

25. Геометрическая задача на доказательство

Часть 1. ФИПИ

1. Сторона AD параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны CD . Точка M – середина стороны AD . Докажите, что CM – биссектриса угла BCD .
2. Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB . Точка K – середина стороны BC . Докажите, что AK – биссектриса угла BAD .
3. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AD . Точка L – середина стороны AB . Докажите, что DL – биссектриса угла ADC .
4. Сторона CD параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны BC . Точка N – середина стороны CD . Докажите, что BN – биссектриса угла ABC .
5. Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M , лежащей на стороне CD . Докажите, что M – середина CD .
6. Биссектрисы углов C и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке L , лежащей на стороне AB . Докажите, что L – середина AB .
7. Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M , лежащей на стороне AD . Докажите, что N – середина AD .
8. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K , лежащей на стороне BC . Докажите, что K – середина BC .
9. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Докажите, что отрезки AE и CF равны.
10. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках L и N соответственно. Докажите, что отрезки CL и AN равны.
11. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках K и M соответственно. Докажите, что отрезки BK и DM равны.
12. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольную точку E . Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади параллелограмма.
13. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольную точку F . Докажите, что сумма площадей треугольников BFC и AFD равна половине площади параллелограмма.

- 14.** В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке O . Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.
- 15.** В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке P . Докажите, что площади треугольников APB и CPD равны.
- 16.** На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку E . Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади трапеции.
- 17.** На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку K . Докажите, что сумма площадей треугольников BKC и AKD равна половине площади трапеции.
- 18.** На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку F . Докажите, что сумма площадей треугольников BFC и AFD равна половине площади трапеции.
- 19.** Точка E – середина боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника ECD равна половине площади трапеции.
- 20.** Точка K – середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.
- 21.** Биссектрисы углов A и D трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M , лежащей на стороне BC . Докажите, что точка M равноудалена от прямых AB , AD и CD .
- 22.** Биссектрисы углов A и B трапеции $ABCD$ пересекаются в точке K , лежащей на стороне CD . Докажите, что точка K равноудалена от прямых AB , BC и AD .
- 23.** Биссектрисы углов C и D трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P , лежащей на стороне AB . Докажите, что точка P равноудалена от прямых BC , CD и AD .
- 24.** Биссектрисы углов B и C трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O , лежащей на стороне AD . Докажите, что точка O равноудалена от прямых AB , BC и CD .
- 25.** В треугольнике ABC с тупым углом ACB проведены высоты AA_1 и BB_1 . Докажите, что треугольники A_1B_1C и ABC подобны.
- 26.** В треугольнике ABC с тупым углом ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 . Докажите, что треугольники A_1BC_1 и ABC подобны.
- 27.** В треугольнике ABC с тупым углом BAC проведены высоты BB_1 и CC_1 . Докажите, что треугольники AB_1C_1 и ABC подобны.

- 28.** Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно $4,5$ и 18 , $BD=9$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.
- 29.** Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 4 и 64 , $BD=16$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.
- 30.** Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 7 и 28 , $BD=14$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.
- 31.** Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AD и BC четырёхугольника пересекаются в точке K . Докажите, что треугольники KAB и KCD подобны.
- 32.** Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AB и CD четырёхугольника пересекаются в точке M . Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.
- 33.** В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1 . Докажите, что углы AA_1B_1 и ABB_1 равны.
- 34.** В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1 . Докажите, что углы CC_1A_1 и CAA_1 равны.
- 35.** В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1 . Докажите, что углы BB_1C_1 и BCC_1 равны.
- 36.** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы DAC и DBC равны. Докажите, что углы CDB и CAB также равны.
- 37.** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы BCA и BDA равны. Докажите, что углы ABD и ACD также равны.
- 38.** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы CDB и CAB равны. Докажите, что углы BCA и BDA также равны.
- 39.** Окружности с центрами в точках E и F пересекаются в точках C и D , причём точки E и F лежат по одну сторону от прямой CD . Докажите, что CD и EF перпендикулярны.
- 40.** Окружности с центрами в точках M и N пересекаются в точках S и T , причём точки M и N лежат по одну сторону от прямой ST . Докажите, что прямые MN и ST перпендикулярны.
- 41.** Окружности с центрами в точках P и Q пересекаются в точках K и L , причём точки P и Q лежат по одну сторону от прямой KL . Докажите, что прямые PQ и KL перпендикулярны.

42. Окружности с центрами в точках I и J не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $m:n$. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $m:n$.

43. Окружности с центрами в точках P и Q не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $a:b$. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $a:b$.

25. Геометрическая задача на доказательство

Часть 2. ФИПИ. Расширенная версия

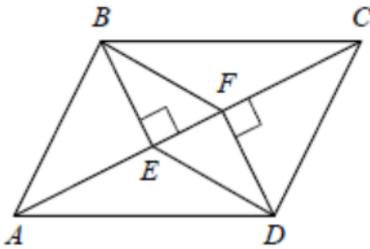
1. На стороне AC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что отрезки AD и CE равны. Оказалось, что отрезки BD и BE тоже равны. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

2. На стороне AC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что отрезки AD и CE равны. Оказалось, что углы AEB и BDC тоже равны. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

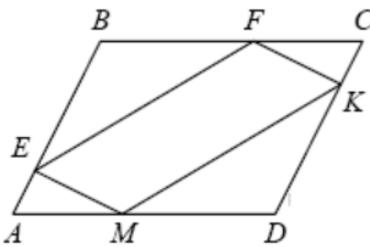
3. В параллелограмме $ABCD$ точка E – середина стороны CD . Известно, что $EA = EB$. Докажите, что данный параллелограмм – прямоугольник.

4. В параллелограмме $ABCD$ точка K – середина стороны AB . Известно, что $KC = KD$. Докажите, что данный параллелограмм – прямоугольник.

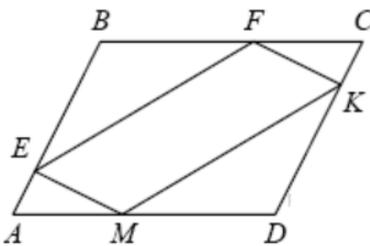
5. В параллелограмме $KLMN$ точка B – середина стороны LM . Известно, что $BK = BN$. Докажите, что данный параллелограмм – прямоугольник.



6. В параллелограмме $ABCD$ проведены перпендикуляры BE и DF к диагонали AC (см. рис.). Докажите, что $BFDE$ – параллелограмм.



7. В параллелограмме $ABCD$ точки E , F , K и M лежат на его сторонах, как показано на рисунке, причём $CF = AM$, $BE = DK$. Докажите, что $EFKM$ – параллелограмм.



8. В параллелограмме $ABCD$ точки E , F , K и M лежат на его сторонах, как показано на рисунке, причём $AE = CK$, $BF = DM$. Докажите, что $EFKM$ – параллелограмм.

9. В равнобедренном треугольнике ABC точки M , N , K – середины сторон AB , BC , CA соответственно. Докажите, что треугольник MNK – равнобедренный.

10. В равностороннем треугольнике ABC точки M , N , K – середины сторон AB , BC , CA соответственно. Докажите, что MNK – равносторонний.

11. В равностороннем треугольнике ABC точки M , N , K – середины сторон AB , BC , CA соответственно. Докажите, что $BMKN$ – ромб.

- 12.** Дан правильный шестиугольник. Докажите, что если его вершины последовательно соединить отрезками через одну, то получится равносторонний треугольник.
- 13.** Дан правильный шестиугольник. Докажите, что если последовательно соединить отрезками середины его сторон, то получится правильный шестиугольник.
- 14.** Дан правильный восьмиугольник. Докажите, что если его вершины последовательно соединить отрезками через одну, то получится квадрат.
- 15.** Дан правильный восьмиугольник. Докажите, что если последовательно соединить отрезками середины его сторон, то получится правильный восьмиугольник.
- 16.** В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Докажите, что площадь параллелограмма $ABCD$ в четыре раза больше площади треугольника AOB .
- 17.** В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке K . Докажите, что площадь параллелограмма $ABCD$ в четыре раза больше площади треугольника AKD .
- 18.** В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O . Докажите, что площадь параллелограмма $ABCD$ в четыре раза больше площади треугольника BOC .
- 19.** Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке E . Докажите, что углы AA_1B_1 и ABB_1 равны.
- 20.** Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке E . Докажите, что углы AA_1C_1 и ACC_1 равны.
- 21.** Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке E . Докажите, что углы CC_1B_1 и CBV_1 равны.
- 22.** В остроугольном треугольнике ABC точки A, C , центр описанной окружности O и центр вписанной окружности I лежат на одной окружности. Докажите, что угол ABC равен 60° .
- 23.** В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60° . Докажите, что точки A, C , центр описанной окружности треугольника ABC и точка пересечения высот треугольника ABC лежат на одной окружности.