^{x} - 14 * 2^{x} - 32 = 0$.

Вариант 24.

$a)\ 4^{3x-4} = 64$;   б) $5^{x+1} + 5^{x-2} = 630$.

Вариант 25.

$a)\ 15^{x+2} = 225$;   б) $2 * 5^{x+2} - 10 * 5^{x} = 8$.

Вариант 26.

$a)\ 2^{x+4} = 8$;   б) $3^{x-3} + 5^{x-1} = 10$.

Вариант 27.

$a)\ 5^{2x} = 25$;   б) $2^{x-2} + 2^{x-1} + 2^{x} = 14$.

Вариант 28.

$a)\ 4^{3x} = 1$;   б) $2 * 4^{x} - 5 * 2^{x} + 2 = 0$.

Вариант 29.

$a)\ 5^{3x} = 125$;   б) $3^{x+2} - 5 * 3^{x} = 36$.

Вариант 30.

$a)\ 3^{3x-4} = 81$;   б) $9^{x} - 4 * 3^{x} - 45 = 0$.

Задание 3. Решить показательное неравенство

Вариант 1. $8^{-2x}< 64$

Вариант 2. $3^{1-x}<\frac{1}{81}$

Вариант 3. $2^{2x+1}>8$

Вариант 4. $(\frac{1}{4})^{x+1}<\frac{1}{4}$

Вариант 5. $4^{2x+1}>4$

Вариант 6. $2^{x+4}-2^{x}>120$

Вариант 7. $(\frac{1}{2})^{4+6x}<\frac{1}{2}^{3x-3}$

Вариант 8. $8\cdot 2^{x-1}-2^{x}>48$

Вариант 9. $10^{2+x}< 100000$

Вариант 10. $2^{x+1}+2^{x-1}<5$

Вариант 11. $4\cdot 3^{x-1}+3^{x+1}>117$

Вариант 12. $5^{x+4}< 625$

Вариант 13. $3^{x+2}+3^{x}810$

Вариант14. $9\cdot 3^{x-1}+3^{x}<36$

Вариант 15. $10^{x+1}< 1000000$

Вариант 16. $(\frac{1}{3})^{6-3x}>\frac{1}{3}^{2x-1}$

Вариант 17. $(6)^{x-1}>36^{x-1}$

Вариант 18. $7^{x-3}< 49^{x}$

Вариант 19. $10^{3x-1}>1000$

Вариант 20. $2^{x-1}< 16^{x+2}$

Вариант 21. $2\cdot 5^{x+2}-10\cdot 5^{x}< 8$

Вариант 22. $5^{2-x}< 25$

Вариант 23. $5^{1-3x}<\frac{1}{25}$

Вариант 24. $2^{1-x}>32^{x}$

Вариант 25. $(\frac{1}{5})^{4-2x}<\frac{1}{5}^{x+1}$

Вариант 26. $7^{x+1}>49^{x}$

Вариант 27. $3^{x}-2\cdot 3^{x-2}>7$

Вариант 28. $4^{x}-3\cdot 4^{x-2}<13$

Вариант 29. $3^{2-x}< 27$

Вариант 30. $10^{2x+1}<\frac{1}{10000}$

3. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

3.1. Определения и понятия

Равенство $2^3 = 8$ можно записать и по-другому: $\log_2 8 = 3$.Читается так: логарифм от 8 по основанию 2 равен 3

Везде далее мы полагаем по умолчанию, что числа a и b положительны и, кроме того, a не равно 1. Причины таких ограничений станут ясны впоследствии.

Дадим определение логарифма. Запись $\log_a b = c$ (читается: логарифм от b по основанию a равен c) означает: чтобы получить число b, нужно число a возвести в степень c. Таким образом,

$$\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b.$$

Иными словами, $\log_a b$ - это степень, в которую нужно возвести a, чтобы получить b.

Примеры вычисления логарифмов:

$$\log_3 3 = 1, \qquad \log_3 81 = 4 \qquad \log_7 1 = 0 \qquad \log_5 0{,}2 = -1.$$

Логарифм по основанию10 называется десятичным логарифмом и вместо записи $\log_{10} a$ используется обозначение lga.

Примеры вычисления десятичного логарифма:

$$\lg 100 = 2, \qquad \lg 1000 = 3 \qquad \lg 10^{13} = 13, \quad \lg 0{,}1 = -1, \ \lg 0{,}01 = -2.$$

Вообще,каковы бы ни были числа a и b (такие, что a>0, a=1 и b>0), найдётся единственное число c такое, что $a^c = b$; иными словами, значение логарифма $\log_a b$ существует и единственно.

Основное логарифмическое тождество

Пусть $a^c = b$, то есть $c = \log_a b$. Подставим это выражение для c в первое равенство: $a^{\log_a b} = b$, которое получило называние *основное логарифмическое тождество*. Важно понимать, однако, что это и есть просто определение логарифма; она говорит о том, что $\log_a b$ это степень, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b.

Таким образом, имеем, например:

$$2^{\log_2 3}=3, \qquad 7^{\log_7 5}=5, \qquad 10^{\lg 25}=25.$$

Пример 1. Вычислить $9^{\log_3 7}$.

Решение. Нам понадобится правило: при возведении степени в степень показатели перемножаются, то есть $(a^m)^n=a^{mn}$.

Применяя это правило, получим:

$$9^{\log_3 7}=3^{2\log_3 7}=3^{2\log_3 7}=(3^{\log_3 7})^2=7^2=49.$$

Пример 2. Доказать, что $3^{\log_2 5}=5^{\log_2 3}$.

Решение. Имеем:

$$3^{\log_2 5} = 2^{\log_2 3 \log_2 5}=2^{\log_2 3 \cdot \log_2 5}= 2^{\log_2 5 \log_2 3} = 5^{\log_2 3}.$$

Точно так же можно показать, что, вообще, имеет место тождество:

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}.$$

В самом деле:

$$a^{\log_b c} = b^{\log_b a^{\log_b c}} = b^{\log_b a \cdot \log_b c} = b^{\log_b c^{\log_b a}} = c^{\log_b a}.$$

Логарифмические формулы

Основное логарифмическое тождество.

Формула ОЛТ	Примеры
$a^{\log_a b}=b$ Пояснение: так как $a^c=b$, при этом $c=\log_a b$, то просто подставляем в a^c развернутое значение c.	$5^{\log_5 3}=3$ $3^{\log_3 5}=5$

Формула перехода к новой основе.

$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ где $b>0$, $a>0$, $a\neq 1$, $c>0$, $c\neq 1$	$\log_a b=\dfrac{\lg b}{\lg a}$ $\log_a b=\dfrac{\ln b}{\ln a}$

Основные свойства логарифмов.

	Свойства	Примеры
1	$\log_a 1=0$ (при $a>0$, $a\neq 1$)	$\log_4 1=0$ (т.к. $4^0=1$) $\log_7 1=0$ (т.к. $7^0=1$)
2	$\log_a a=1$ (при $a>0$, $a\neq 1$)	$\log_3 3=1$ (т.к. $3^1=3$) $\log_8 8=1$ (т.к. $8^1=8$)

Логарифмические формулы

Логарифм произведения:

3	$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$ (при $a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1$)	$\log_3(9 \cdot 2) = \log_3 9 + \log_3 2 = 2 + \log_3 2$ $\log_4 2 + \log_4 32 = \log_4(2 \cdot 32) = \log_4 64 = 3$

Логарифм частного:

4	$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ (при $a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1$)	$\log_5 \frac{25}{29} = \log_5 25 - \log_5 29 = 2 - \log_5 29$ $\log_3 81 - \log_3 9 = \log_3 \frac{81}{9} = \log_3 9 = 2$

Логарифм степени:

5	$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$ (при $b > 0, a > 0, a \neq 1, n \in R$)	$\log_2 2^6 = 6 \cdot \log_2 2 = 6 \cdot 1 = 6$ $3 \cdot \log_8 4 = \log_8 4^3 = \log_8 64 = 2$

Дополнительные свойства логарифмов.

	Свойства	Примеры
1	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ (при $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$)	$\log_{25} 5 = \frac{1}{\log_5 25} = \frac{1}{2}$
2	$\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$ (при $a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$)	$\log_{25} 5 = \log_{5^2} 5 = \frac{1}{2} \log_5 5 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$
3	$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ (при $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, c > 0, c \neq 1$)	$8^{\log_2 5} = 5^{\log_2 8} = 5^3 = 125$ Пояснение: $\log_2 8 = 3$ (так как $2^3 = 8$). Пишем 3 вместо $\log_2 8$ и получаем 5^3.

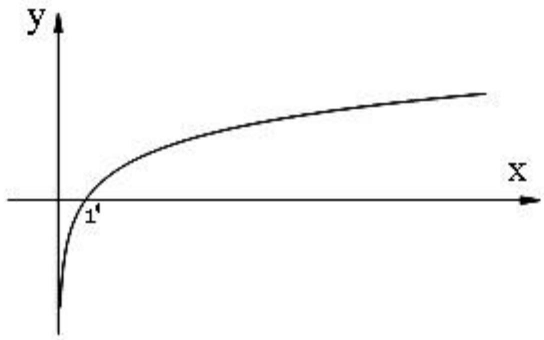
Вспомним, что $\boldsymbol{\log_a b}$ (логарифм числа b по основанию a) это показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить b. При этом $b>0$, $a>0$, $\boldsymbol{a \neq 1}$.

Зафиксируем некоторое основание a. Тогда каждому положительному числу x можно поставить в соответствие число $\boldsymbol{\log_a x}$ показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить x.

Иными словами, можно задать логарифмическую функцию $y = \log_a x$.

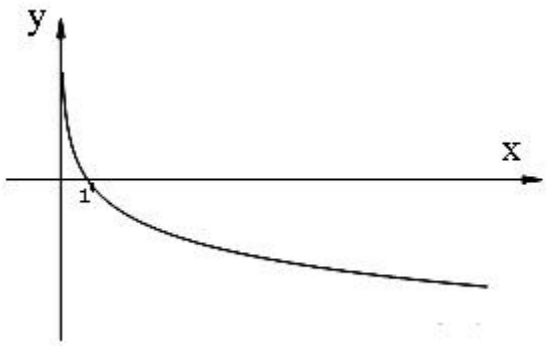
Пусть $a = 2$. Построим график функции $y = \log_2 x$.

Функция монотонно возрастает:



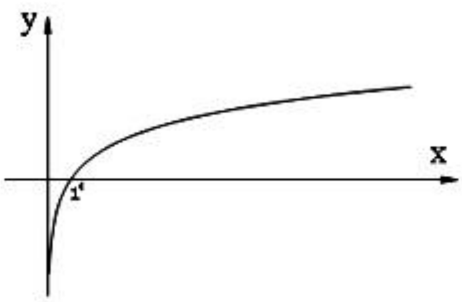
Пусть a = 1/2. Построим график функции $y = \log_{0,5}x$.

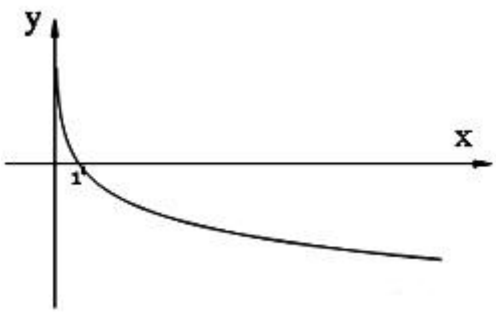
Функция монотонно убывает:



Этидваграфикаполностьюотражаютповедениелогарифмическойфункциипри различных значениях a. Сформулируем важнейшие свойства логарифмической функции $y = \log_a x$.

1. Область определения все положительные числа: $D(y) = (0;+\infty)$.
2. Область значений все действительные числа: $E(y) = (-\infty;+\infty)$.
3. Поскольку $\log_a 1 = 0$, график проходит через точку (1;0).
4. Функция монотонно возрастает при $a > 1$ и монотонно убывает при





$0 < a < 1$

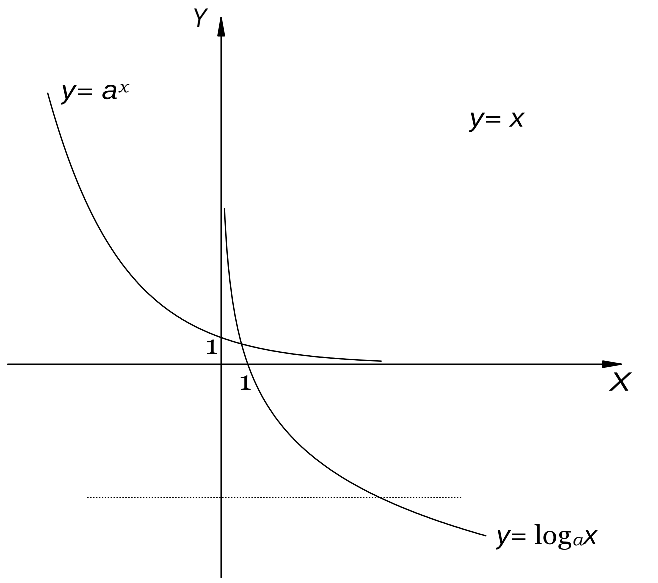
Заметим, что тем же свойством обладает и показательная функция $y = a^x$: она также возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$. Это, разумеется, не случайно.

Возьмём, к примеру, a >1 и изобразим на одном чертеже графики данных функций:

Мы видим, что имеется сходство формы графиков: они как будто нарисованы по одному шаблону (просто шаблон по-разному расположен на координатной плоскости). На самом деле наши графики симметричны относительно прямой $y = x$ они являются зеркальным отражением друг друга.

Та же осевая симметрия относительно прямой $y = x$ имеет место и в случае

$0 < a < 1$:



Данная симметрия проявляется ещё и в том, что область определения логарифмической функции является областью значений показательной функции, и наоборот. Логарифмическая функция $y=\log_a x$ и показательная функция $y = a^x$ являются обратными друг к другу

<u>3.2. Решение логарифмических уравнений и неравенств</u>

<u>Теорема:</u> Пусть $a>0,\ a\neq 1$. Пусть дана функция y =f(x) и действительное число b. Тогда уравнение $log_a f(x)=b$ и уравнение $f(x)=a^b$ равносильны.

<u>Теорема:</u> Пусть $a>0,\ a\neq 1, x_1>0,\ x_2>0$ Если $log_a f(x)>b$, то

1) при $a>1$ $f(x)>a^b$ (**знак сохраняем**)

2) при $0<a<1$ $f(x)<a^b$ (**знак меняем**)

Алгоритм решения логарифмического неравенства $\log_a f(x)>b$:

1. Найти ООФ (область определения функции). Под ООФ будем понимать логарифмическое выражение строго больше нуля (f(x)>0);
2. По основанию логарифма определить сохранность знака;
3. Решить непосредственно само логарифмическое неравенство;
4. Составить систему из двух неравенств (П.1+П.3)
5. Решить данную систему, совместив оба решения на числовой оси.

3.3. Образцы решения примеров

Пример 1. Вычислить

$$1)\ \log_2 32=5,\ т.к.\ 2^5=32$$

$$2)\ \log_2 \frac{1}{32}=-5,\ т.к.\ 2^{-5}=\frac{1}{32}$$

$$3)\ \log_6 18+\log_6 2=\log_6(18\cdot 2)=\log_6 36=2$$

$$4)\ \log_{12} 48-\log_{12} 4=\log_{12} 12=1$$

Пример 2. Решить логарифмическое уравнение:

$$\log_6(3x+15)=2$$

Решение:

$3x+15=6^2$ $3x+15=36$ $3x=36-15$ $3x=21$ $x=\frac{21}{3}$ $x=7$ **Ответ:x=7**

Пример 3. Решить логарифмическое уравнение:

$$\log_3(x^2-6x+17)=2$$

Решение:

$x^2-6x+17=3^2$ $x^2-6x+17=9$ $x^2-6x+17-9=0$ $x^2-6x+8=0$ $a=1,\ b=-6,\ c=8$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}==\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot8}}{2\cdot1}=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{6\pm2}{2}$$

$$x_1=\frac{6+2}{2}=\frac{8}{2}=4 \qquad x_2=\frac{6-2}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Ответ: $x_1=4,\ x_2=2$

Пример 4. Решить логарифмическое уравнение:$(\log_2 x)^2+8\log_2 x-9=0$

Решение:

Пусть $\log_2 x=t$ $t^2+8\cdot t-9=0$ $a=1,\ b=8,\ c=-9$

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot1\cdot(-9)}}{2\cdot1}=\frac{-8\pm\sqrt{64-(-36)}}{2}=\frac{-8\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{-8\pm10}{2}$$

$$t_1=\frac{-8+10}{2}=\frac{2}{2}=1\,t_2=\frac{-8-10}{2}=\frac{-18}{2}=-9$$

$t_1=1$ $\log_2 x=1$ $x_1=2^1$ $\boldsymbol{x_1=2}$

$t_2=-9$ $\log_2 x=-9$ $x_2=2^{-9}$ $x_2=\frac{1}{2^9}$ $\boldsymbol{x_2}=\frac{1}{512}$

Ответ:$x_1=2,\ x_1=\frac{1}{512}$

Пример 5. Решить логарифмическое уравнение:

$$log_2(x\text{-}5) + log_2(x+2)=3$$

Решение:

$log_2(x\text{-}5)\cdot(x+2)=3$ $\quad (x\text{-}5)\cdot(x+2)=2^3$ $\quad x^2+2x\text{-}5x\text{-}10=8$

$x^2+2x\text{-}5x\text{-}10\text{-}8=0$ $\quad x^2\text{-}3x\text{-}18=0$ $\quad a=1,\ b=\text{-}3,\ c=\text{-}18$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-18)}}{2\cdot 1}=\frac{3\pm\sqrt{9-(-72)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{81}}{2}=\frac{3\pm 9}{2}$$

$x_1=\frac{3+9}{2}=\frac{12}{2}=6$ $\quad x_2=\frac{3-9}{2}=\frac{-6}{2}=-3$

Примечание: В уравнениях данного вида необходимо выполнить проверку.

Проверка:

1) $x_1=6$

$log_2(6\text{-}5) + log_2(6+2)= log_2 1 + log_2 8=0=3=3$

3=3

2) $x_2=\text{-}3$*-неуд*

$log_2(\text{-}3\text{-}5) + log_2(\text{-}3+2)= log_2(\text{-}8) + log_2(\text{-}1)$ *(формула* $log_a x_1+ log_a x_2= log_a(x_1\cdot x_2)$ *справедлива при* $a>0,\ a\neq 1,\ x>0,\ \underline{x_1>0,\ x_2>0}$*)*

корень $x_2=\text{-}3$ *является посторонним.*

Ответ: ***x=6***

Пример 6. Решить логарифмическое неравенство: $\log_2(3x\text{-}4)>5$

Решение:

ООФ: $3x\text{-}4>0$ $\quad 3x>0+4$ $\quad 3x>4$ $\quad x>\frac{4}{3}$ $\quad x>1\frac{1}{3}$

т.к.2>1, то знак сохраняем

$3x\text{-}4>2^5$ $\quad 3x\text{-}4>32$ $\quad 3x>32+4$ $\quad 3x>36$ $\quad x>\frac{36}{3}$ $\quad x>12$

$$\begin{cases} x>1\frac{1}{3} \\ x>12 \end{cases}$$

Ответ: ***x>12***

3.4. Варианты контрольной работы

Задание 1. Вычислить

Вариант 1:$\log_3 12+\log_3 4,5-\log_3 6$

Вариант 2:$\log_5 24-\log_5 120-\log_5 5$

Вариант 3: $7^{\log_7 21}$

Вариант 4: $4^{\log_2 3}$

Вариант 5: $\log_2 216\cdot\log_5 25-3\log_2 4$

Вариант 6: $3^{\log_3 2}\cdot\log_5 5+3\log_4 16$

Вариант 7:$\log_3 12+\log_3 4,5-\log_3 6$

Вариант 8:$\log_{1/5} 25\cdot\log_{16} 64$

Вариант 9:$\log_6 2+\log_6 3+2^{\log_2 4}$

Вариант 10:$\log_2 12-\log_2 3+3^{\log_3 8}$

Вариант 11: $\log_7 7-\log_7 24+\log_7 24$

Вариант 12:$\log_3 9+\log_2 1/8: 7^{\log_7 4}$

Вариант 13:$\log_3 9\cdot\log_4 1/2+\log_6 6$

Вариант14: $25^{\log_5 3}$

Вариант 15: $15^{\log_{15} 9} : 10^{\log_{10} 4}$

Вариант 16:$\log_3 81\cdot\log_{16} 64$

Вариант 17:$\log_7 7-\log_7 24+\log_7 24$

Вариант 18:$\log_5 25-\log_{16} 64$

Вариант1 9:$\log_3 9\cdot\log_4 16+\log_5 5$

Вариант 20:$\log_{1/3} 3+\log_{1/3} 3-\log_{1/3} 3$

Вариант 21: $\log_5 25+\log_5 3-\log_5 3$

Вариант 22: $15^{\log_{15} 9} : 10^{\log_{10} 4}$

Вариант 23:$\log_{1/5} 1/25\cdot\log_{16} 64$

Вариант 24:$\log_3 81\cdot\log_{27} 9$

Вариант 25: $\log_6 2+\log_6 3$

Вариант 26:$\log_2 12-\log_2 3$

Вариант 27:$\log_7 8-\log_7 56$

Вариант 28:$\log_{1/3} 9+\log_2 1/8: 7^{\log_7 2}$

Вариант 29: $\log_2 1/16+\log_2 8$: $9^{\log_3 5}$

Вариант 30: $\log_{36}36+\log_6 3+\log_6 2$

Задание 2. Решить логарифмическое уравнение

Вариант 1:

$\log_{10}(2-x)=\log_{10}(x-6)$ $\log_3 x+\log_3(x+2)=1$

Вариант 2:

$\log_3(4x-3)=2$ $(\log_3 x)^2-6\log_3 x+9=0$

Вариант 3:

$\log_5(2x+7)=\log_5(x-3)$ $\log_7(5-x)+\log_7 2=1$

Вариант 4:

$\log_{1/2}(3x-1)=-3$ $\log_7(x^2-2x-8)=0$

Вариант 5:

$\log_3(4x-3)=2$ $\log_{1/2}(x^2+4x-5)=-4$

Вариант 6:

$\log_2(3x-4)=3$ $\log_{1/2}(x^2-5x+6)=-1$

Вариант 7:

$\log_2(2x-1)=3$ $\log_2(x^2-4x+4)=4$

Вариант 8:

$\log_3(2x+1)=\log_3 39$ $\log_3(x-2)+\log_3(x+6)=2$

Вариант 9:

$\log_{1/2}(3x-1)=-3$ $\log_4(13+x)+\log_4(4-x)=2$

Вариант 10: $(\log_2 x)^2-9\log_2 x+10=0$

$\log_2(7x-4)=\log_2 52$

Вариант 11:

$\log_4(5x+6)=3$ $\log_7(5-x)+\log_7 2=1$

Вариант 12:

$\log_3(12-5x)=2$ $\log_{10}(2-x)+\log_{10}2=\log_{10}16$

Вариант 13:

$\log_2(x+3)=\log_2(2x-4)$ $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-4x+12)=-2$

Вариант14:

$\log_{10}(5x+2)=\log_{10}12$ $\log_9(x^2+2x+6)=1$

Вариант 15:

$\log_2(2x+1)=\log_2 12$ $(\log_4 x)^2-2\log_4 x-8=0$

Вариант 16:

$\log_2(3x-4)=3$ $(\log_3 x)^2-4\log_3 x+3=0$

Вариант 17:

$\log_6(2x+5)=2$ $(\log_3 x)^2-\log_3 x-2=0$

Вариант 18:

$\log_4(8+3x)=3$ $2(\log_2 x)^2-5\log_2 x-6=0$

Вариант1 9:

$\log_{\frac{1}{5}}(6x-7)=-3$ $\log_2(x-2)+\log_2(x-3)=1$

Вариант 20:

$\log_{\frac{1}{2}}(2x-9)=-7$ $(\log_3 x)^2+5\log_3 x6=0$

Вариант 21:

$\log_4(2x-8)=3$ $(\log_7 x)^2-5\log_7 x+6=0$

Вариант 22:

$\log_{13}(7x-1)=1$ $(\log_4 x)^2+\log_4 x-6=0$

Вариант 23:

$\log_2(3x+4)=4$ $(\log_3 x)^2+\log_3 x-2=0$

Вариант 24:

$\log_{17}(5x-3)=1$ $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-4x-2)=1$

Вариант 25:

$\log_3(12-5x)=2$ $\log_3(x^2-x+7)=2$

Вариант 26:

$\log_{\frac{1}{2}}(2x-9)=-7$ $\log_4(x^2-3x+18)=2$

Вариант 27:

$\log_3(4x-3)=2$ $\log_{\frac{1}{7}}(x^2-2x+46)=-2$

Вариант 28:

$\log_2(2x+1)=\log_2 12$ $(\log_4 x)^2-2\log_4 x-8=0$

Вариант 29:

$\log_2(3x-4)=3$ $\log_{1/2}(x^2-5x+6)=-1$

Вариант 30:

$\log_2(2x-1)=3$ $\log_2(x^2-4x+4)=4$

Задание 3. Решить логарифмическое неравенство

Вариант 1: $\log_7(2x-1) < 2$

Вариант 2: $\lg 0,5x < -2$

Вариант 3: $\log_2(x-4) > 1$

Вариант 4: $\log_{1/3}(2x-7) > -2$

Вариант 5: $\log_4(3-2x) < 2$

Вариант 6: $\log_2(2x-3) < 3$

Вариант 7: $\log_2(2x+3) > 2$

Вариант 8: $\log_5(x-1) > 1$

Вариант 9: $\log_3(2x-1) < 3$

Вариант 10: $\lg x > 2$

Вариант 11: $\lg 2x < 1$

Вариант 12: $\log_5(1-3x) < 2$

Вариант 13: $\log_2(1-2x) > 0$

Вариант14: $\log_{1/3}(2x-1) > -2$

Вариант 15: l$g_{10}(3-2x) < 2$

Вариант 16: $\log_6(5x-2) > 2$

Вариант 17: $\log_{1/2}(2x+1) > -2$

Вариант 18: $\log_3(5x-6) < 2$

Вариант1 9: $\log_7(x-1) < 2$

Вариант 20: $\log_{1/2}(2-x) > -1$

Вариант 21: $2\log_4(7-x) < 3$

Вариант 22: $\log_3(4-3x) > 1$

Вариант 23: $\log_2(1-2x) < 0$

Вариант 24: $\log_2(2x+1) > 4$

Вариант 25: $\log_5(3x+1) < 2$

Вариант 26: $\log_5(4x+1) > -1$

Вариант 27: $\log_{1/5}(2x+3) > -3$

Вариант 28: $\log_{1/2}2x > 2$

Вариант 29: $\log_3(5x+4) > 3$

Вариант 30: $\lg(2x+1) < 0$.

4. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Определение:_Функцию $y=x^p$, где p - заданное действительное число, называют степенной функцией.

Свойство 1: Степенная функция $y=x^p$ для любого $p\in R$ определена при $x>0$

Свойство 2: Множество значений степенной функции $y=x^p$ при $x>0$, $p\neq 0$ – все положительные числа

Свойство 3: Степенная функция $y=x^p$ на интервале $x>0$ является возрастающей, если $p>0$, и убывающей, если $p<0$.

Функция вида $y(x)=x^n$, где n – число $\in R$, называется степенной функцией. Число n может принимать различные значения: как целые, так и дробные, как четные, так и нечетные. В зависимости от этого, степенная функция будет иметь разный вид. Рассмотрим частные случаи, которые являются степенными функциями и отражают основные свойства данного вида кривых в следующем порядке: степенная функция $y=x^2$ (функция с четным показателем степени – парабола), степенная функция $y=x^3$ (функция с нечетным показателем степени – кубическая парабола) и функция $y=\sqrt{x}$ (x в степени ½) (функция с дробным показателем степени), функция с отрицательным целым показателем (гипербола).

Степенная функция $y=x^2$

1. D(x)=R – функция определена на все числовой оси;

2. E(y)=[0;∞) - функция принимает положительные значения на всей области определения;

3. При x=0 y=0 - функция проходит через начало координат O(0;0).

4. Функция убывает на промежутке (-∞;0] и возрастает на промежутке [0;∞).

5. Функция является четной (симметрична относительно оси Оy).

В зависимости от числового множителя, стоящего перед x^2, функция может быть уже/шире и направлена вверх/вниз.

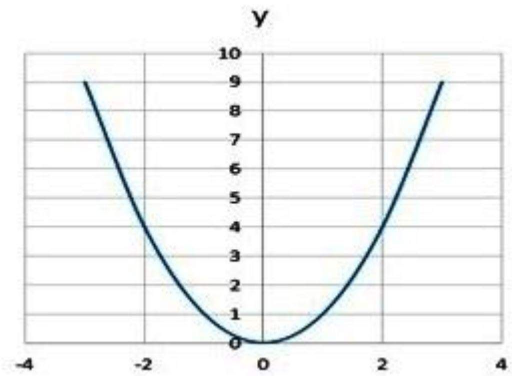


Рис. 3 График функции $y = x^2$, на интервале x∈ [-3;3]

Степенная функция $y=x^3$

1. График функции $y=x^3$ называется кубической параболой. Степенная функция $y=x^3$ обладает следующими свойствами:

2. D(x)=R – функция определена на все числовой оси;

3. E(y)=(-∞;∞) – функция принимает все значения на своей области определения;

4. При x=0 y=0 – функция проходит через начало координат O(0;0).

5. Функция возрастает на всей области определения.

6. Функция является нечетной (симметрична относительно начала координат).

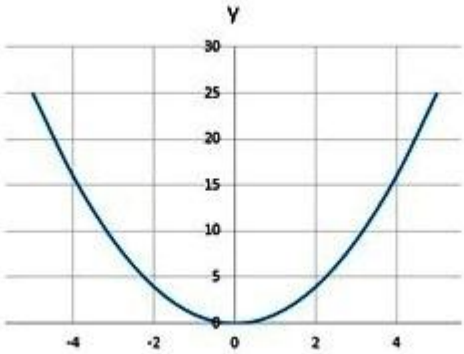


Рис. 4 График функции $y = x^3$, на интервале x∈ [-5;5]

В зависимости от числового множителя, стоящего перед x^3, функция может быть крутой/пологой и возрастать/убывать.

Степенная функция с целым отрицательным показателем

Если показатель степени n является нечетным, то график такой степенной функции называется гиперболой.

Степенная функция с целым отрицательным показателем степени обладает следующими свойствами:

1. D(x)=(-∞;0)U(0;∞) для любого n;

2. E(y)=(-∞;0)U(0;∞), если n – нечетное число; E(y)=(0;∞), если n – четное число;

3. Функция убывает на всей области определения, если n – нечетное число; функция возрастает на промежутке (-∞;0) и убывает на промежутке (0;∞), если n – четное число.

4. Функция является нечетной (симметрична относительно начала координат), если n – нечетное число; функция является четной, если n – четное число.

5. Функция проходит через точки (1;1) и (-1;-1), если n – нечетное число и через точки (1;1) и (-1;1), если n – четное число.

Степенная функция с дробным показателем

Степенная функция с дробным показателем вида (картинка) имеет график функции, изображенный на рисунке. Степенная функция с дробным показателем степени обладает следующими свойствами: (картинка)

1. D(x) ∈R, если n – нечетное число и D(x)=[0;∞), если n – четное число ;

2. E(y) $\in$ (-∞;0)U(0;∞), если n – нечетное число; E(y)=[0;∞), если n – четное число;

3. Функция возрастает на всей области определения для любого числа n.

4. Функция проходит через начало координат в любом случае.

Рис. 5 График функции $y = x^{-1}$, на интервале x$\in$ [-3;3]

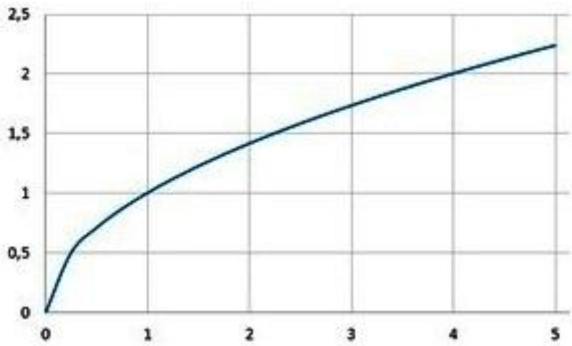


Рис. 6 График функции $y = x^{\frac{1}{2}}$, на интервале x$\in$ [0;5]

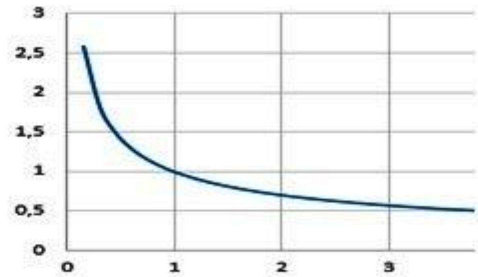


Рис. 7 График функции $y = x^{-\frac{1}{2}}$, на интервале x$\in$ [0;5]

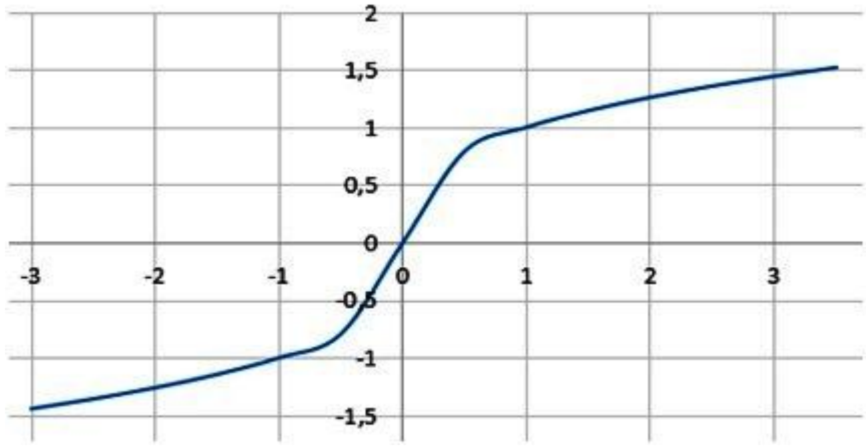


Рис. 8 График функции $y = x^{\frac{1}{3}}$, на интервале x∈ [-3;3]

5. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5.1. Определения и понятия

Определение: Иррациональным уравнением называется уравнение, в котором неизвестное находится под знаком корня.

Правило: Для решения иррационального уравнения 2 степени необходимо возвести в квадрат обе части уравнения. В заключении необходимо выполнить проверку.

Формулы сокращённого умножения

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ - квадрат суммы

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ - квадрат разности

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ - разность квадратов

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$ - куб суммы

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$ - куб разности

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ - сумма кубов

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ - разность кубов

Решение систем уравнений с двумя неизвестными

Правило: Для решения системы двух уравнений с двумя неизвестными, необходимо из одного уравнения системы выразить одно неизвестное через другое, а затем подставить полученное выражение в другое уравнение системы. Ответ записывается в виде (x;y).

Примеры и упражнения

Пример 1: Решить иррациональное уравнение $\sqrt{5x+4} = 3$

Решение

$$(\sqrt{5x+4})^2 = (3)^2$$

5x+4=9`5x=9-4

5x=5

x=1

Проверка:

$\sqrt{5 \cdot 1 + 4} = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3$ 3=3 **Ответ: x=1**

Пример 2: Решить иррациональное уравнение

$$\sqrt{x+4}=\sqrt{3x-6}$$

Решение

$$(\sqrt{x+4})^2=(\sqrt{3x-6})^2$$

$$x+4=3x-6$$

$$x-3x=-6-4$$

$$-2x=-10$$

$$x=5$$

Проверка:

а) $\sqrt{5+4}=\sqrt{9}=3$

б) $\sqrt{3\cdot 5-6}=\sqrt{15-6}=\sqrt{9}=3$

$$3=3$$

Ответ: x=5

Пример 4: Решить иррациональное уравнение

$$\sqrt{2x^2-6x+12}=\sqrt{x^2+5x-6}$$

Решение:

$$(\sqrt{2x^2-6x+12})^2=(\sqrt{x^2+5x-6})^2$$

$$2x^2-6x+12=x^2+5x-6$$

$$2x^2-6x+12-x^2-5x+6=0$$

$$x^2-11x+18=0$$

$$a=1,\ b=-11,\ c=18$$

$$x_{1,2}==\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\frac{-(-11)\pm\sqrt{(-11)^2-4\cdot 1\cdot 18}}{2\cdot 1}=\frac{11\pm\sqrt{121-72}}{2}=\frac{11\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{11\pm 7}{2}$$

$$x_1=\frac{11+7}{2}=\frac{18}{2}=9$$

$$x_2=\frac{11-7}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Проверка:

1) $x_1=9$

$$\sqrt{2\cdot 9^2-6\cdot 9+12}=\sqrt{2\cdot 81-54+12}=\sqrt{162-54+12}=\sqrt{120}$$

$$\sqrt{9^2+5\cdot 9-6}=\sqrt{81+45-6}=\sqrt{120}$$
$$\sqrt{120}=\sqrt{120}$$

$x_2=2$

$$\sqrt{2\cdot 2^2-6\cdot 2+12}=\sqrt{2\cdot 4-12+12}=\sqrt{8}$$

$$\sqrt{2^2+5\cdot 2-6}=\sqrt{4+10-6}=\sqrt{8}$$
$$\sqrt{8}=\sqrt{8}$$

Ответ: $x_1=9$, $x_2=2$

Пример 5: Решить иррациональное уравнение

$$\sqrt{3x^2-2x+1}=\sqrt{2x^2-6x+13}$$

Решение:

$$(\sqrt{3x^2-2x+1})^2=(\sqrt{2x^2-6x+13})^2$$

$$3x^2-2x+1=2x^2-6x+13$$

$$3x^2-2x+1-2x^2+6x-13=0$$

$$x^2+4x-12=0$$

$$a=1,\ b=4,\ c=-12$$

$$x_{1,2}==\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1}=\frac{-4\pm\sqrt{16-(-48)}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{-4\pm 8}{2}$$

$$x_1=\frac{-4+8}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$x_2=\frac{-4-8}{2}=\frac{-12}{2}=-6$$

Проверка:

$x_1=2$

$$\sqrt{3\cdot 2^2-2\cdot 2+1}=\sqrt{12-4+1}=\sqrt{9}=3$$

$$\sqrt{2\cdot 2^2-6\cdot 2+13}=\sqrt{8-12+13}=\sqrt{9}=3$$
$$3=3$$

$x_2=-6$

$$\sqrt{3\cdot(-6)^2-2\cdot(-6)+1}=\sqrt{108+12+1}=\sqrt{121}=11$$

$$\sqrt{2\cdot(-6)^2-6\cdot(-6)+13}=\sqrt{72+36+13}=11$$
$$11=11$$

Ответ: $x_1=2$, $x_2=-6$

Пример 6: Решить иррациональное уравнение

$$x\text{-}6 = \sqrt{2x+12}$$

Решение:

$$(x\text{-}6)^2 = (\sqrt{2x+12})^2$$

$$(x)^2\text{-}2\cdot x\cdot 6+6^2=2x+12$$

$$x^2\text{-}12x+36=2x+12$$

$$x^2\text{-}12x+36\text{-}2x\text{-}12=0$$

$$x^2\text{-}14x+24=0$$

$$a=1,\ b=-14,\ c=24$$

$$x_{1,2}= = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a} = \frac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot 1\cdot 24}}{2\cdot 1} = \frac{14\pm\sqrt{196-96}}{2} = \frac{14\pm\sqrt{100}}{2} = \frac{14\pm 10}{2}$$

$$x_1= \frac{14+10}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$x_2= \frac{14-10}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

***Проверка*:**

$x_1=12$

имеем 12-6=**6**

$$\sqrt{2\cdot 12+12} = \sqrt{24+12} = \sqrt{36} = 6$$

Получаем, для данного значения переменной 6=6

$x_2=2$- не является корнем искомого уравнения так как 2-6 =-4, а

$$\sqrt{2\cdot 2+12} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

следовательно -4≠4

Ответ: ***x=12***

Пример 7: Решить иррациональное уравнение

$$\sqrt{5x-3}-\sqrt{2x-1} = \sqrt{3x-2}$$

Решение:

$$(\sqrt{5x-3}-\sqrt{2x-1})^2 = (\sqrt{3x-2})^2$$

$$(\sqrt{5x-3})^2 - 2\cdot\sqrt{5x-3}\cdot\sqrt{2x-1}+(\sqrt{2x-1})^2 = 3x-2$$

$$5x-3-2\sqrt{(5x-3)\cdot(2x-1)}+2x-1=3x-2$$

$$-2\sqrt{(5x-3)\cdot(2x-1)}=3x-2-5x+3-2x+1$$

$$-2\sqrt{(5x-3)\cdot(2x-1)}=-4x+2$$

$$-2\sqrt{(5x-3)\cdot(2x-1)}=-2(2x-1)$$

$$\sqrt{(5x-3)\cdot(2x-1)}=2x-1$$

$$(\sqrt{(5x-3)\cdot(2x-1)})^2=(2x-1)^2$$

$$(5x-3)\cdot(2x-1)=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 1+1^2$$

$$10x^2-5x-6x+3=4x^2-4x+1$$

$$10x^2-5x-6x+3-4x^2+4x-1=0$$

$$6x^2-7x+2=0 \quad a=6, b=-7, c=2$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 6\cdot 2}}{2\cdot 6}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{12}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{12}=\frac{7\pm 1}{12}$$

$$x_1=\frac{7+1}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

$$x_2=\frac{7-1}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

Проверка:

1) $x_1=\frac{2}{3}$

$$\sqrt{5\cdot\frac{2}{3}-3}-\sqrt{2\cdot\frac{2}{3}-1}=\sqrt{\frac{10}{3}-3}-\sqrt{\frac{4}{3}-1}=\sqrt{3\frac{1}{3}-3}-\sqrt{1\frac{1}{3}-1}=\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{3}}=0$$

$$\sqrt{3\cdot\frac{2}{3}-2}=\sqrt{2-2}=0$$

$$0=0$$

2) $x_2=\frac{1}{2}$ - не уд

$$\sqrt{5\cdot\frac{1}{2}-3}-\sqrt{2\cdot\frac{1}{2}-1}=\sqrt{\frac{5}{2}-3}-\sqrt{1-1}=\sqrt{2\frac{1}{2}-3}-0=\sqrt{-\frac{1}{2}}$$

(по определению $\sqrt{a}$**,** a≥0 **)**

Ответ:x= $\frac{2}{3}$

Пример 8: Решить иррациональное уравнение

Решение

$$(\sqrt{x^2+4x-8})^2=(x)^2$$

$$x^2+4x-8=x^2$$

$$x^2+4x-8-x^2=0$$

$$4x-8=0$$

$$4x=0+8$$

$$4x=8$$

$$x=2$$

Проверка:

$$\sqrt{2^2+4\cdot 2-8}=\sqrt{4+8-8}=\sqrt{4}=2$$

$$x=2$$

$$2=2$$

Ответ: x=2

Пример 9: Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y=5} \\ \boldsymbol{xy=6} \end{cases}$$

Решение:

Выразим x через y и подставим во 2 уравнение

$$x=5-y$$

$$(5-y)\cdot y=6$$

$$5y-y^2-6=0$$

$$-y^2+5y-6=0 : (-1)$$

$$y^2-5y+6=0$$

$$a=1, b=-5, c=6$$

$$y_{1,2=}\ -=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}$$

$$y_1=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$$y_2=\frac{5-1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

При $y_1=3$ $x_1=5-y=5-3=2$.

При $y_2=2x_2=5-y=5-2=3$

Ответ: (2;3), (3;2)

Пример 10: Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x^2 - y^2 = 200} \\ \boldsymbol{x + y = 20} \end{cases}$$

Решение:

(x-y)·(x+y)=200

x+y=20

разделим первое уравнение системы на второе уравнение

$\frac{(x-y)\cdot(x+y)}{x+y} = \frac{200}{20}$*,получим: x-y=10*

x=10+y, (подставим во второе уравнение системы)

(10+y)+y=20

2y=20-10

2y=10

y=5.

При y=5

x=10+y=10+5=15

Ответ: (15;5)

Пример 11 : Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + xy + y = -1} \\ \boldsymbol{x - xy + y = 3} \end{cases}$$

Решение

Сложим первое и второе уравнение системы:

(x+x·y+y)+(x+x·y+y)=-1+3

x+y+x+y=2

2x+2y=2

2(x+y)=2

x+y=1,

x=1-y

Подставим выражение для x в первое уравнение системы:

(1-y)+(1-y)·y+y=-1

$1-y+y-y^2+y=-1$

$-y^2+y+1+1=0$

$-y^2+y+2=0$

$$y^2-y-2=0$$
$$a=1, b=-1, c=-2$$
$$y_{1,2}= = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a} = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{1\pm\sqrt{1-(-8)}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{1\pm 3}{2}$$
$$y_1= \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$y_2= \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$
$$y_1=2$$
$$x_1=1-y=1-2=-1$$
$$y_2=-1$$
$$x_2= 1-y =1-(-1)=2$$
Ответ: (-1;2), (2;-1)

5.2.Варианты контрольной работы

Задание 1: Решить иррациональное уравнение

Вариант 1:

1) $\sqrt{2x-3}=\sqrt{3x-9}$

2) $x+1=\sqrt{15-3x}$

3) $\sqrt{x-10}+\sqrt{x-3}=\sqrt{2x+1}$

Вариант 2:

1) $\sqrt{2x+3}=5$

2) $x+2=\sqrt{5x+10}$

3) $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-5}$

Вариант 3:

1) $\sqrt{x+4}=\sqrt{3x-6}$

2) $\sqrt{x^2-5x+15}=3$

3) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=3$

Вариант 4:

1) $\sqrt{x^2-2x+2}=x$

2) $\sqrt{3x^2-4x+2}=\sqrt{2x^2-3x+8}$

3) $\sqrt{4x+9}-\sqrt{11x+1}=\sqrt{7x+4}$

Вариант 5:

1) $\sqrt{2x-3}=\sqrt{x+5}$

2) $x-5=\sqrt{5+2x}$

3) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$

Вариант 6:

1) $\sqrt{x-1}=2$

2) $x+3=\sqrt{8x+12}$

3) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$

Вариант 7:

1) $\sqrt{5x+4}=3$

2) $x+4=\sqrt{28+12x}$

3) $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=2$

Вариант 8:

1) $\sqrt{x+2}=\sqrt{2x-3}$

2) $\sqrt{3x^2+x-3}=\sqrt{2x^2+6x+3}$

3) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=3$

Вариант 9:

1) $\sqrt{x^2-4x+8}=x$

2) $\sqrt{2x^2+5x+1}=\sqrt{x^2+3x+4}$

3) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$

Вариант 10:

1) $\sqrt{x+9}=\sqrt{3x-3}$

2) $x-2=\sqrt{4-2x}$

3) $\sqrt{x-10}+\sqrt{x-3}=\sqrt{2x+1}$

Вариант 11:

1) $\sqrt{5-2x}=9$

2) $x+1=\sqrt{1-x}$

3) $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=2$

Вариант 12:

4) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{5}$

5) $\sqrt{2x^2-6x+12}=\sqrt{x^2+5x-6}$

6) $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-5}$

Вариант 13:

1) $\sqrt{3x-4}=\sqrt{x+6}$

2) $\sqrt{x-1}=x+3$

3) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=3$

Вариант14:

1) $\sqrt{x-2}=3$

2) $\sqrt{3x^2-4x+1}=\sqrt{2x^2-5x+3}$

3) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$

Вариант 15:

1) $\sqrt{2x+3}=6$

2) $x-2=\sqrt{4-2x}$

3) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$

Вариант 16:

1) $\sqrt{5x-8}=\sqrt{6x+7}$

2) $\sqrt{3x^2-4x+3}=\sqrt{2x^2+x-3}$

3) $\sqrt{4x+9}-\sqrt{11x+1}=\sqrt{7x+4}$

Вариант 17:

1) $\sqrt{x^2-9x+4}=\sqrt{x^2-5}$

2) $x+1=\sqrt{x+3}$

3) $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=2$

Вариант 18:

1) $\sqrt{2x+9}=7$

2) $x-3=\sqrt{x-1}$

3) $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-5}$

Вариант19:

1) $\sqrt{x^2+15x-30}=x$

2) $\sqrt{x^2+2x}=\sqrt{3x+12}$

3) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$

Вариант 20:

1) $\sqrt{2x+4}=\sqrt{3x-12}$

2) $x-5=\sqrt{x+1}$

3) $\sqrt{x-10}+\sqrt{x-3}=\sqrt{2x+1}$

Вариант 21:

1) $\sqrt{4x-7}=1$

2) $\sqrt{x^2-36}=\sqrt{2x-1}$

3) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=3$

Вариант 22:

1) $\sqrt{2x}=7$

2) $\sqrt{3-x}=1-x$

Вариант 23:

1) $\sqrt{16-x}=\sqrt{2x-3}$

2) $x-3=\sqrt{x-1}$

3) $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=2$

Вариант 24:

1) $\sqrt{27x+4x^2-54}=2x$

2) $x-1=\sqrt{7-x}$

3) $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=2$

Вариант 25:

1) $\sqrt{3x+6}=\sqrt{2x+7}$

2) $x-6=\sqrt{2x+3}$

3) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$

Вариант 26:

1) $\sqrt{x+5}=\sqrt{3x+15}$

2) $\sqrt{x^2-2x+1}=2x-4$

3) $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=2$

Вариант 27:

1) $\sqrt{4x-16+x^2}=x$

2) $\sqrt{3x^2+6x+1}=7-x$

3) $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}=2$

4) $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}=\sqrt{2x-5}$

Вариант 28:

1) $\sqrt{3x+1}=7$

2) $\sqrt{2x^2+7}=x+2$

3) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$

Вариант 29:

1) $\sqrt{x+1}=7$

2) $\sqrt{5-x^2}=3-x$

3) $\sqrt{x-10}+\sqrt{x-3}=\sqrt{2x+1}$

Вариант 30:

1) $\sqrt{x^2+4x-8}=x$

2) $\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1$

3) $\sqrt{4x+9}-\sqrt{11x+1}=\sqrt{7x+4}$

<u>**Задание 2:**</u> Решить систему уравнений

Вариант 1:	$\begin{cases} x-y=3 \\ x\cdot y=10 \end{cases}$
Вариант 2:	$\begin{cases} x-y=4 \\ x*y=5 \end{cases}$
Вариант 3:	$\begin{cases} x^2-y^2=27 \\ x+y=-3 \end{cases}$
Вариант 4:	$\begin{cases} x-y=-3 \\ x*y=4 \end{cases}$
Вариант 5:	$\begin{cases} x-x\cdot y+y=7 \\ x+x\cdot y+y=5 \end{cases}$
Вариант 6:	$\begin{cases} x-y=-2 \\ x*y=3 \end{cases}$
Вариант 7:	$\begin{cases} x^2-y^2=9 \\ x-y=1 \end{cases}$
Вариант 8:	$\begin{cases} x-y=9 \\ x*y=10 \end{cases}$
Вариант 9:	$\begin{cases} x-y=4 \\ x*y=5 \end{cases}$
Вариант 10:	$\begin{cases} x-y=7 \\ x*y=-6 \end{cases}$
Вариант 11:	$\begin{cases} x-y=-9 \\ x*y=-20 \end{cases}$
Вариант 12:	$\begin{cases} x-x*y+y=-7 \\ x+x*y+y=1 \end{cases}$

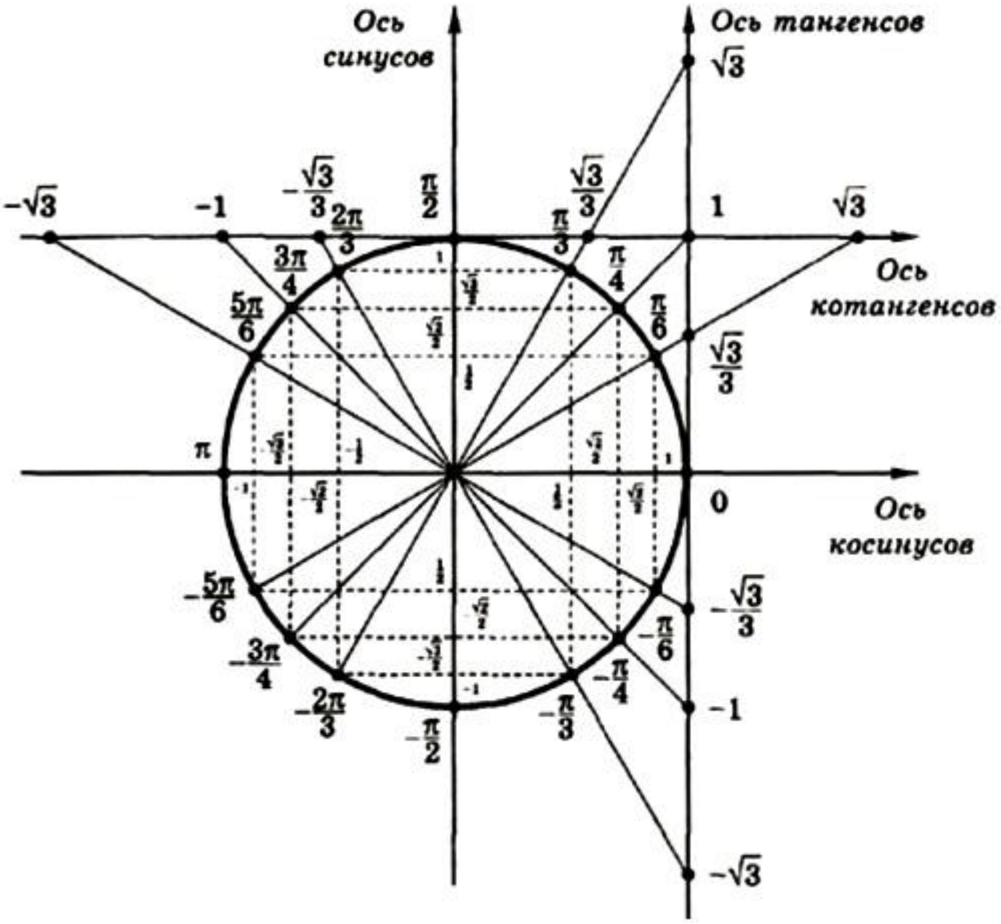
Вариант 13:	$\begin{cases} x + y = 7 \\ x * y = -18 \end{cases}$
Вариант 14:	$\begin{cases} x - y = 10 \\ x * y = -24 \end{cases}$
Вариант 15:	$\begin{cases} x^2 - y^2 = 207 \\ x - y = 9 \end{cases}$
Вариант 16:	$\begin{cases} x + y = 4 \\ x * y = 6 \end{cases}$
Вариант 17:	$\begin{cases} x + y = -4 \\ x * y = -12 \end{cases}$
Вариант18:	$\begin{cases} x + y = 1 \\ x * y = -6 \end{cases}$
Вариант 19:	$\begin{cases} x^2 - y^2 = 153 \\ x + y = 12 \end{cases}$
Вариант 20:	$\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$
Вариант 21:	$\begin{cases} x - x \cdot y + y = -7 \\ x + x \cdot y + y = 1 \end{cases}$
Вариант 22:	$\begin{cases} x + y = 2 \\ x * y = -8 \end{cases}$
Вариант 23:	$\begin{cases} x - y = 4 \\ x * y = -3 \end{cases}$
Вариант 24:	$\begin{cases} x - y = -3 \\ x * y = 4 \end{cases}$
Вариант 25:	$\begin{cases} x - y = 8 \\ x * y = -7 \end{cases}$
Вариант 26:	$\begin{cases} x - y = 2 \\ x * y = 8 \end{cases}$
Вариант 27:	$\begin{cases} x^2 - y^2 = 153 \\ x + y = 17 \end{cases}$

Вариант 28:	$\begin{cases} x - y = 0 \\ x * y = 1 \end{cases}$
Вариант 29:	$\begin{cases} x - y = 1 \\ x * y = 6 \end{cases}$
Вариант 30:	$\begin{cases} x + y = 5 \\ x * y = 6 \end{cases}$

6.ТРИГОНОМЕТРИЯ

6.1.Определения и понятия

Для решения задач данной темы необходимо вспомнить тригонометрический круг, который имеет следующий вид:



1 радиан $= \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$, $1^{\circ} = \frac{\pi}{180}$ ***радиан***

Знаки тригонометрических функций по квадрантам.

Функция	1-я четверть (0–90°)	2-я четверть (90–180°)	3-я четверть (180–270°)	4-я четверть (270–360°)
Синус	+	+	–	–
Косинус	+	–	–	+
Тангенс	+	–	+	–
Котангенс	+	–	+	–

(Перед результатом ставится знак "+" или "–" по таблице.)

Формулы приведения

Функция	$-\alpha$	$90^o+\alpha$	$180^o+\alpha$	$270^o+\alpha$	$360^o+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$
tg	$-tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$\pm tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$\pm tg\alpha$
ctg	$-ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$

Тригонометрические функции основных углов

Функция	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	180^o	270^o	360^o
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
ctg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞	0	∞

Соотношение между тригонометрическими функциями одного угла

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \qquad tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad ctg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1; \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}; \qquad cosec\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha};$$

$$1 + tg^2\alpha = \sec^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \qquad 1 + ctg^2\alpha = cosec^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Формулы тригонометрических функций суммы и разности углов

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta;$$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta}; \qquad tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\cdot tg\beta}.$$

Тригонометрические функции двойного и тройного угла

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}; \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}; \qquad \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Тригонометрические функции половинного угла

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}; \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \qquad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}; \qquad \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta};$$

Формулы преобразования произведений тригонометрических функций в сумму.

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right];$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right];$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right].$$

6.2. Задания для самостоятельного решения

1. Перевести угол из градусной системы измерения в радианную и отметить угол на тригонометрической круге.

1) $30°$; 2) $-45°$; 3) $90°$; 4) $150°$; 5) $-240°$; 6) $300°$; 7) $-120°$; 8) $-540°$; 9) $135°$; 10) $1500°$; 11) $-270°$; 12) $-22{,}5°$; 13) $105°$; 14) $200°$; 15) $-315°$.

2. Перевести угол из радианной системы измерений в градусную и отметить угол на тригонометрическом круге.

1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $-\frac{2\pi}{3}$; 3) π; 4) $\frac{3\pi}{4}$; 5) $\frac{5\pi}{6}$; 6) $-\frac{3\pi}{2}$; 7) -3π; 8) $-\frac{17\pi}{4}$; 9) $\frac{17\pi}{6}$ 10) $-\frac{13\pi}{6}$; 11) $\frac{7\pi}{4}$; 12) $-\frac{10\pi}{3}$; 13) $\frac{7\pi}{12}$; 14) $\frac{11\pi}{18}$; 15) $\frac{121\pi}{24}$.

3. Найти синусы углов.

1) $30°$; 2) $-45°$; 3) $90°$; 4) $150°$; 5) $-240°$; 6) $300°$; 7) $-120°$; 8) $-540°$; 9) $135°$; 10) $1500°$; 11) $-270°$.

4. Найти косинусы углов.

1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $-\frac{2\pi}{3}$; 3) π; 4) $\frac{3\pi}{4}$; 5) $\frac{5\pi}{6}$; 6) $-\frac{3\pi}{2}$; 7) -3π; 8) $-\frac{17\pi}{4}$; 9) $\frac{17\pi}{6}$ 10) $-\frac{13\pi}{6}$; 11) $\frac{7\pi}{4}$; 12) $-\frac{10\pi}{3}$.

5. Вычислить значения функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$.

1) $y = \sin 2x + \cos 3x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$;

2) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right),\ x_0 = \frac{7\pi}{6}$;

3) $y = \sin^2 x + \cos^2 2x,\ x_0 = -\frac{\pi}{12}$;

4) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right),\ x_0 = \frac{\pi}{12}$;

6. Вычислить.

1) $\sin(450°) + \cos(-690°)\cdot\sin(780°)$;

2) $\mathrm{ctg}150°\cdot\mathrm{tg}240° + \sin(1260°)$;

3) $\sin(105°)\cos(15°) + \frac{1}{2}\sin(960°)$;

4) $\cos^2(570°) : \sin^2(-840°)$;

5) $\sin(-105°) + \sin(-915°)$.

7. На тригонометрическом круге отметьте точки, соответствующие сериям.

1) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
2) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$;
3) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
4) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$;
5) $\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$;
6) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$;
7) $\pm\frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
8) $\frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$;
9) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$;
10) $-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$;
11) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi m}{3},\ m \in \mathbb{Z}$;
12) $-\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z}$;
13) $\pi + \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}$;
14) $(-1)^k\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
15) $(-1)^n\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$;
16) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
17) $(-1)^{n+1}\frac{2\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

8. Найти знак $\sin x$, если:

1) $x \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$; 2) $x \in \left(-\frac{3\pi}{2};-2\pi\right)$; 3) $x \in \left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$.

9. Найти знак $\mathrm{tg}x$, если:

1) $x \in \left(-\frac{\pi}{2};0\right)$; 2) $x \in \left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$; 3) $x \in \left(-\frac{3\pi}{2};-\pi\right)$.

10. 1) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$ и $\alpha\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$;

2) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$ и $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$;

3) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{2}{3}$ и $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$;

4) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{-2\sqrt{2}}{3}$ и $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$;

5) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{-3\sqrt{5}}{7}$ и $\alpha\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$.

11. 1) $\sin\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{12}{5}$ и $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$;

2) $\sin\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{12}{35}$ и $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$;

3) $\cos\alpha$, если $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$ и $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$;

4) $\cos\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha=\frac{2\sqrt{10}}{3}$ и $\alpha\in\left(2\pi;\frac{5\pi}{2}\right)$;

5) $\sin\alpha$, если $\mathrm{ctg}\alpha=-\frac{\sqrt{39}}{5}$ и $\alpha\in\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$.

12. 1) Знак $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\alpha\in(\pi;2\pi)$;

2) знак $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\alpha\in(-\pi;0)$;

3) знак $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$;

4) знак $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$, если $\alpha\in(-3\pi;-2\pi)$.

13. 1) $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{15}{17}$ и $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$;

2) $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha=-\frac{24}{25}$ и $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$;

3) $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=\frac{31}{49}$ и $\alpha\in\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$;

4) $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=-\frac{21}{29}$ и $\alpha\in(2\pi;3\pi)$.

14. 1) $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=-\frac{1}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{3}$, $\pi<\alpha,\beta<\frac{3\pi}{2}$;

2) $\cos(\alpha-2\beta)$, если $\mathrm{ctg}\alpha=3$, $\mathrm{tg}\beta=-2$, $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$, $\beta\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$;

3) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, если $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$;

4) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$, если $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\alpha\in(3\pi;4\pi)$.

15. 1) $\cos 22{,}5°$; 2) $\sin 15°$; 3) $\mathrm{tg}\ 75°$; 4) $\sin 67{,}5°$.

16. Упорядочить по возрастанию тройки чисел.

1) $\cos 1$; $\cos 2$; $\cos 3$; 2) $\sin\frac{7\pi}{13}$; $\cos\frac{\pi}{12}$; $\sin 2$;

3) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$; $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{4}$; $\mathrm{tg}\frac{7\pi}{5}$; 4) $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{5}$; $\mathrm{ctg}\frac{7\pi}{4}$; $\mathrm{tg}\frac{2\pi}{5}$;

5) $\cos(-1)$; $\cos(4)$; $\sin(-3)$.

17. Найти расстояние между точками x_1 и x_2 на $\mathbb{R}$.

1) $x_1=\cos\frac{8\pi}{3}$; $x_2=\cos\frac{17\pi}{3}$;

2) $x_1=\sin\frac{17\pi}{12}$; $x_2=\sin\frac{61\pi}{12}$;

3) $x_1=\cos^2\frac{\pi}{12}$; $x_2=\sin^2\frac{\pi}{8}$;

4) $x_1=\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{12}$; $x_2=\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{12}$;

5) $x_1=\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{12}$; $x_2=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12}$.

18. Значение $\cos\alpha=0{,}2$. Вычислить значения выражений.

1) $2\sin\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)+3\cos(\alpha+5\pi)$; 2) $2\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;

3) $\sin^2\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)+4\cos^2\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)$; 4) $\sin\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)$;

5) $\cos\left(2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right)\sin\left(\alpha+\frac{7\pi}{2}\right)$.

Вычислить.

19. 1) $\frac{6\sin 35°\sin 55°}{\cos 20°}$; 2) $\frac{\sin 54°}{\cos 63°\sin 117°}$;

3) $\frac{\cos 35°+2\cos 85°}{\sqrt{3}\cos 55°}$; 4) $\frac{\sin 50°+2\sin 10°}{\cos 50°}$;

5) $\cos 195°\cos 105°+\sin 105°\cos 75°$.

20. 1) $\sin^4\frac{7\pi}{8}+\cos^4\frac{\pi}{8}$; 2) $\dfrac{\sqrt{3}+\mathrm{tg}\frac{11\pi}{12}}{1+\sqrt{3}\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}}$;

3) $\dfrac{\mathrm{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)}{\sin\frac{13\pi}{4}+1}$; 4) $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{3}}+\mathrm{tg}\frac{13\pi}{12}}{\sqrt{3}-\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}}$;

5) $\dfrac{\cos(2{,}9\pi)\mathrm{tg}(2{,}4\pi)\mathrm{tg}(1{,}1\pi)}{\cos(0{,}9\pi)}$.

21. 1) $(\sin 15° + \cos 15°)^2$; 2) $\sin 15°\cos 75°\sin^2 105°$;

3) $\dfrac{\sin^2 15°\cdot\sin 75°}{\cos 105°}$;

4) $\cos 15°+\cos 75°-\cos 105°-\cos 165°$; 5) $\dfrac{\sin 22°\cdot\sin 68°}{2\cos^2 23°-1}$.

Тождественные преобразования тригонометрических выражений

1. 1) $7\cos^2\alpha - 5 + 7\sin^2\alpha$; 2) $-4\sin^2\alpha + 7 - 4\cos^2\alpha$;

3) $\cos\alpha + \mathrm{tg}\alpha\sin\alpha$; 4) $\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

5) $1 - \sin\alpha\ \mathrm{ctg}\alpha\ \cos\alpha$; 6) $\dfrac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}$;

7) $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\mathrm{tg}^2\alpha$.

2. 1) $\dfrac{(\sin\alpha/2+\cos\alpha/2)^2}{1+\sin\alpha}$; 2) $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$;

3) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\cos(\pi/2-\alpha)}{\cos^2\alpha-1}$; 4) $\dfrac{\sin 5\alpha-\sin\alpha}{\cos 3\alpha}$; 5) $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$.

3. 1) $\cos^2(\pi-\alpha)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

2) $\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\sin^2(\pi+\alpha)$; 3) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos(\pi-\alpha)$;

4) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin(\pi-\alpha)$;

5) $\cos(\pi+\alpha)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

6) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos(4\pi-\alpha)}$; 7) $\dfrac{\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\alpha}$;

8) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{-1+\cos^2\alpha}$; 9) $\dfrac{\mathrm{tg}(3\pi+\alpha)}{\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$.

4. 1) $\sin 3\alpha \cos 2\alpha - \cos 3\alpha \sin 2\alpha$;

2) $\cos\frac{\alpha}{2}\cos 2\alpha + \sin\frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha$;

3) $\sin 5\alpha \cos 3\alpha - \sin 3\alpha \cos 5\alpha + \cos(2\pi - 2\alpha)$;

4) $\sin 4\alpha \sin 3\alpha - \cos 4\alpha \cos 3\alpha - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$;

5) $\sin 2{,}5\alpha \cos 1{,}5\alpha + \sin 1{,}5\alpha \cos 2{,}5\alpha + \cos(\pi + \alpha)$;

6) $\sin 2\alpha \sin 4\alpha - \cos 2\alpha \cos 4\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;

7) $\cos 5\alpha \sin 4\alpha - \sin 5\alpha \cos 4\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

5. 1) $\sin 22{,}5°\cos 22{,}5°$; 2) $\sin 15°\cos 15°$;
3) $\sin^2 75° - \cos^2 75°$; 4) $\cos^2 67{,}5° - \sin^2 67{,}5°$.

6. 1) $\sin 13°\cos 47° + \sin 47°\cos 13°$;
2) $\cos 27°\cos 63° - \sin 27°\sin 63°$;
3) $\sin 68°\cos 23° - \sin 23°\cos 68°$;
4) $\cos 103°\cos 43° + \sin 103°\sin 43°$;
5) $\sin 48°\cos 72° + \cos 48°\sin 72°$;
6) $\cos 53°\cos 82° - \sin 53°\sin 82°$;
7) $\sin 13°\cos 58° - \cos 13°\sin 58°$;
8) $\cos 24°\cos 54° + \sin 24°\sin 54°$.

7. 1) $\dfrac{\sin 20° + \cos 290°}{2\sin 10°\cos 10°}$; 2) $\dfrac{\sin 40° + \cos 310°}{\sin 20°\cos 20°}$;

3) $\dfrac{2(\cos^2 80° - \sin^2 80°)}{\cos 160° - \sin 110°}$; 4) $\dfrac{2(\cos^2 20° - \sin^2 20°)}{\cos 40° - \sin 230°}$.

8. Упростить выражения, преобразовав их произведения.
1) $\sin^2 x - 2\sin x - 3$; 2) $\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 5\cos^2 x$;
3) $\sin 2x - \cos 3x - 4\cos x$; 4) $\cos(5x + 1) - \cos(x - 1)$;
5) $\cos^3 x - \sin^3 x$.

9. Доказать тождества.

1) $\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$;

2) $\sin^2 3\alpha - \sin^2 2\alpha = \sin 5\alpha \sin\alpha$;

3) $\dfrac{\sin 2\alpha\,(1 + \mathrm{tg}\,2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha)\cdot(1 + \sin\alpha)}{1 - \sin\alpha} = \mathrm{tg}\,2\alpha \cdot \mathrm{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right)$;

4) $\mathrm{ctg}^2\alpha - \mathrm{ctg}^2\beta = \dfrac{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}{\sin^2\alpha\,\sin^2\beta}$;

5) $\dfrac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \dfrac{\sin x + \cos x}{\mathrm{tg}^2 x - 1} = \sin x + \cos x$;

6) $\dfrac{1 + \sin 2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} - \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \sin\alpha$;

7) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}$;

8) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$;

9) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)-\sin^3\left(\frac{7}{2}\pi-\alpha\right)}{\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}=\sin^2\alpha$;

10) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha)}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha)}-2\cos(135^\circ+\alpha)\cos(315^\circ-\alpha)=0$;

11) $\sqrt{2}\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)\right)=\sin 2\alpha$.

Упростить выражение

10. $\dfrac{\sin(\alpha+3\beta)+\sin(\alpha-3\beta)}{\sin(\alpha+3\beta)-\sin(\alpha-3\beta)}\operatorname{ctg}\alpha$.

11. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$.

12. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)}$.

13. 1) $\dfrac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}$; 2) $\dfrac{\sin 2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\cos 2\alpha\operatorname{tg}\alpha}$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2 60^\circ}{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2 60^\circ}-3\operatorname{tg}3\alpha\operatorname{ctg}\alpha$; 4) $\dfrac{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}-\operatorname{tg}\alpha$.

14. 1) $\dfrac{\sin 38^\circ+\sin 22^\circ}{\cos 8^\circ}$; 2) $\dfrac{\cos 41^\circ-\cos 49^\circ}{\sin 4^\circ}$;

3) $\dfrac{\sin 70^\circ-\cos 40^\circ}{\cos 50^\circ+\cos 110^\circ}$; 4) $\dfrac{\sin 74^\circ-\cos 74^\circ}{\sin 89^\circ-\cos 59^\circ}$;

5) $\dfrac{2\cos 40^\circ-\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ}$.

15. 1) $2\cos 20^\circ\cos 40^\circ-\cos 20^\circ$;

2) $\sin 10^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ$;

3) $4\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ$.

16. 1) $\dfrac{\sin x-\cos x-\cos 2x}{\sin x-\cos x}$;

2) $\dfrac{1+\sin 2x\cos 2x+\sin 2x+\cos 2x}{\cos^2 x}$;

3) $\dfrac{\cos^2 3x-\cos^2 5x}{\sin 8x}$;

4) $\dfrac{\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x}{\cos^4 x-6\sin^2 x\cos^2 x+\sin^4 x}$;

5) $\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\cos x}$.

17. Сократить дроби.

1) $\dfrac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x}$;

2) $\dfrac{(1-\mathrm{tg}^2 x)(1+\cos 2x)}{\cos 2x}$;

3) $\dfrac{\sin 2x+\sin 4x-\sin 6x}{\sin x\sin 2x}$;

4) $\dfrac{\sin x+\sin 3x}{\cos^2 x}$;

5) $\dfrac{\sin 2x(1+2\cos 2x)}{\sin 3x}$.

7. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ
7.1.Определения и понятия

Определение 1: **Синусом** числа α называется ордината точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α радиан. (sinα)

Определение 2: **Косинусом** числа α называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α радиан.(cosα)

Определение 3: **Тангенсом** числа α называется отношение синуса числа α к его косинусу.(tgα)

$$\mathbf{tg\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Определение 4: **Котангенсом** числа α называется отношение косинуса числа α к его синусу. (ctgα)

$$\mathbf{ctg\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Определение: Функции y=sinα, y=cosα, y=tgα, y=ctgα называют тригонометрическими функциями.

Определение: Единичной (тригонометрической) окружностью называется окружность с центром в начале координат, радиуса 1.

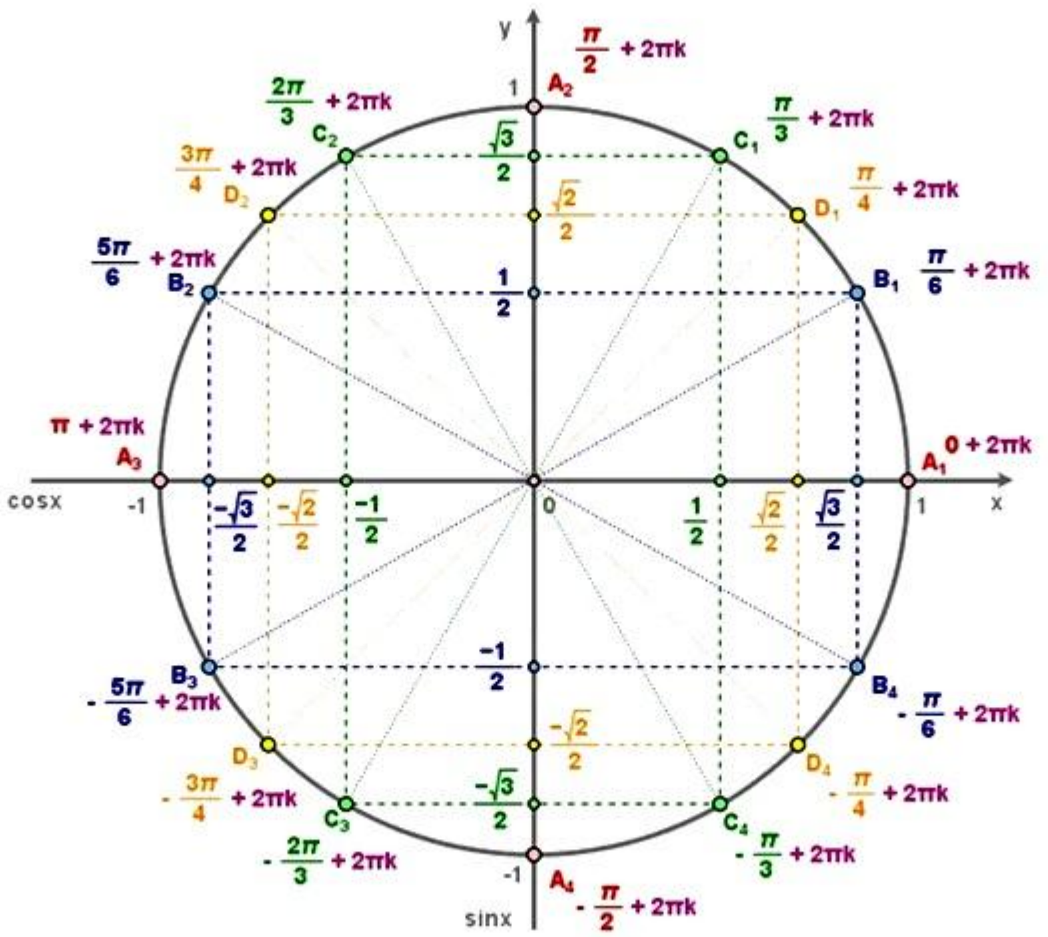


Таблица значений тригонометрических функций

α	радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	градусы	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
sin α		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos α		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg α		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
ctg α		-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

Знаки тригонометрических функций

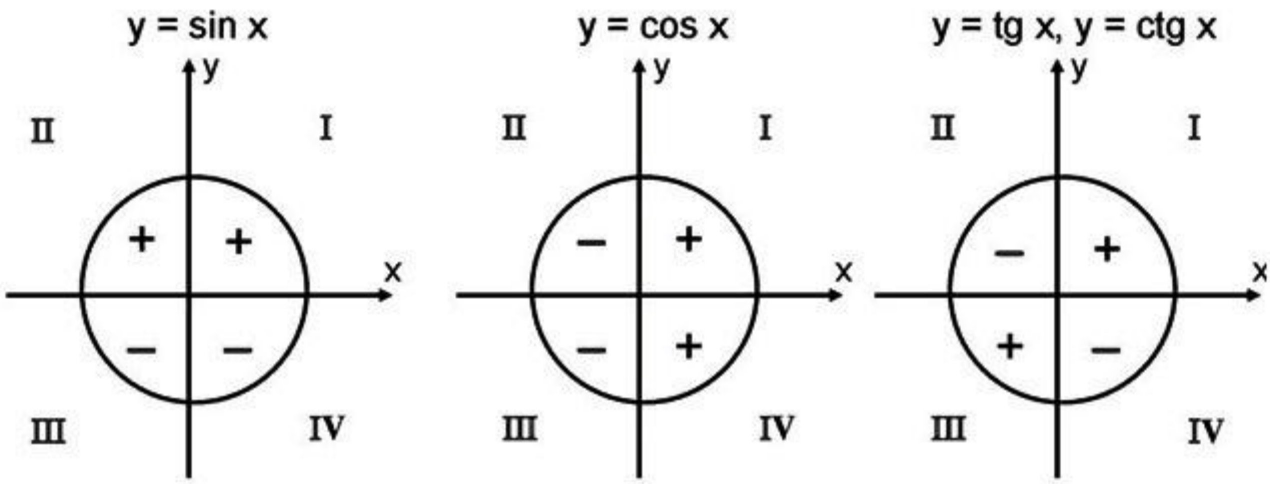


Таблица приведения

Функция α	Аргумент α							
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
sin α	cos α	cos α	sin α	−sin α	−cos α	−cos α	−sin α	sin α
cos α	sin α	−sin α	−cos α	−cos α	−sin α	sin α	cos α	cos α
tg α	ctg α	−ctg α	−tg α	tg α	ctgα	−ctg α	−tg α	tg α
ctg α	tg α	−tg α	−ctg α	ctg α	tg α	−tg α	−ctg α	ctg α

Основные формулы тригонометрии

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$$\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha = 1$$

***

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

Чётность и нечётность тригонометрических функций

Определение: Функция f(x) называется чётной, если для каждого x из области определения этой функции выполняется равенство:

f(-x)=f(x)

Свойство: График чётной функции симметричен относительно оси ординат.

Определение: Функция f(x) называется нечётной, если для каждого x из области определения этой функции выполняется равенство:

f(-x)=-f(x)

Свойство: График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

y = sin x. ***Функция нечетная.***

1) $(-x) \in D(y)$.

2) $y(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -y(x)$.

y = cos x . ***Функция четная.***

1) $(-x) \in D(y)$.

2) $y(-x) = \cos(-x) = \cos x = y(x)$.

y= tg x. ***Функция нечетная.***

1) $(-x) \in D(y)$.

2) $y(-x) = \mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\,x = -y(x)$.

y= ctg x. ***Функция нечетная.***

1) $(-x) \in D(y)$.

2) $y(-x) = \mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\,x = -y(x)$.

Периодичность тригонометрических функций

Определение: Функция f(x) называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, что для любого x из области определения этой функции выполняется равенство: $f(x-T)=f(x)=f(x+T)$. Число T называют периодом функции $f(x)$.

Формулы сложения

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$$

Тригонометрические функции двойного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$tg\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

Тригонометрические функции половинного аргумента

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{2}$$

Преобразование суммы и разности тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -\ 2 \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

7.2. Базовые тригонометрические функции

Функция y=sinx

Основные свойства:

1) Область определения – множество R всех действительных чисел;

2) Множество значений – отрезок[-1;1];

3) Функция *y=sinx* – периодическая с периодом 2π, т.е. *sin(x+2π)=sinx*

4) Функция *y=sinx* - нечётная, т.е.*sin(-x)=-sinx*

5) Функция *y=sinx*:

возрастает на отрезках $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right], n\in Z$

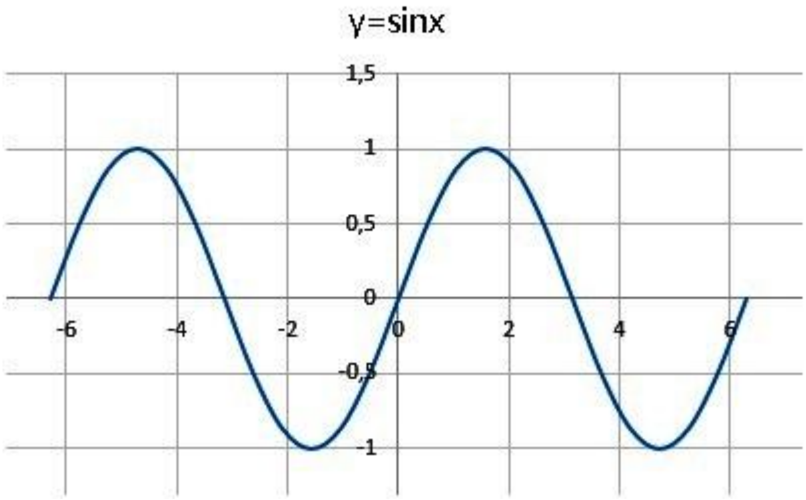
убывает на отрезках $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right], n\in Z$

6) Функция *y=sinx* принимает

Наибольшее значение, равное 1, при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$

Наименьшее значение, равное –1, при $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$

Значение равное нулю, при $x=\pi n, n\in Z$



Функция y=cosx

Основные свойства:

1) Область определения – множество R всех действительных чисел;

2) Множество значений – отрезок[-1;1];

3) Функция *y=cosx* – периодическая с периодом 2π, т.е. $cos(x+2\pi)=cosx$

4) Функция *y=cosx* чётная, т.е.$cos(-x)=cosx$

5) *Функция y=cosx*:

возрастает на отрезках $[-\pi+2\pi n;2\pi n], n\in Z$

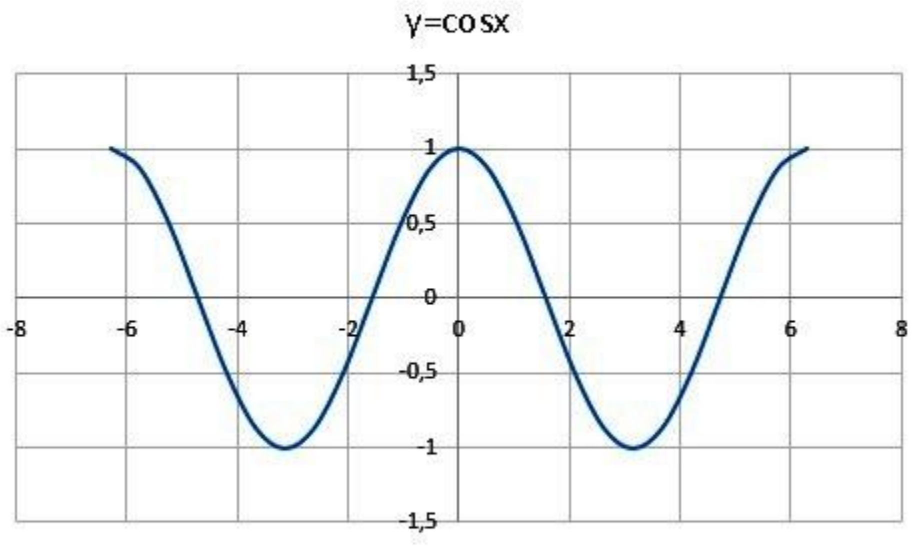
убывает на отрезках $[2\pi n;\pi+2\pi n], n\in Z$

6) Функция *y=cosx* принимает

Наибольшее значение, равное 1, при $x=2\pi n, n\in Z$

Наименьшее значение, равное –1, при $x=\pi+2\pi n, n\in Z$

Значение равное нулю, при $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$



Функция y=tgx и его основные свойства

1) Область определения – множество R всех действительных чисел, кроме чисел $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n \in Z$;

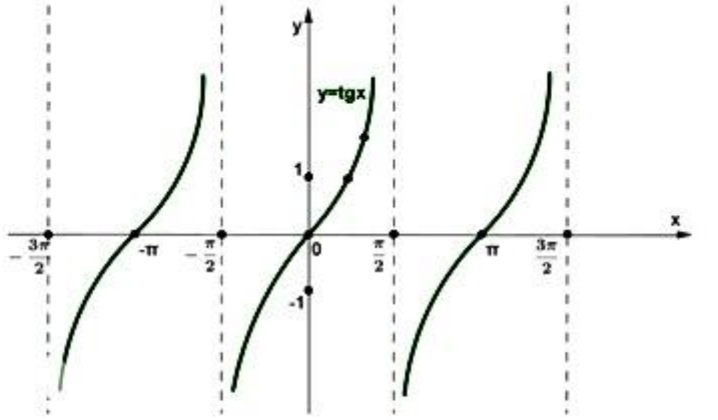
2) Множество значений – множество R всех действительных чисел;

3) Функция *y=tgx* – периодическая с периодом π, т.е. *tg(x+2π)=tgx*

4) Функция *y=tgx* нечётная, т.е.*tg(-x)=-tgx*

5) Функция *y=tgx* возрастает на интервалах$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right) n \in Z$

6) Функция *y=tgx* принимает значение равное нулю, при $x=\pi n, n \in Z$

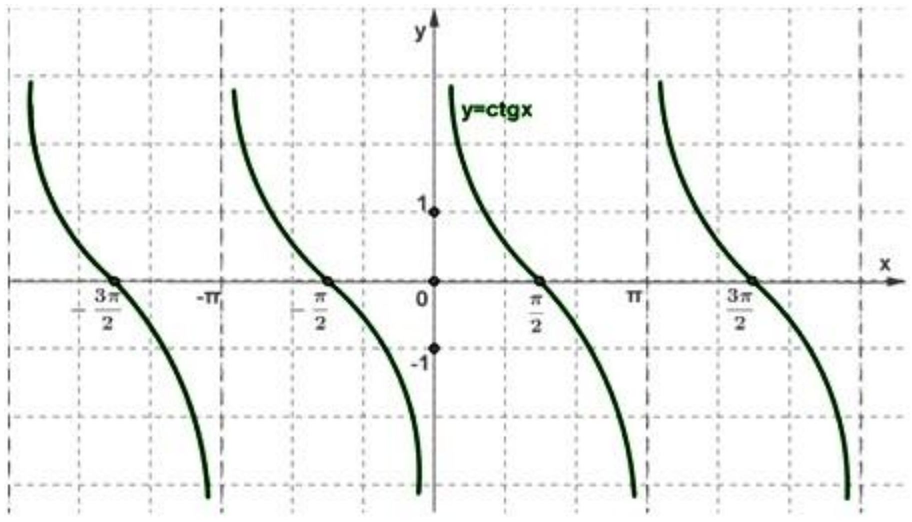


Функция y=ctgx и его основные свойства

1. Область определения -- множество всех действительных чисел *x≠πn, n∈Z.*
2. Множество значений – множество R всех действительных чисел.
3. Функция *y=ctgx*периодическая с периодом π.
4. Функция *y=ctgx* нечётная.
5. Функция *y=ctgx* принимает: значение *0 при x=π2+πn,n∈Z;*

- положительные значения на интервалах (πn;π2+πn),n∈Z;
- отрицательные значения на интервалах (−π2+πn;πn),n∈Z.

6. Функция y=ctgx убывает на интервалах (πn;π+πn),n∈Z



7.3. Примеры и упражнения

Пример 1: Найти значение выражения:

1) $3\sin\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}-tg\frac{\pi}{3}=3\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=\frac{3}{2}+\frac{2\cdot\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}==\frac{3}{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}=\frac{3}{2}$

2) $3\cos180^o+5ctg270^o-2\sin360^o=3\cdot(-1)+5\cdot0-2\cdot1==-3+0-2=-5$

3) $2\sin(-30^o)=-2\sin30^o=-2\cdot\frac{1}{2}=-1$

4) $4\cos(-\frac{\pi}{6})\cdot\sin(-\frac{\pi}{3})+tg(-\frac{\pi}{4})=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2})+(-1)=-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-1=-3-1=4$

5) $Sin73^o\cdot\cos17^o+\cos73^o\cdot\sin17^o=\sin(73^o+17^o)==\sin90^o=1$

6) $\cos\frac{7\pi}{9}\cdot\cos\frac{11\pi}{9}-\sin\frac{7\pi}{9}\cdot\sin\frac{11\pi}{9}=\cos(\frac{7\pi}{9}+\frac{11\pi}{9})=\cos\frac{18\pi}{9}=\cos2\pi=1$

7) $2\cdot\sin15^o\cdot\cos15^o=Sin2\cdot15^o=Sin30^o=\frac{1}{2}$

8) $\cos^2 75^o-\sin^2 75^o=Cos2\cdot75^o=Cos150^o=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

9) $Cos105^o+\cos75^o=2\cdot\cos\frac{105^\circ-75^\circ}{2}\cdot\cos\frac{105^\circ+75^\circ}{2}=2\cdot\cos15^o\cdot\cos90^o=2\cdot\cos15^o\,0=0$

10) $Sin300^o+\sin60^o=2\cdot\sin\frac{300^\circ+60^\circ}{2}\cdot\cos\frac{300^\circ-60^\circ}{2}=2\cdot\sin180^o\cdot\cos120^o=2\cdot0\cos120^o=0$

Пример 2: *Вычислить cosα,tgα,ctgα, если* $\sin\alpha=\frac{3}{5},\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

Решение:

Определим знак:

интервал	Четверть	Знак Sinα	Знак cosα	Знак tgα	Знак ctgα
$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$	Вторая	+	-	-	-

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}=(\cos\alpha имеет знак-)$$

$$=-\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=$$

$$=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$$

$$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$$

$$ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$$

Ответ: $cos\alpha=\frac{4}{5}$ $,tg\alpha=-\frac{3}{4}$ $,ctg\alpha=-\frac{4}{3}$

Пример 3: Вычислить *sinα,cosα,tgα, если ctgα=-3,* $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

Решение: *Определим знак:*

интервал	*четверть*	*Знак sinα*	*Знак cosα*	*Знак tgα*	*Знак ctgα*
$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$	*IVч.*	-	+	-	-

$$tg\alpha=\frac{1}{ctg\alpha}=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}=(\cos\alpha\text{имеетзнак}+)=+\frac{1}{\sqrt{1+(-3)^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=(\sin\alpha\text{имеетзнак}-)=-\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{10}})^2}=-\sqrt{1-\frac{1}{10}}=$$

$$=-\sqrt{\frac{9}{10}}=-\frac{3}{\sqrt{10}}$$

Ответ: sinα=- $\frac{3}{\sqrt{10}}$ **,** ***cosα=*** $\frac{1}{\sqrt{10}}$ **,** ***tgα=-*** $\frac{1}{3}$

Пример 4: *Упростить*

1) *(1-sinα)·(1+sinα)=1+sinα-sinα-sin2α=1-sin2α=sin2α+cos2α-sin2α=cos2α*

2) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-1$ *=1+tg2α-1=tg2α*

3) $\frac{1+tg^2\alpha}{1+ctg\ \alpha}=\frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}}{\frac{1}{\sin^2\alpha}}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=tg^2\alpha$

4) *sin(-α)·cos(-α)·tg(-α)=-sinα·cosα·(-tgα)=sinα·cosα·tgα=*

=sinα·cosα· $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ *=sinα·sinα=sin2α*

5) *(1-sin(-α))·(1-sinα)=(1+sinα)·(1-sinα)=1+sinα-sinα-sin2α==1-sin2α=*

=sin2α+cos2α-sin2α=cos2α

6) *Sin(π – α)·cos(* $\frac{\pi}{2}$ *-α)-cos(π – α)·sin(* $\frac{\pi}{2}$ *-α)=*

sinα·sinα-(-cosα)·cosα== sin2α+cos2α=1

7) $$\frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\cos^2(\pi-\alpha)}{tg(\pi+\alpha)}=\frac{\sin^2\alpha+(-\cos\alpha)^2}{tg\alpha}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{tg\alpha}=\frac{1}{tg\alpha}$$

7.4. Варианты контрольной работы

Задание 1: *Найти значение выражения*

Вариант 1:

1) $12\cos 2\pi - 16\sin\pi + 13\cos 0 - 14\sin\frac{\pi}{2}$

2) $\sin 155^o - \sin 25^o$

Вариант 2:

1) $9\sin\pi + 10\cos 2\pi - 11\sin\frac{\pi}{2} + 12\cos 0$

2) $2\sin 75^o \cdot \cos 75^o$

Вариант 3:

1) $3\sin^2 120^o - 4\cos 180^o + 3tg 135^o$

2) $\sin 20^o \cdot \cos 10^o + \cos 20^o \cdot \sin 10^o$

Вариант 4:

1) $2\cos^2 150^o - 3\sin 90^o - 5ctg 135^o$

2) $\cos 100^o + \cos 80^o$

Вариант 5:

1) $3\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3} - tg\frac{\pi}{3}$

2) $\cos^2 135^o - \sin^2 135^o$

Вариант 6:

1) $4\cos\frac{\pi}{4} - 5\cos\frac{\pi}{4}\cdot tg\frac{\pi}{4}$

2) $\cos 20^o \cdot \cos 40^o - \sin 20^o \cdot \sin 40^o$

Вариант 7:

1) $ctg\frac{\pi}{4}\cdot tg\frac{\pi}{4} - 2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{4}$

2) $2\sin 135^0 \cos 135^0$

Вариант 8:

1) $5\cos\frac{\pi}{6} - 4\sin\frac{\pi}{3} + ctg\frac{\pi}{6}$

2) $\frac{2tg 75}{1 - tg^2 75}$

Вариант 9:

1) $\cos 60^o + 2\sin 30^o + \frac{1}{2} tg^2 60^o - ctg 45^o$

2) $\cos 100^o + \cos 80^o$

Вариант 10:

1) $3\cos^2 180^o + 5ctg 270^o - 2\sin 360^o - tg 60^o$

2) $\sin 155^o - \sin 25^o$

Вариант 11:

1) $\cos\frac{\pi}{4} + tg\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}$

2) $\cos\frac{8\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}\cdot\sin\frac{\pi}{7}$

Вариант 12:

1) $2\cos 60^o - tg 45^o$

2) $Sin 73^o \cdot \cos 17^o - \cos 73^o \cdot \sin 17^o$

Вариант 13:

1) $2tg 45^o + 5ctg 270^o - 3\sin 180^o$

2) $Sin 105^o - \sin 75^o$

Вариант14:

1) $4ctg(-45^o)\cdot\sin(-30^o)\cdot\cos(-\frac{\pi}{3})$

2) $Cos 105^o + \cos 165^o$

Вариант 15:

1) $2\cos\frac{\pi}{6} + 4\sin\frac{5\pi}{6} - 3ctg\frac{\pi}{3}$

2) $2\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}$

Вариант 16:

1) $6\cos(-2\pi)\cdot\sin(-\frac{\pi}{6})\cdot tg(-45^o)$

2) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$

Вариант 17:

1) $3\sin\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}-tg\frac{\pi}{3}$

2) $Sin40^o\cdot cos5+cos40^o\cdot sin5^o$

Вариант 18:

1) $Sin\frac{\pi}{4}-cos\frac{\pi}{4}+14tg2\pi$

2) $Cos7^o\cdot cos38^o-sin7^o\cdot sin38^o$

Вариант19:

1) $tg\frac{\pi}{3}\cdot cos\frac{\pi}{6}\cdot sin\frac{3\pi}{2}$

2) $cos18^o\cdot cos12^o-sin18^o\cdot sin12^o$

Вариант 20

1) $2sin60^o+8cos30^o-12ctg30^o+8tg60^o$

2) $sin20^o\cdot sin40^o-cos20^o\cdot cos40^o$

Вариант 21:

1) $3sin^2 30^o+5cos180^o-6tg135^o$

2) $Sin5^o\cdot cos35^o-cos5^o\cdot sin35^o$

Вариант 22:

1) $4cos^2 60^o-6cos360^o+3tg^2 30^o$

2) $Sin80^o\cdot cos105^o+cos80^o\cdot sin10^o$

Вариант 23:

1) $2cos\frac{\pi}{6}+4sin\frac{5\pi}{6}-3ctg\frac{\pi}{3}$

2) $Sin55^o\cdot sin10^o+cos55^o\cdot cos10^o$

Вариант 24:

1) $13sin180^o+5tg270^o-2sin360^o$

2) $Sin\frac{\pi}{3}\cdot cos\frac{\pi}{6}+cos\frac{\pi}{3}\cdot sin\frac{\pi}{6}$

Вариант 25:

1) $sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)tg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

2) $cos20^o\cdot cos40^o-sin20^o\cdot sin40^o$

Вариант 26:

1) $sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)tg\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

2) $sin20^o\cdot cos10^o+cos20^o\cdot sin10^o$

Вариант 27:

1) $tg\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

2) $sin155^o-sin25^o$

Вариант 28:

1) $2tg(-45^o)\cdot cos(-30^o)\cdot sin(-\frac{\pi}{6})$

2) $cos100^o+cos80^o$

Вариант 29:

1) $\sqrt{3}\,sin\frac{\pi}{3}+4cos\frac{\pi}{3}-3ctg4$

2) $Cos105^o+cos165^o$

Вариант 30:

1) $5cos(-\pi)\cdot cos(-\frac{\pi}{3})\cdot ctg(-45^o)$

2) $Sin105^o-sin75^o$

Задание 2: Найти остальные тригонометрические функции

Вариант 1:

1) *sinα=-0,6* $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

2) *tgα=6* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Вариант 2:

1) *cosα=-*$\frac{12}{13}$ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

2) *ctgα=9* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Вариант 3:

1) *sinα=, 0<α<*$\frac{\pi}{2}$

2) *tgα=4,*$\frac{\pi}{2}$*<α<π*

Вариант 4:

1) *cosα=-*$\frac{12}{13}$*,π<α<*$\frac{3\pi}{2}$

2) *ctgα=5,* $\frac{\pi}{2}$*<α<π*

Вариант 5:

1) *sinα=-0,8,* $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

2) *tgα=5* $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

Вариант 6:

1) $\sin\alpha = 0{,}8;$ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

2) $tg\alpha = 10;$ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Вариант 7:

1) $\cos\alpha = -0{,}8;$ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

2) $ctg\alpha = 2;$ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Вариант 8:

1) *sinα=-0,8 ,* $\frac{\pi}{2}$*<α<π*

2) *tgα=8, 0<α<*$\frac{\pi}{2}$

Вариант 9:

1) *cosα=-*$\frac{5}{13}$*,π<α<*$\frac{3\pi}{2}$

2) *ctgα=2,* $\frac{\pi}{2}$*<α<π*

Вариант 10:

1) *sinα=-*$\frac{3}{5}$*,* $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

2) *ctgα=-3,* $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Вариант 11:

1) *sinα=0,6* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

2) *tgα=4* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Вариант 12:

1) *cosα=-0,6,* $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

2) *ctgα=5,* $\frac{\pi}{2}$*<α<π*

Вариант 13:

1) *cosα=-*$\frac{12}{13}$ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

2) *ctgα=9,* $\frac{\pi}{2}$*<α<π*

Вариант14:

1) *sinα=*$\frac{3}{5}$*, 0<α<*$\frac{\pi}{2}$

2) *ctgα=12,* $\frac{\pi}{2}$*<α<π*

Вариант 15:

1) *cosα=-0,6,* $\frac{\pi}{2}$*<α<π*

2) *tgα=13,* $\frac{\pi}{2}$*<α<π*

Вариант 16:

1) *cosα=-*$\frac{12}{13}$*, π<α<*$\frac{3\pi}{2}$

2) *tgα=15,* $\frac{\pi}{2}$*<α<π*

Вариант 17:

1) *cosα=-*$\frac{12}{13}$ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

2) *ctgα=9* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Вариант 18:

1) *sinα=, 0<α<*$\frac{\pi}{2}$

2) *tgα=4,*$\frac{\pi}{2}$*<α<π*

Вариант 19:

1) $\cos\alpha=-\frac{12}{13}, \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

2) $ctg\alpha=5, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

Вариант 20:

1) $\sin\alpha=-0,8, \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

2) $tg\alpha=5 \quad \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

Вариант 21:

1) $\sin\alpha=\frac{3}{5}, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

2) $ctg\alpha=12, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

Вариант 22:

1) $\sin\alpha=-\frac{3}{5}, \frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

2) $ctg\alpha=-3, \frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

Вариант 23:

1) $\cos\alpha=-\frac{5}{13}, \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

2) $ctg\alpha=2, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

Вариант 24:

1) $\sin\alpha=0,8; \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

2) $tg\alpha=10; 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

Вариант 25:

1) $\sin\alpha=-0,8, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

2) $tg\alpha=8, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

Вариант 26:

1) $\cos\alpha=-0,8; \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

2) $ctg\alpha=2; 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

Вариант 27:

1) $\sin\alpha=0,6 \quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

2) $tg\alpha=4 \quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

Вариант 28:

1) $\cos\alpha=-\frac{12}{13}, \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

2) $tg\alpha=15, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

Вариант 29:

1) $\cos\alpha=-0,6, \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

2) $ctg\alpha=5, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

Вариант 30:

1) $\cos\alpha=-\frac{12}{13} \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

2) $ctg\alpha=9, \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

Задание 3: Упростить выражение

Вариант 1: $\frac{1}{\cos^2\alpha} - tg^2\alpha - \sin^2\alpha$

Вариант 2: $\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha - 1}$

Вариант 3: $\frac{1-2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha - 1}$

Вариант 4: $\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}\cdot ctg^2\alpha$

Вариант 5: $\frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)\cdot\cos(2\pi+\alpha)}{tg(\pi-\alpha)\cdot\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}$

Вариант 6: $\sin^2\alpha - tg\alpha\cdot ctg\alpha + \cos^2\alpha$

Вариант 7: $(tg\alpha\cdot ctg\alpha + ctg^2\alpha)\cdot\cos\alpha$

Вариант 8: $\frac{1}{\cos^2\alpha} - tg^2\alpha$

Вариант 9: $(tg\alpha\cdot ctg\alpha + tg^2\alpha)\cdot\sin\alpha$

Вариант 10: $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)\cdot\cos(2\pi-\alpha)}{tg(\pi+\alpha)\cdot\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}$

Вариант 11: $\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$,

Вариант 12: $(1-\sin^2\alpha)\cdot(1+tg^2\alpha)$

Вариант 13: $\frac{\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha - 1}{tg^2\alpha}$

Вариант14: $(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-1$

Вариант 15: $1+\sin(\pi+\alpha)\cdot\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)$

Вариант 16: $\frac{\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)-\cos(\pi+\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\sin(\pi+\alpha)}$

Вариант 17: $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(tg\alpha+ctg\alpha)$

Вариант 18: $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$

Вариант19: $\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}\cdot ctg^4\alpha$

Вариант 20: $\frac{ctg\alpha}{tg\alpha} + tg\alpha\cdot ctg\alpha$

Вариант 21: $1-\cos^2\alpha$

Вариант22:

$$\frac{\sin(\pi-\alpha)+\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)+ctg(\pi-\alpha)}{tg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}$$

Вариант23:

$$\frac{\sin^2(\pi+\alpha)+\sin^2(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}\cdot ctg(\frac{3\pi}{2}-\alpha)$$

Вариант 24: $\frac{\sin(\frac{3\pi}{2}+\alpha)}{ctg(2\pi-\alpha)}\cdot\frac{tg(\frac{\pi}{2}+\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)}$

Вариант 25: $\frac{\sin\alpha}{tg\alpha}$

Вариант26:

$$\frac{ctg(\frac{\pi}{2}-\alpha)-tg(\pi+\alpha)+\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}$$

Вариант 27: $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-ctg^2\alpha$

Вариант 28: $tg\alpha\cos\alpha$

Вариант 29: $1+tg^2\alpha+\frac{1}{\sin^2\alpha}$

Вариант 30: $(1-\cos\alpha)\cdot(1+\cos\alpha)$

8. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ
8.1. Определения и понятия

<u>Определение:</u> Арксинусом числа a∈[-1;1] называется такое число α∈[$-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}$], синус которого равен a.

Обозначение: *arcsina* , $-\frac{\pi}{2} \le arcsina \le \frac{\pi}{2}$

Определение: *arcsina=α ↔ sinα= a*

Свойства: *1) sin(arcsina)=a*

2) arcsin(sinα)=α

3) arcsin(-a)=- arcsina

Таблица значений arcsina

a	*0*	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	*1*
arcsina	*0*	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Определение: *Арккосинусом числа a промежутка [-1;1] называется такое число α из промежутка [0;π], косинус которого равен a.*

Обозначение: *arccosa* , $0 \le arccosa \le \pi$

Определение: *arccosa = α ↔ cosα = a*

Свойства: *1) cos(arccosa)=a*

2) arccos(cosα)=α

3) arccos(-a)=π- arccosa

Таблица значений arccosa

a	*0*	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}})$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	*1*
arccosa	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	*0*

Арктангенс числа

<u>Определение:</u>_Арктангенсом числа $a \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ называется такое число α, тангенс которого равен a._

Обозначение:_arctga ,_ $-\frac{\pi}{2} \le arccosa \le \frac{\pi}{2}$

Определение:_arctga = α ↔ tgα = a_

Свойства: _1) tg(arctga)=a_

2) arctg(tgα)=α

3) arctg(-a)=- arctga

Таблица значений arctga

a	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
arctga	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Определение 1. Тригонометрическим уравнением называется уравнение, содержащее переменную под знаком тригонометрических функций.

Простейшие тригонометрические уравнения - это уравнения вида

$\sin x = a, \cos x = a, \operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a$.

В таких уравнениях переменная находится под знаком тригонометрической функции, а - данное число.

Каждое из таких уравнений решается по формулам, которые следует знать. Вот эти формулы:

$$(\sin x = a) \Leftrightarrow x = \arcsin a + 2\pi n$$

$$x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(\cos x = a) \Leftrightarrow x = \arccos a + 2\pi n$$

$$x = -\arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(\operatorname{tg} x = a) \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi n$$

$$(\operatorname{ctg} x = a) \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k, \ k \in Z,$$
$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \pi/2 + 2\pi k, \ k \in Z,$$
$$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\pi/2 + 2\pi k, \ k \in Z.$$
$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \pi/2 + \pi k, \ k \in Z,$$
$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k, \ k \in Z,$$
$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k, \ k \in Z.$$
$$tgx = 0 \Rightarrow x = \pi k, \ k \in Z,$$
$$tgx = 1 \Rightarrow x = \pi/4 + \pi k, \ k \in Z,$$
$$tgx = -1 \Rightarrow x = -\pi/4 + \pi k, \ k \in Z.$$
$$ctgx = 0 \Rightarrow x = \pi/2 + \pi k, \ k \in Z,$$
$$ctgx = 1 \Rightarrow x = \pi/4 + \pi k, \ k \in Z,$$
$$ctgx = -1 \Rightarrow x = 3\pi/4 + \pi k, \ k \in Z.$$

При решении тригонометрических уравнений все задачи сводятся к тому, чтобы привести к такому виду, чтобы слева стояла элементарная тригонометрическая функция, а справа - число. После того, как это будет достигнуто, следует найти значение аргумента функции, используя одну из основных формул выражения аргумента через обратные тригонометрические функции.

Решение тригонометрических уравнений. Поскольку каждому значению тригонометрической функции соответствует неограниченное множество углов, то тригонометрическое уравнение, если не сделано каких-либо оговорок, имеет бесчисленное множество решений.

Самый общий метод решения тригонометрических уравнений состоит в том, что различные тригонометрические функции, входящие в уравнение, выражают через какую-нибудь одну из них и, принимая функцию за неизвестное, решают полученное алгебраическое уравнение, в результате чего приходят к одному из так называемых простейших тригонометрических уравнений вида:

sinx=a ***x=b***

tgx=c ***x=d***

где a, b, c, d - числа. a - угол, содержащийся в промежутке от - π/2 до π/2, синус которого равен a. b - угол, содержащийся в промежутке от 0 до π, косинус которого равен b. c - угол, содержащийся в промежутке от - π/2 до π/2, тангенс которого равен c.

d - угол, содержащийся в промежутке от 0 до π, котангенс которого равен d.

Решение произвольного тригонометрического уравнения, как правило, сводится к решению одного или нескольких простейших уравнений. Одной из основных идей решения является идея, общая для всех типов уравнений,- переход от одного уравнения к уравнению-следствию или равносильному уравнению (или их системе либо совокупности), от него к следующему и т. д., пока не придем к простейшим уравнениям, из которых получаем решение исходного уравнения. При переходе используются как общие методы (пригодные для любого типа уравнений), так и частные, основанные на использовании формул тождественных преобразований тригонометрических выражений.

Рекомендации по решению тригонометрических уравнений.

1. Если аргументы функций одинаковые, попробовать получить одинаковые функции, использовав формулы без изменения аргументов.
2. Если аргументы функций отличаются в два раза, попробовать получить одинаковые аргументы, использовав формулы двойного аргумента.
3. Если аргументы функций отличаются в четыре раза, попробовать их привести к промежуточному двойному аргументу.
4. Если есть функции одного аргумента, степени свыше первой, попробовать понизить степень, используя формулы понижения степени или формулы сокращенного умножения. Например,

$$\sin^4 x + \cos^4 x =$$
$$\sin^3 5x - \cos^3 5x =$$

5. Если есть сумма одноименных функций первой степени с разными аргументами (вне случаев 2,3), попробовать преобразовать сумму в произведение для появления общего множителя.
6. Если есть сумма разноимённых функций первой степени с разными аргументами (вне случаев 2, 3), попробовать использовать формулы приведения, получить затем случай 5.
7. . Если в уравнении есть произведение косинусов (синусов) различных аргументов, попробовать свести его к формуле синус двойного аргумента, умножив и разделив это выражение на синус (косинус) подходящего аргумента:

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = \frac{2\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x}{2\sin x} = \ldots$$

8. Если в уравнении есть числовое слагаемое (множитель), то его можно представить в виде значений функции угла. Например:

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$$

П р и м е р. Решить уравнение: $2\cos^2(x+\pi/6) - 3\sin(\pi/3 - x) + 1 = 0$.

Р е ш е н и е. Используя формулы приведения, имеем:

$$2\cos^2(x+\pi/6) - 3\cos(x+\pi/6) + 1 = 0,$$

делаем замену: $\cos(x+\pi/6) = y$, тогда $2y^2 - 3y + 1 = 0$,

находим корни: $y_1 = 1$, $y_2 = 1/2$, откуда следуют два случая:

1). $\cos(x+\pi/6) = 1$, 2). $\cos(x+\pi/6) = 1/2$,

$x + \pi/6 = 2\pi k$, $x + \pi/6 = \pm\arccos(1/2) + 2\pi n$,

$x_1 = -\pi/6 + 2\pi k$; $x_2 = \pm\pi/3 - \pi/6 + 2\pi n$.

8.2. Примеры и упражнения

Пример 1: Найти значение выражения:

1) $arcsin1 - arcsin(-1) + arcsin(\frac{1}{2}) + arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) =$

$= \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{6} + (-\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}^{(3} + \frac{\pi}{2}^{(3} + \frac{\pi}{6}^{(1} - \frac{\pi}{3}^{(2} = \frac{3\pi}{6} + \frac{3\pi}{6} + \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

2) $tg(2\ arcsin\ \frac{1}{2}) = tg(2 \cdot \frac{\pi}{6}) = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

3) $cos(arcsin(tg\frac{\pi}{4})) = cos(arcsin1) = cos\frac{\pi}{2} = 0$

4) $arcsin(cos(arcsin(\frac{1}{2}tg(\frac{\pi}{4})))) = arcsin(cos(arcsin(\frac{1}{2} \cdot 1))) = = arcsin(cos(arcsin\frac{1}{2})) =$

$arcsin(cos\frac{\pi}{6}) = arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$

5) $2arccos0 + 3arccos1 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} + 3 \cdot 0 = \frac{2\pi}{2} + 0 = \pi$

6) $12arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - 3arccos(-\frac{1}{2}) = 12 \cdot \frac{\pi}{6} - 3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 2\pi - 2\pi = 0$

7) $arccos\ (-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 3arcsin(-1) = \frac{5\pi}{6} + 3 \cdot (-\frac{\pi}{2}) =$

$\frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{2}^{(3} = \frac{5\pi}{6} - \frac{9\pi}{6} = \frac{-4\pi}{6} = \frac{-2\pi}{3}$

8) $sin(6arccos\frac{1}{2}) = sin(6 \cdot \frac{\pi}{6}) = sin\pi = 0$

Пример 2: Решить тригонометрическое уравнение:
(1-2sinx)(1-3cosx)=0
Решение:

$1-2sinx=0$	*или*	$1-3cosx=0$
$-2sinx=-1$		$-3cosx=-1$
$sinx=\frac{1}{2}$ $cos=-\frac{1}{3}$		
$x_1=(-1)^n arcsin\frac{1}{2}+\pi n, n \in Z$		$x_2=\pm arccos(-\frac{1}{3})+\pi n, n \in Z$
$x_1=(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6}+\pi n, n \in Z$		$x_2=-arccos\frac{1}{3}+\pi n, n \in Z$

Ответ: $x_1=(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6}+\pi n, n \in Z$ $\quad x_2=-arccos\frac{1}{3}+\pi n, n \in Z$

Пример 3: Решить тригонометрическое уравнение:

$$3tg\frac{5}{3}x-1=0.$$

Решение:

$$3tg\frac{5}{3}x=1,$$
$$tg\frac{5}{3}x=\frac{1}{3}.$$

$$\frac{5}{3}x=arctg\frac{1}{3}+\pi n.$$

Разделим левую и правую части уравнения на $\frac{5}{3}$: $x=\frac{3}{5}arctg\frac{1}{3}+\frac{3\pi n}{5},\ n\in Z$.

Ответ: $x=\frac{3}{5}arctg\frac{1}{3}+\frac{3\pi n}{5},\ n\in Z$

Пример 4: Решить тригонометрическое уравнение:

$$\mathbf{2sin^2x+sinx-6=0}$$

Решение:

Пусть $sinx=t,\ t\in[-1;1]$

$$2t^2+t-6=0$$

$$a=2,\ b=1,\ c=-6$$

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot2\cdot(-6)}}{2\cdot2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-(-48)}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{-1\pm7}{4}$$

$$t_1=\frac{-1+7}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}\quad t_2=\frac{-1-7}{4}=\frac{-8}{4}=-2$$

$t_1=1\frac{1}{2}\notin[-1;1]$, *т.е. не уд.* $\qquad$ $t_2=-2\notin[-1;1]$, *т.е. не уд.*

Ответ: решений нет

Пример 5: Решить тригонометрическое уравнение:

$$\mathbf{2sin^2x+5cosx-5=0}$$

Решение:

$2(1-cos^2x)+5cosx-5=0$

$2-2cos^2x+5cosx-5=0$

$-2cos^2x+5cosx-3=0\ :(-1)$

$2cos^2x-5cosx+3=0$

Пусть $cosx=t,\ t\in[-1;1]$

$2t^2-5t+3=0$

$a=2,\ b=-5,\ c=3$

$t_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{4}=\dfrac{5\pm\sqrt{1}}{4}=\dfrac{5\pm 1}{4}$

$t_1=\dfrac{5+1}{4}=\dfrac{6}{4}=1\dfrac{1}{2}\ t_2=\dfrac{5-1}{4}=\dfrac{4}{4}=1$

$t_1=1\dfrac{1}{2}\ t_2=1$

$\cos x=1\dfrac{1}{2}\notin[-1;1]$, *т.е. не уд.*

$\cos x=1$ *(частный случай)* $\qquad x=2\pi n, n\in Z$

Ответ: $x=2\pi n, n\in Z$

Пример 6: Решить тригонометрическое уравнение:

$$4\sin^2 x-5\sin x\cdot\cos x-6\cos^2 x=0$$

Решение:

$4\sin^2 x-5\sin x\cdot\cos x-6\cos^2 x=0$

(разделим на то, что стоит перед знаком «=», т.е. на $\cos^2 x$*)*

$\dfrac{4\sin^2 x}{\cos^2 x}-\dfrac{5\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x}-\dfrac{6\cos^2 x}{\cos^2 x}=0$

$$4tg^2x-5tgx-6=0$$

Пусть $tgx=t$

$$4t^2-5t-6=0$$

$$a=4,\ b=-5,\ c=-6$$

$$t_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2a}=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 4\cdot(-6)}}{2\cdot 4}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-(-96)}}{8}=\dfrac{5\pm\sqrt{121}}{8}=\dfrac{5\pm 11}{8}$$

$$t_1=\dfrac{5+11}{8}=\dfrac{16}{8}=2$$

$$\dfrac{5-11}{8}=\dfrac{-6}{8}=-\dfrac{3}{4}$$

$t_1=2 \qquad tgx=2 \qquad \boldsymbol{x_1=arctg2+\pi n, n\in Z}$

$t_2=-\dfrac{3}{4} \qquad tgx=-\dfrac{3}{4} \qquad \boldsymbol{x_2=arctg(-\tfrac{3}{4})+\pi n, n\in Z,}$

Ответ: $x_1=arctg2+\pi n, n\in Z,$

$x_2=-arctg\dfrac{3}{4}+\pi n, n\in Z$

8.3. Варианты контрольных работ

Задание 1: Найти значение выражения

Вариант 1:

$2\,arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+arcctg1$

Вариант 2:

$3\,arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+arctg(-1)$

Вариант 3:

arcsin $\frac{\sqrt{2}}{2}$ +4 arcsin $\frac{\sqrt{3}}{2}$ - arccos $\frac{\sqrt{2}}{2}$ + arctg $\sqrt{3}$

Вариант 4:

arcsin(cos(arctg $\frac{\sqrt{3}}{3}$))

Вариант 5:

arctg $\sqrt{3}$ +arccos $\frac{1}{2}$

Вариант 6:

$2\,arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Вариант 7:

$tg\left(arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Вариант 8:

$arcsin\frac{1}{2}+arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+3\,arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

Вариант 9:

arctg (cos(arctg 1))

Вариант 10:

arctg $\frac{\sqrt{3}}{3}$ -12arcsin(- $\frac{\sqrt{3}}{2}$)

Вариант 11:

arcsin(- 1) + arccos (-1) +arctg 0

Вариант 12:

cos(arctg $\frac{\sqrt{3}}{3}$)

Вариант 13:

arctg1+ arccos $\frac{\sqrt{3}}{2}$ - arcsin $\frac{\sqrt{2}}{2}$ - arctg $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Вариант14:

arctg(- $\sqrt{3}$)+ arccos(- $\frac{\sqrt{2}}{2}$)-arcsin(- $\frac{\sqrt{2}}{2}$)

Вариант 15:

arcsin $\frac{\sqrt{2}}{2}$ +4 arcsin $\frac{\sqrt{3}}{2}$ - arccos $\frac{\sqrt{2}}{2}$ + arctg $\sqrt{3}$

Вариант 16:

arccos(- $\frac{1}{2}$)+ arctg 1

Вариант 17:

arcsin1 + arccos 1 +arctg 0

Вариант 18:

arcsin0 + arccos +arctg 0

Вариант19:

arctg 1+arcsin $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Вариант 20 :

arccos $\frac{\sqrt{2}}{2}$ + arctg 1

Вариант 21:

arccos(- $\frac{\sqrt{2}}{2}$)- arctg(- 1)

Вариант 22:

arctg (-1)-arcsin(- $\frac{\sqrt{2}}{2}$)

Вариант 23:

cos(arctg $\sqrt{3}$)

Вариант 24:

tg(arcsin $\frac{1}{2}$)

Вариант 25:

tg(arcsin $\frac{\sqrt{3}}{2}$)

Вариант 26:

cos(arctg $\frac{\sqrt{3}}{3}$)

Вариант 27:

arctg(- $\frac{\sqrt{3}}{3}$)- arcsin(- $\frac{1}{2}$)+ arccos (- $\frac{1}{2}$)

Вариант 28:

arcsin $\frac{\sqrt{2}}{2}$ +4 arcsin $\frac{\sqrt{3}}{2}$ - arccos $\frac{\sqrt{2}}{2}$ + arctg $\sqrt{3}$

Вариант 29:

arctg(- $\sqrt{3}$)+ arccos(- $\frac{\sqrt{2}}{2}$)-arcsin(- $\frac{\sqrt{2}}{2}$)

Вариант 30:

arctg1+ arccos $\frac{\sqrt{3}}{2}$ - arcsin $\frac{\sqrt{2}}{2}$ - arctg $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Задание 2: Решить тригонометрическое уравнение:

Вариант 1:

1) $sinx=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $3cos^2x - 5cosx + 2 = 0$

3) $sin^2 x - 5 sin x cos x + 6 cos^2 x = 0$

Вариант 2:

1) $sinx=\frac{2}{7}$

2) $4sin^2x - 11sinx + 8 = 0$

3) $7\sin^2 x - 8\sin x \cos x - 15\cos^2 x = 0$

Вариант 3:

1) $(2sinx+1)(2sinx-\sqrt{2})=0$

2) $8cos^2x - 12sinx + 7 = 0$

3) $2 sin^2 x - 5 sin x cos x + 3 cos^2 x = 0$

Вариант 4:

1) $(sin7x+1)(4sinx-2)=0$

2) $2sin^2x + 5cosx - 5 = 0$

3) $3\cos^2 x - 4\sin x \cos x + \sin^2 x = 0$

Вариант 5:

1) $sin5x=-\frac{1}{2}$

2) $sin^2x-5sinx\cdot cosx-6cos^2x=0$

3) $4cos^2x-4cosx-3=0$

Вариант 6:

1) $sin10x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $3sin^2x-5sinx\cdot cosx+2cos^2x=0$

3) $4cos^2x - 13sinx + 1 = 0$

Вариант 7:

1) $tgx=0$

2) $2sin^2x-sinx\cdot cosx-cos^2x=0$

3) $(2sinx-\sqrt{3})(2sinx+1)=0$

Вариант 8:

1) $(\sqrt{2}\,sinx+1)(2sinx-1)=0$

2) $4sin^2x + 4sinx - 3 = 0$

3) $sin^2x - 5sinx\cdot cosx - 6cos^2x = 0$

Вариант 9:

1) $cosx=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $2sin^2x+sinx-1=0$

3) $3sin^2x-5sinx\cdot cosx+2cos^2x=0$

Вариант 10:

1) $cos13x=\frac{2}{7}$

2) $3sin^2x-5sinx-2=0$

3) $sin^2x+4sinx\cdot cosx+3cos^2x=0$

Вариант 11:

1) $cosx=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $2cos^2x-5cosx+2=0$

3) $3 sin^2 x - 7 sin x cos x + 2 cos^2 x = 0$

Вариант 12:

1) $3tgx-\sqrt{3}=0$

2) $2cos^2x-3cosx+1=0$

3) $2sin^2x + sinx\cdot cosx - cos^2x = 0$

Вариант 13:

1) $(1-2cosx)(2sinx+1)=0$

2) $cos^2x-9cosx+8=0$

3) $2sin^2x+3sinx\cdot cosx-2cos^2x=0$

Вариант14:

1) $sin15x=\frac{1}{7}$

2) $4sin^2x-12sinx+5=0$

3) $2sin^2x+7cosx+2=0$

Вариант 15:

1) $cosx=-\frac{1}{2}$

2) $2cos^2x-sinx-1=0$

3) $sin^2x-5sinx\cdot cosx-6cos^2x=0$

Вариант 16:

1) $tgx-\sqrt{3}=0$

2) $6cos^2x-sinx-1=0$

3) $2sin^2x-5\ sinx\cdot cosx-7\ cos^2x=0$

Вариант 17:

1) $(2cosx+\sqrt{3})(2sinx-\sqrt{3})=0$

2) $2cos^2x+5sinx-4=0$

3) $7\sin^2 x-8\sin x\cos x-15\cos^2 x=0$

Вариант 18:

1) $sin20x=\frac{2}{3}$

2) $2\sin^2 x-3\cos x=0$

3) $3sin^2 x-4sin\,x\,cos\,x+cos^2 x=0$

Вариант19:

1) $cosx=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $2sin^2 x-5cos\,x+1=0$

3) $2cos^2x-sinx\cdot cosx-sin^2x=0$

Вариант 20:

1) $sinx=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $2\cos^2 x+4\sin^2 x-3=0$

3) $2sin^2x-5\ sinx\cdot cosx-7\ cos^2x=0$

Вариант 21:

1) $tgx=1$

2) $3sin^2x-5sinx\cdot cosx+2cos^2x=0$

3) $2cos^2x-cosx-1=0$

Вариант 22:

1) $sin11x=\frac{3}{7}$

2) $3sinx+\sqrt{3}\,cosx=0$

3) $4sin^2x-12sinx+5=0$

Вариант 23:

1) $tgx=\sqrt{3}$

2) $3sin^2 x-4sin\,x\,cos\,x+cos^2 x=0$

3) $4sin^2x+4cosx-5=0$

Вариант 24:

1) $tgx=-\sqrt{3}$

2) $2sin^2x+5cosx-5=0$

3) $sin^2 x+sin\,x\,cos\,x-2cos^2 x=0$

Вариант 25:

1) $sinx=-1$

2) $\sqrt{3}\,cosx-sinx=0$

3) $3sin^2x-5sinx\cdot cosx+2cos^2x=0$

Вариант 26:

1) $2sinx=1$

2) $sinx+cosx=0$

3) $8cos^2x-12sinx+7=0$

Вариант 27:

1) $Sin7x=\frac{1}{2}$

2) $2sin^2x+3sinx\cdot cosx-2cos^2x=0$

3) $cos^2x-3cosx-4=0$

Вариант 28:

1) $Sin78x=0$

2) $3sin^2x-5sinx\cdot cosx+2cos^2x=0$

3) $4\cos^2x + 4\cos x - 3 = 0$

Вариант 29:

1) $\cos 8x = 0$

2) $2\sin^2x - 5\sin x \cdot \cos x - 7\cos^2x = 0$

3) $2\sin^2x - 3\sin x + 1 = 0$

Вариант 30:

1) $2\cos x = -1$

2) $\sin^2x + 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2x = 0$

3) $\sin^2x + 3\sin x + 2 = 0$

Задание №3 *Найти область определения функции:*

а) $y = \dfrac{\arcsin 4x}{6x-1}$ *б)* $y = \arccos(x^2 - 4x + 4)$ *в)* $y = \arcsin x + \arccos \dfrac{1}{x}$

Найти область значений функции:

а) $y = \dfrac{x \cdot \arcsin x}{x}$ *б)* $y = \sqrt{arctgx}$ *в)* $y = \arcsin^2 x - 2\arcsin x$

г) $y = \dfrac{\arccos x}{\arccos x + 3}$ *д)* $y = \arcsin(x^2 - 2x + 1{,}5)$

Вычислить:

$а)\arcsin(\sin 1{,}2\pi)$

$б)\arccos(\cos 1{,}3\pi)$

$в) tg(\arccos(-\frac{1}{3}))$

$г)\arcsin^2(\cos 96^\circ)$

$д) arctg(ctg \frac{19\pi}{7})$

$е)\arcsin(\cos 5) + \arccos(\sin 5)$

Вычислить:

$$arctg\frac{1}{2} + arctg\frac{1}{3}$$

Решить уравнение:

$а)\arcsin(2x - \frac{\pi}{4}) = 2$

$б)\arcsin(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{3}$

$в)\arccos(2x^3 + 3x^2) = \arccos(x + 2x^2)$

$г) arctg 6x - arctgx = \frac{\pi}{4}$

Решить неравенства:

$а)\arccos x < \frac{\pi}{3}$

$б)\arcsin\frac{8}{x^3} + \arccos\frac{8}{x^3} > 1$

$в) 4arctg^2x + 5\pi \cdot arctgx \geq -\pi^2$

Построить график функции $y = arctg(tgx)$.

ЛИТЕРАТУРА

Основные источники:

1. «Алгебра и начала анализа 10-11 класс» Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И., М:Просвещение;

2. «Алгебра и начала анализа 10класс» Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Ткачёва М.В., Фёдорова Н.Е., Шабунин М.И., М:Мнемозина;

3. Атанасян Л.С. и др. Геометрия. 10 (11) кл. – М., 2000.

4. Пехлецкий И.Д. Математика: учебник. – М., 2003.

Дополнительные источники:

1. Башмаков М.И. Алгебра и начала математического анализа (базовый уровень). 10 кл. – М., 2005.

2. Башмаков М.И. Алгебра и начала математического анализа (базовый уровень). 11 кл. – М., 2005.

3. Башмаков М.И. Математика (базовый уровень). 10—11 кл. – М., 2005.

4. Башмаков М.И. Математика: 10 кл. Сборник задач: учеб. пособие. – М., 2004.

5. Башмаков М.И. Математика: учебник для 10 кл. – М., 2004.

6. Колмогоров А.Н. и др. Алгебра и начала анализа. 10 (11) кл. – М., 2000.

7. Колягин Ю.М. и др. Математика (Книга 1). – М., 2003.

8. Колягин Ю.М. и др. Математика (Книга 2). – М., 2003.

9. Луканкин Г.Л., Луканкин А.Г. Математика. Ч. 1: учебное пособие для учреждений начального профессионального образования. – М., 2004.

Интернет-ресурсы:

www.ege66.ru
www.edu.ru
www.uraledu.ru
www.minobraz.ru
www.mathtest.ru
www.allmatematika.ru
www.ega-math.narod.ru
www1.ege.edu.ru/online-testing/math/
www.mathnet.spb.ru
www.exponenta.ru/

ПРИЛОЖЕНИЕ .

Справочный материал

КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

Если a = 1 – приведенное Если $a \neq 1$ – неприведенное

Дискриминант: $D = b^2 - 4ac$

Основная формула корней: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Если $D > 0$, то два различных корня

Если $D < 0$, то корней действительных нет (два комплексно сопряженных)

Если $D = 0$, то один корень $x = \dfrac{-b}{2a}$ (два одинаковых)

ТЕОРЕМА ВИЕТА: $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

ТЕОРЕМА ВИЕТА ДЛЯ ПРИВЕДЕННОГО УРАВНЕНИЯ

$x^2 + px + q = 0$**:**

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

ЕСЛИ	ТОГДА
$a + b + c = 0$	$x_1 = 1, \quad x_2 = \dfrac{c}{a}$
$a + c = b$	$x_1 = -1, \quad x_2 = \dfrac{-c}{a}$

ЕСЛИ	ТОГДА
$ac + 1 = -b$	$x_1 = \dfrac{1}{a}, \quad x_2 = c$
$ac + 1 = b$	$x_1 = -\dfrac{1}{a}, \quad x_2 = -c$

РАЗЛОЖЕНИЕ КВ. ТРЕХЧЛЕНА $ax^2 + bx + c$ **НА МНОЖИТЕЛИ:**

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ x_1 *и* x_2 *– корни уравн.* $ax^2 + bx + c = 0$

НЕПОЛНЫЕ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

(можно решать без использования основной формулы)

1	$x^2 = d$ (простейшее)	Если $d < 0$, то корней действительных нет
		Если $d = 0$, то $x = 0$
		Если $d > 0$, то $x_{1,2} = \pm\sqrt{d}$
2	$ax^2 + c = 0$	$ax^2 = -c,\ x^2 = -\frac{c}{a}$, далее см. решение простейшего
3	$ax^2 + bx = 0$	$x(ax+b) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{b}{a}$

БИКВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \quad x^2 = t, \quad at^2 + bt + c = 0$$

Логарифмы

Логарифм – показатель степени

$$b = \log_a c,\ (a > 0, a \neq 1, c > 0) \quad \Leftrightarrow \quad a^b = c$$

$\log_a c$ – читается « логарифм числа c по основанию a»

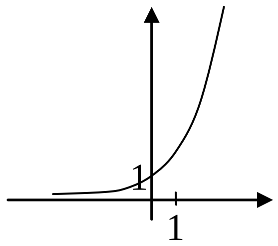
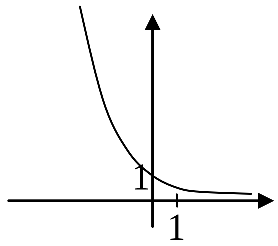
Принятые обозначения

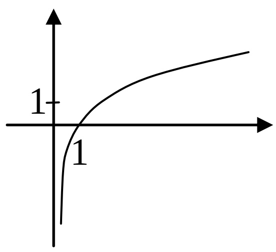
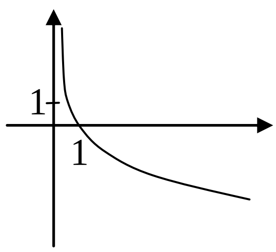
Знак логарифма	$\log$
Десятичный логарифм	$\lg c = \log_{10} c$
Натуральный логарифм	$\ln c = \log_e c, \qquad (e \approx 2{,}71828)$

Свойства логарифмов

Свойство	Допустимые значения букв
$a^{\log_a c} = c$	$a>0, a\neq 1, c>0$
$\log_a bc = \log_a\|b\| + \log_a\|c\|,$	$a>0, a\neq 1;$ $b>0$ *и* $c>0$ *или* $b<0$ *и* $c<0$
$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$	$a>0, a\neq 1,\ b>0, c>0$
$\log_a \frac{b}{c} = \log_a\|b\| - \log_a\|c\|,$	$a>0, a\neq 1;$ $b>0$ *и* $c>0$ *или* $b<0$ *и* $c<0$
$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$	$a>0, a\neq 1,\ b>0, c>0$
$\log_a b^{2n} = 2n\log_a\|b\|$	$a>0, a\neq 1,\ b\neq 0, \quad n\in Z$
$\log_a b^r = r\log_a b$	$a>0, a\neq 1,\ b>0, \quad r\in R$
$\log_{a^p} b = \frac{1}{p}\log_a b,$	$a>0, a\neq 1,\ b>0, \quad p\neq 0$
$\log_{a^p} b^r = \frac{r}{p}\log_a b$	$a>0, a\neq 1,\ b>0, \quad r\in R, \quad p\neq 0$
$\log_{a^p} b^p = \log_a b$	$a>0, a\neq 1,\ b>0, \quad p\neq 0$
$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$	$a>0, a\neq 1,\ c>0, c\neq 1, b>0$
$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$	$a>0, a\neq 1,\ b>0, b\neq 1$

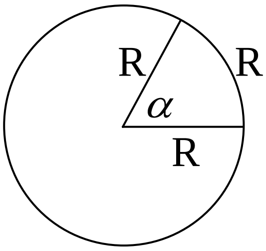
ГРАФИКИ И СВОЙСТВА ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ и ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Функция	Эскиз графика	Свойства	
$y = a^x$ $a > 1$		1) $D(y) = R$ 2) $E(y) = (0; \infty)$ 3)Возрастает на R 4)Промежутков убывания нет 4) $y \neq 0$	5) $y > 0$ на R 6) Отрицательных значений нет 7) Ни четная ни нечетная 8) Непериодическая 9) Точек экстремума нет 10) Наибольшего значения нет 11) Наименьшего значения нет 12) Асимптота $y = 0$
$y = a^x$ $0 < a < 1$		1) $D(y) = R$ 2) $E(y) = (0; \infty)$ 3) Убывает на R 4) Промежутков возрастания нет 5) $y \neq 0$	6) $y > 0$ на R 7) Отрицательных значений нет 8) Нечетная 9) Непериодическая 10) Точек экстремума нет 11) Наибольшего значения нет 12) Наименьшего значения нет 13) Асимптота $y = 0$

Функция	Эскиз графика	Свойства	
$y = \log_a x$ $a > 1$		1 $D(y) = (0; \infty)$ 2) $E(y) = R$ 3) Возрастает на $(0; \infty)$ 4) Промежутков убывания нет 5) $y = 0$ при $x = 1$	6) $y > 0$ на $(1; \infty)$ 7) $y < 0$ на $(0;1)$ 8) Ни четная ни нечетная 9) Непериодическая 10) Точек экстремума нет 11) Наибольшего значения нет 12) Наименьшего значения нет 13) Асимптота $x = 0$
$y = \log_a x$ $0 < a < 1$		1) $D(y) = (0; \infty)$ 2) $E(y) = R$ 3) Промежутков возрастания нет 4) Убывает на $(0; \infty)$ 5) $y = 0$ при $x = 1$	6) $y > 0$ на $(0;1)$ 7) $y < 0$ на $(1; \infty)$ 8) Ни четная ни нечетная 9) Непериодическая 10) Точек экстремума нет 11) Наибольшего и наименьшего значения нет 12) Асимптота $x = 0$

Синус, косинус, тангенс, котангенс

Меры измерения углов



$$1^\circ = \frac{1}{180}\,\textit{развернутого угла}$$

$$\alpha = 1\ \textit{рад}$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\,\textit{рад},\quad 1\textit{рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}3^\circ$$

$$180^\circ = \pi\ \textit{рад},\quad \pi \approx 3{,}1415926$$

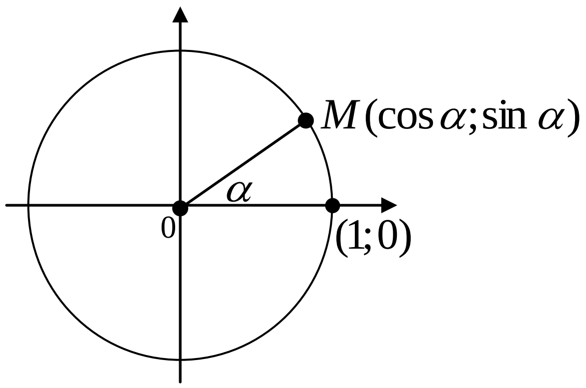
Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса

$\sin\alpha - \textit{ордината},\ -1 \le \sin\alpha \le 1,$

$\cos\alpha - \textit{абсцисса},\ -1 \le \cos\alpha \le 1,$

$tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \alpha \ne \pi k,\quad -\infty < tg\alpha < \infty$

$ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ -\infty < ctg\alpha < \infty$



Свойства четности и нечетности

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha\quad tg(-\alpha) = -tg\alpha$$

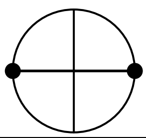
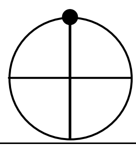
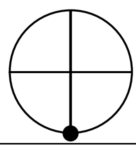
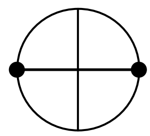
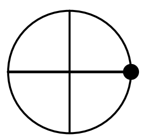
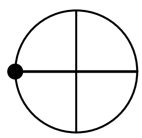
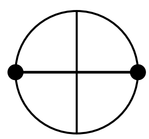
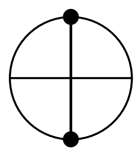
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha\quad ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$$

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КОРНЕЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

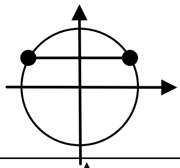
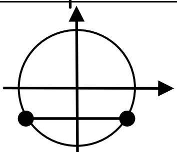
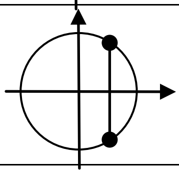
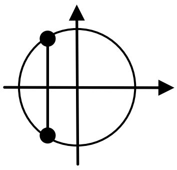
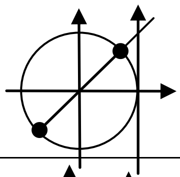
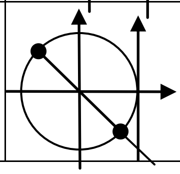
$\sin x = a$	При $\|a\| > 1$ корней нет	При $\|a\| \le 1$ $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k \; k \in Z$
$\cos x = a$	При $\|a\| > 1$ корней нет	При $\|a\| \le 1$ $x = \pm \arccos a + 2\pi k \; k \in Z$
$tgx = a$	Корни есть при любых $a \in R$	$x = arctga + \pi k \; k \in Z$
$ctgx = a$	Корни есть при любых $a \in R$	$x = arcctga + \pi k \; k \in Z$

ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Правая часть ± 1 или 0

$\sin x = 0$ $x = \pi k, \quad k \in Z$ 	$\sin x = 1$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z$ 	$\sin x = -1$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z$ 	$\cos x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$ 
$\cos x = 1$ $x = 2\pi k, \quad k \in Z$ 	$\cos x = -1$ $x = \pi + 2\pi k, \quad k \in Z$ 	$tgx = 0$ $x = \pi k, \quad k \in Z$ 	$ctgx = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$ 

Правая часть – табличное значение

Уравнение		Способ I записи корней	Способ II записи корней
		(отдельная запись каждой точки – для решения задач с выбором корней)	(объединение двух записей в одну)
$\sin x = \frac{1}{2}$		$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$	$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$
$\sin x = -\frac{1}{2}$		$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$	$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$
$\cos x = \frac{1}{2}$		$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$	$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$
$\cos x = -\frac{1}{2}$		$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$	$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$
$tgx = 1$		$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$
$tgx = -1$		$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$

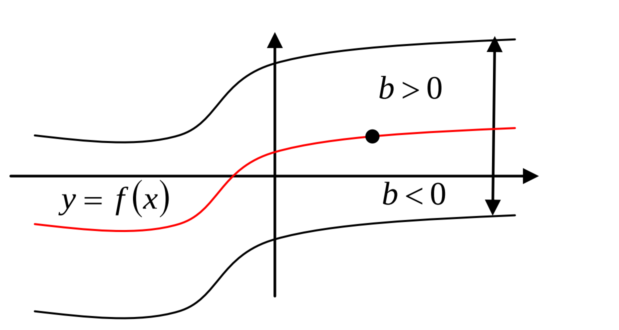
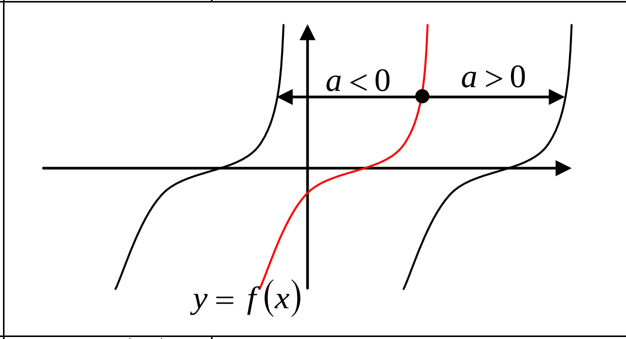
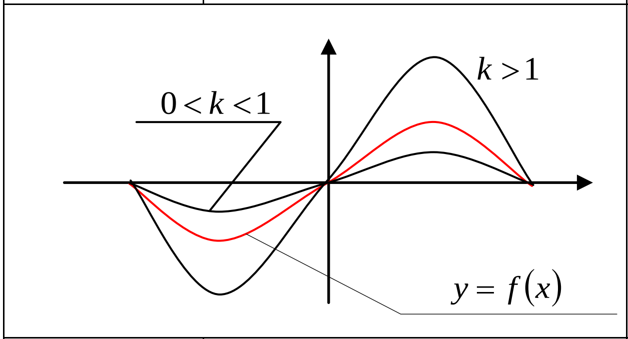
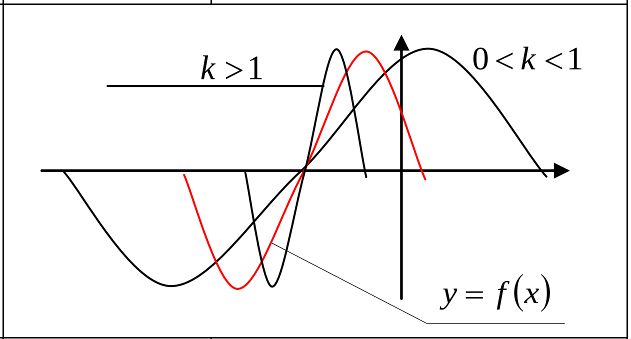
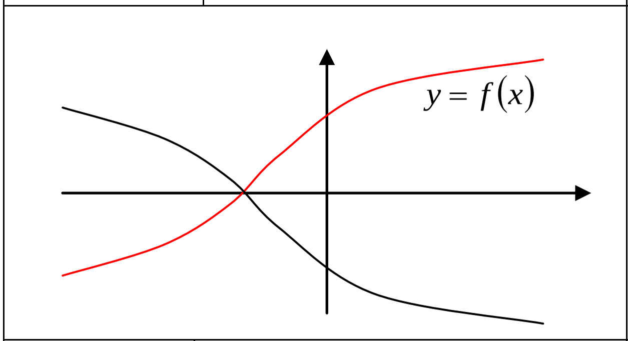
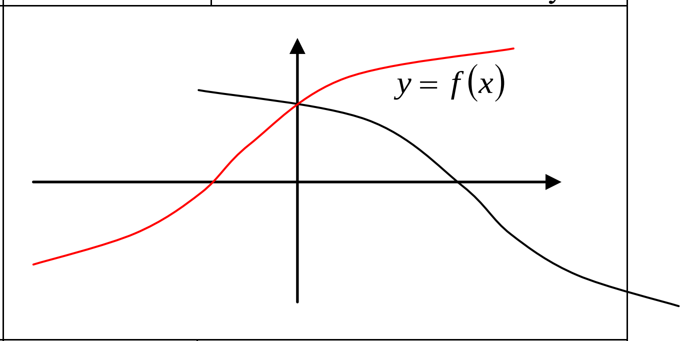
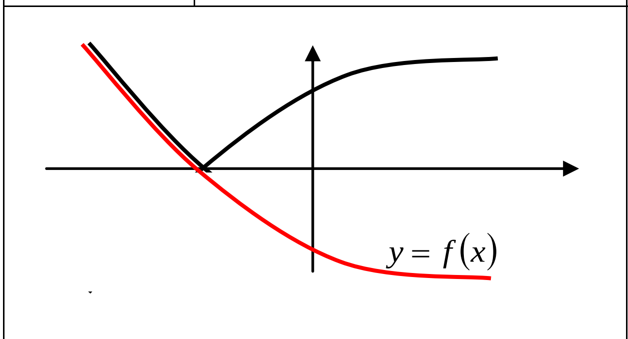
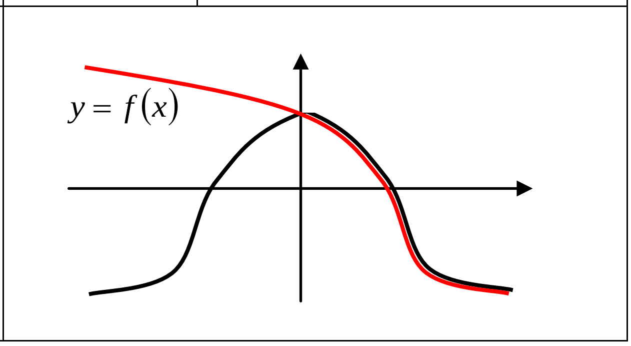
НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Сводящиеся к простейшим		
1	$a\cos(bx + c) = d$	$\cos(bx + c) = \frac{d}{a}$, $bx + c = \pm \arccos\frac{d}{a} + 2\pi k$, $x = \frac{1}{b}(-c \pm \arccos\frac{d}{a} + 2\pi k)$
2	$\sin^2 x = a$	$\sin x = \sqrt{a}$; $\sin x = -\sqrt{a}$
Сводящиеся к квадратным		
3	$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$	$\cos x = t$

4	$a\cos^2 x + b\sin x + c = 0$	$a\cdot\left(1-\sin^2 x\right)+b\sin x + c = 0, \quad \sin x = t$
Однородные I и II степени		
5	$a\sin x + b\cos x = 0$	$a\sin x + b\cos x = 0 \,\big\vert : \cos x \neq 0; \quad a\cdot tgx + b = 0$
6	$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$	$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0 \,\big\vert : \cos^2 x \neq 0$ $a\,tg^2 x + b\,tgx + c = 0, \quad tgx = t$
Сводящиеся к однородным		
7	$a\sin x + b\cos x = d$	1 способ: $a\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)+b\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=d\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)$ Сводится к виду 6. 2 способ: $a\sin x + b\cos x = d \,\big\vert : \sqrt{a^2+b^2}$ $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2}}$, обозначим: $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\gamma, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\gamma$ получим: $\sin x\cos\gamma + \cos x\sin\gamma = \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\left(x+\gamma\right) = \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2}}$
8	$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$	$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$ Сводится к виду 6.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Способы получения графиков некоторых функций из графика функции $y = f(x)$

<table>
<tr><td>$y = f(x)+b$</td><td>Параллельный перенос вдоль оси Oy на b единиц</td><td>$y = f(x-a)$</td><td>Параллельный перенос вдоль оси Ox на a единиц</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>$y = k\cdot f(x)$
$k>0$</td><td>Растяжение в к раз (сжатие в $1/k$ раз) вдоль оси Oy</td><td>$y = f(kx)$
$k>0$</td><td>Сжатие в к раз (растяжение в $1/k$ раз) вдоль оси Ox</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>$y=-f(x)$</td><td>Симметричное отражение относительно оси Ox</td><td>$y = f(-x)$</td><td>Симметричное отражение относительно оси Oy</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td>$y=\lvert f(x)\rvert$</td><td>Симметричное отражение относительно оси Ox части графика, расположенного ниже оси Ox</td><td>$y = f(\lvert x\rvert)$</td><td>Замена части графика, в области $x<0$ симметричным отражением относительно оси Oy части графика расположенного в области $x \geq 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td colspan="2">
</td></tr>
</table>