Тренировочная работа №2 по МАТЕМАТИКЕ
10-11 класс
15 мая 2020 года
Вариант МА1900709
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО____ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение тренировочной работы по математике даётся 235 минут. Работа включает в себя 19 заданий и состоит из двух частей.

Ответом в заданиях части 1 (1–12) является целое число или десятичная дробь. Запишите ответ в отведённом для него месте на листе с заданиями.

В заданиях части 2 (13–19) требуется записать полное решение на отдельном чистом листе.

При выполнении работы нельзя пользоваться учебниками, рабочими тетрадями, справочниками, калькулятором.

При необходимости можно пользоваться черновиком. Записи в черновике проверяться и оцениваться не будут.

Выполнять задания можно в любом порядке, главное — правильно решить как можно больше заданий. Советуем Вам для экономии времени пропускать задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходить к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, можно будет вернуться к пропущенным заданиям.

Желаем успеха!

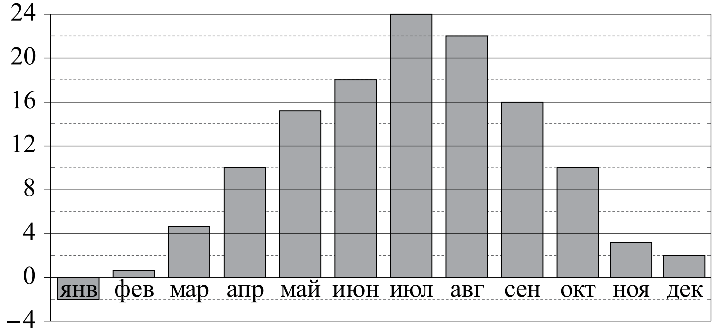
Часть 1

В заданиях 1–12 дайте ответ в виде целого числа, или десятичной дроби, или последовательности цифр.

1 Шариковая ручка стоит 40 рублей. Какое наибольшее количество таких ручек можно будет купить на 500 рублей после повышения цены на 10 %?

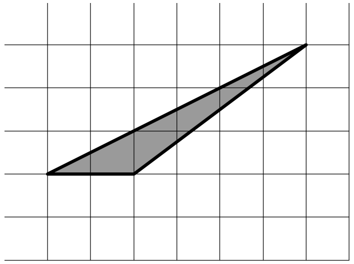
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в 1988 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



Ответ: ___________________________.

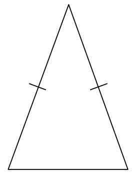
4 Чтобы поступить в институт на специальность «Международные отношения», абитуриент должен набрать на ЕГЭ не менее 67 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и иностранный язык. Чтобы поступить на специальность «Менеджмент», нужно набрать не менее 67 баллов по каждому из трёх предметов — математика, русский язык и обществознание.
Вероятность того, что абитуриент Т. получит не менее 67 баллов по математике, равна 0,6, по русскому языку — 0,5, по иностранному языку — 0,8 и по обществознанию — 0,9.
Найдите вероятность того, что Т. сможет поступить на одну из двух упомянутых специальностей.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения $\frac{1}{x+10}=\frac{1}{12}$.

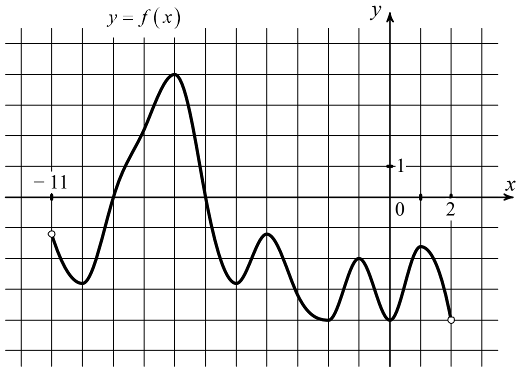
Ответ: ___________________________.

6 Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 30°. Боковая сторона треугольника равна 18. Найдите площадь этого треугольника.



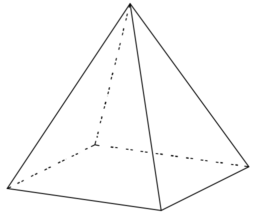
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-11;2)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



Ответ: ___________________________.

8 Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 6, боковые рёбра равны 5. Найдите площадь поверхности этой пирамиды.



Ответ: ___________________________.

9 Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt[42]{m}\cdot\sqrt[7]{m}}$ при $m=729$.

Ответ: ___________________________.

10 Груз массой 0,4 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v=v_0\cos\frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T=2$ с — период колебаний, $v_0=0{,}6$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E=\frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 36 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Ответ: ___________________________.

11 Часы со стрелками показывают 3 часа 50 минут. Через сколько минут минутная стрелка в восьмой раз поравняется с часовой?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите точку максимума функции $y=\sqrt{-23+14x-x^2}$.

Ответ: ___________________________.

Часть 2

В заданиях 13–19 запишите полное решение на отдельном чистом листе.

13 а) Решите уравнение $\left(2-3x-2x^2\right)\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.

14 В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM:MC=1:3$.

а) Докажите, что прямая KM перпендикулярна AC.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB=6$, $AC=8$ и $AA_1=3$.

15 Решите неравенство $\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{x^2+3x-1}{x+2}}\geq\frac{2}{3}\cdot 3{,}5^{x+1-\frac{3}{x+2}}$.

16 В треугольнике ABC на продолжении стороны AC за вершину A отложен отрезок AD, равный стороне AB. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD, пересекает сторону BC в точке M.

а) Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

б) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если площадь треугольника ABC равна 216 и известно отношение $AC:AB=5:4$.

17 15 января Алексей планирует взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1,5 млн рублей. Условия его возврата следующие:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;
– выплата должна производиться ежемесячно в период со 2-го по 14-е число каждого месяца;
– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (млн рублей)	1,5	1,2	1	0,7	0,5	0,3	0

Найдите наименьшее значение *r,* при котором Алексею в общей сумме придётся выплатить больше 2,2 млн рублей.

18 Найдите все значения *a,* при каждом из которых система

$$\begin{cases}3|x-2a|+2|y-a|=6,\\ xy-x-2y+2=0\end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

19 а) Найдите хотя бы одно такое натуральное число n, что десятичная запись числа n^2+2n оканчивается всеми цифрами числа n, записанными в том же порядке.

б) Может ли такое число оканчиваться цифрой 3?

в) Найдите все такие четырёхзначные числа.

math100.ru

Ответы на тренировочные варианты 1900709-1900710 (профильный уровень) от 15.05.2020

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1900709	11	- 2	3	0,078	2	81	- 28	84	9	0,072	490	7
1900710	13	- 8	4,5	0,21	3,5	25	7	756	5	0,18	630	- 8

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $\left(2-3x-2x^2\right)\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.

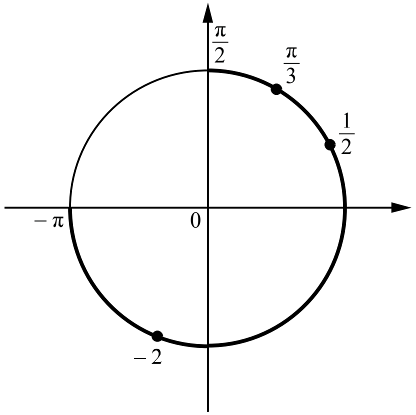
Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$(x+2)(1-2x)\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)=0.$$

Значит, $x=-2$, $x=\frac{1}{2}$ или $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) Заметим, что $-\pi<-2<\frac{1}{2}<\frac{\pi}{2}$. С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\frac{\pi}{2}\right]$.



Получим -2; $\frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{3}$.

Ответ: а) -2; $\frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{2\pi}{3}+2\pi k$; $k\in\mathbb{Z}$; б) -2; $\frac{1}{2}$; $\frac{\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1

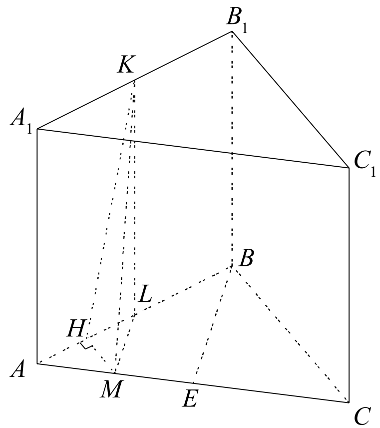
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Точка K — середина ребра A_1B_1, а точка M делит ребро AC в отношении $AM:MC=1:3$.

а) Докажите, что прямая KM перпендикулярна AC.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB=6$, $AC=8$ и $AA_1=3$.

Решение.



а) Пусть L — середина ребра AB, E — середина ребра AC. Так как треугольник ABC равнобедренный, отрезок BE перпендикулярен отрезку AC. Поскольку $AM:MC=1:3$, имеем $AM=ME$. Значит, треугольник AML подобен треугольнику AEB. Следовательно, отрезок LM перпендикулярен отрезку AC. Поскольку отрезок KL перпендикулярен плоскости ABC, получаем, что отрезок AC перпендикулярен плоскости KLM, а значит, прямая KM перпендикулярна AC.

б) Пусть MH — высота треугольника AML. Так как плоскости ABC и ABB_1 перпендикулярны, отрезок MH перпендикулярен плоскости ABB_1, и поэтому искомый угол равен углу HKM. Вычисляя двумя способами площадь треугольника AML, получим $2S_{AML}=MH\cdot AL=MA\cdot ML$, откуда

$$MH=\frac{MA\cdot ML}{AL}=\frac{2\sqrt{3^2-2^2}}{3}=\frac{2\sqrt{5}}{3},$$

поэтому

$$\sin\angle HKM=\frac{HM}{KM}=\frac{HM}{\sqrt{3^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{70}}{21}.$$

Ответ: б) $\arcsin\frac{\sqrt{70}}{21}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{x^2+3x-1}{x+2}}\ge\frac{2}{3}\cdot 3{,}5^{\,x+1-\frac{3}{x+2}}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{x^2+3x-1}{x+2}}\ge\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^{\frac{x^2+3x-1}{x+2}};\qquad\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x^2+3x-1}{x+2}}\ge\frac{2}{3}.$$

Значит, $\frac{x^2+3x-1}{x+2}\le 1$, то есть $\frac{(x+3)(x-1)}{x+2}\le 0$, откуда $x\le -3$ или $-2<x\le 1$.

Ответ: $(-\infty;-3]$; $(-2;1]$.

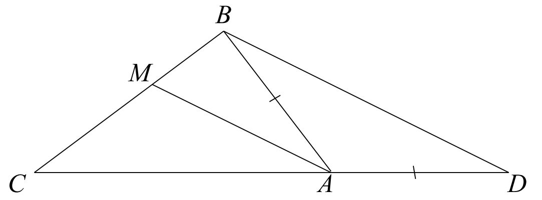
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 В треугольнике ABC на продолжении стороны AC за вершину A отложен отрезок AD, равный стороне AB. Прямая, проходящая через точку A параллельно BD, пересекает сторону BC в точке M.

а) Докажите, что AM — биссектриса угла BAC.

б) Найдите площадь трапеции $AMBD$, если площадь треугольника ABC равна 216 и известно отношение $AC:AB=5:4$.

Решение.



а) Обозначим $\angle BAC=\alpha$. По теореме о внешнем угле треугольника $\angle ABD+\angle ADB=\alpha$. Треугольник ABD равнобедренный, поэтому $\angle ADB=\angle ABD=\frac{\alpha}{2}$, а так как AM параллельна BD,

$$\angle MAC=\angle BDC=\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\angle BAC.$$

Следовательно, AM — биссектриса угла BAC.

б) По свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{CM}{MB}=\frac{AC}{AB}=\frac{5}{4},$$

значит,

$$\frac{S_{ACM}}{S_{ABC}}=\frac{CM}{CB}=\frac{5}{9},\quad S_{ACM}=\frac{5}{9}S_{ABC}=\frac{5}{9}\cdot 216=120.$$

Треугольник DCB подобен треугольнику ACM с коэффициентом $\frac{9}{5}$, поэтому

$$S_{DCB}=\left(\frac{9}{5}\right)^2 S_{ACM}=\frac{81}{25}\cdot 120=388{,}8.$$

Следовательно,

$$S_{AMBD}=S_{DCB}-S_{ACM}=388{,}8-120=268{,}8.$$

Ответ: б) 268,8.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15 января Алексей планирует взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1,5 млн рублей. Условия его возврата следующие:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число;
– выплата должна производиться ежемесячно в период со 2-го по 14-е число каждого месяца;
– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (млн рублей)	1,5	1,2	1	0,7	0,5	0,3	0

Найдите наименьшее значение r, при котором Алексею в общей сумме придётся выплатить больше 2,2 млн рублей.

Решение.

Пусть S_n — сумма, которую Алексей выплачивает в n-м месяце кредитования. Также для удобства произведём замену: $k = 1 + \frac{r}{100}$.

Тогда

$S_1 = 1{,}5 \cdot k - 1{,}2$ (изначальный долг в 1,5 миллиона рублей увеличится в k раз, а во втором месяце на счёте должно остаться 1,2 млн рублей).

Аналогично

$S_2 = 1{,}2 \cdot k - 1$; $S_3 = 1 \cdot k - 0{,}7$; $S_4 = 0{,}7 \cdot k - 0{,}5$; $S_5 = 0{,}5 \cdot k - 0{,}3$; $S_6 = 0{,}3 \cdot k$.

Общая сумма выплат S составляет

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = 5{,}2k - 3{,}7.$$

Вспомним, что $k = 1 + \frac{r}{100}$, и решим неравенство:

$$5{,}2 + \frac{5{,}2r}{100} - 3{,}7 > 2{,}2; \quad \frac{5{,}2r}{100} > 0{,}7; \quad r > \frac{175}{13}.$$

Наименьшее целое решение: 14.

Ответ: 14.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

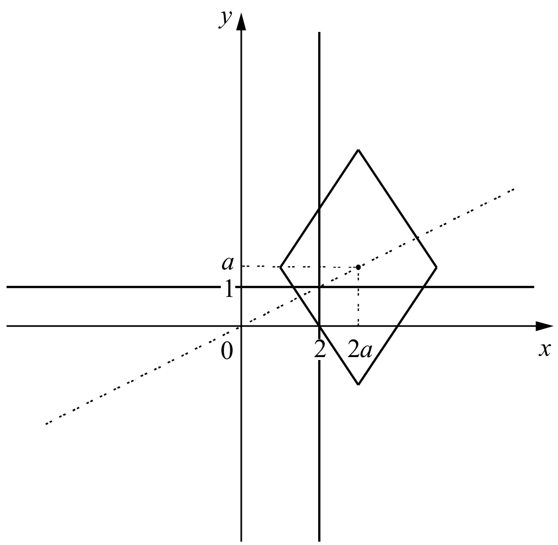
18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3|x-2a| + 2|y-a| = 6, \\ xy - x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

Решение.

Первое уравнение задаёт на координатной плоскости ромб с диагоналями 4 и 6, параллельными осям Ox и Oy соответственно, и с центром в точке $(2a; a)$. Второе уравнение задаёт две прямые $x = 2$ и $y = 1$.



Система имеет ровно три решения в одном из двух случаев: либо одна из прямых пересекает ромб в двух точках, а вторая проходит через только одну из его вершин, либо точка пересечения прямых лежит на стороне ромба, но не в его вершине. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

1. Если нижняя или верхняя вершина лежит на прямой $y=1$, то $a=1+3=4$ или $a=1-3=-2$. Центр ромба удалён от прямой $x=2$ на 6, поэтому прямая $x=2$ не пересекает ромб.

Если левая или правая вершина лежит на прямой $x=2$, то $a=\frac{2+2}{2}=2$ или $a=\frac{2-2}{2}=0$, а центр ромба удалён от прямой $y=1$ на 1, поэтому прямая $y=1$ пересекает ромб в двух точках.

2. Точка пересечения прямых не должна совпасть с вершиной ромба, то есть $a\neq 1$. Подставим $x=2$, $y=1$ в уравнение:

$$8|a-1|=6, \quad \text{откуда } a=\frac{1}{4} \text{ или } a=\frac{7}{4}.$$

Оба значения удовлетворяют условию $a\neq 1$, а потому при каждом из этих значений a система имеет ровно три решения.

Ответ: $2;\ \frac{1}{4};\ \frac{7}{4};\ 0.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения *a*, но из-за арифметической ошибкиответ содержит неверное значение	3
С помощью верного рассуждения получены все значения *a*только для одного из случаев: одна из прямых пересекает ромб в двух точках, а вторая проходит через только одну из его вершин, или точка пересечения прямых лежит на стороне ромба, но не в его вершине	2
Задача верно сведена к исследованию возможного числа решений системы уравнений	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 а) Найдите хотя бы одно такое натуральное число n, что десятичная запись числа n^2+2n оканчивается всеми цифрами числа n, записанными в том же порядке.

б) Может ли такое число оканчиваться цифрой 3?

в) Найдите все такие четырёхзначные числа.

<u>Решение.</u>

а) Например, число 9.

б) Предположим, что $n=10k+3$. Тогда

$$n^2+2n=100k^2+60k+9+20k+6=10l+15,$$

т. е. десятичная запись числа n^2+2n оканчивается цифрой 5. Значит, такое невозможно.

в) Запишем условие задачи в таком виде: $n^2+2n=n+N\cdot 10000$, преобразуем:

$$n^2+n=N\cdot 10000, \text{ т. е. } n\cdot(n+1)=2^4\cdot 5^4\cdot N.$$

Заметим, что n и $(n+1)$ не могут одновременно делиться на 2 и не могут одновременно делиться на 5. Значит, один из множителей делится на 5^4 и один из множителей делится на 2^4. Эти два множителя могут совпадать только в том случае, если число $(n+1)$ делится на 10000, а число n четырёхзначное, т. е. $n=9999$.

Если $n\neq 9999$, мы должны подобрать два числа, одно из которых делится на 16, а другое на 625 и одно из которых больше другого на 1.

Переберём нечётные четырёхзначные числа, кратные числу 625: 1875, 3125, 4375, 5625, 6875, 8125, 9375. Из них только число 9375 имеет вид $16k-1$, а чисел вида $16k+1$ среди них нет.

Значит, искомое число может равняться 9375 или 9999.

Ответ: а) 9; б) нет; в) 9375; 9999.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4