

Министерство промышленности и торговли Тверской области

Государственное бюджетное профессиональное

образовательное учреждение

«Тверской химико-технологический колледж»

Цикловая комиссия общеобразовательных дисциплин

Курс лекций
ЕН.01. Элементы высшей
математики

для студентов специальности

38.02.07 Банковское дело

Тверь, 2021

Рассмотрено
цикловой комиссией
общеобразовательных дисциплин

Протокол № _____
от «___» _____ 202__ г.

Председатель ЦК
_____ С.Д. Никита

Принято
методическим Советом

Протокол № _____
от «___» _____ 202__
г.

Зам. директора по УР
_____ Е.А. Гусева

Разработчик: Михайлова Н.В., преподаватель

Пояснительная записка

«ЕН.01. Элементы высшей математики» - обязательная дисциплина в цикле естественнонаучных дисциплин, она является одним из основных средств познания.

Представленные лекции составлены в соответствии с рабочей программой по дисциплине «ЕН.01. Элементы высшей математики».

Анализируя программу, учебники, методические пособия, дидактические материалы, научную литературу и учитывая, уровень подготовки студентов по математике был отобран необходимый материал и составлены данные лекции.

Основной задачей данного цикла лекций является обеспечение студентов необходимым теоретическим материалом для усвоения таких тем, как матрицы и действия с ними, определители и правила их вычисления, комплексные числа, предел и непрерывность функции, вычисление производных и интегралов и других важных тем.

Лекции предназначены для студентов первого и второго курса среднего профессионального образования, очной формы обучения, по специальности 38.02.07 Банковское дело.

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

1 Структура курса лекций

№ и тема лекции	Объем часов
1. Определение комплексного числа в алгебраической форме, действия над ними.	2
2. Матрицы и действия над ними.	2
3. Определитель матрицы.	2
4. Методы решения систем линейных уравнений. Метод Гаусса. Правило Крамера.	2
5. Методы решения систем линейных уравнений. Метод обратной матрицы.	2
6. Задача линейного программирования.	2
7. Функции двух и нескольких переменных, способы задания, символика, область определения.	2
8. Предел функции. Раскрытие неопределенностей. Замечательные пределы.	2
9. Производная функции. Основные правила дифференцирования. Производные высших порядков.	2
10. Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции. Частные производные.	2
11. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Основные правила интегрирования.	2
12. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Основные свойства.	2
13. Интегрирование неограниченных функций. Интегрирование по бесконечному промежутку.	2
14. Дифференциальные уравнения. Основные понятия и определения.	2
ВСЕГО:	28

2 Лекционные материалы

Лекция № 1.

Определение комплексного числа в алгебраической форме, действия над ними. (2 часа)

Комплексные числа

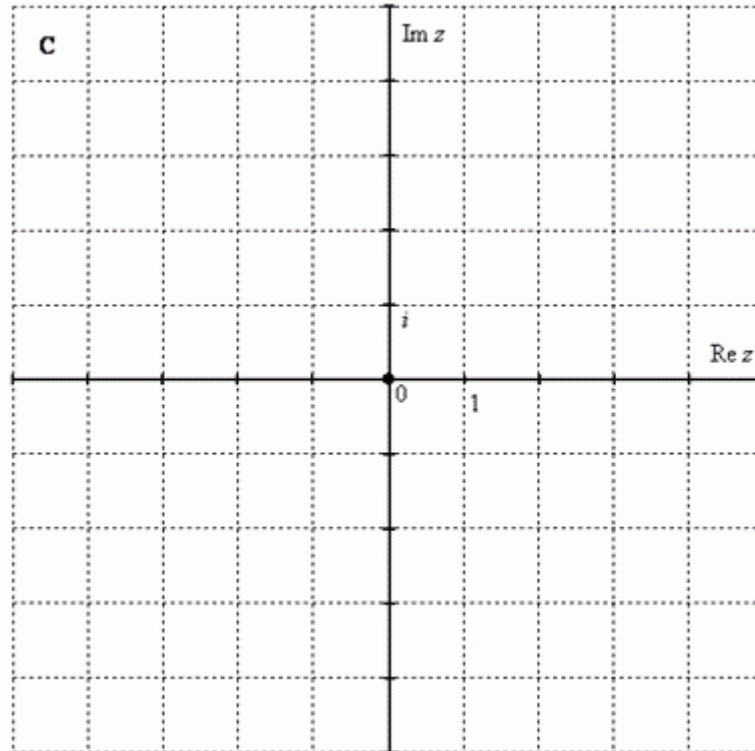
Прежде чем, мы перейдем к рассмотрению комплексных чисел, дам важный совет: не пытайтесь представить комплексное число «в жизни» – это всё равно, что пытаться представить четвертое измерение в нашем трехмерном пространстве.

Комплексное число – это двумерное число. Оно имеет вид $z = a + bi$, где a и b – действительные числа, i – так называемая мнимая единица. Число a называется действительной частью ($\operatorname{Re} z$) комплексного числа, число b называется мнимой частью ($\operatorname{Im} z$) комплексного числа z .

$a + bi$ – это ЕДИНОЕ ЧИСЛО, а не сложение. Действительную и мнимую части комплексного числа, в принципе, можно переставить местами: $z = bi + a$ или

переставить мнимую единицу: $z = a + ib$ – от этого комплексное число не изменится. Но стандартно комплексное число принято записывать именно в таком порядке: $z = a + bi$

Чтобы всё было понятнее, приведу геометрическую интерпретацию. Комплексные числа изображаются на комплексной плоскости:



Как упоминалось выше, буквой **R** принято обозначать множество действительных чисел. Множество же комплексных чисел принято обозначать «жирной» или утолщенной буквой **C**. Поэтому на чертеже следует поставить букву **C**, обозначая тот факт, что у нас комплексная плоскость.

Комплексная плоскость состоит из двух осей:

$\text{Re } z$ – действительная ось

$\text{Im } z$ – мнимая ось

Правила оформления чертежа практически такие же, как и для чертежа в декартовой системе координат. По осям нужно задать масштаб, отмечаем: ноль; единицу по действительной оси; мнимую единицу i по мнимой оси.

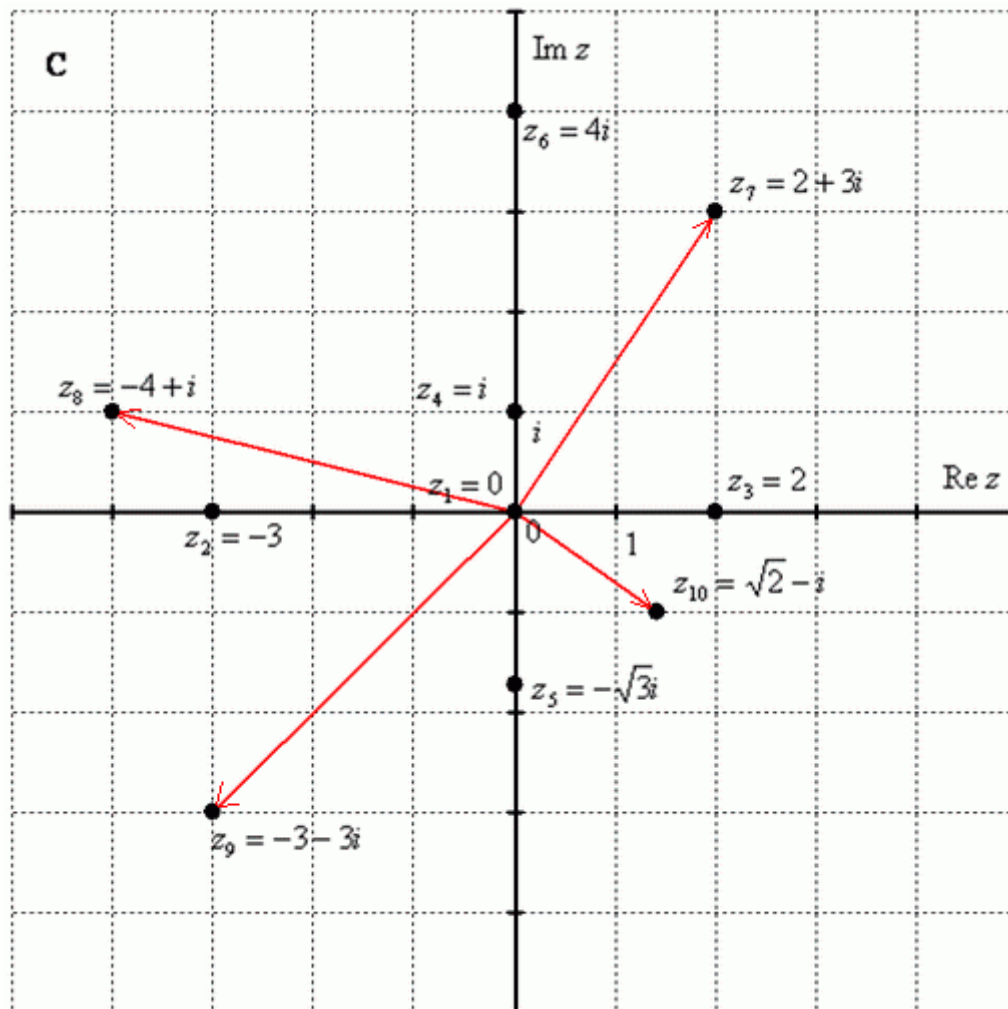
Не нужно проставлять все значения: $\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ и $\dots -3i, -2i, -i, 0, i, 2i, 3i, \dots$.

Построим на комплексной плоскости следующие комплексные числа:

$$z_1 = 0, z_2 = -3, z_3 = 2$$

$$z_4 = i, z_5 = -\sqrt{3}i, z_6 = 4i$$

$$z_7 = 2 + 3i, z_8 = -4 + i, z_9 = -3 - 3i, z_{10} = \sqrt{2} - i$$



По какому принципу отмечены числа на комплексной плоскости, думаю, очевидно – комплексные числа отмечают точно так же, как мы отмечали точки еще в 5-6 классе на уроках геометрии.

Рассмотрим следующие комплексные числа: $z_1 = 0$, $z_2 = -3$, $z_3 = 2$. Вы скажете, да это же обыкновенные действительные числа! И будете почти правы. Действительные числа – это частный случай комплексных чисел. Действительная ось $\text{Re } z$ обозначает в точности множество действительных чисел $\mathbf{R}$, то есть на оси $\text{Re } z$ сидят все наши «обычные» числа. Более строго утверждение можно сформулировать так: Множество действительных чисел $\mathbf{R}$ является **подмножеством** множества комплексных чисел $\mathbf{C}$.

Числа $z_1 = 0$, $z_2 = -3$, $z_3 = 2$ – это комплексные числа с нулевой мнимой частью.

Числа $z_4 = i$, $z_5 = -\sqrt{3}i$, $z_6 = 4i$ – это, наоборот, чисто мнимые числа, т.е. числа с нулевой действительной частью. Они располагаются строго на мнимой оси $\text{Im } z$.

В числах $z_7 = 2 + 3i$, $z_8 = -4 + i$, $z_9 = -3 - 3i$, $z_{10} = \sqrt{2} - i$ и действительная и мнимая части не равны нулю. Такие числа тоже обозначаются точками на комплексной плоскости, при этом, к ним принято проводить радиус-векторы из начала координат (обозначены красным цветом на чертеже). Радиус-векторы к числам, которые располагаются на осях, обычно не чертят, потому что они сливаются с осями.

Алгебраическая форма комплексного числа.

Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел.

С алгебраической формой комплексного числа мы уже познакомились, $z = a + bi$ – это и есть алгебраическая форма комплексного числа. Почему речь зашла о форме? Дело в том, что существуют еще тригонометрическая и показательная форма комплексных чисел.

Действия с комплексными числами не представляют особых сложностей и мало чем отличаются от обычной алгебры.

Сложение комплексных чисел

Пример 1

Сложить два комплексных числа $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = 4 - 5i$

Для того чтобы сложить два комплексных числа нужно сложить их действительные и мнимые части:

$$z_1 + z_2 = 1 + 3i + 4 - 5i = 5 - 2i$$

Найти сумму комплексных чисел нужно: просуммировать действительные части и просуммировать мнимые части.

Для комплексных чисел справедливо правило: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ – от перестановки слагаемых сумма не меняется.

Вычитание комплексных чисел

Пример 2

Найти разности комплексных чисел $z_1 - z_2$ и $z_2 - z_1$, если $z_1 = -2 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + 5i$

Действие аналогично сложению, единственная особенность состоит в том, что вычитаемое нужно взять в скобки, а затем – стандартно раскрыть эти скобки со сменой знака:

$$z_1 - z_2 = -2 + i - (\sqrt{3} + 5i) = -2 + i - \sqrt{3} - 5i = -2 - \sqrt{3} - 4i$$

Результат не должен смущать, у полученного числа две, а не три части. Просто действительная часть – составная: $-2 - \sqrt{3}$. Для наглядности ответ можно переписать так: $z_1 - z_2 = (-2 - \sqrt{3}) - 4i$.

Рассчитаем вторую разность:

$$z_2 - z_1 = \sqrt{3} + 5i - (-2 + i) = \sqrt{3} + 5i + 2 - i = 2 + \sqrt{3} + 4i$$

Здесь действительная часть тоже составная: $2 + \sqrt{3}$

Чтобы не было какой-то недосказанности, приведу короткий пример с «нехорошей» мнимой частью: $-1 + \sqrt{2}i + 7 - 3i = 6 + (\sqrt{2} - 3)i$. Вот здесь без скобок уже не обойтись.

Умножение комплексных чисел

Пример 3

Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + 6i$

Очевидно, что произведение следует записать так:

$$z_1 \cdot z_2 = (1 - i)(3 + 6i)$$

Что напрашивается? Напрашивается раскрыть скобки по правилу умножения многочленов. Так и нужно сделать! Все алгебраические действия вам знакомы, главное, помнить, что $i^2 = -1$ **и быть внимательным.**

Повторим, правило умножения многочленов: чтобы умножить многочлен на многочлен нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена.

Я распишу подробно:

$$z_1 \cdot z_2 = (1 - i)(3 + 6i) = 1 \cdot 3 - i \cdot 3 + 1 \cdot 6i - i \cdot 6i = 3 - 3i + 6i + 6 = 9 + 3i$$

Внимание, и еще раз внимание, чаще всего ошибку допускают в знаках.

Как и сумма, произведение комплексных чисел перестановочно, то есть справедливо равенство: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

Деление комплексных чисел

Пример 4

Даны комплексные числа $z_1 = 13 + i$, $z_2 = 7 - 6i$. Найти частное $\frac{z_1}{z_2}$.

Составим частное:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{13 + i}{7 - 6i}$$

Деление чисел осуществляется **методом умножения знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю выражение.**

Вспоминаем формулу $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ и смотрим на наш знаменатель: $7-6i$. В знаменателе уже есть $(a-b)$, поэтому сопряженным выражением в данном случае является $(a+b)$, то есть $7+6i$

Согласно правилу, знаменатель нужно умножить на $7+6i$, и, чтобы ничего не изменилось, домножить числитель на то же самое число $7+6i$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)}$$

Далее в числителе нужно раскрыть скобки (перемножить два числа по правилу, рассмотренному в предыдущем пункте). А в знаменателе воспользоваться формулой $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ (помним, что $i^2 = -1$ и не путаемся в знаках!!!).

Распишу подробно:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)} = \frac{91+7i+78i+6i^2}{7^2 - (6i)^2} = \frac{91+7i+78i-6}{49 - (-36)} = \\ &= \frac{85+85i}{49+36} = \frac{85+85i}{85} = 1+i \end{aligned}$$

В ряде случаев перед делением дробь целесообразно упростить, например,

рассмотрим частное чисел: $\frac{-7-12i}{-12+7i}$. Перед делением избавляемся от лишних минусов: в числителе и в знаменателе выносим минусы за скобки и сокращаем

эти минусы: $\frac{-7-12i}{-12+7i} = \frac{-(7+12i)}{-(12-7i)} = \frac{7+12i}{12-7i}$. Для любителей порешать приведу правильный ответ: i

Редко, но встречается такое задание:

Пример 5

Дано комплексное число $z = \frac{1}{\sqrt{3}+i}$. Записать данное число в алгебраической форме (т.е. в форме $a+bi$).

Приём тот же самый – умножаем знаменатель и числитель на сопряженное знаменателю выражение. Снова смотрим на формулу $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. В знаменателе уже есть $(a+b)$, поэтому знаменатель и числитель нужно домножить на сопряженное выражение $(a-b)$, то есть на $\sqrt{3}-i$:

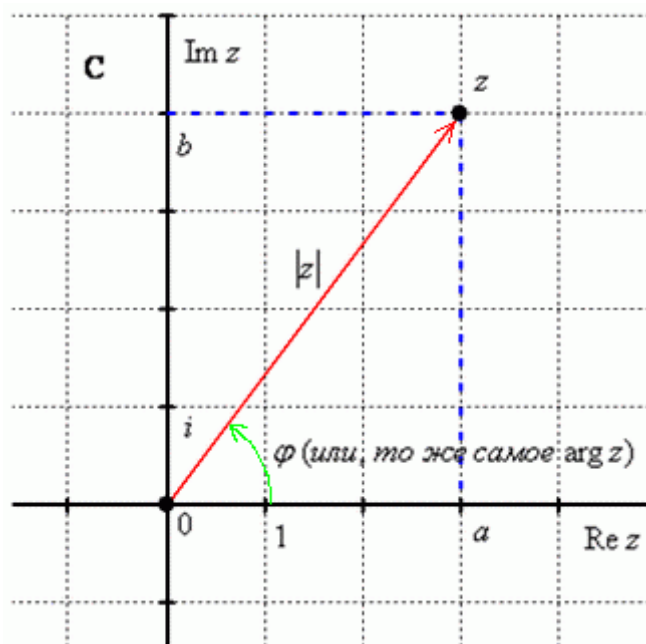
$$z = \frac{1}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3})^2 - (i)^2} = \frac{\sqrt{3}-i}{3+1} = \frac{\sqrt{3}-i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i$$

Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа

Любое комплексное число (кроме нуля) $z = a + bi$ можно записать в тригонометрической форме:

$z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где $|z|$ – это модуль комплексного числа, а φ – аргумент комплексного числа.

Изобразим на комплексной плоскости число $z = a + bi$. Для определённости и простоты объяснений расположим его в первой координатной четверти, т.е. считаем, что $a > 0, b > 0$:



Модулем комплексного числа z называется расстояние от начала координат до соответствующей точки комплексной плоскости. Попросту говоря, **модуль – это длина** радиус-вектора, который на чертеже обозначен красным цветом.

Модуль комплексного числа z стандартно обозначают: $|z|$.

По теореме Пифагора легко вывести формулу для нахождения модуля комплексного числа: . Данная формула справедлива для любых значений «a» и «b».

Примечание: модуль комплексного числа представляет собой обобщение понятия **модуля действительного числа**, как расстояния от точки до начала координат.

Аргументом комплексного числа z называется угол φ между положительной полуосью действительной оси $\text{Re } z$ и радиус-вектором, проведенным из начала координат к соответствующей точке. Аргумент не определён для единственного числа: $z = 0$.

Рассматриваемый принцип фактически схож с **полярными координатами**, где полярный радиус и полярный угол однозначно определяют точку.

Аргумент комплексного числа z стандартно обозначают: φ или $\arg z$

Из геометрических соображений получается следующая формула для нахождения аргумента:

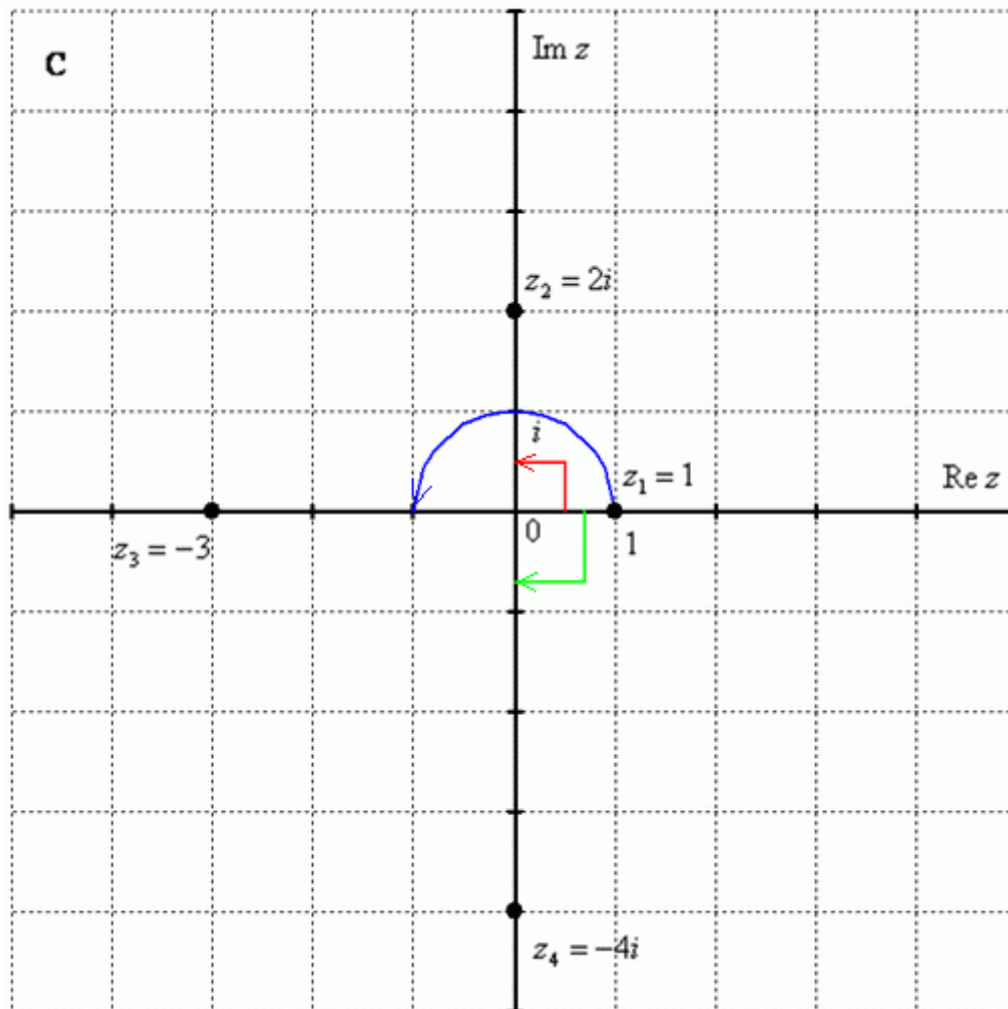
$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$. **Внимание!** Данная формула работает только в правой полуплоскости! Если комплексное число располагается не в 1-й и не 4-й координатной четверти, то формула будет немного другой. Эти случаи мы тоже разберем.

Но сначала рассмотрим простейшие примеры, когда комплексные числа располагаются на координатных осях.

Пример 6

Представить в тригонометрической форме комплексные числа: $z_1 = 1$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -3$, $z_4 = -4i$.

Выполним чертёж:



На самом деле задание устное. Для наглядности перепису тригонометрическую форму комплексного числа: $z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Запомним, модуль – **длина** (которая всегда неотрицательна), аргумент – **угол**.

1) Представим в тригонометрической форме число $z_1 = 1$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_1| = 1$. Формальный расчет по формуле: $|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$.

Очевидно, что $\varphi_1 = 0$ (число лежит непосредственно на действительной положительной полуоси). Таким образом, число в тригонометрической форме: $z_1 = \cos 0 + i \sin 0$.

Обратное проверочное действие: $z_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1 + i \cdot 0 = 1$

2) Представим в тригонометрической форме число $z_2 = 2i$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_2| = 2$. Формальный расчет по формуле: $|z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$.

Очевидно, что $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ (или 90 градусов). На чертеже угол обозначен красным цветом. Таким образом, число в тригонометрической форме: $z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$.

Используя таблицу значений тригонометрических функций, легко обратно получить алгебраическую форму числа (заодно выполнив проверку):

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2(0 + i \cdot 1) = 2i$$

3) Представим в тригонометрической форме число $z_3 = -3$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_3| = 3$. Формальный расчет по формуле: $|z_3| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$.

Очевидно, что $\varphi_3 = \pi$ (или 180 градусов). На чертеже угол обозначен синим цветом. Таким образом, число в тригонометрической форме: $z_3 = 3(\cos \pi + i \sin \pi)$.

Проверка: $z_3 = 3(\cos \pi + i \sin \pi) = 3(-1 + i \cdot 0) = -3$

4) И четвёртый интересный случай. Представим в тригонометрической форме число $z_4 = -4i$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_4| = 4$. Формальный расчет по формуле: $|z_4| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4$.

Аргумент можно записать двумя способами: Первый способ: $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$ (270 градусов), и, соответственно: $z_4 = 4 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$. Проверка:

$$z_4 = 4 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = 4(0 + i \cdot (-1)) = -4i$$

Однако более стандартно следующее правило: **Если угол больше 180 градусов**, то его записывают со знаком минус и противоположной ориентацией

(«прокруткой») угла: $\varphi_4 = -\frac{\pi}{2}$ (минус 90 градусов), на чертеже угол отмечен

зеленым цветом. Легко заметить, что $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$ и $\varphi_4 = -\frac{\pi}{2}$ – это один и тот же угол.

$$z_4 = 4 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)$$

Таким образом, запись принимает вид:

Извлечение корней из комплексных чисел.

Квадратное уравнение с комплексными корнями.

$$z = \sqrt{-4}$$

Нельзя извлечь корень? Если речь идет о действительных числах, то действительно нельзя. В комплексных числах извлечь корень – можно! А точнее, два корня:

$$z_1 = \sqrt{-4} = -2i$$

$$z_2 = \sqrt{-4} = 2i$$

Действительно ли найденные корни являются решением уравнения $z^2 = -4$? Выполним проверку:

$$(-2i)^2 = (-2)^2 \cdot i^2 = 4 \cdot (-1) = -4$$

$$(2i)^2 = 2^2 \cdot i^2 = 4 \cdot (-1) = -4$$

Что и требовалось проверить.

Часто используется сокращенная запись, оба корня записывают в одну строчку: $z_{1,2} = \pm 2i$.

Такие корни также называют сопряженными комплексными корнями.

Как извлекать квадратные корни из отрицательных чисел, думаю, всем понятно: $\sqrt{-1} = \pm i$, $\sqrt{-9} = \pm 3i$, $\sqrt{-36} = \pm 6i$, $\sqrt{-3} = \pm \sqrt{3}i$, $\sqrt{-5} = \pm \sqrt{5}i$ и т.д. Во всех случаях получается два сопряженных комплексных корня.

Пример 7

Решить квадратное уравнение $z^2 - 6z + 34 = 0$

Вычислим дискриминант:

$$D = 36 - 136 = -100$$

Дискриминант отрицателен, и в действительных числах уравнение решения не имеет. Но корень можно извлечь в комплексных числах!

$$\sqrt{D} = \pm 10i$$

По известным формулам получаем два корня:

$$z_{1,2} = \frac{6 \pm 10i}{2}$$

$$z_{1,2} = 3 \pm 5i \quad \text{— сопряженные комплексные корни}$$

Таким образом, уравнение $z^2 - 6z + 34 = 0$ имеет два сопряженных комплексных корня: $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = 3 + 5i$

Нетрудно понять, что в поле комплексных чисел «школьное» квадратное уравнение всегда при двух корнях! И вообще, любое уравнение вида $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ имеет ровно n корней, часть из которых могут быть комплексными.

Как извлечь корень из произвольного комплексного числа?

Рассмотрим уравнение $z^n = w$, или, то же самое: $z = \sqrt[n]{w}$. Здесь «эн» может принимать любое натуральное значение, которое больше единицы. В частности, при $n = 2$ получается квадратный корень $z = \sqrt{w}$. Что касается именно квадратного корня, то он успешно извлекается и «алгебраическим» методом, который рассмотрен на уроке **выражения, уравнения и системы уравнений с комплексными числами**. Но то позже – здесь и сейчас мы познакомимся с универсальным способом, пригодным для произвольного «эн»:

Уравнение вида $z = \sqrt[n]{w}$ имеет ровно n корней $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$, которые можно найти по формуле:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \right), \text{ где } |w| \text{ — это модуль комплексного}$$

числа w , φ — его аргумент, а параметр k принимает значения: $k = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

Лекция № 2.

Матрицы и действия над ними. (2 часа)

Определение. Матрицей размера $m \times n$, где m - число строк, n - число столбцов, называется таблица чисел, расположенных в определенном порядке. Эти числа называются элементами матрицы. Место каждого элемента однозначно определяется номером строки и столбца, на пересечении которых он находится. Элементы матрицы обозначаются a_{ij} , где i - номер строки, а j - номер столбца.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Основные действия над матрицами.

Матрица может состоять как из одной строки, так и из одного столбца. Вообще говоря, матрица может состоять даже из одного элемента.

Определение. Если число столбцов матрицы равно числу строк ($m=n$), то матрица называется квадратной.

Определение. Матрица вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E,$$

называется единичной матрицей.

Определение. Если $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется симметрической.

Пример. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ - симметрическая матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение. Квадратная матрица вида называется диагональной матрицей.

Сложение и вычитание матриц сводится к соответствующим операциям над их элементами. Самым главным свойством этих операций является то, что

они определены только для матриц одинакового размера. Таким образом, возможно определить операции сложения и вычитания матриц:

Определение. Суммой (разностью) матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

$$C = A + B = B + A.$$

Операция умножения (деления) матрицы любого размера на произвольное число сводится к умножению (делению) каждого элемента матрицы на это число.

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha (A+B) = \alpha A \pm \alpha B$$

$$A(\alpha \pm \beta) = \alpha A \pm \beta A$$

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, найти $2A + B$.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$2A + B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Операция умножения матриц.

Определение: Произведением матриц называется матрица, элементы которой могут быть вычислены по следующим формулам:

$$A \cdot B = C;$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Из приведенного определения видно, что операция умножения матриц определена только для матриц, число столбцов первой из которых равно числу строк второй.

Свойства операции умножения матриц.

- 1) Умножение матриц не коммутативно, т.е. $AB \neq BA$ даже если определены оба произведения. Однако, если для каких – либо матриц соотношение $AB=BA$ выполняется, то такие матрицы называются перестановочными.

Самым характерным примером может служить единичная матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера.

Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка.

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

Очевидно, что для любых матриц выполняются следующее свойство:

$$A \cdot O = O; O \cdot A = O,$$

где O – нулевая матрица.

- 2) Операция перемножения матриц ассоциативна, т.е. если определены произведения AB и $(AB)C$, то определены BC и $A(BC)$, и выполняется равенство:

$$(AB)C = A(BC).$$

- 3) Операция умножения матриц дистрибутивна по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения $A(B+C)$ и $(A+B)C$, то соответственно:

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)C = AC + BC.$$

- 4) Если произведение AB определено, то для любого числа α верно соотношение:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

- 5) Если определено произведение AB , то определено произведение $BTAT$ и выполняется равенство:

$$(AB)T = BTAT, \text{ где}$$

индексом T обозначается транспонированная матрица.

- 6) Заметим также, что для любых квадратных матриц $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Понятие $\det$ (определитель, детерминант) будет рассмотрено ниже.

Определение. Матрицу B называют транспонированной матрицей A , а переход от A к B транспонированием, если элементы каждой строки матрицы A записать в том же порядке в столбцы матрицы B .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

$$B = AT = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

другими словами, $b_{ji} = a_{ij}$.

В качестве следствия из предыдущего свойства (5) можно записать, что:

$$(ABC)^T = CT^B A^T,$$

при условии, что определено произведение матриц ABC.

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$. Найти $ATB + \alpha C$.

$$AT = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad ATB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad ATB + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 4 & 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 10 & 4 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

Лекция № 3. Определитель матрицы. (2 часа)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение. Определителем квадратной матрицы A называется число, которое может быть вычислено по элементам матрицы по формуле:

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k}, \quad \text{где}$$

M_{1k} – детерминант матрицы, полученной из исходной вычеркиванием первой строки и k – го столбца. Следует обратить внимание на то, что определители имеют только квадратные матрицы, т.е. матрицы, у которых число строк равно числу столбцов.

Предыдущая формула позволяет вычислить определитель матрицы по первой строке, также справедлива формула вычисления определителя по первому столбцу:

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k1} M_{k1}$$

Вообще говоря, определитель может вычисляться по любой строке или столбцу матрицы, т.е. справедлива формула:

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} a_{ik} M_{ik}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Очевидно, что различные матрицы могут иметь одинаковые определители.

Определитель единичной матрицы равен 1.

Для указанной матрицы A число M_{1k} называется дополнительным минором элемента матрицы a_{1k} . Таким образом, можно заключить, что каждый элемент матрицы имеет свой дополнительный минор. Дополнительные миноры существуют только в квадратных матрицах.

Определение. Дополнительный минор произвольного элемента квадратной матрицы a_{ij} равен определителю матрицы, полученной из исходной вычеркиванием i -ой строки и j -го столбца.

Свойство 1. Важным свойством определителей является следующее соотношение:

$$\det A = \det A^T;$$

Свойство 2. $\det (AB) = \det A \cdot \det B$

Свойство 3. Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

Свойство 4. При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

Определение: Столбцы (строки) матрицы называются линейно зависимыми, если существует их линейная комбинация, равная нулю, имеющая нетривиальные (не равные нулю) решения.

Свойство 6. Если в матрице A строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

Свойство 7. Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю. (Данное утверждение очевидно, т.к. считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)

Свойство 8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить(вычесть) элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

Свойство 9. Если для элементов какой-либо строки или столбца матрицы верно соотношение: $d = d_1 \pm d_2$, $e = e_1 \pm e_2$, $f = f_1 \pm f_2$, то верно:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & l & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_1 & e_1 & f_1 \\ k & l & m \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} a & b & c \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ k & l & m \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример. Вычислить определитель матрицы $A =$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

$$= -5 + 18 + 6 = 19.$$

Пример: Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $\det (AB)$.

1-й способ: $\det A = 4 - 6 = -2$; $\det B = 15 - 2 = 13$; $\det (AB) = \det A \cdot \det B = -26$.

2-й способ: $AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$, $\det (AB) = 7 \cdot 18 - 8 \cdot 19 = 126 - 152 = -26$.

Элементарные преобразования матрицы.

Определение. Элементарными преобразованиями матрицы назовем следующие преобразования:

- 1) умножение строки на число, отличное от нуля;
- 2) прибавление к элементам одной строки элементов другой строки;
- 3) перестановка строк;
- 4) вычеркивание (удаление) одной из одинаковых строк (столбцов);
- 5) транспонирование;

Те же операции, применяемые для столбцов, также называются элементарными преобразованиями.

С помощью элементарных преобразований можно к какой-либо строке или столбцу прибавить линейную комбинацию остальных строк (столбцов).

Миноры.

Выше было использовано понятие дополнительного минора матрицы. Дадим определение

Определение. Если в матрице A выделить несколько произвольных строк и столько же произвольных столбцов, то определитель, составленный из элементов, расположенных на пересечении этих строк и столбцов называется минором матрицы A . Если выделено s строк и столбцов, то полученный минор называется минором порядка s .

Заметим, что вышесказанное применимо не только к квадратным матрицам, но и к прямоугольным.

Если вычеркнуть из исходной квадратной матрицы A выделенные строки и столбцы, то определитель полученной матрицы будет являться дополнительным минором.

Алгебраические дополнения.

Определение. Алгебраическим дополнением минора матрицы называется его дополнительный минор, умноженный на (-1) в степени, равной сумме номеров строк и номеров столбцов минора матрицы.

В частном случае, алгебраическим дополнением элемента матрицы называется его дополнительный минор, взятый со своим знаком, если сумма номеров столбца и строки, на которых стоит элемент, есть число четное и с противоположным знаком, если нечетное.

Теорема Лапласа. Если выбрано s строк матрицы с номерами $i_1, \dots, i_s$, то определитель этой матрицы равен сумме произведений всех миноров, расположенных в выбранных строках на их алгебраические дополнения.

Лекция № 4.

Методы решения систем линейных уравнений. Метод Гаусса. Правило Крамера. (2 часа)

Определение. Система m уравнений с n неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где a_{ij} – коэффициенты, а b_i – постоянные. Решениями системы являются n чисел, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в тождество.

Определение. Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной. Если система не имеет ни одного решения, то она называется несовместной.

Определение. Система называется определенной, если она имеет только одно решение и неопределенной, если более одного.

Определение. Для системы линейных уравнений матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ называется матрицей системы, а матрица}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \text{ называется расширенной матрицей системы}$$

Определение. Если $b_1, b_2, \dots, b_m = 0$, то система называется однородной. однородная система всегда совместна, т.к. всегда имеет нулевое решение.

Элементарные преобразования систем.

К элементарным преобразованиям относятся:

- 1) Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.
- 2) Перестановка уравнений местами.
- 3) Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех x .

Теорема: Система совместна (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.

$$\text{Rg}A = \text{Rg}A^*.$$

Очевидно, что система (1) может быть записана в виде:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Доказательство.

1) Если решение существует, то столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов матрицы A , а значит добавление этого столбца в матрицу, т.е. переход $A \rightarrow A^*$ не изменяют ранга.

2) Если $\text{Rg}A = \text{Rg}A^*$, то это означает, что они имеют один и тот же базисный минор. Столбец свободных членов – линейная комбинация столбцов базисного минора, те верна запись, приведенная выше.

Пример. Определить совместность системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5 \neq 0 \quad \text{Rg}A = 2.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{Rg}A^* = 3.$$

Система несовместна.

Пример. Определить совместность системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ 7x_1 + 10x_2 = 12 \\ 5x_1 + 6x_2 = 8 \\ 3x_1 - 16x_2 = -5 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 12 = 14 \neq 0; \quad \text{Rg}A = 2;$$

$$* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & 38 & 19 \\ 0 & 26 & 13 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0. \quad \text{Rg}A^* = 2.$$

Система совместна. Решения: $x_1 = 1$; $x_2 = 1/2$.

Метод Гаусса.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Разделим обе части 1-го уравнения на $a_{11} \neq 0$, затем:

- 1) умножим на a_{21} и вычтем из второго уравнения
 - 2) умножим на a_{31} и вычтем из третьего уравнения
- и т.д.

Получим:

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + \dots + d_{1n}x_n = d_1 \\ d_{22}x_2 + d_{23}x_3 + \dots + d_{2n}x_n = d_2 \\ \dots \\ d_{m2}x_2 + d_{m3}x_3 + \dots + d_{mn}x_n = d_m \end{cases}, \quad \text{где } d_{1j} = a_{1j}/a_{11}, \quad j = 2, 3, \dots, n+1.$$

$$d_{ij} = a_{ij} - a_{i1}d_{1j} \quad i = 2, 3, \dots, n; \quad j = 2, 3, \dots, n+1.$$

Далее повторяем эти же действия для второго уравнения системы, потом – для третьего и т.д.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}, \text{ откуда получаем: } x_3 = 2; x_2 = 5; x_1 = 1.$$

Пример. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ -5y - 10z = 40 \\ 6z = 18 \end{cases}, \text{ откуда получаем: } z = 3; y = 2; x = 1.$$

Правило Крамера.

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

$\det A \neq 0$;

Действительно, если какое-либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой-либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое-либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Теорема. Система из n уравнений с n неизвестными

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$\Delta = \det A$, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов b_i .

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \Delta 1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta 2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta 3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

Как видно, результат совпадает с результатом, полученным выше матричным методом.

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Для самостоятельного решения:

$$\begin{cases} x+3y-6z=12 \\ 3x+2y+5z=-10 \\ 2x+5y-3z=6 \end{cases}; \text{ Ответ: } x=0; y=0; z=-2.$$

Лекция № 5.

Методы решения систем линейных уравнений. Метод обратной матрицы.
(2 часа)

Обратная матрица.

Определение. Если существуют квадратные матрицы X и A одного порядка, удовлетворяющие условию:

$$XA = AX = E,$$

где E - единичная матрица того же самого порядка, что и матрица A , то матрица X называется обратной к матрице A и обозначается A^{-1} .

Каждая квадратная матрица с определителем, не равным нулю имеет обратную матрицу и притом только одну.

Рассмотрим общий подход к нахождению обратной матрицы.

Исходя из определения произведения матриц, можно записать:

$$AX = E \Rightarrow \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot x_{kj} = e_{ij}, \quad i=(1,n), j=(1,n),$$

$$e_{ij} = 0, \quad i \neq j,$$

$$e_{ij} = 1, \quad i = j.$$

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + \dots + a_{1n}x_{nj} = 0 \\ \vdots \\ a_{j1}x_{1j} + a_{j2}x_{2j} + \dots + a_{jn}x_{nj} = 1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_{1j} + a_{n2}x_{2j} + \dots + a_{nn}x_{nj} = 0 \end{cases}$$

Решив эту систему, находим элементы матрицы X .

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1} .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = e_{11} = 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = e_{12} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = e_{21} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = e_{22} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 3x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ 3x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11} = -2 \\ x_{12} = 1 \\ x_{21} = 3/2 \\ x_{22} = -1/2 \end{cases}$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Однако, такой способ не удобен при нахождении обратных матриц больших порядков, поэтому обычно применяют следующую формулу:

$$x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det A},$$

где M_{ji} - дополнительный минор элемента a_{ji} матрицы A .

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A^{-1} .
 $\det A = 4 - 6 = -2$.

$$\begin{array}{llll} M_{11} = 4; & M_{12} = 3; & M_{21} = 2; & M_{22} = 1 \\ x_{11} = -2; & x_{12} = 1; & x_{21} = 3/2; & x_{22} = -1/2 \end{array}$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Ранг матрицы.

Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Выделим в ней k строк и k столбцов ($k \leq \min(m;n)$). Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k -го порядка. Все такие определители называются минорами этой матрицы.

Определение. Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется рангом матрицы. Обозначается $\text{rang } A$.

Пример. Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

нуля $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$. Значит, $\text{rang } A = 2$.

Ранг канонической матрицы равен числу единиц на главной диагонали. На этом основан один из способов вычисления ранга матрицы.

Пример: найти ранг матрицы путем элементарных преобразований

$$\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 & 1 & 5 & 0 & 4 & 1 & 0 & -15 & -6 & -9 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ rang } A=2$$

Свойства ранга матрицы:

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется;
2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится;
3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

Матричный метод решения систем линейных уравнений.

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных.

Метод удобен для решения систем невысокого порядка.

Метод основан на применении свойств умножения матриц.

Пусть дана система уравнений:

[illegible]

Составим матрицы: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$

Систему уравнений можно записать:

$$A \cdot X = B.$$

Сделаем следующее преобразование: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B,$

т.к. $A^{-1} \cdot A = E$, то $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Для применения данного метода необходимо находить обратную матрицу, что может быть связано с вычислительными трудностями при решении систем высокого порядка.

Пример. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1} .

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2-12) - 1(3-8) = -25 - 10 + 5 = -30.$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; \quad M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10; \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \quad M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16;$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5; \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19; \quad M_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$$

$$\begin{aligned}
a_{11}^{-1} &= \frac{5}{30}; & a_{12}^{-1} &= \frac{1}{30}; & a_{13}^{-1} &= \frac{1}{30}; \\
a_{21}^{-1} &= -\frac{10}{30}; & a_{22}^{-1} &= -\frac{14}{30}; & a_{23}^{-1} &= \frac{16}{30}; \\
a_{31}^{-1} &= \frac{5}{30}; & a_{32}^{-1} &= \frac{19}{30}; & a_{33}^{-1} &= -\frac{11}{30};
\end{aligned}
\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix};$$

Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = E.$$

Находим матрицу X.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3} \cdot 0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итого решения системы: $x=1$; $y=2$; $z=3$.

Несмотря на ограничения возможности применения данного метода и сложность вычислений при больших значениях коэффициентов, а также систем высокого порядка, метод может быть легко реализован на ЭВМ.

Лекция № 6.

Задача линейного программирования. (2 часа)

Определение 1. *Общей задачей линейного программирования* называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (8)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad \{i = \overline{1, k}\}, \quad (9)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad \{i = \overline{k+1, m}\}, \quad (10)$$

$$x_j \geq 0 \quad \{j = \overline{1, l}, l \leq n\}, \quad (11)$$

где a_{ij}, b_i, c_j - заданные постоянные величины и $k \leq m$.

Определение 2. Функция (8) называется *целевой функцией* (или *линейной формой*) задачи (8) – (11), а условия (9) – (11) – *ограничениями* данной задачи.

Определение 3. *Стандартной* (или *симметричной*) задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции (8) при выполнении условий (9) и (11), где $k = m$ и $l = n$.

Определение 4. *Канонической* (или *основной*) задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции (8) при выполнении условий (10) и (11), где $k = 0$ и $l = n$.

Определение 5. Совокупность чисел $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющих ограничениям задачи (9) – (11), называется *допустимым решением* (или *планом*).

Определение 6. План $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, при котором целевая функция задачи (8) принимает свое максимальное (минимальное) значение, называется *оптимальным*.

Значение целевой функции (8) при плане X будем обозначать через $F(X)$. Следовательно, X^* – оптимальный план задачи, если для любого X выполняется неравенство $F(X) \leq F(X^*)$ [соответственно $F(X) \geq F(X^*)$].

Указанные выше три формы задачи линейного программирования эквивалентны в том смысле, что каждая из них с помощью несложных преобразований может быть переписана в форме другой задачи. Это означает, что если имеется способ нахождения решения одной из указанных задач, то тем самым может быть определен оптимальный план любой из трех задач.

Чтобы перейти от одной формы записи задачи линейного программирования к другой, нужно уметь, *во-первых*, сводить задачу минимизации функции к задаче максимизации; *во-вторых*, переходить от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам и наоборот; *в-третьих*, заменять переменные, которые не подчинены условию неотрицательности.

В том случае, когда требуется найти минимум функции $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$, можно перейти к нахождению максимума функции $F_1 = -F = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n$, поскольку $\min F = -\max(-F)$.

Ограничение-неравенство исходной задачи линейного программирования, имеющее вид “ $\leq$ ”, можно преобразовать в ограничение-равенство добавлением к его левой части дополнительной неотрицательной переменной, а ограничение-неравенство вида “ $\geq$ ” – в ограничение-равенство вычитанием из его левой части дополнительной неотрицательной переменной. Таким образом, ограничение-неравенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

преобразуется в ограничение-равенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i \quad (x_{n+1} \geq 0), \quad (12)$$

а ограничение-неравенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$$

– в ограничение-равенство

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i \quad (x_{n+1} \geq 0). \quad (13)$$

В то же время каждое уравнение системы ограничений

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

можно записать в виде неравенств:

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i, \\ -a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \dots - a_{in}x_n \leq -b_i. \end{cases} \quad (14)$$

Число вводимых дополнительных неотрицательных переменных при преобразовании ограничений-неравенств в ограничения-равенства равно числу преобразуемых неравенств.

Вводимые дополнительные переменные имеют вполне определенный экономический смысл. Так, если в ограничениях исходной задачи линейного программирования отражается расход и наличие производственных ресурсов, то числовое значение дополнительной переменной в плане задачи, записанной в форме основной, равно объему неиспользуемого соответствующего ресурса.

Отметим, наконец, что если переменная x_k , не подчинена условию неотрицательности, то ее следует заменить двумя неотрицательными переменными u_k и v_k , приняв $x_k = u_k - v_k$.

Пример 4.

Записать в форме основной задачи линейного программирования следующую задачу: найти максимум функции $F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \leq 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \leq 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \geq 8, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. В данной задаче требуется найти максимум функции, а система ограничений содержит четыре неравенства. Следовательно, чтобы записать ее в форме основной задачи, нужно перейти от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам. Так как число неравенств, входящих в систему ограничений задачи, равно четырем, то этот переход может быть осуществлен введением четырех дополнительных неотрицательных переменных. При этом к левым частям каждого из неравенств вида " $\leq$ " соответствующая дополнительная переменная прибавляется, а из левых частей каждого из неравенств вида " $\geq$ " вычитается. В результате ограничения принимают вид уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8, \\ x_1, \dots, x_9 \geq 0. \end{cases}$$

Следовательно, данная задача может быть записана в форме основной задачи таким образом: максимизировать функцию $F = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8, \\ x_1, \dots, x_9 \geq 0. \end{cases}$$

Пример 5.

Записать задачу, состоящую в минимизации функции $F = -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4$, при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \geq 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15, \\ x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

в форме основной задачи линейного программирования.

Решение. В данной задаче требуется найти минимум целевой функции, а система ограничений содержит три неравенства. Следовательно, чтобы записать ее в форме основной задачи, вместо нахождения минимума функции F нужно найти максимум функции $F_1 = -F$ при ограничениях, получающихся из ограничений исходной задачи добавлением к левым частям каждого из ограничений-неравенств вида “ $\leq$ ” дополнительной неотрицательной переменной и вычитанием дополнительных переменных из левых частей каждого из ограничений-неравенств вида “ $\geq$ ”.

Следовательно, исходная задача может быть записана в форме основной задачи линейного программирования так: найти максимум функции $F = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_6 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_7 = 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15, \\ x_1, \dots, x_7 \geq 0 \end{cases}$$

Пример 6.

Записать в форме стандартной задачи линейного программирования следующую задачу: найти максимум функции $F = 6.5x_1 - 7.5x_3 + 23.5x_4 - 5x_5$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 12, \\ 2x_1 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 14, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 - x_5 = 6, \\ x_1, \dots, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Методом последовательного исключения неизвестных сведем данную задачу к следующей: найти максимум функции $F = 6.5x_1 - 7.5x_3 + 23.5x_4 - 5x_5$ при условиях

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_3 + 10x_4 + x_5 = 26, \\ x_1 + x_3 + 11x_4 = 20, \\ x_1, \dots, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Последняя задача записана в форме основной для задачи, состоящей в нахождении максимального значения функции $F = x_3 + 2x_4$ при условиях

$$\begin{cases} x_3 + x_4 \leq 6, \\ 3x_3 + 10x_4 \leq 26, \\ x_3 + 11x_4 \leq 20, \\ x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Целевая функция задачи преобразована с помощью подстановки вместо x_1 и x_5 их значений в соответствии с уравнениями системы ограничений задачи.

Свойства основной задачи линейного программирования. Геометрическое истолкование задачи линейного программирования

Рассмотрим основную задачу линейного программирования. Она состоит в

определении максимального значения функции $F = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ при условиях $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \ (i = \overline{1, m}), \ x_j \geq 0 \ (j = \overline{1, n})$.

Перепишем эту задачу в векторной форме: найти максимум функции

$$F = CX \quad (15)$$

при условиях

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_n P_n = P_0, \quad (16)$$

$$X \geq 0, \quad (17)$$

где $C = (c_1; c_2; \dots; c_n)$, $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$; CX – скалярное произведение; $P_1, \dots, P_n$ и P_0 – m -мерные вектор-столбцы, составленные из коэффициентов при неизвестных и свободных членах системы уравнений задачи:

$$P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \dots; P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение 7. План $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ называется *опорным планом*, основной задачи линейного программирования, если система векторов P_j , входящих в разложение (16) с положительными коэффициентами x_j , линейно независима.

Так как векторы P_j являются m -мерными, то из определения опорного плана следует, что число его положительных компонент не может быть больше, чем m .

Определение 8. Опорный план называется *невыврожденным*, если он содержит ровно m положительных компонент, в противном случае он называется *вырожденным*.

Свойства основной задачи линейного программирования (15) – (17) тесным образом связаны со свойствами выпуклых множеств.

Определение 9. Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ – произвольные точки евклидова пространства E_n . Выпуклой линейной комбинацией этих точек называется сумма $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n$, где α_i – произвольные неотрицательные числа,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \ (i = \overline{1, n}).$$

сумма которых равна 1:

Определение 10. Множество называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и их произвольную выпуклую линейную комбинацию.

Определение 11. Точка X выпуклого множества называется *угловой*, если она не может быть представлена в виде выпуклой линейной комбинации каких-нибудь двух других различных точек данного множества.

Теорема 1. Множество планов основной задачи линейного программирования является выпуклым (если оно не пусто).

Определение 12. Непустое множество планов основной задачи линейного программирования называется *многогранником решений*, а всякая угловая точка многогранника решений – *вершиной*.

Теорема 2. Если основная задача линейного программирования имеет оптимальный план, то максимальное значение целевая функция задачи принимает в одной из вершин многогранника решений. Если максимальное значение целевая функция задачи принимает более чем в одной вершине, то она принимает его во всякой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин.

Теорема 3. Если система векторов $P_1, P_2, \dots, P_k \ (k \leq n)$ в разложении (16) линейно независима и такова, что

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_k P_k = P_0, \quad (18)$$

где все $x_j \geq 0$, то точка $X = (x_1; x_2; \dots; x_k; 0; \dots; 0)$ является вершиной многогранника решений.

Теорема 4. Если $X = (x_1; x_2; \dots; x_k)$ – вершина многогранника решений, то векторы P_j , соответствующие положительным x_j в разложении (16), линейно независимы.

Сформулированные теоремы позволяют сделать следующие выводы.

Непустое множество планов основной задачи линейного программирования образует выпуклый многогранник. Каждая вершина этого многогранника определяет опорный план. В одной из вершин многогранника решений (т. е. для одного из опорных планов) значение целевой функции является максимальным (при условии, что функция ограничена сверху на множестве планов). Если максимальное значение функция принимает более чем в одной вершине, то это же значение она принимает в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией данных вершин.

Вершину многогранника решений, в которой целевая функция принимает максимальное значение, найти сравнительно просто, если задача, записанная в форме стандартной, содержит не более двух переменных или задача, записанная в форме основной, содержит не более двух свободных переменных, т. е. $n - r \leq 2$, где n – число переменных, r – ранг матрицы, составленной из коэффициентов в системе ограничений задачи.

Найдем решение задачи, состоящей в определении максимального значения функции

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad (19)$$

при условиях

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i \quad (i = \overline{1, k}), \quad (20)$$

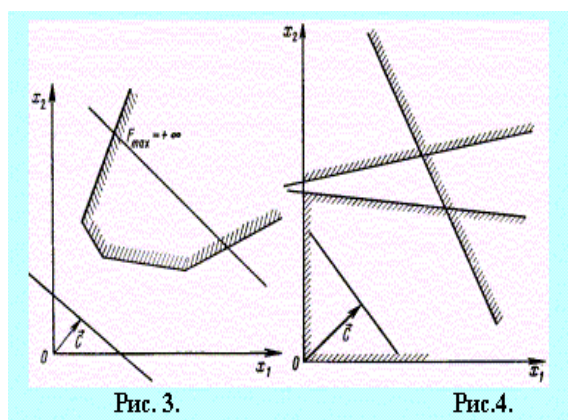
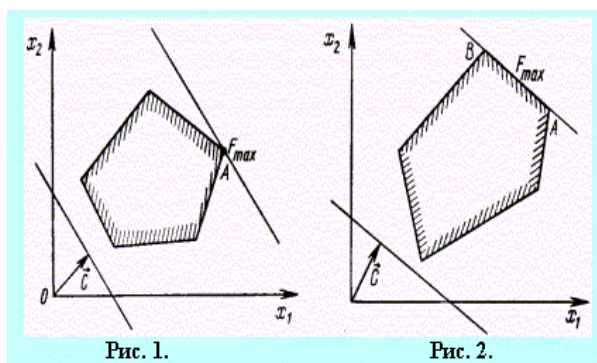
$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2). \quad (21)$$

Каждое из неравенств (20), (21) системы ограничений задачи геометрически определяет полуплоскость соответственно с граничными прямыми $a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 = b_i \quad (i = \overline{1, k})$, $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$. В том случае, если система неравенств (20), (21) совместна, область ее решений есть множество точек, принадлежащих всем указанным полуплоскостям. Так как множество точек пересечения данных полуплоскостей – выпуклое, то область допустимых решений задачи (19) – (21) является выпуклым множеством, которое

называется *многоугольником решений* (введенный ранее термин “многогранник решений” обычно употребляется, если $n \geq 3$). Стороны этого многоугольника лежат на прямых, уравнения которых получаются из исходной системы ограничений заменой знаков неравенств на знаки точных равенств.

Таким образом, исходная задача линейного программирования состоит в нахождении такой точки многоугольника решений, в которой целевая функция F принимает максимальное значение. Эта точка существует тогда, когда многоугольник решений не пуст и на нем целевая функция ограничена сверху. При указанных условиях в одной из вершин многоугольника решений целевая функция принимает максимальное значение. Для определения данной вершины построим линию уровня $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ (где h – некоторая постоянная), проходящую через многоугольник решений, и будем передвигать ее в направлении вектора $\vec{C} = (c_1; c_2)$ до тех пор, пока она не пройдет через ее последнюю общую точку с многоугольником решений. Координаты указанной точки и определяют оптимальный план данной задачи.

Заканчивая рассмотрение геометрической интерпретации задачи (19) – (21), отметим, что при нахождении ее решения могут встретиться случаи, изображенные на рис. 1 - 4. Рис. 1 характеризует такой случай, когда целевая функция принимает максимальное значение в единственной точке A . Из рис. 2 видно, что максимальное значение целевая функция принимает в любой точке отрезка AB . На рис. 3 изображен случай, когда целевая функция не ограничена сверху на множестве допустимых решений, а на рис. 4 – случай, когда система ограничений задачи несовместна.



Отметим, что нахождение минимального значения линейной функции при данной системе ограничений отличается от нахождения ее максимального значения при тех же ограничениях лишь тем, что линия уровня $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ передвигается не в направлении вектора $\vec{C} = (c_1; c_2)$, а в противоположном направлении. Таким образом, отмеченные выше случаи, встречающиеся при нахождении максимального значения целевой функции, имеют место и при определении ее минимального значения.

Итак, нахождение решения задачи линейного программирования (19) – (21) на основе ее геометрической интерпретации включает следующие этапы:

1. Строят прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях (20) и (21) знаков неравенств на знаки точных равенств.
2. Находят полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.
3. Находят многоугольник решений.
4. Строят вектор $\vec{C} = (c_1; c_2)$.
5. Строят прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = h$, проходящую через многоугольник решений.
6. Передвигают прямую $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ в направлении вектора $\vec{C}$, в результате чего-либо находят точку (точки), в которой целевая функция принимает максимальное значение, либо устанавливают неограниченность сверху функции на множестве планов.
7. Определяют координаты точки максимума функции и вычисляют значение целевой функции в этой точке.

Пример 7.

Для производства двух видов изделий *A* и *B* предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья каждого вида на изготовление единицы продукции данного вида приведены в табл. 2. В ней же указаны прибыль от реализации одного изделия каждого вида и общее количество сырья данного вида, которое может быть использовано предприятием.

Таблица 2

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на одно изделие		Общее количество сырья (кг)
	А	В	

I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	30	40	

Учитывая, что изделия A и B могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), требуется составить такой план их выпуска, при котором прибыль предприятия от реализации всех изделий является максимальной,

Решение. Предположим, что предприятие изготовит x_1 изделий вида A и x_2 изделий вида B . Поскольку производство продукции ограничено имеющимся в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и количество изготавливаемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться неравенства

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \leq 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \leq 252, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Общая прибыль от реализации x_1 изделий вида A и x_2 изделий вида B составит $F = 30x_1 + 40x_2$.

Таким образом, мы приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений данной системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором функция F принимает максимальное значение.

Найдем решение сформулированной задачи, используя ее геометрическую интерпретацию. Сначала определим многоугольник решений. Для этого в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств заменим на знаки точных равенств и найдем соответствующие прямые:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 = 300, & (I) \\ 4x_1 + 4x_2 = 120, & (II) \\ 3x_1 + 12x_2 = 252, & (III) \\ x_1 = 0, & (IV) \\ x_2 = 0. & (V) \end{cases}$$

Эти прямые изображены на рис. 5. Каждая из построенных прямых делит плоскость на две полуплоскости. Координаты точек одной полуплоскости

удовлетворяют исходному неравенству, а другой – нет. Чтобы определить искомую полуплоскость, нужно взять какую-нибудь точку, принадлежащую одной из полуплоскостей, и проверить, удовлетворяют ли ее координаты данному неравенству. Если координаты взятой точки удовлетворяют данному неравенству, то искомой является та полуплоскость, которой принадлежит эта точка, в противном случае – другая полуплоскость.

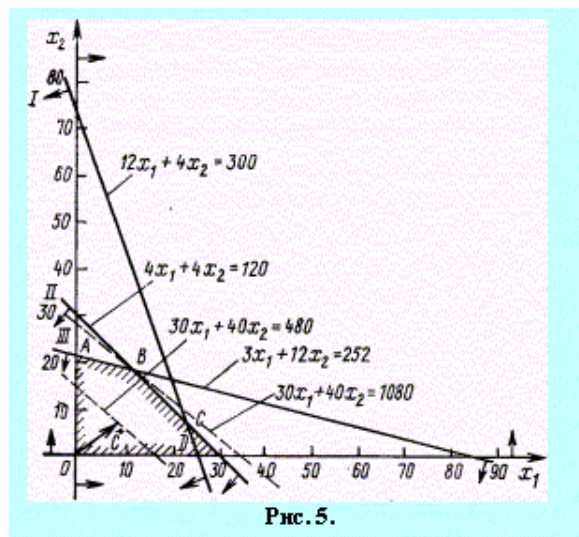


Рис. 5.

Найдем, например, полуплоскость, определяемую неравенством $12x_1 + 4x_2 < 300$. Для этого, построив прямую $12x_1 + 4x_2 = 300$ (на рис. 5 эта прямая I), возьмем какую-нибудь точку, принадлежащую одной из двух полученных полуплоскостей, например точку $O(0; 0)$. Координаты этой точки удовлетворяют неравенству $12 \cdot 0 + 4 \cdot 0 < 300$; значит, полуплоскость, которой принадлежит точка $O(0; 0)$, определяется неравенством $12x_1 + 4x_2 \leq 300$. Это и показано стрелками на рис. 5.

Пересечение полученных полуплоскостей и определяет многоугольник решений данной задачи.

Как видно из рис. 5, многоугольником решений является пятиугольник $OABCD$. Координаты любой точки, принадлежащей этому пятиугольнику, удовлетворяют данной системе неравенств и условию неотрицательности переменных. Поэтому сформулированная задача будет решена, если мы сможем найти точку, принадлежащую пятиугольнику $OABCD$, в которой функция F принимает максимальное значение. Чтобы найти указанную точку, построим вектор $\vec{c} = (30; 40)$ и прямую $30x_1 + 40x_2 = h$, где h – некоторая постоянная такая, что прямая $30x_1 + 40x_2 = h$ имеет общие точки с многоугольником решений. Положим, например, $h = 480$ и построим прямую $30x_1 + 40x_2 = 480$ (рис. 5).

Если теперь взять какую-нибудь точку, принадлежащую построенной прямой и многоугольнику решений, то ее координаты определяют такой план производства изделий A и B , при котором прибыль от их реализации равна 480

руб. Далее, полагая h равным некоторому числу, большему чем 480, мы будем получать различные параллельные прямые. Если они имеют общие точки с многоугольником решений, то эти точки определяют планы производства изделий A и B , при которых прибыль от их реализации превзойдет 480 руб.

Перемещая построенную прямую $30x_1 + 40x_2 = 480$ в направлении вектора $\vec{C}$, видим, что последней общей точкой ее с многоугольником решений задачи служит точка B . Координаты этой точки и определяют план выпуска изделий A и B , при котором прибыль от их реализации является максимальной.

Найдем координаты точки B как точки пересечения прямых II и III. Следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 = 252. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим $x_1^* = 12$, $x_2^* = 18$. Следовательно, если предприятие изготовит 12 изделий вида A и 18 изделий вида B , то оно получит максимальную прибыль, равную $F_{\max} = 30 \cdot 12 + 40 \cdot 18 = 1080$ руб.

Пример 8.

Найти максимум и минимум функции $F = x_1 + x_2$ при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Построим многоугольник решений. Для этого в неравенствах системы ограничений и условиях неотрицательности переменных знаки неравенств заменим на знаки точных равенств:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16, & \text{(I)} \\ 4x_1 + 2x_2 = 8, & \text{(II)} \\ x_1 + 3x_2 = 9, & \text{(III)} \\ x_1 = 0, & \text{(IV)} \\ x_2 = 0. & \text{(V)} \end{cases}$$

Построив полученные прямые, найдем соответствующие полуплоскости и их пересечение (рис. 6).

Как видно из рис. 6, многоугольником решений задачи является треугольник ABC . Координаты точек этого треугольника удовлетворяют условию неотрицательности и неравенствам системы ограничений задачи. Следовательно, задача будет решена, если среди точек треугольника ABC найти такие, в которых функция $F = x_1 + x_2$ принимает

максимальное и минимальное значения. Для нахождения этих точек построим прямую $x_1 + x_2 = 4$ (число 4 взято произвольно) и вектор $\vec{C} = (1; 1)$.

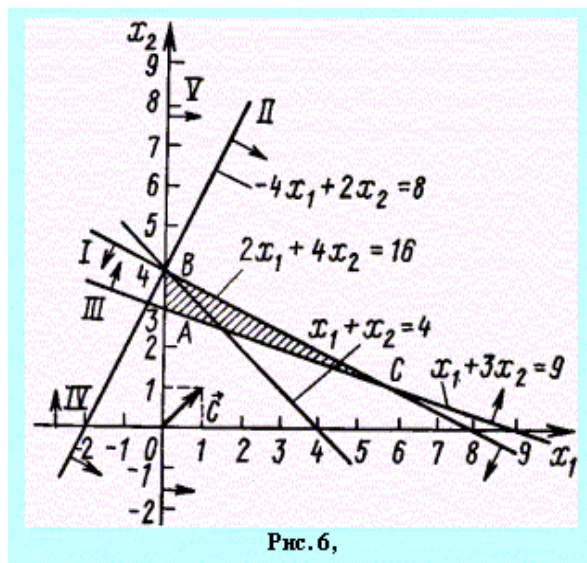


Рис. 6,

Передвигая данную прямую параллельно самой себе в направлении вектора $\vec{C}$, видим, что ее последней общей точкой с многоугольником решений задачи является точка C . Следовательно, в этой точке функция F принимает максимальное значение. Так как C — точка пересечения прямых I и II, то ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16, \\ x_1 + 3x_2 = 9. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим $x_1^* = 6$, $x_2^* = 1$. Таким образом, максимальное значение функции $F_{\max} = 7$.

Для нахождения минимального значения целевой функции задачи передвигаем прямую $x_1 + x_2 = 4$ в направлении, противоположном направлению вектора $\vec{C} = (1; 1)$. В этом случае, как видно из рис. 6, последней общей точкой прямой с многоугольником решений задачи является точка A . Следовательно, в этой точке функция F принимает минимальное значение. Для определения координат точки A решаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 9, \\ x_1 = 0, \end{cases}$$

откуда $x_1^* = 0$, $x_2^* = 3$. Подставляя найденные значения переменных в целевую функцию, получим $F_{\min} = 3$.

Функции двух и нескольких переменных, способы задания, символика, область определения. (2 часа)

До сих пор мы рассматривали в основном действительные функции одной действительной переменной вида $y = f(x)$, т.е. функции, области определения и области значений которых являлись некоторыми подмножествами на числовых осях.

Однако на практике широко используются функции, имеющие более одного аргумента, исследование которых имеет свои особенности.

Например, если ϕ и ψ есть долгота и широта точки на поверхности Земли и $h(\phi, \psi)$ – высота этой точки над уровнем моря, то поверхность Земли задает функцию двух переменных

$$z = h(\phi, \psi),$$

определенную для всех допустимых значений ϕ, ψ и принимающую действительные значения.

Если (x, y, z) – координаты точки, находящейся внутри некоторой детали и $t(x, y, z)$ – температура в этой точке детали, то закон распределения температуры внутри детали задается функцией трех переменных

$$u = t(x, y, z),$$

область определения которой, определяется формой этой детали.

Определение. Функцией двух (трех) переменных называется функция, область определения D которой есть некоторое подмножество на плоскости (в пространстве), а область значений E принадлежит действительной оси.

Если D принадлежит плоскости Oxy , а E оси Oz , то такую функцию двух переменных записывают в виде

$$z = f(x, y).$$

Если $D \subset Oxyz$, а $E \subset Ou$, то эту функцию трех переменных можно записать в виде

$$u = f(x, y, z).$$

Введем некоторые определения, относящиеся к областям на плоскости или в пространстве.

Определение. Окрестностью точки $M(x_0, y_0)$ на плоскости (или $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в пространстве) радиуса r называется круг без окружности (или шар без сферы) радиуса r с центром в точке M_0 .

Такую окрестность будем обозначать $U_r(M_0)$.

На плоскости $U_r(M_0)$ определяется неравенством

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2,$$

а в пространстве – $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2$.

Определение. Точка M_0 называется граничной точкой для множества D , если окрестность любого радиуса r этой точки пересекается как с множеством D , так и с его дополнением.

Множество всех граничных точек множества D называется границей этого множества и обозначается $\Gamma(D)$.

Определение. Множество D , содержащее всю свою границу $\Gamma(D)$, называется замкнутым. Множество D , не содержащее ни одной точки своей границы, называется открытым.

Примеры.

1) Окрестность $U_r(M_0)$ не содержит ни одной точки своей границы – окружности (или сферы), поэтому $U_r(M_0)$ – открытое множество.

2) Круг на плоскости задаваемый неравенством

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2,$$

содержит свою границу – окружность

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

поэтому он – замкнутое множество.

3) Четверть плоскости определяется системой неравенств

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y > 0 \end{cases}$$

содержит часть своей границы, расположенной на оси Oy и не содержит часть границы на оси Ox . Это множество не является ни открытым, ни замкнутым.

Пусть C – число. Линией уровня C функции $z = f(x, y)$ называется множество всех точек $M(x, y)$ из области определения D , координаты которых удовлетворяют уравнению $f(x, y) = C$.

Таким способом изображаются, например, линии равной высоты на географических картах. Они являются линиями уровня функции $z = h(x, y)$ определяющей высоту точки местности с координатами (x, y) над уровнем моря.

Например. Найдем линии различного уровня функции

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Такие линии определяются уравнением

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2} = C.$$

При $C = 0$, получим $\sqrt{1 - x^2 - y^2} = 0$, $1 - x^2 - y^2 = 0$; $x^2 + y^2 = 1$.

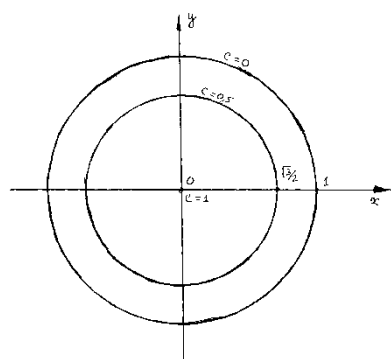
Поэтому линия уровня 0 есть окружность радиуса 1 с центром в начале координат.

При $C = 1/2$, получим $x^2 + y^2 = 3/4$. Линия уровня $C = 1/2$ есть окружность

радиуса $R = \sqrt{3}/2$ с центром в начале координат.

При $C = 1$, уравнение $\sqrt{1 - x^2 - y^2} = 1$ определяет точку $O(0, 0)$ начало координат (см. рис.1).

Рис.1.



Определение. Поверхностью уровня C функции $u = f(x, y, z)$ называется множество всех точек $M(x, y, z)$ из области определения D функции, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$f(x, y, z) = C.$$

Пример. Рассмотрим функцию $u = x^2 + y^2 + z^2$. При $C > 0$, ее поверхностями уровня являются сферы радиуса $\sqrt{C}$ с центрами в начале координат. При $C = 0$, поверхность уровня O есть начало координат. Поверхности уровня $C < 0$ у этой функции отсутствуют.

Примеры функций нескольких переменных по экономике.

1. Предприятие производит n видов продукции, которые реализует по ценам $P_1, P_2, \dots, P_n$. При объемах реализации $x_1, x_2, \dots, x_n$ выручка составляет $W = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$.
2. Функция полезности $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - субъективная оценка полезности набора товаров $x_1, x_2, \dots, x_n$. Она не убывающая функция.

Типичная функция полезности для функции 2 переменных

$$u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} \sqrt{x_2}.$$

Рассмотренные выше понятия функций двух или трех переменных можно обобщать на случай n переменных.

Определение. Функцией n переменных $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется функция, область определения D которой принадлежит R^n , а область значений - действительной оси.

Такая функция каждому набору переменных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из D сопоставляет единственное число y .

В дальнейшем для определенности мы будем рассматривать функции $n = 2$ переменных, но все утверждения сформулированные для таких функции остаются верными и для функций большего числа переменных.

Определение. Число A называется пределом функции $z = f(x, y)$

в точке (x_0, y_0) , если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при всех (x, y) из окрестности $U_\delta(x_0, y_0)$, кроме этой точки, выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Если предел функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) равен A , то это обозначается в виде

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A.$$

Практически все свойства пределов, рассмотренные нами ранее, для функций одной переменной остаются справедливыми и для пределов функций нескольких переменных, однако практическим нахождением таких пределов мы заниматься не будем.

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке (x_0, y_0) если выполняется три условия:

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$
- 1) существует
 - 2) существует значение функции в точке (x_0, y_0)
 - 3) эти два числа равны между собой, т.е. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

Практически исследовать непрерывность функции можно с помощью следующей теоремы.

Теорема. Любая элементарная функция $z = f(x, y)$ непрерывна во всех внутренних (т.е. не граничных) точках своей области определения.

Пример. Найдем все точки, в которых функция

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \text{ непрерывна.}$$

Как было отмечено выше, эта функция определена в замкнутом круге $x^2 + y^2 \leq 1$.

Внутренние точки этого круга являются искомыми точками непрерывности функции, т.е. функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ непрерывна в открытом круге $x^2 + y^2 < 1$.

Лекция № 8.

Предел функции. Раскрытие неопределенностей. Замечательные пределы. (2 часа)

Предел функции. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Определение: Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любого $x \neq a$, удовлетворяющего неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

Свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций:

1. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ – бесконечно малые при $x \rightarrow a$, то их сумма $f(x) + \varphi(x)$ при $x \rightarrow a$ также является бесконечно малой.
2. Если функция $f(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow a$, а $F(x)$ – ограниченная функция, то их произведение $f(x) \cdot F(x)$ есть функция бесконечно малая.
Следствие: Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть величина бесконечно малая.
3. Если при $x \rightarrow a$ функция $f(x)$ имеет конечный предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, а функция $\varphi(x)$ – бесконечно большая, то $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + \varphi(x)] = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$.
4. Если функция $f(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow a$, то функция $1/f(x)$ – бесконечно большая, причем предполагается, что в окрестности точки a функция $f(x)$ не обращается в ноль. Наоборот, если при $x \rightarrow a$ функция $\varphi(x)$ – бесконечно большая, то функция $1/\varphi(x)$ – бесконечно малая.

Теоремы о пределах.

Теорема 1. Если существуют пределы функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, то существует предел их суммы, равный сумме пределов функций $f(x)$ и $\varphi(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x).$$

Теорема 2. Если существуют пределы функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \rightarrow a$, то существует предел их произведения, равный произведению пределов функций $f(x)$ и $\varphi(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x).$$

Теорема 3. Если существуют пределы функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \rightarrow a$ и предел функции $\varphi(x)$ отличен от нуля, то существует предел отношения $f(x)/\varphi(x)$, равный отношению пределов функций $f(x)$ и $\varphi(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)}.$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow a} [kf(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Следствие 2. Если n – натуральное число, то

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n, \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}.$$

Замечательные пределы, раскрытие неопределенностей.

Первый замечательный предел.

$$1^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Рассматривая в тригонометрическом круге сектор с углом x , $0 < x < \frac{\pi}{2}$, и два треугольника с тем же углом (см. рис. 1) и сравнивая их площади, получаем: откуда

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x, \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

В силу четности функций $\frac{\sin x}{x}$ и $\cos x$, те же неравенства верны и при $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. Переходя в них к пределу при $x \rightarrow 0$ и учитывая, что $\cos x \rightarrow \cos 0 = 1$ в силу непрерывности, получаем

$$2^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

В силу непрерывности функции $\cos x$, имеем $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$3^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

$$\frac{\arcsin x}{x} = \frac{y}{\sin y} \Big|_{y=\arcsin x},$$

Заметим, что дробь $\frac{y}{\sin y}$ вместо y следует подставить $\arcsin x$. Таким образом, $\frac{\arcsin x}{x}$ представлена в виде суперпозиции двух функций. Используя непрерывность $\arcsin x$ в точке $x = 0$, и теорему о пределе суперпозиции двух функций, завершаем доказательство.

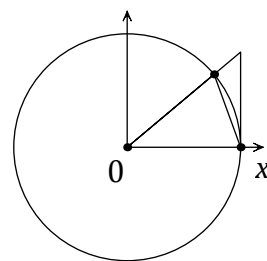


Рис.1.

4°. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$. Представив $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ в виде $\frac{y}{\operatorname{tg} y} \Big|_{y=\operatorname{arctg} x}$, повторяем рассуждения из доказательства 3°.

5°. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Покажем сначала, что

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Напомним, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$ и что при доказательстве этого было установлено, что

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \downarrow e.$$

Пусть $0 < x < 1$, $n_x \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n_x + 1} < x \leq \frac{1}{n_x}$.

Тогда

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n_x + 1}\right)^{-2} \left(1 + \frac{1}{n_x + 1}\right)^{n_x + 2} &= \left(1 + \frac{1}{n_x + 1}\right)^{n_x} \leq \\ &\leq (1+x)^{\frac{1}{x}} \leq \left(1 + \frac{1}{n_x}\right)^{n_x + 1}. \end{aligned} \quad (4.9.3)$$

Правая часть неравенства является, как легко проверить, монотонной функцией x . Поэтому

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(1 + \frac{1}{n_x}\right)^{n_x + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

Обоснование первого из этих равенств состоит в том, что, если функция f имеет предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$, то он совпадает с пределом $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ для произвольной последовательности $\{x_n\}$:

$x_n \rightarrow 0+0$. В нашем случае $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$. Итак, показано, что правая часть стремится к e при $x \rightarrow 0+0$.

Аналогично показывается, что левая часть также стремится к e .

Покажем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Пусть $-1 < x < 0$. Положив $y = -x$, $z = \frac{y}{1-y} = \frac{-x}{1+x} > 0$, имеем

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1-y)^{-\frac{1}{y}} = \left(\frac{1}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}} = \left(1 + \frac{y}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}} = (1+z)^{\frac{1}{z}+1}.$$

Таким образом,

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1+z)^{\frac{1}{z}+1} \Big|_{z=\frac{-x}{1+x}}, \quad 0 < x < 1,$$

т.е. функция $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ представлена в виде суперпозиции двух функций $(f \circ g)(x)$, где

$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(-1, 0) \rightarrow (0, +\infty)$, причем

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \varphi(x) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow 0+0} f(z) = e.$$

Применяя теорему о пределе суперпозиции, получаем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Раскрытие неопределенностей

1. Вычислить пределы:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} (5x^3 - 6x^2 + x - 5) = 5 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 2 - 5 = 13$. (Вычисляется по теореме 1 о пределах)
- 2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5}{4x-8} = \infty$. (Вычисляется по теореме о больших и малых функциях)
- 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x-5} = 0$. (Вычисляется по теореме о больших и малых функциях)

2. Неопределенность $\frac{0}{0}$ при вычислении пределов:

Разложить числитель и знаменатель на множители, чтобы сократить дробь на общий множитель и применяем теорему 3 о пределах, вычисляем предел.

Пример 1: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 2x}{2x^2 - 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3x-2)}{x(2x-5)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x-2}{2x-5} = \frac{3 \cdot 0 - 2}{2 \cdot 0 - 5} = \frac{2}{5}.$

Пример 2: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 9x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{3x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{3x} = \frac{3-2}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9}.$

3. Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ при вычислении пределов:

Для вычисления предела при $x \rightarrow \infty$ разделим числитель и знаменатель на наивысшую степень аргумента x .

Пример: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 2x^2 + 3}{3x^4 - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^4}}{3 - \frac{5}{x^4}} = \frac{1}{3}.$ (По теореме о пределах и

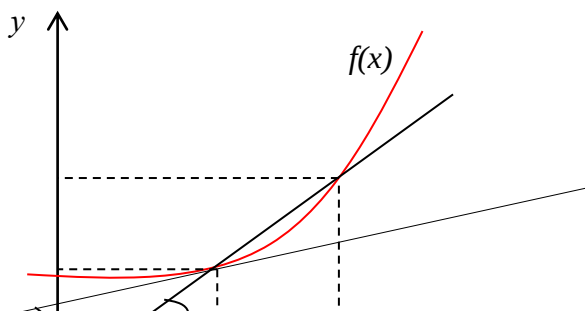
теореме о больших и малых функциях $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2} = 0$ т.д.)

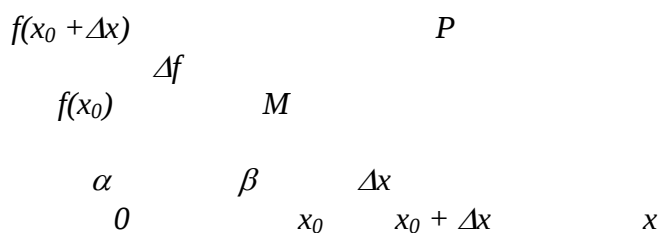
Лекция № 9.

Производная функции. Основные правила дифференцирования. Производные высших порядков. (2 часа)

Определение. Производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$





Пусть $f(x)$ определена на некотором промежутке (a, b) . Тогда $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ – тангенс угла наклона секущей MP к графику функции.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α – угол наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$.

Угол между кривыми может быть определен как угол между касательными, проведенными к этим кривым в какой-либо точке.

Уравнение касательной к кривой: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Уравнение нормали к кривой: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$

Фактически производная функции показывает как бы скорость изменения функции, как изменяется функция при изменении переменной.

Физический смысл производной функции $f(t)$, где t – время, а $f(t)$ – закон движения (изменения координат) – мгновенная скорость движения.

Соответственно, вторая производная функции – скорость изменения скорости, т.е. ускорение.

Теорема. (Необходимое условие существования производной) *Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке.*

Понятно, что это условие не является достаточным.

Основные правила дифференцирования.

Обозначим $f(x) = u$, $g(x) = v$ – функции, дифференцируемые в точке x .

$$1) (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$2) (u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$$

$$3) \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \text{ если } v \neq 0$$

Эти правила могут быть легко доказаны на основе теорем о пределах.

Таблица производных основных элементарных функций.

1) $C' = 0;$	9) $(\sin x)' = \cos x$
2) $(x^m)' = mx^{m-1};$	10) $(\cos x)' = -\sin x$
3) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	11) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	12) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
5) $(e^x)' = e^x$	13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6) $(a^x)' = a^x \ln a$	14)
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
7) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	15) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
8) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	16) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Производная сложной функции.

Теорема. Пусть $y = f(x)$; $u = g(x)$, причем область значений функции u входит в область определения функции f .

Тогда

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

Доказательство.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(с учетом того, что если $\Delta x \rightarrow 0$, то $\Delta u \rightarrow 0$, т.к. $u = g(x)$ – непрерывная функция)

$$\text{Тогда } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Теорема доказана.

Логарифмическое дифференцирование.

Рассмотрим функцию $y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{при } x > 0 \\ \ln(-x), & \text{при } x < 0 \end{cases}$.

Тогда $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, т.к. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\ln(-x))' = \frac{(-x)'}{x} = \frac{1}{x}$.

Учитывая полученный результат, можно записать

$$\left(\ln|f(x)| \right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Отношение $\frac{f'(x)}{f(x)}$ называется **логарифмической производной** функции $f(x)$.

Способ **логарифмического дифференцирования** состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x)$$

Способ логарифмического дифференцирования удобно применять для нахождения производных сложных, особенно показательных функций, для которых непосредственное вычисление производной с использованием правил дифференцирования представляется трудоемким.

Производная показательно- степенной функции.

Функция называется показательной, если независимая переменная входит в показатель степени, и степенной, если переменная является основанием. Если основание и показатель степени зависят от переменной, то такая функция будет показательно – степенной.

Пусть $u = f(x)$ и $v = g(x)$ – функции, имеющие производные в точке x , $f(x) > 0$.

Найдем производную функции $y = u^v$. Логарифмируя, получим:

$$\begin{aligned} \ln y &= v \ln u \\ \frac{y'}{y} &= v' \ln u + v \frac{u'}{u} \\ y' &= u^v \left(v \frac{u'}{u} + v' \ln u \right) \end{aligned}$$

$$(u^v)' = v u^{v-1} u' + u^v v' \ln u$$

Пример. Найти производную функции $f(x) = (x^2 + 3x)^{x \cos x}$.

По полученной выше формуле получаем: $u = x^2 + 3x$; $v = x \cos x$;

Производные этих функций: $u' = 2x + 3$; $v' = \cos x - x \sin x$;

Окончательно:

$$f'(x) = x \cos x \cdot (x^2 + 3x)^{x \cos x - 1} \cdot (2x + 3) + (x^2 + 3x)^{x \cos x} (\cos x - x \sin x) \ln(x^2 + 3x)$$

Производные высших порядков.

Предположим, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в некотором интервале (a, b) . Тогда ее производная $f'(x)$ в этом интервале является функцией x . Пусть эта функция также имеет производную в (a, b) . Эта производная называется

второй производной или производной второго порядка функции $y = f(x)$ и обозначается y'' или $f''(x)$.

Таким образом, $f''(x) = (f'(x))'$. При этом $f'(x)$ называется первой производной или производной первого порядка функции $f(x)$.

Аналогично определяются производные третьего, четвертого и так далее порядков. Вообще, производной n -го порядка функции $y = f(x)$ в точке x называется первая производная производной $(n-1)$ -го порядка функции $y = f(x)$ при условии, что в точке x существуют все производные от первого до n -го порядков. Обозначение: $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$. Таким образом, $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

Производные порядка выше первого называются производными высших порядков.

Пример.

1. Найти y''' для функции $y = \cos 2x$.

$$y' = 2\cos x(-\sin x) = -\sin 2x$$

$$y'' = -2\cos 2x$$

$$y''' = 4\sin 2x \text{ и т.д.}$$

Механический смысл второй производной.

Пусть материальная точка движется прямолинейно неравномерно по закону $S = f(t)$, где t – время, $f(t)$ – путь, пройденный за время t . Из физики известно, что при этом ускорение точки в момент времени t равно производной скорости по t . Таким образом, ускорение $w(t) = v'(t) = S''(t)$ равно второй производной пути по времени.

Лекция № 10.

Возрастание и убывание функции. Экстремумы функции. Частные производные. (2 часа)

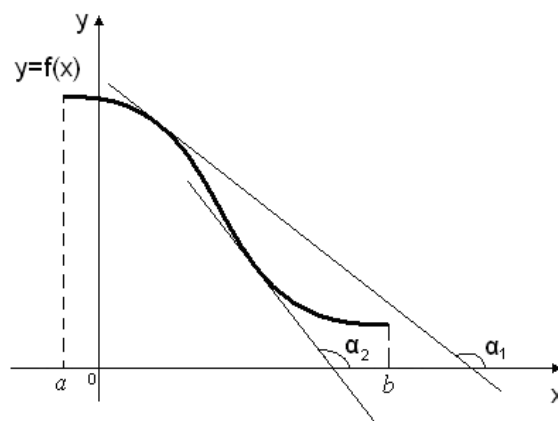
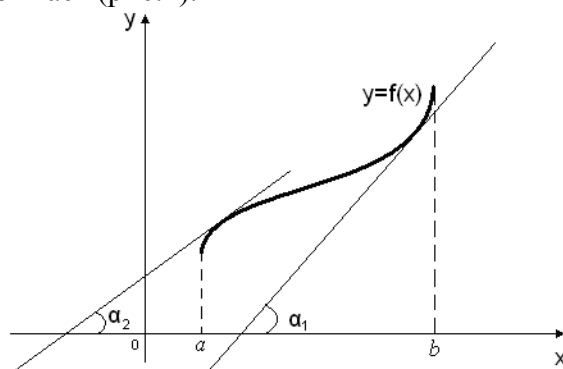
Возрастание и убывание функций

Теорема 1 (необходимое условие). Если дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале (a, b) , то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для $\forall x \in (a, b)$.

Теорема 2 (достаточное условие). Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для $\forall x \in (a, b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале (a, b) .
Возрастающая или убывающая функция называется монотонной функцией.

Геометрический смысл монотонности функции.

Если касательные в некотором промежутке к графику функции направлены под острыми углами к оси абсцисс, то функция возрастает; если под тупыми, то функция убывает (рис.1).



а) $f(x)$ - возрастающая функция,
 $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b)$

б) $f(x)$ - убывающая функция,
 $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b)$

Рисунок 1.

Экстремум функции

Точка x_0 называется точкой максимума (минимума) функции $f(x)$, если существует такая δ -окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство:
 $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Значение функции в точке максимума (минимума) называется максимумом (минимумом) функции. Максимум (минимум) функции называется экстремумом функции.

Теорема 1 (необходимое условие экстремума). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке экстремум, то $f'(x_0) = 0$.
 Геометрически это означает, что в точке экстремума дифференцируемой функции $y = f(x)$ касательная к ее графику параллельна оси Ox .
 Точки, в которых первая производная функции обращается в нуль или не существует, называются критическими точками.
 Заметим, что: если в точке имеется экстремум, то эта точка критическая. не всякая критическая точка является точкой экстремума.

Теорема 2 (первое достаточное условие экстремума). Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой δ -окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума; если с минуса на плюс, то x_0 - точка минимума (рис.6.2).

Замечание. Если при переходе через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ не меняет знак, то в точке x_0 функция $f(x)$ экстремума не имеет. Например, рассмотрим график функции $y = x^3$ (рис. 2). Точка $x = 0$ является критической, но она не является точкой экстремума.

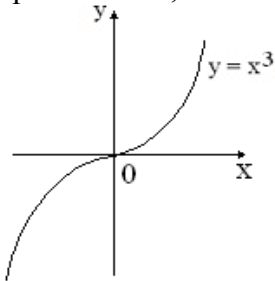


Рисунок 2

Теорема 3 (второе достаточное условие экстремума). Если в точке x_0 первая производная равна нулю ($f'(x_0) = 0$), а вторая производная в точке x_0 существует и отлична от нуля ($f''(x_0) \neq 0$), то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум, если $f''(x_0) < 0$, и минимум, если $f''(x_0) > 0$.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, надо:

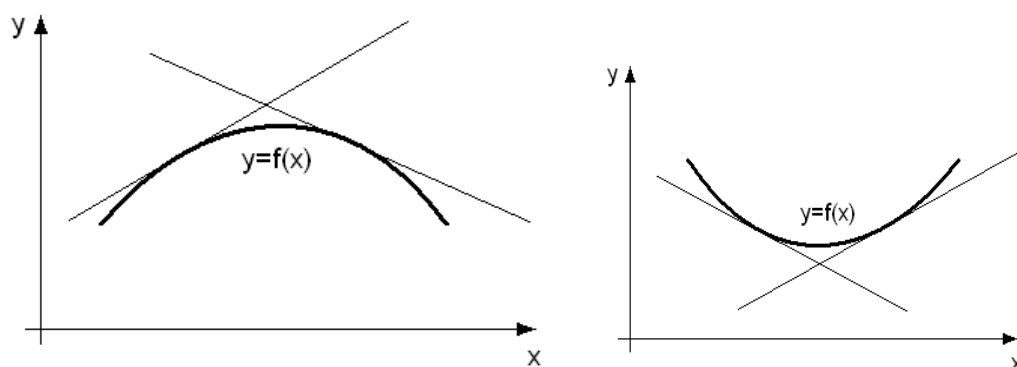
найти все критические точки функции на интервале (a, b) ;

вычислить значения функции в этих критических точках;

вычислить значения функции на концах отрезка, т.е. найти $f(a)$ и $f(b)$;
сравнить все вычисленные значения функции и выбрать наибольшее и наименьшее.

Выпуклость и вогнутость графика функции

График функции $y = f(x)$ называется выпуклым (вогнутым) в интервале (a, b) , если он расположен ниже (выше) любой ее касательной на этом интервале (рис.3).



а) График функции
выпуклый

б) График функции
вогнутой

Рисунок 3

Теорема Если $f''(x) < 0$ в интервале (a, b) , то график функции выпуклый в этом интервале; если же $f''(x) > 0$, то в интервале (a, b) график функции – вогнутый.

Точка графика непрерывной функции $y = f(x)$, отделяющая выпуклую его часть от вогнутой, называется точкой перегиба.

Например, на рисунке 4 точка $K(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба графика функции $y = f(x)$.

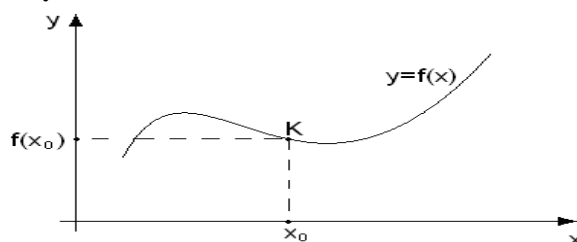


Рисунок 4

Теорема (необходимое условие существования точек перегиба). Если x_0 – абсцисса точки перегиба графика функции $y = f(x)$, то вторая производная $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует.

Теорема (достаточное условие существования точек перегиба). Если вторая производная $f''(x)$ в точке x_0 равна нулю, т.е. $f''(x_0) = 0$ или не существует, и при переходе через точку x_0 меняет свой знак, то точка $(x_0, f(x_0))$ есть точка перегиба графика функции $y = f(x)$.

Асимптоты графика функции

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на этом графике, стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат.

Различают три вида асимптот: вертикальные, наклонные и горизонтальные.

Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ (рис.5), если

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm \infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm \infty.$$

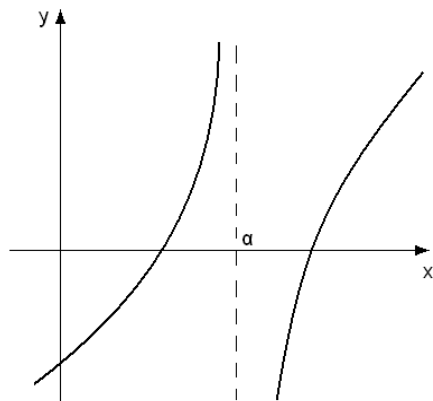


Рисунок 5

Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ (рис. 6), если существуют пределы:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx).$$

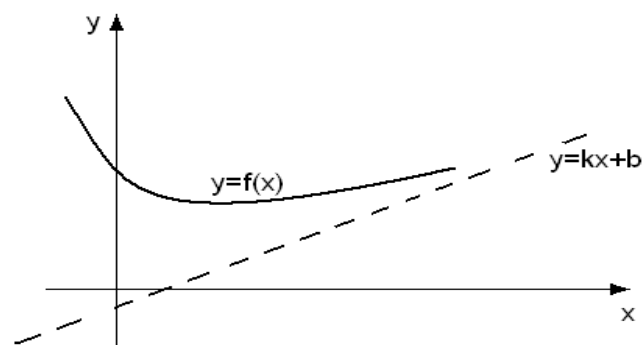


Рисунок 6

Прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ (рис. 7), если существует предел:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b.$$

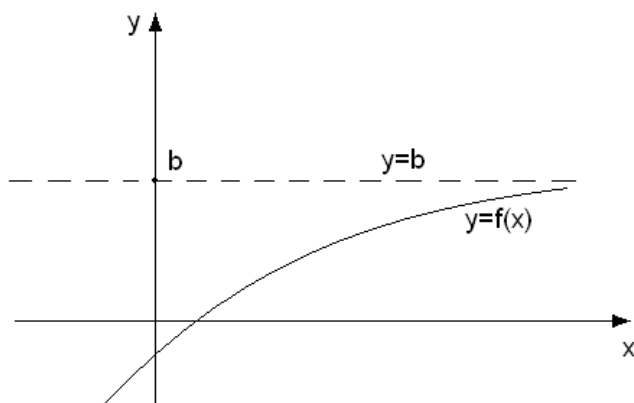


Рисунок 7

Замечание. Асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$ могут быть разными, поэтому предел при $x \rightarrow \infty$ следует рассматривать, как при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$.

Общая схема исследования функции и построение графика

При исследовании функций рекомендуется использовать следующую схему:

Найти область определения функции.

Исследовать функцию на четность и нечетность.

Найти асимптоты графика функции.

Найти точки пересечения графика с осями координат.

Найти интервалы монотонности функции.

Найти экстремумы функции.

Найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба графика функции.

По результатам исследования функции строится её график.

Пример 1. Исследовать функцию $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ и построить её график.

1) Область определения $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, т.е. $x \neq 1$.

2) Функция не является четной или нечетной.

3) Прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой, так как

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = +\infty.$$

Следовательно, точка $x = 1$ является точкой разрыва второго рода.

Прямая $y = x + 1$ есть наклонная асимптота, так как

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x(x - 1)} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 + x}{x - 1} = 1.$$

4) График функции не имеет точек пересечения с осью Ox , но пересекает ось Oy в точке $(0; -1)$.

5) Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции.

Для этого найдем критические точки функции:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - (x^2 + 1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2},$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0, \text{ следовательно, } x_1 = 1 - \sqrt{2}, \quad x_2 = 1 + \sqrt{2}.$$

Таким образом, x_1, x_2 - критические точки функции.

x	$(-\infty; 1 - \sqrt{2})$	$1 - \sqrt{2}$	$(1 - \sqrt{2}; 1)$	1	$(1; 1 + \sqrt{2})$	$1 + \sqrt{2}$	$(1 + \sqrt{2}; +\infty)$
y'	+	0	—	не сущ-ет	—	0	+
y	 возрастает	max $2 - 2\sqrt{2}$	 убывает	не сущ-ет	 убывает	min $2 + 2\sqrt{2}$	 возрастает

$$f_{\max}(1 - \sqrt{2}) = 2 - 2\sqrt{2}, \quad f_{\min}(1 + \sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$A(1 - \sqrt{2}; 2 - 2\sqrt{2}), \quad B(1 + \sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2}).$$

Функция возрастает на интервалах $(-\infty; 1 - \sqrt{2})$ и $(1 + \sqrt{2}; +\infty)$, убывает на интервалах $(1 - \sqrt{2}; 1)$ и $(1; 1 + \sqrt{2})$.

б) Найдем интервалы выпуклости и вогнутости графика функции.

Для этого находим $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{(2x - 2) \cdot (x - 1)^2 - 2(x - 1) \cdot (x^2 - 2x - 1)}{(x - 1)^4} = \frac{4}{(x - 1)^3}.$$

Так как $f''(x)$ в нуль не обращается, то точек перегиба график не имеет.

x	$(-\infty; 1)$	$x=1$	$(1; +\infty)$
y''	—	не существует	+
y	выпуклый 	не существует	вогнутый 

Используя полученные данные, построим график функции (рис. 8).

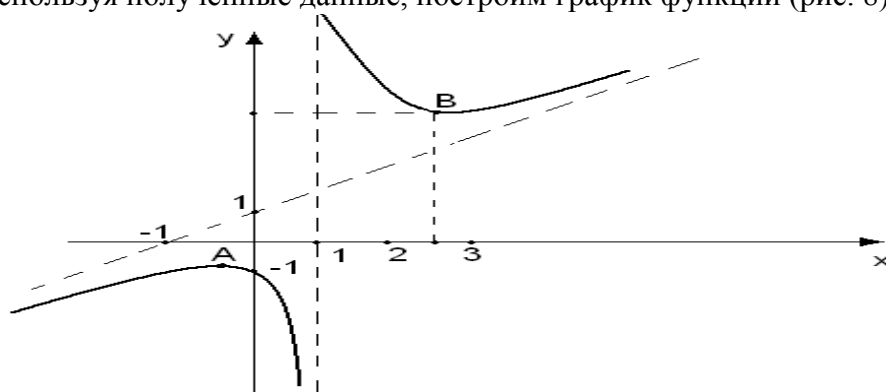


Рисунок 8

Лекция № 11.

Первообразная функция и неопределенный интеграл. Основные правила интегрирования. (2 часа)

Первообразная функция.

Определение: Функция $F(x)$ называется первообразной функцией функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Неопределенный интеграл.

Определение: Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением: $F(x) + C$.

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x .
 $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx;$

Пример: $\int (x^2 - 2 \sin x + 1)dx = \int x^2 dx - 2 \int \sin x dx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2 \cos x + x + C;$

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др.

Таблица основных интегралов.

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих

таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

Интеграл		Значение	Интеграл		Значение
1	$\int \operatorname{tg} x dx$	$-\ln \cos x + C$	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int \operatorname{ctg} x dx$	$\ln \sin x + C$	10	$\int \cos x dx$	$\sin x + C$
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \sin x dx$	$-\cos x + C$
4	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$\operatorname{tg} x + C$
5	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-\operatorname{ctg} x + C$
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\frac{x}{\arcsin \frac{x}{a}} + C$
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$\ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln x + C$	16	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$\ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$

Непосредственное интегрирование.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы

дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где C – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны

$(\ln(-x))' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

Основные методы интегрирования.

Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены $x = \varphi(t)$ и $dx = \varphi'(t)dt$ получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Доказательство: Продифференцируем предлагаемое равенство:

$$d\int f(x)dx = d\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)$$

По рассмотренному выше свойству №2 неопределенного интеграла:

$$f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

что с учетом введенных обозначений и является исходным предположением.

Теорема доказана.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$.
Сделаем замену $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$.

$$\int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

Пример. $\int x(x^2 + 1)^{3/2} dx$.

Замена $t = x^2 + 1$; $dt = 2x dx$; $dx = \frac{dt}{2x}$; Получаем:

$$\int t^{3/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^{5/2}}{5} + C;$$

Ниже будут рассмотрены другие примеры применения метода подстановки для различных типов функций.

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

$$(uv)' = u'v + v'u$$

где u и v – некоторые функции от x .

В дифференциальной форме: $d(uv) = u dv + v du$

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int u dv + \int v du$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv = \int u dv + \int v du \quad \text{или} \quad \int u dv = uv - \int v du;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример.

$$\int x^2 \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2; \quad dv = \sin x dx; \\ du = 2x dx; \quad v = -\cos x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = x; \quad dv = \cos x dx; \\ du = dx; \quad v = \sin x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int \sin x dx \right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример.

$$\int e^{2x} \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \cos x dx; \quad v = \sin x \end{array} \right\} = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x} dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = 2e^{2x} dx; \\ dv = \sin x dx; \quad v = -\cos x; \end{array} \right\} = e^{2x} \sin x - 2 \left[-e^{2x} \cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x} dx \right] = e^{2x} \sin x +$$

$$+ 2e^{2x} \cos x - 4 \int \cos x e^{2x} dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5 \int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} (\sin x + 2 \cos x)$$

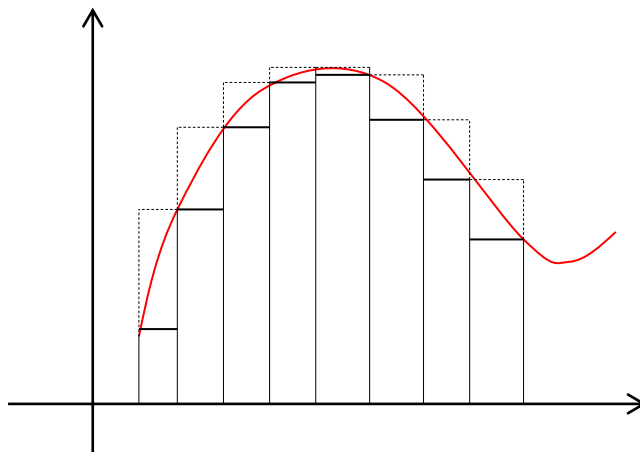
$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Лекция № 12.

Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Основные свойства. (2 часа)

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$.



Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке $[a, b]$
Разобьем отрезок $[a, b]$ на части (не обязательно одинаковые) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, ..., $x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$[x_0, x_1] \rightarrow m_1, M_1$; $[x_1, x_2] \rightarrow m_2, M_2$; ... $[x_{n-1}, x_n] \rightarrow m_n, M_n$.

Составим суммы:

$$\underline{S}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

$$\bar{S}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

Сумма $\underline{S}_n$ называется нижней интегральной суммой, а сумма $\bar{S}_n$ – верхней интегральной суммой.

Т.к. $m_i \leq M_i$, то $\underline{S}_n \leq \bar{S}_n$, а $m(b-a) \leq \underline{S}_n \leq \bar{S}_n \leq M(b-a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ξ .

$$x_0 < \xi_1 < x_1, \quad x_1 < \xi_2 < x_2, \quad \dots, \quad x_{n-1} < \xi_n < x_n.$$

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

$$S_n = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

Тогда можно записать: $m_i \Delta x_i \leq f(\xi_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i$

$$\text{Следовательно, } \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

$$\underline{S}_n \leq S_n \leq \bar{S}_n$$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции $f(x)$ ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим $\max \Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $\min \Delta x_i$ – наименьший. Если $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, то число отрезков разбиения отрезка $[a, b]$ стремится к бесконечности.

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

Если $\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = S$, то

Определение: Если при любых разбиениях отрезка $[a, b]$ таких, что $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ и произвольном выборе точек ξ_i интегральная сумма

$S_n = \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i$ стремится к пределу S , который называется определенным интегралом от $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Обозначение :

a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, $[a, b]$ – отрезок интегрирования.

Определение: Если для функции $f(x)$ существует предел

$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx,$ то функция называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$.

Также верны утверждения:

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

Теорема: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла.

- 1) $\int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx;$
- 2) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$
- 3) $\int_a^a f(x) dx = 0$

4) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

$$5) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Теорема Ньютона-Лейбница.

$$\int_a^b f(x)dx$$

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел $a = \text{const}$, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

$$\int_a^x f(t)dt$$

Обозначим $\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$. Найдем производную функции $\Phi(x)$ по переменному верхнему пределу x .

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

Теорема: Для всякой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция $F(x)$ – какая-либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Доказательство: Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$. Тогда в

$$\int_a^x f(t)dt$$

соответствии с приведенной выше теоремой, функция $\int_a^x f(t)dt$ – первообразная функция от $f(x)$. Но т.к. функция может иметь бесконечно много первообразных, которые будут отличаться друг от друга только на какое-то постоянное число C , то

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$$

при соответствующем выборе C это равенство справедливо для любого x , т.е. при $x = a$:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

Тогда $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

А при $x = b$:

Заменив переменную t на переменную x , получаем формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Теорема доказана.

Иногда применяют обозначение $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подынтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

Лекция № 13.

Интегрирование неограниченных функций. Интегрирование по бесконечному промежутку. (2 часа)

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $[a, \infty)$. Тогда она непрерывна на любом отрезке $[a, b]$.

Определение: Если существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$, то этот предел называется несобственным интегралом от функции $f(x)$ на интервале $[a, \infty)$.

Обозначение: $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx$

Если этот предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл сходится.

Если предел не существует или бесконечен, то несобственный интеграл расходится.

Аналогичные рассуждения можно привести для несобственных интегралов вида:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx$$

Конечно, эти утверждения справедливы, если входящие в них интегралы существуют.

Пример.

$$\int_0^{\infty} \cos x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \cos x dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \sin x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\sin b - \sin 0) = \lim_{b \rightarrow \infty} \sin b$$

- не существует.

Несобственный интеграл расходится.

Пример.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \int_b^{-1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_b^{-1} = \lim_{b \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{-1} + \frac{1}{b} \right) = 1$$

- интеграл сходится

Теорема: Если для всех x ($x \geq a$) выполняется условие $0 \leq f(x) \leq \Phi(x)$ и интеграл $\int_a^{\infty} \Phi(x) dx$ сходится, то $\int_a^{\infty} f(x) dx$ тоже сходится и $\int_a^{\infty} f(x) dx \leq \int_a^{\infty} \Phi(x) dx$.

Теорема: Если для всех x ($x \geq a$) выполняется условие $0 \leq \Phi(x) \leq f(x)$ и интеграл $\int_a^{\infty} \Phi(x) dx$ расходится, то $\int_a^{\infty} f(x) dx$ тоже расходится.

Теорема: Если $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

В этом случае интеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$ называется абсолютно сходящимся.

Интеграл от разрывной функции.

Если в точке $x = c$ функция либо неопределена, либо разрывна, то

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{b \rightarrow c-0} \int_a^b f(x) dx$$

Если интеграл $\int_a^b f(x) dx$ существует, то интеграл $\int_a^c f(x) dx$ - сходится, если интеграл $\int_a^b f(x) dx$ не существует, то $\int_a^c f(x) dx$ - расходится.

Если в точке $x = a$ функция терпит разрыв, то $\int_a^c f(x) dx = \lim_{b \rightarrow a+0} \int_b^c f(x) dx$.

Если функция $f(x)$ имеет разрыв в точке b на промежутке $[a, c]$, то

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Таких точек внутри отрезка может быть несколько.

Если сходятся все интегралы, входящие в сумму, то сходится и суммарный интеграл.

Лекция № 14.

Дифференциальные уравнения. Основные понятия и определения. (2 часа)

Определение. Обыкновенным дифференциальным уравнением n -ого порядка называется соотношение вида: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ (1),

где x – независимая переменная; y – искомая функция переменной;

$y', y'', \dots, y^{(n)}$ – производные искомой функции; F – известная функция своих аргументов.

Считается, что производная $y^{(n)}$ на самом деле входит в выражение (1), а величины $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ могут и не входить в него.

Определение. Порядком дифференциального уравнения, n , называется наивысший порядок производной, входящей в это уравнение.

Пример.

$y' + 2x^3 y = 0$ – уравнение первого порядка;

$y'' + y = 0$ – уравнение второго порядка;

$y^{(5)} + 2x^2 y''' + e^x y + 1 = 0$ – уравнение пятого порядка.

Определение. Всякая функция $\varphi(x) \in C^{(n)}$, которая, будучи подставленная вместо y в выражение (1), обращает это выражение в тождество, называется решением дифференциального уравнения (1).

Если $\varphi(x)$ – решение, то по определению

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) \equiv 0, \quad x \in \langle a, b \rangle \quad (2)$$

Пример.

$$y' - y = 0, \quad \varphi(x) = e^x \text{ – решение, так как } (L^x)' - e^x = 0$$

У рассматриваемого уравнения есть еще такое решение: $\varphi(x) = C e^x$,
где C – произвольная постоянная.

Это значит, что это уравнение имеет бесчисленное множество решений, зависящих от одного параметра (C).

Можно показать, что уравнение n -ого порядка имеет семейство решений, зависящих от произвольных независимых друг от друга постоянных.

Пример.

Уравнение $y^{(n)} = 0$ имеет решение:

$$y(x) = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n.$$

Определение. Процесс разыскания решения дифференциального уравнения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Определение. Решение дифференциального уравнения (1), содержащее n независимых между собой произвольных постоянных, называется его общим решением.

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \quad (3)$$

Замечание. Дифференциальное уравнение может иметь не одно, а несколько

общих решений. Например, для уравнения $y' = y$ функции $y = C e^x$ и $y = e^{x+C}$ являются общими решениями, причем разными, так как первая из них обращается в нуль ($C=0$), а вторая – никогда в нуль не обращается.

Определение. Соотношение $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, (4)

связывающее между собой независимую переменную, искомую функцию и n произвольных постоянных, называется общим интегралом уравнения (1). Следовательно, в общем интеграле решение задано в неявном виде.

Пример.

Рассмотрим уравнение: $y y' = x$. Отсюда $2y y' = -2x$ или $(y^2)' = (-x^2)'$. Поэтому $y^2 = -x^2 + C$, где C – произвольная постоянная.

$$y^2 + x^2 = C \geq 0 \text{ – общий интеграл; } y = \pm \sqrt{C - x^2} \text{ – общее решение.}$$

Определение. Решение, полученное из общего при фиксированных значениях произвольных постоянных, называется частным решением.

Пример. Уравнение $y' = y$. Его общее решение $y = C e^x$. Положим $C=2$, тогда $y = 2e^x$ – частное решение.

Определение. Особым решением по отношению к данному общему решению называется такое решение, которое не может быть получено ни при каких значениях произвольных постоянных, входящих в общее решение.

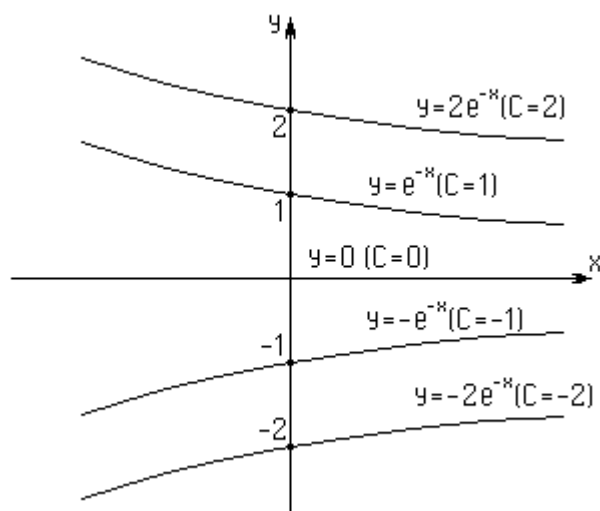
Пример. Уравнение $y' = y$ имеет два общих решения:

$$1) y = C e^x \quad 2) y = e^{x+C}$$

Решение: $y = 0$ есть частное по отношению к первому и особое по отношению ко второму общему решению.

Определение. График частного решения называется интегральной кривой рассматриваемого дифференциального уравнения. Уравнение этой линии есть уравнение (3) и (4) при фиксированных $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Таким образом, общее решение (или общий интеграл) определяет семейство интегральных кривых, каждая из которых соответствует определенному набору значений $C_1^{-x}, C_2^{-x}, \dots, C_n^{-x}$ произвольных постоянных.



Пример. $y' = -y$. Общее решение $y = C e^{-x}$.

Дифференциальные уравнения I порядка.

Определение. Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производную: $F(x, y, y') = 0$ (1)

Обычно мы будем иметь дело с уравнениями, которые можно разрешить относительно производной $y' = f(x, y)$ (2)

$$f(x, y) = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

Если в (2) положить $f(x, y) = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$, то уравнение (2) можно записать в симметричной форме: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ (3)

Здесь переменные x и y равноправны.

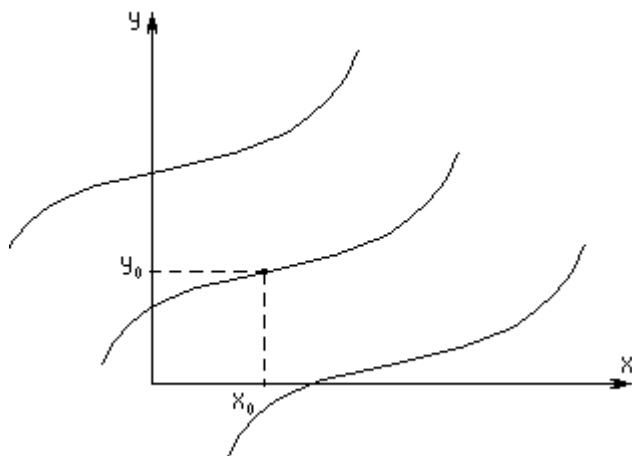
Иногда бывает выгодно рассматривать x как функцию y . В этом случае часто применяют форму записи (3).

Пример.

$$y' = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

Задача Коши.

Пусть $y = \varphi(x, C)$ будет общим решением уравнения (2). Это общее решение определяет семейство интегральных кривых. Для того чтобы из этого семейства выделить какое-либо частное решение, необходимо задать еще дополнительные условия, в частности, частное решение можно выделить путем задания на плоскости точки (x_0, y_0) , через которую проходит интересующая нас интегральная кривая. Следовательно,



возникает задача отыскания такого решения уравнения $y' = f(x, y)$, которое при заданном x_0 принимает заданное значение y_0 .

$$\left. \begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{array} \right\}$$

Это записывают так:

Такая задача называется задачей Коши.

Условие $y|_{x=x_0} = y_0$ называется начальным условием. Начальные условия необходимы для определения соответствующего значения произвольной постоянной C . Покажем на примере как вычисляется C .

Пусть требуется среди решений уравнения $y' = 1 + y^2$ (5)

найти такое, которое при $x = 0$ обращается в нуль, т.е. $y|_{x=0} = 0$. (6)

$$y = \operatorname{tg}(x + C), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (7)$$

Общим решением служит функция

Так как требуется, чтобы выполнялось (6), то должно быть $0 = \operatorname{tg}(0 + C)$, а это возможно только при $C = 0$. Следовательно, частное решение, удовлетворяющее условию (6), получается из общего решения при $C = 0$, т.е.

$y = \operatorname{tg} x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Это и есть решение задачи Коши.

Основное свойство общего решения:

Общее решение $y = \varphi(x, C)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ обладает тем свойством, что из него по любому заданному допустимому начальному условию $y|_{x=x_0} = y_0$ может быть найдено частное решение, удовлетворяющее этому условию. Это означает, что подставив в общее решение x_0 вместо x и y_0 вместо y , получаем уравнение относительно C : $y_0 = \varphi(x_0, C)$, из которого всегда может быть найдено значение $C = C_0$ и притом единственное. Функция $y = \varphi(x, C_0)$ служит искомым частным решением.

Замечания:

Сформулированное основное свойство общего решения справедливо при определенных требованиях, наложенных на функцию $f(x, y)$. Эти требования даются теоремой существования и единственности.

Допустимыми начальными условиями $y|_{x=x_0} = y_0$ называются такие условия, когда точка $(x_0, y_0) \in D$, где D – область определения функции $f(x, y)$.

Пусть $y = \varphi(x, C)$ будет общим решением некоторого дифференциального уравнения.

Поставим вопрос: можно ли по известному общему решению «восстановить» то дифференциальное уравнение, для которого данное решение является общим?

На этот вопрос отвечает теорема:

Теорема. Для того, чтобы по известному общему решению $y = \varphi(x, C)$ восстановить дифференциальное уравнение, нужно исключить C из равенств:

$$\left. \begin{aligned} y &= \varphi(x, C) \\ y' &= \varphi'(x, C) \end{aligned} \right\}$$

Полученное соотношение $\phi(x, y, y') = 0$ и есть то дифференциальное уравнение, для которого $y = \phi(x, C)$ служит общим решением. Эту теорему примем без доказательств.

Пример. Пусть дана функция $y = \operatorname{tg}(x + C)$, где C – произвольная постоянная. Требуется определить то дифференциальное уравнение, для которого она служит общим решением.

Решение. Используем теорему $y = \operatorname{tg}(x + C)$

$$y' = \frac{1}{\cos^2(x + C)} = 1 + \operatorname{tg}^2(x + C) = 1 + y^2$$

Искомым дифференциальным уравнением будет $y' = 1 + y^2$.

Может случиться, что в равенстве $y' = \phi'(x, C)$ исчезнет произвольное постоянное. Это значит, что это равенство и дает искомое дифференциальное уравнение.

Например, пусть дано общее решение $y = x^3 + C$. Дифференцируем - $y' = 3x^2$. Исчезло C . Следовательно, функция $y = x^3 + C$ служит общим решением уравнения $y' = 3x^2$.

Если вместо общего решения задан общий интеграл, то уравнение восстанавливается аналогично.

Именно, надо исключить C из системы:

$$\phi(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial \phi(x, y, C)}{\partial x} + \frac{\partial \phi(x, y, C)}{\partial y} y' = 0$$

Перейдем к рассмотрению отдельных видов дифференциальных уравнений первого порядка.

Уравнения с разделяющимися переменными.

Эти уравнения самые простые. При решении какого-либо уравнения его стараются свести к уравнению с разделяющимися переменными.

А. Уравнение с разделенными переменными

Уравнением с разделенными переменными называется уравнение вида:

$$S(y)dy = P(x)dx \quad (1)$$

Переменные разделены, каждая из них находится только в той части равенства, где ее дифференциал. $S(y)$ и $P(x)$ – заданные функции.

Теорема. Общим интегралом уравнения (1) служит соотношение $\int S(y)dy = \int P(x)dx + C$.

$$(2)$$

Пример. Найти общий интеграл уравнения $(1+y)dy = x^2 dx$.

Решение. $\int (1+y)dy = \int x^2 dx + C$ или $y + \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + C$ – общий интеграл.

Теорема. Частным решением уравнения (1), удовлетворяющим начальному условию $y|_{x=x_0} = y_0$ будет функция $y(x)$, определенная из

$$\int_{y_0}^y S(u)du = \int_{x_0}^x P(t)dt \quad (4)$$

равенства

Пример. Найти решение уравнения $\frac{1}{y} dy = 2x dx$, удовлетворяющего условию $y|_{x=0} = 3$

Решение. $\int_3^y \frac{1}{u} du = \int_0^x 2t dt \Rightarrow \ln \frac{y}{3} = x^2 \Rightarrow y = 3e^{x^2}$.

В. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида: $P(x)Q(y)dx + R(x)S(y)dy = 0$

(5)

В этом уравнении легко разделить переменные. Для этого поделим уравнение на произведение $R(x)Q(y) \neq 0$. Тогда получим:

$$\frac{P(x)}{R(x)}dx + \frac{S(y)}{Q(y)}dy = 0$$

(6)

Это уравнение с разделенными переменными. При переходе от уравнения (5) к уравнению (6) мы могли потерять некоторые решения, которые обращают в нуль произведение $R(x)Q(y)$, именно $R(x) \cdot Q(y) \equiv 0$ или $Q(y) = 0$.

(7)

Уравнение (7) есть конечное (без производных) уравнение относительно y . Его решением служат $y_1 = 0_1 = const$, $y_2 = 0_2 = const$, ... и т.д. Заметим, что константы $y_k = a_k$ служат решениями уравнения (5), т.к. $Q(a_k) = 0$ и $da_k = 0$.

Общим интегралом (5) будет $\int \frac{P(x)}{R(x)}dx + \int \frac{S(y)}{Q(y)}dy = C$.

(8)

Если решения $y_k = a_k$ получаются из (8) при подходящем выборе C , то такие решения суть частные, если же подобрать нужное C невозможно, то они особые решения.

Следовательно, если у уравнения (5) есть особые решения, то соответствующие им графики, т.е. интегральные кривые – это прямые параллельные оси OX .

Частным решением уравнения (5), удовлетворяющим начальному условию $y|_{x=y_0} = y_0$ будет функция $y(x)$, определенная уравнением:

$$\int_{x_0}^x \frac{P(t)}{R(t)} dt + \int_{y_0}^y \frac{S(u)}{Q(u)} du = 0 \quad (9)$$

Пример. Для уравнения $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$ найти общий интеграл и частное решение, удовлетворяющее условию $y|_{x=-1} = 0$.
Решение.

а) Общий интеграл. Делим на $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \neq 0$.

$$\frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

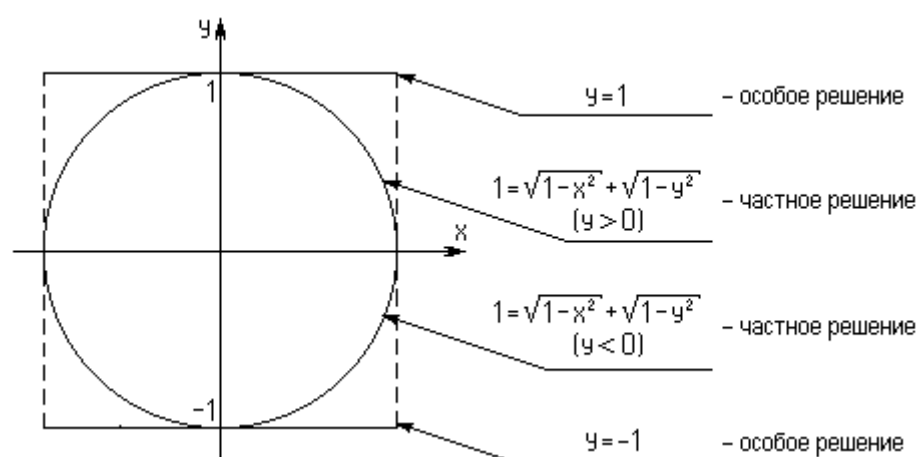
$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{y dy}{\sqrt{1-y^2}} = C$$

Отсюда $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C \Rightarrow$ _
общий интеграл.

б) Частное решение. $\sqrt{1-(-1)^2} + \sqrt{1-0^2} = C \Rightarrow C = 1$

Частное решение: $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1$.

с) Особое решение. $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 0, -1 \leq x \leq 1, y = \pm 1$



Возможна потеря решений $y_1 = 1$, $y_2 = -1$. Оба эти решения особые.