

Министерство промышленности и торговли Тверской области
Государственное бюджетное профессиональное
образовательное учреждение
«Тверской химико-технологический колледж»

Цикловая комиссия общеобразовательных дисциплин

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ
ЗАНЯТИЯМ
учебной дисциплины
ОУД.04. Математика

для специальностей среднего профессионального образования
технического профиля

Тверь, 2020

Рассмотрено
цикловой комиссией
общеобразовательных
дисциплин
Протокол № 5
от «25» 12 2020 г.
Председатель ЦК
С.Д. Никита

Принято
Методическим советом
Протокол № 4
от «26» 01 2021 г.
И.о. зам. директора по УР
Е.А. Гусева

Разработчик: Михайлова Н.В., преподаватель

Пояснительная записка

Практические занятия служат связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, полученных на уроках теоретического обучения, а так же для получения практических знаний. Практические задания выполняются студентом самостоятельно, с применением знаний и умений, полученных на занятиях, а так же с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя при выполнении практического задания. К практическому занятию от студента требуется предварительная подготовка, которую он должен провести перед занятием. Список литературы и вопросы, необходимые при подготовке, студент получает перед занятием из методических рекомендаций к практическому занятию.

Практические задания разработаны в соответствии с учебной программой. В зависимости от содержания они могут выполняться студентами индивидуально или фронтально.

Зачет по каждой практической работе студент получает после её выполнения и предоставления в письменном виде, оформления отчета в котором указывает полученные знания и умения в ходе выполнения практической работы, а также ответов на вопросы преподавателя, если таковые возникнут при проверке выполненного задания.

1. Перечень практических работ

№ и тема практической работы	Объем часов
Раздел 2. Корни, степени и логарифмы.	
ПР № 1: Корни, степени и логарифмы (решение задач).	2
Раздел 4. Комбинаторика.	
ПР № 2: Комбинаторика (решение задач).	2
Раздел 5. Координаты и векторы.	
ПР № 3: Координаты и векторы (решение задач).	2
Раздел 6. Основы тригонометрии.	
ПР № 4: Решение тригонометрических задач.	2
Раздел 7. Функции и графики.	
ПР № 5: Функции и графики (решение задач).	2
Раздел 9. Начала математического анализа.	
ПР № 6: Производная и ее применение (решение задач)	2
Раздел 10. Интеграл и его применение.	
ПР № 7: Интеграл и его применение (решение задач).	2
Раздел 11. Элементы теории вероятностей и математической статистики.	
ПР № 8: Элементы теории вероятностей и математической статистики (решение задач).	2
Глава 12. Уравнения и неравенства.	
ПР № 9: Решение уравнений и неравенств.	2
ПР № 10: Решение систем уравнений и неравенств.	2
ВСЕГО:	20

2. Методические указания к практическим занятиям

ПР № 1: Корни степени и логарифмы (решение задач). (2 часа)

Задание:

1. Упростить выражения.
2. Решить иррациональные уравнения и неравенство.
3. Решить показательные уравнения.
4. Вычислить логарифмы.
5. Решить логарифмические уравнения.

Теория к работе:

Корень n -ой степени и его свойства

Определение: Корнем n -ой степени (n – натуральное число, отличное от 1) из числа a называется такое число b , n -ая степень которого равна числу a .

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ где } a = b^n.$$

Определение: Арифметическим корнем n -ой степени от отрицательного числа a называется неотрицательное число b , n -ая степень которого равна числу a .

Свойства: Для положительных чисел a, b при $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$ для корней n -ой, k -ой степени

1. $(\sqrt[n]{a})^n = a$;
2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

$$3. \sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a};$$

$$4. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};$$

$$5. (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k};$$

$$6. \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

Иррациональные уравнения

Определение: Иррациональным уравнением называют уравнение, содержащее неизвестное под знаком корня.

Способы решения иррациональных уравнений:

1. Возведение обеих частей уравнения в одинаковую степень

Алгоритм:

а) преобразовывая данное иррациональное уравнение, приводим его к виду:

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)};$$

б) возводим обе части уравнения в n -ую степень $(\sqrt[n]{f(x)})^n = (\sqrt[n]{g(x)})^n$ и получим

уравнение вида $f(x) = g(x)$, способ решения которого известен;

в) решаем последнее уравнение, затем делаем проверку, подставляя значения его корней в данное уравнение. Значения корней, удовлетворяющих данное уравнение, берем в качестве решения.

Значения корней, не удовлетворяющих данное уравнение, называются посторонними корнями.

2. Введение новой переменной.

Степень с рациональным показателем

Определение: Степенью числа $a > 0$ с рациональным показателем $\frac{m}{n}$ называется значение корня n -ой степени из числа a^m .

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Свойства: Для любых чисел a, b , для любых целых чисел m, n

$$1. a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$$2. a^m : a^n = a^{m-n};$$

$$3. (a^m)^n = a^{mn};$$

$$4. (ab)^n = a^n \cdot b^n;$$

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$$

$$6. \text{если } m > n, \text{ то } a^m > a^n \text{ при } a > 1;$$

$$a^m < a^n \text{ при } 0 < a < 1.$$

Свойства: Для $a > 0, b > 0$ и любых рациональных чисел r, s

$$1. a^r \cdot a^s = a^{r+s};$$

$$2. a^r : a^s = a^{r-s};$$

$$3. (a^r)^s = a^{rs};$$

$$4. (ab)^r = a^r \cdot b^r;$$

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r};$$

$$6. \text{если } r - \text{рациональное число и } 0 < a < b, \text{ то}$$

$$a^r > b^r \text{ при } r > 0; a^r > b^r \text{ при } r < 0$$

7. для рациональных чисел r, s из неравенства $r > s$, получаем $a^r > a^s$ при $a > 1$, $a^r < a^s$, при $0 < a < 1$.

Показательные уравнения.

Свойства степеней с действительным показателем:

$$1. a^{x/y} = a^{(xk)/(yk)}, a > 0, y, k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}.$$

$$2. a^x > 0, a > 0, x \in \mathbb{R} \text{ (любая степень положительного числа положительна)}.$$

$$3. a^x > 1 \text{ при } a > 1, x > 0.$$

$$4. a^x < 1 \text{ при } a > 1, x < 0.$$

$$5. 1^x = 1 \text{ (любая степень единицы равна единице)}.$$

$$6. a^x < 1 \text{ при } 0 < a < 1, x > 0.$$

7. $a^x > 1$ при $0 < a < 1, x < 0$.

8. Если $a > 1, a \neq 1$, то для любого положительного числа b существует единственное действительное число x такое, что $a^x = b$ при $b > 0$.

9. Любая положительная степень нуля равна нулю.

Так же при упрощении выражений, содержащих степени пользуются формулами: $a^0 = 1, a \neq 0; a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Уравнение, содержащее переменную в показателе, называется **показательным**.

При решении показательных уравнений вида $a^{f(x)} = a^{k(x)}$ (где $a > 0, a \neq 1$) используется следующее свойство: $(a^{f(x)} = a^{k(x)}) \rightarrow (f(x) = k(x))$.

Логарифмы. Логарифмические уравнения.

Определение: Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени (x), в которую нужно возвести основание a , чтобы получить число b , т.е. $\log_a b = x \rightarrow a^x = b$.

При работе с логарифмами применяются следующие их свойств, вытекающие из свойств показательной функции:

1. $a^{\log_a b} = b$ (где $b > 0, a > 0$ и $a \neq 1$) называют **основным логарифмическим тождеством**.

При любом $a > 0 (a \neq 1)$ и любых положительных x и y выполняются равенства:

2. $\log_a 1 = 0$.

3. $\log_a a = 1$.

4. Логарифм произведения равен сумме логарифмов: $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$.

5. Логарифм частного равен разности логарифмов: $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$.

6. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени: $\log_a x^k = k \log_a x$.

Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма или в основании логарифма, называется **логарифмическим**.

Рассмотрим простейшее логарифмическое уравнение: $\log_a x = b$.

Логарифмическая функция возрастает (или убывает) на промежутке $(0; +\infty)$ и принимает на этом промежутке все действительные значения.

Теорема о корне: пусть функция f возрастает (убывает) на промежутке I , число a – любое из значений, принимаемых f на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x) = a$ имеет единственный корень в промежутке I .

По вышесказанной теореме следует, что для любого b данное уравнение имеет, и притом только одно, решение.

Из определения логарифма числа следует, что таким числом является a^b .

Ход работы:

Пример 1.

Упростите: $\frac{2a^3 b^8 c^4}{6a^4 b^{-3} c^5}$.

Решение:

используя свойства степеней, имеем:

$$\frac{2a^3 b^8 c^4}{6a^4 b^{-3} c^5} = \frac{a^{3-4} b^{8-(-3)} c^{4-5}}{3} = \frac{a^{-1} b^{11} c^{-1}}{3} = \frac{b^{11}}{3ac}.$$

Пример 2:

Решите уравнение: $\sqrt{x-3} = x-9$.

Решение:

возведем обе части уравнения в квадрат, при этом в уравнении появятся посторонние корни, поэтому проверка при решении иррациональных уравнений обязательна:

$$(\sqrt{x-3})^2 = (x-9)^2;$$

$$x-3 = x^2 - 18x + 81;$$

$$x^2 - 18x + 81 - x + 3 = 0;$$

$$x^2 - 19x + 84 = 0.$$

Получилось обычное квадратное уравнение, корни которого вычисляем через дискриминант: $x_1=12$, $x_2=7$.

Выполним проверку, для этого подставим в наше исходное уравнение получившиеся корни:

$$\begin{aligned} x_1=12: \quad & \sqrt{12-3} = 12-9; \\ & 3 = 3 \text{ (верно)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2=7: \quad & \sqrt{7-3} = 7-9; \\ & 2 = -2 \text{ (не верно)}. \end{aligned}$$

Ответ: 12.

Пример 3.

Решить неравенство:

$$\sqrt{x-2} > -x^2 + x - 2$$

Это неравенство второго типа, оно равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -x^2 + x - 2 < 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -x^2 + x - 2 \geq 0 \\ x - 2 > (-x^2 + x - 2)^2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Решим каждое неравенство:

$$1. -x^2 + x - 2 < 0$$

$$x^2 - x + 2 > 0$$

$D=1-8=-7$, старший коэффициент больше нуля, следовательно это неравенство верно при любом значении x . Решением первой системы будет решение ее второго неравенства: $x \geq 2$.

2. $-x^2 + x - 2 \geq 0$ Очевидно, что это неравенство не имеет решений. Следовательно, и вся вторая система не имеет решений.

Ответ: $x \geq 2$.

Пример 4.

Решите уравнение: $2^{x^2-7x+12} = 1$.

Решение:

по определению нулевого показателя степени: $1=2^0$, получим:

$$2^{x^2-7x+12} = 2^0.$$

По свойству $(a^{f(x)}=a^{k(x)}) \rightarrow (f(x)=k(x))$, получаем обычное квадратное уравнение, корни которого вычисляем через дискриминант:

$$x^2 - 7x + 12 = 0, \\ x_1=3, x_2=4.$$

Ответ: 3, 4.

Пример 5.

Решите уравнение: $\frac{1}{0,125}^{2x} = 128$.

Решение:

приведем обе части уравнения к основанию 2:

$$\frac{1}{0,125}^{2x} = 128,$$

$$\frac{1000}{125}^{2x} = 2^7,$$

$$8^{2x} = 2^7,$$

$$(2^3)^{2x} = 2^7,$$

$$2^{6x} = 2^7.$$

По свойству $(a^{f(x)}=a^{k(x)}) \rightarrow (f(x)=k(x))$, получаем $6x=7$ и $x=7/6$.

Ответ: 7/6.

Пример 6.

Решите уравнение: $2^{x-2} = 5^{x-2}$.

Решение:

разделив обе части уравнения на одно и то же число 5^{x-2} , получим:

$$\frac{2^{x-2}}{5^{x-2}} = \frac{5^{x-2}}{5^{x-2}},$$

$$\frac{2^{x-2}}{5^{x-2}} = 1,$$

$$\frac{2^{x-2}}{5^{x-2}} = \frac{2^0}{5^0},$$

$$x - 2 = 0,$$

$$x = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 7.

Решите уравнение: $2^{x+3} - 2^x = 112$.

Решение:

вынесем общий множитель 2^x за скобку, получим:

$$2^{x+3} - 2^x = 112,$$

$$2^x(2^3 - 1) = 112,$$

$$2^x \cdot 7 = 112,$$

$$2^x = 112 / 7,$$

$$2^x = 16,$$

$$2^x = 2^4,$$

$$x = 4.$$

Ответ: 4.

Пример 8.

Вычислите, используя определение логарифма числа $\log_{13} \sqrt[5]{169} + \log_{11} \sqrt[3]{121}$.

Решение:

вычислим отдельно каждый логарифм:

$$\log_{13} \sqrt[5]{169} = x,$$

$$\log_{11} \sqrt[3]{121} = x,$$

$$13^x = \sqrt[5]{169},$$

$$11^x = \sqrt[3]{121},$$

$$13^x = \sqrt[5]{13^2},$$

$$11^x = \sqrt[3]{11^2},$$

$$13^x = 13^{\frac{2}{5}},$$

$$11^x = 11^{\frac{2}{3}},$$

$$x = \frac{2}{5}.$$

$$x = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Вернемся в пример: } \log_{13} \sqrt[5]{169} + \log_{11} \sqrt[3]{121} = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{6+10}{15} = \frac{16}{15} = 1 \frac{1}{15}.$$

Пример 9.

Вычислите, используя основное логарифмическое тождество: $10^{3 \lg 2 - 1}$.

Решение:

используя свойство степени, разложим данное выражение на множители:

$$10^{3 \lg 2 - 1} = 10^{3 \lg 2} \cdot 10^{-1}.$$

Используя 6 свойство логарифма степени, имеем:

$$10^{3 \lg 2 - 1} = 10^{3 \lg 2} \cdot 10^{-1} = 10^{\lg 2^3} \cdot \frac{1}{10}.$$

Используя основное логарифмическое тождество, имеем:

$$10^{3 \lg 2 - 1} = 10^{3 \lg 2} \cdot 10^{-1} = 10^{\lg 2^3} \cdot \frac{1}{10} = 2^3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

Пример 10.

Решите уравнение: $\log_2(x^2 + 4x + 3) = 3$.

Решение:

данному уравнению удовлетворяют те значения x , для которых выполнено равенство: $x^2 + 4x + 3 = 2^3$.

Получаем обычное квадратное уравнение $x^2 + 4x + 3 = 8$ или $x^2 + 4x - 5 = 0$, корни которого вычисляем с помощью дискриминанта: $x_1 = 1$; $x_2 = -5$.

Пример 11.

Решите уравнение: $\log_5(2x+3) = \log_5(x+1)$.

Решение:

данное уравнение определено для тех значений x , при которых выполнены неравенства: $2x+3>0$ и $x+1>0$ (это следует из определения логарифма).
 Для этих x данное уравнение равносильно уравнению: $2x+3=x+1$, из которого находим $x=-2$.
 Выполняя проверку, убеждаемся, что $x=-2$ не удовлетворяет неравенству $x+1>0$.
 Следовательно, данное уравнение корней не имеет.

Самостоятельная работа:

Вариант 1.

1. Вычислите:

$$16^{\frac{5}{4}} - \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} + 27^{\frac{2}{3}}.$$

2. Упростите выражение:

$$1) \frac{(a^2 b^2)^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{9}} b^{\frac{1}{8}}}, 2) \frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt{a}},$$

$$3) \sqrt{\sqrt[3]{a^4}}.$$

3. Решите иррациональные уравнения:

$$1) \sqrt{x-4} = 2;$$

$$2) \sqrt{x^2-7} = 3;$$

$$3) \sqrt{x} = x - 6.$$

4. Решите иррациональное неравенство:

$$\sqrt{x-1} > 3.$$

5. Решите показательные уравнения:

$$1) (0,2)^{2-3x} = 25;$$

$$2) 3^x + 4 \cdot 3^{x+1} = 13;$$

$$3) 4 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 1 = 0.$$

6. Вычислить:

$$1) 7^{2 \log_7 16}; 2) 5^{2 - \log_3 9};$$

$$3) 8^{\log_2 \frac{1}{3}}; 4) \log_{216} 2 + \log_{216} 3;$$

$$5) \log_{27} 9.$$

7. Решите логарифмические уравнения:

$$1) \log_4 x = \log_4 2 + \log_4 7;$$

$$2) \log_2 (x^2 - 3x - 8) = 1;$$

$$3) \log_4 (x+4) = 2 - \log_4 (x-2);$$

$$4) \log_{0,6} (x+3) + \log_{0,6} (x-3) = \log_{0,6} (2x-1)$$

Вариант 2.

1. Вычислите:

$$25^{1,5} + (0,25)^{-0,5} - 81^{0,75}.$$

2. Упростите выражение:

$$1) \frac{b^{\frac{5}{4}} c^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}} c^{\frac{5}{4}}}{b^{\frac{5}{4}} c^{\frac{5}{4}}}, 2) \sqrt{\frac{7\sqrt{a}}{a}},$$

$$3) \sqrt{a^4 \sqrt{a}}.$$

3. Решите иррациональные уравнения:

1) $\sqrt{x-3} = 6$;

2) $\sqrt{x^2-5} = 2$;

3) $2x-2 = \sqrt{x} + x$.

4. Решите иррациональное неравенство:

$$\sqrt{x+2} > 4.$$

5. Решите показательные уравнения:

1) $(0,1)^{2x-3} = 10$;

2) $7^{x+1} + 5 \cdot 7^x = 588$;

3) $9^x - 7 \cdot 3^x - 18 = 0$.

6. Вычислить:

1) $5^{2 \log_5 20}$; 2) $\log_{\frac{1}{9}} 27$; 3) $81^{\log_9 15}$;

4) $4^{3-\log_4 64}$; 5) $\log_{0,1} 0,003 - \log_{0,1} 0,03$.

7. Решите логарифмические уравнения:

1) $\log_2(3x-6) = \log_2(2x-3)$;

2) $\log_2(x^2 - x - 4) = 1$;

3) $\lg(9x+1) = 1 + 2 \lg x$;

4) $\log_6(x+2) + \log_6(x-2) = \log_6(7x-14)$.

Вариант 3.

1. Вычислите:

$$10^{\frac{1}{4}} \cdot 40^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}.$$

2. Упростите выражение:

$$1) \frac{a^{\frac{9}{2}} b^{\frac{1}{12}}}{a^{-\frac{19}{4}} b^{\frac{1}{3}}}, 2) \frac{\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}, 3) \sqrt[3]{\sqrt{a^7}}.$$

3. Решите иррациональные уравнения:

1) $\sqrt{x-2} = 5;$

2) $\sqrt{x^2+3} = 2;$

3) $\sqrt{x-3} = x-9.$

4. Решите иррациональное неравенство:

$$\sqrt{x-3} < 4.$$

5. Решите показательные уравнения:

1) $(0,2)^{3x+3} = 25;$

2) $3^{x+3} + 4 \cdot 3^x = 279;$

3) $4^x - 2 \cdot 2^x - 8 = 0.$

6. Вычислить:

1) $12^{1+\log_{12} 4}$; 2) $\log_{27} 9$; 3) $\log_{\frac{1}{4}} 8$;

4) $\log_{\sqrt{3}} 27$; 5) $\log_2 15 - \log_2 30.$

7. Решите уравнения и неравенства:

1) $\log_{\frac{1}{6}}(7x-9) = \log_{\frac{1}{6}} x;$

2) $\log_2(x-2) + \log_2(x-3) = 1;$

3) $\log_3(x^2 - x - 3) = 1;$

4) $\log_7(x-2) + \log_7(x+2) = \log_7(2x-1).$

Вариант 4.

1. Вычислите:

$$9^{1,5} - 81^{0,5} - (0,5)^{-2}.$$

2. Упростите выражение:

$$1) \frac{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}}, 2) \sqrt{\frac{16\sqrt{a}}{a^4}},$$

3) $a\sqrt{a^3\sqrt{a}}.$

3. Решите иррациональные уравнения:

1) $\sqrt{x+3} = 4;$

2) $\sqrt{x^2-4} = 0;$

3) $\sqrt{x+2} = x-4.$

4. Решите иррациональное неравенство:

$$\sqrt{x-2} < 3.$$

5. Решите показательные уравнения:

1) $(0,1)^{3x-4} = 100;$

2) $2^{x+3} + 4 \cdot 2^x = 24;$

$$3) 9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0.$$

6. Вычислить:

$$1) 7^{2+\log_7 3}; \quad 2) \log_{16} 8; \quad 3) \log_{\frac{1}{9}} 27;$$

$$4) \log_{\sqrt{2}} 8; \quad 5) \log_{12} 4 + \log_{12} 36.$$

7. Решите уравнения и неравенства:

$$1) \log_{\frac{1}{2}} (7 - 8x) = -2;$$

$$2) \log_3 (x + 2) + \log_3 x = 1;$$

$$3) \log_6 (x^2 - 8x + 21) = 1;$$

$$4) \log_5 (x + 4) + \log_5 (x - 4) = \log_5 15x.$$

ПР №2: Комбинаторика (решение задач). (2 часа)

Задание:

Решение комбинаторных задач.

Теория к работе:

Комбинаторика - раздел математики, в котором изучаются задачи выбора элементов из заданного множества и расположения их в группы по заданным правилам, в частности задачи о подсчете числа комбинаций (выборок), получаемых из элементов заданного конечного множества. В каждой из них требуется подсчитать число возможных вариантов осуществления некоторого действия, ответить на вопрос «сколькими способами?».

Правило умножения (основной принцип): если из некоторого конечного множества первый объект (элемент x) можно выбрать n_1 способами и после каждого такого выбора второй объект (элемент y) можно выбрать n_2 способами, то оба объекта (x и y) в указанном порядке можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Этот принцип, очевидно, распространяется на случай трех и более объектов.

Ход работы:

Пример 1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, если: а) цифры не повторяются? б) цифры могут повторяться?

Решение. Имеется 5 различных способов выбора цифры для первого места (слева в трехзначном числе). После того как первое место занято, например, цифрой 2, осталось четыре цифры для заполнения второго места. Для заполнения третьего места остается выбор из трех цифр. Следовательно, согласно правилу умножения имеется $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ способов расстановки цифр, т. е. искомое количество трехзначных чисел есть 60. (Вот некоторые из этих чисел: 243, 541, 514, 132, ...) Понятно, что если цифры могут

повторяться, то трехзначных чисел $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. (Вот некоторые из них: 255, 333, 414, 111, ...)

Правило суммы. Если некоторый объект x можно выбрать n_1 способами, а объект y можно выбрать n_2 способами, причем первые и вторые способы не пересекаются, то любой из указанных объектов (x или y), можно выбрать $n_1 + n_2$ способами.

Это правило распространяется на любое конечное число объектов.

Пример 2. В студенческой группе 14 девушек и 6 юношей. Сколькими способами можно выбрать, для выполнения различных заданий, двух студентов одного пола?

Решение. По правилу умножения двух девушек можно выбрать $14 \cdot 13 = 182$ способами, а двух юношей - $6 \cdot 5 = 30$ способами. Следует выбрать двух студентов одного пола: двух студенток или двух юношей. Согласно правилу сложения таких способов выбора будет $182 + 30 = 212$.

Решение вероятностных (и не только их) задач часто облегчается, если использовать комбинаторные формулы. Каждая из них определяет число всевозможных исходов в некотором опыте (эксперименте), состоящем в выборе наудачу m элементов из n различных элементов рассматриваемого множества.

Размещениями из n элементов по m ($0 < m \leq n$) элементов называются соединения, каждое из которых состоит из m элементов, взятых из данных n элементов. При этом размещения отличаются друг от друга как самими элементами, так и их порядком.

Число размещений из n элементов по m элементов обозначается символом A_n^m и вычисляется по формуле

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1) \quad (1)$$

или

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, \text{ где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n, 1! = 1, 0! = 1. \quad (2)$$

Пример 3. Составить различные размещения по 2 из элементов множества $D = \{a, b, c\}$; подсчитать их число.

Решение. Из трех элементов можно образовать следующие размещения по два элемента: (a, b) , (b, a) , (a, c) , (c, a) , (b, c) , (c, b) . Согласно формуле (1) их число: $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

Перестановками из n элементов называются размещения из n элементов по n элементов, отличающиеся друг от друга лишь порядком элементов.

Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n и вычисляется по

формуле

$$P_n = n!. \quad (3)$$

Пример 4. Составить различные перестановки из элементов множества $E = \{2, 7, 8\}$; подсчитать их число.

Решение. Из элементов данного множества можно составить следующие перестановки: $(2, 7, 8)$; $(2, 8, 7)$; $(7, 2, 8)$; $(7, 8, 2)$; $(8, 2, 7)$; $(8, 7, 2)$. По формуле (3) имеем: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Сочетаниями из n элементов по m ($0 < m \leq n$) элементов называются соединения, каждое из которых состоит из m элементов, взятых из данных n элементов. Эти соединения отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. В отличие от размещений, порядок следования элементов здесь не учитывается.

Число сочетаний из n элементов по m элементов обозначается символом C_n^m и вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (4)$$

Пример 5. Составить различные сочетания по 2 из элементов множества $D = \{a, b, c\}$; подсчитать их число.

Решение. Из трех элементов можно образовать следующие сочетания по два элемента: (a, b) , (a, c) , (b, c) . Их число: $C_3^2 = \frac{3!}{1!2!} = 3$.

Самостоятельная работа:

Вариант 1.

1. Вычислить:

—) $7!$

—) $\frac{10!}{5!}$

—) $P_4 + P_3$

2. Сократите дробь: $\frac{(n+1)!}{n!}$

3. Решите уравнение: $2P_x = 12$

4. Решите задачи:

—) Сколькими способами можно расставить девять книг на полке, чтобы определенные 4 книги стояли рядом?

—) Необходимо выбрать в подарок четыре книги из десяти. Сколькими способами это можно сделать?

- ≡) По списку в классе 15 девочек и 13 мальчиков. Нужно выбрать троих дежурных по классу. Сколькими способами это можно сделать при условии, что пару обязательно должны составить мальчик и девочка.

Вариант 2.

1. Вычислить:

—) $4!$

≡) $6! - 5!$

≡) $\frac{P_8}{P_7}$

2. Сократите дробь: $\frac{n!}{2!(n-2)!}$

3. Решите уравнение: $n! = 7(n-1)!$

4. Решите задачи:

-) Студент сдает в сессию 3 экзамена. Сколько существует различных комбинаций оценок, которые он может получить?
- ≡) Сколькими способами можно купить набор из трех пирожных, если в продаже имеются 4 сорта пирожных и пирожные в наборе могут повторяться?
- ≡) Сколько различных вариантов четных четырехзначных чисел, в записи которых нет одинаковых цифр, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4?

Вариант 3.

1. Вычислить:

—) $6!$

≡) $\frac{5!}{5}$

≡) $\frac{P_{12}}{P_{10}}$

2. Сократите дробь: $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

3. Решите уравнение: $\frac{P_x}{3} = 8$

4. Решите задачи:

-) Сколькими способами можно выбрать старосту и профорга в группе студентов из 24 человек?
- ≡) Сколькими способами из группы в 24 человека можно выбрать трёх делегатов на конференцию?
- ≡) Сколькими способами можно выбрать 1 красную гвоздику и 2 розовых из

вазы, в которой стоят 10 красных и 4 розовых гвоздики?

Вариант 4.

1. Вычислить:

—) $9!$

—) $\frac{3!}{12}$

—) $\frac{16!}{14!3!}$

2. Сократите дробь: $\frac{(n+2)!(n^2-9)}{(n+4)!}$

3. Решите уравнение: $A_n^4 = 12A_n^2$

4. Решите задачи:

—) Имеется пять видов конвертов и 4 вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой?

—) Учащимся дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать. Сколькими способами ученик может выбрать из них шесть?

—) На книжной полке помещается 30 томов. Сколькими способами их можно расставить, чтобы при этом 1-й и 2-й тома не стояли рядом?

ПР №3: Координаты и векторы (решение задач). (2 часа)

Задание:

1. Ответить на теоретические вопросы по теме.
2. Выполнить действия над векторами.

Теория к работе:

Линейные операции над векторами

Суммой двух векторов $\vec{a} + \vec{b}$ называется вектор, который идет из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$ (*правило треугольника*).

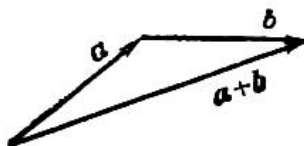


Рисунок 1. Правило треугольника

Наряду с правилом треугольника часто пользуются (равносильным ему) *правилом параллелограмма*: если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приведены к общему началу и на них построен параллелограмм, то сумма $\vec{a} + \vec{b}$ есть вектор, совпадающий с диагональю этого

параллелограмма, идущей из общего начала $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отсюда сразу следует, что $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

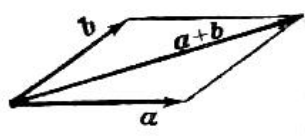


Рисунок 2. Правило параллелограмма

Разность двух векторов $\vec{a} - \vec{b}$ называется вектор, который в сумме с вектором $\vec{b}$ составляет вектор $\vec{a}$. Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приведены к общему началу, то разность их есть вектор, идущий из конца $\vec{b}$ («вычитаемого») к концу $\vec{a}$ («уменьшаемого»). Два вектора равной длины, лежащие на одной прямой и направленные в противоположные стороны, называются *взаимно обратными*: если один из них обозначен символом $\vec{a}$, то другой обозначается символом $-\vec{a}$. Легко видеть, что $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Т. о., построение разности равносильно прибавлению к «уменьшаемому» вектора, обратного «вычитаемого».

При сложении векторов складываются их соответствующие координаты, при вычитании вычитаются соответствующие координаты, т.е. если даны координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ и $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$; $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, то координаты векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2), \\ \vec{d} &= (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2).\end{aligned}$$

Произведение $k\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на число k называется вектор, модуль которого равен произведению модуля вектора $\vec{a}$ на модуль числа k ; он параллелен вектору $\vec{a}$ или лежит с ним на одной прямой и направлен так же, как вектор $\vec{a}$, если k – число положительное, и противоположно вектору $\vec{a}$, если k – число отрицательное.

Если $k=0$, для любого вектора $\vec{a}$ произведение $k\vec{a}$ равно нуль-вектору: $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Если $k=1$, то $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Если $k=-1$, то $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ – вектор, противоположный вектору $\vec{a}$.

Формула расстояния между точками A и B в пространстве:

$$d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается символом $\vec{a}\vec{b}$ (порядок записи сомножителей безразличен, то есть $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$).

Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначить через φ , то их скалярное произведение можно выразить формулой:

$$\overrightarrow{ab} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \phi.$$

Из формулы $\overrightarrow{ab} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \phi$ следует, что $\overrightarrow{ab} > 0$, если ϕ – острый угол, $\overrightarrow{ab} < 0$,

если ϕ – тупой угол; $\overrightarrow{ab} = 0$ в том и только в том случае, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

Скалярное произведение $\vec{a}\vec{a}$ называется скалярным квадратом вектора и обозначается символом $\vec{a}^2$. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами: $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то их скалярное произведение может быть вычислено по формуле:

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Отсюда следует необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Угол ϕ между векторами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ задается формулой

$$\cos \phi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}, \text{ или в координатах } \cos \phi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Ход работы:

Пример 1.

Вычислить координаты векторов $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$; $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a} = (-3; 5; 1)$, $\vec{b} = (4; -2; 8)$.

Решение:

по формулам

$$\vec{c} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2),$$

$$\vec{d} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2),$$

имеем

$$\vec{c} = (-3 + 4; 5 + (-2); 1 + 8) = (1; 3; 9),$$

$$\vec{d} = (-3 - 4; 5 - (-2); 1 - 8) = (-7; 7; -7).$$

Пример 2.

На плоскости заданы координаты двух точек $A(-7; 3)$, $B(2; 4)$. Найдите координаты середины отрезка AB .

Решение:

пусть точка C – середина отрезка AB . Ее координаты равны полусуммам соответствующих координат точек A и B :

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-7 + 2}{2} = -\frac{5}{2},$$

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + 4}{2} = \frac{7}{2}.$$

Т. о., середина отрезка AB имеет координаты $-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}$.

Пример 3.

Доказать, что треугольник ABC : $A(-3; -3)$, $B(-1; 3)$, $C(11; -1)$ – прямоугольный.

Решение:

вычислим длины сторон треугольника по формуле:

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}, \\AB &= \sqrt{(-1+3)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{40}, \\BC &= \sqrt{(11+2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{160}, \\AC &= \sqrt{(11+3)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{200}.\end{aligned}$$

Т.к. $AB^2=40$, $BC^2=160$, $AC^2=200$, то $AB^2+BC^2=AC^2$.

Т.о., сумма квадратов длин двух сторон треугольника равна квадрату длины третьей стороны. Из этого следует, что треугольник ABC прямоугольный и сторона AC является его гипотенузой.

Пример 4.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, зная, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить: $\vec{a}\vec{b}$, $|\vec{a}|^2$,

$$|\vec{b}|^2, (\vec{a} + \vec{b})^2, (3\vec{a} + 2\vec{b})^2, (\vec{a} - \vec{b})^2, (3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}).$$

Решение:

из формулы $\cos \varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, выразим $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos \varphi$, тогда

$$\vec{a}\vec{b} = 12 \cos \frac{2\pi}{3} = 12 \cdot -\frac{1}{2} = -6;$$

т.к. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, то $|\vec{a}|^2 = 3^2 = 9$, $|\vec{b}|^2 = 4^2 = 16$;

по формуле сокращенного умножения квадрата суммы, имеем

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 9 + 2(-6) + 16 = 13;$$

аналогично

$$(3\vec{a} + 2\vec{b})^2 = 9\vec{a}^2 + 12\vec{a}\vec{b} + 4\vec{b}^2 = 81 + 12(-6) + 64 = 73;$$

по формуле сокращенного умножения квадрата разности, имеем

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 9 - 2(-6) + 16 = 37;$$

раскроем скобки

$$(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) = 3\vec{a}^2 + 6\vec{a}\vec{b} - 2\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}^2 = 3\vec{a}^2 + 4\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}^2 = 27 + 4(-6) - 64 = -61.$$

Самостоятельная работа:

Вариант 1.

Теоретическая часть:

- 1) Какие вектора называются коллинеарными?
- 2) Дайте определение равных векторов. Приведите примеры векторных величин.
- 3) Сложите два вектора по правилу треугольника.
- 4) Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ напишите переместительный закон.
- 5) Если $A(1; 2; 5)$ и $B(4; -1; 7)$, то какие координаты будут у вектора $\overrightarrow{BA}$?

Практическая часть:

1. Даны вектора $\vec{a}\{-2; 7; -1\}$ и $\vec{b}\{3; 5; 0\}$. Найти координаты векторов: а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$; в) $3\vec{a}$; г) $2\vec{a} + 3\vec{b}$.
2. Даны точки $A(3; -2; 2)$, $B(1; 3; 1)$, $C(0; 5; -3)$. Найти координаты векторов: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.
3. Дан треугольник с вершинами $A(-2; 3; 1)$, $B(0; 5; 3)$, $C(3; 4; -2)$. Найти периметр треугольника ABC .
4. Найти скалярное произведение векторов: $\vec{a}\{-3; 5; 1\}, \vec{b}\{16; 1; 0\}$.
5. Найти угол между векторами $\vec{a}\{6; -2; -3\}$ и $\vec{b}\{9; -12; 1\}$.
6. Перпендикулярны ли вектора $\vec{a}\{2; -3; 1\}, \vec{b}\{3; 2; 0\}$?

Вариант 2.

Теоретическая часть:

- 1) Как умножить вектор $\vec{a}$ на число k ?
- 2) Напишите разложения вектора $\vec{a}$ по единичным векторам.
- 3) Напишите формулу нахождения координат середины отрезка.
- 4) Что такое скалярное произведение двух векторов?
- 5) Сформулируйте условие перпендикулярности двух векторов.

Практическая часть:

1. Даны векторы $\vec{a}\{3; -5; 1\}$ и $\vec{b}\{2; 6; -3\}$. Найти координаты векторов: а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$; в) $2\vec{a}$; г) $2\vec{a} + \vec{b}$.
2. Даны точки $A(1; -3; 0)$, $B(2; 4; -1)$, $C(1; 3; 2)$. Найти координаты векторов: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.
3. Дан треугольник с вершинами $A(-1; 2; 3)$, $B(3; -2; 4)$, $C(-3; 4; -1)$. Найти периметр треугольника ABC .
4. Найти скалярное произведение векторов: $\vec{a}\{-2; 3; 0\}, \vec{b}\{12; 3; 5\}$.
5. Найти угол между векторами $\vec{a}\{-2; 3; 1\}$ и $\vec{b}\{4; -1; 3\}$.
6. Перпендикулярны ли векторы $\vec{a}\{-3; 4; -2\}, \vec{b}\{4; 2; 1\}$?

Вариант 3.

Теоретическая часть:

- 1) Какие вектора называются сонаправленными и противоположно направленными?
- 2) Приведите примеры из физики векторных величин и напишите формулу нахождения длины вектора.
- 3) Сложите два вектора по правилу параллелограмма.
- 4) Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ напишите сочетательный закон.
- 5) Если А (3;-1;5) и В (6;2;-3), то какие координаты будут у вектора $\overrightarrow{AB}$?

Практическая часть:

1. Даны вектора $\vec{a}\{-1; 3; 2\}$ и $\vec{b}\{2; 4; 0\}$. Найти координаты векторов: а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$;
в) $3\vec{a}$; г) $\vec{a} + 3\vec{b}$.
2. Даны точки А (2; -1; 3), В (1; 2; 5), С (5;3; -2). Найти координаты векторов: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}$.
3. Дан треугольник с вершинами А (-1; 2; -3), В (2; 3; 0), С (1; -2; -1). Найти периметр треугольника ABC.
4. Найти скалярное произведение векторов: $\vec{a}\{-1; 3; 2\}, \vec{b}\{9; -2; 3\}$.
5. Найти угол между векторами $\vec{a}\{3; -1; 6\}$ и $\vec{b}\{2; 1; -1\}$.
6. Перпендикулярны ли вектора $\vec{a}\{-2; 5; 3\}, \vec{b}\{1; -3; 0\}$?

Вариант 4.

Теоретическая часть:

- 1) Нарисуйте и подпишите прямоугольную систему координат в пространстве.
- 2) Чему равна координата суммы векторов?
- 3) Напишите формулу расстояния между двумя точками.
- 4) Напишите формулу нахождения косинуса угла между двумя векторов.
- 5) Сформулируйте условие для определения типа угла между двумя векторами (острый, прямой, тупой).

Практическая часть:

1. Даны векторы $\vec{a}\{3; 1; 7\}$ и $\vec{b}\{-2; 4; 3\}$. Найти координаты векторов: а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$;
в) $4\vec{a}$; г) $\vec{a} - 3\vec{b}$.
2. Даны точки А (-1; 2; 0), В (-2; 3; 5), С (4; 0; -1). Найти координаты векторов: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.
3. Дан треугольник с вершинами А (3;0; 2), В (5; 4; -1), С (-1; 3; 4). Найти периметр треугольника ABC.
4. Найти скалярное произведение векторов: $\vec{a}\{-3; 4; -2\}, \vec{b}\{5; -2; 6\}$.
5. Найти угол между векторами $\vec{a}\{-1; 2; 3\}$ и $\vec{b}\{0; 4; -1\}$.
6. Перпендикулярны ли векторы $\vec{a}\{-1; 2; 8\}, \vec{b}\{2; 1; 0\}$?

ПР №4: Решение тригонометрических задач. (2 часа)

Задание:

1. Упростить тригонометрические выражения.
2. Вычислить значения тригонометрических функций.

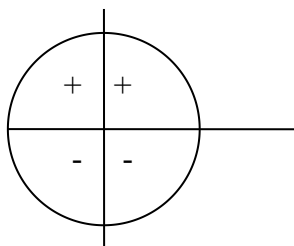
Теория к работе:

Значение тригонометрических функций

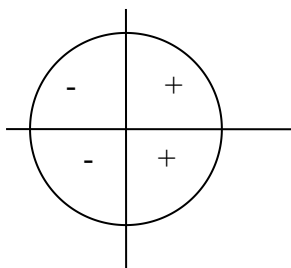
Угол	Функция	0°	0	30°	$\frac{\eta}{6}$	45°	$\frac{\eta}{4}$	60°	$\frac{\eta}{3}$	90°	$\frac{\eta}{2}$	180°	η	270°	$\frac{3\eta}{2}$	360°	2η
	sina	0		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1		0		-1		0	
	cosa	1		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{1}{2}$		0		-1		0		1	
	tga	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$\sqrt{3}$		-		0		-		0	
	ctga			$\sqrt{3}$		1		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		-		0		-	

Знаки синуса, косинуса, тангенса, котангенса в каждой из координатных четвертей.

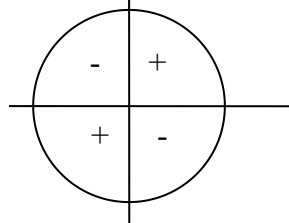
Знаки синуса



Знаки косинуса



Знаки тангенса и котангенса



3) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ нечетная функции
 $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ нечетная функции
 $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$ нечетная функции
 $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ } – четная функция

Формулы тригонометрии

Основные тригонометрические тождества	Формулы двойного угла
---------------------------------------	-----------------------

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$	$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ $\cos 2\alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$
--	---

Формулы половинного угла	Формулы сложения
$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos \alpha}}{2}$ $\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{\sqrt{1 + \cos \alpha}}{2}$ $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$	$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$ $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$

Формулы суммы и разности
$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$ $\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$ $\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1. $\arcsin(-a) = -\arcsin a$

2. $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

π

$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6};$

$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3};$

$\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$

$\arccos(-\frac{1}{2}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}$

$$3. \operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$$

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4};$$

$$\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$4. \operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$$

$$\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4};$$

$$\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

$$5. \sin(\arcsin a) = a$$

$$\sin \arcsin \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\arccos a) = a$$

$$\cos \arccos \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$6. \arcsin(\sin x) = x$$

$$\arccos(\cos x) = x$$

$$7. \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \text{ если } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

Ход работы:

$$\frac{24(\sin^2 17^\circ - \cos^2 17^\circ)}{\cos 34^\circ}$$

1. Найдите значение выражения

Мы видим, что $34 = 2 \times 17$, поэтому либо разложим знаменатель по формуле косинуса двойного аргумента, либо, наоборот свернем числитель по той же формуле:

$$\frac{24(\sin^2 17^\circ - \cos^2 17^\circ)}{\cos 34^\circ} = \frac{24(\sin^2 17^\circ - \cos^2 17^\circ)}{(\cos^2 17^\circ - \sin^2 17^\circ)} = -24$$

Ответ: -24.

$$\frac{5 \cos 29^\circ}{\sin 61^\circ}$$

2. Найдите значение выражения

$$\text{Заметим, что } 29^\circ + 61^\circ = 90^\circ$$

Воспользуемся формулой приведения:

$$\frac{5 \cos 29^\circ}{\sin 61^\circ} = \frac{5 \cos(90^\circ - 61^\circ)}{\sin 61^\circ} = \frac{5 \sin 61^\circ}{\sin 61^\circ} = 5$$

Ответ: 5.

$$\sin \alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}} \quad \alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$$

3. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если

По основному тригонометрическому тождеству:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{-5}{\sqrt{26}}\right)^2 = 1 - \frac{25}{26} = \frac{1}{26}$$

Косинус в третьей четверти отрицателен, поэтому

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{5}{\sqrt{26}}}{\left(-\frac{1}{\sqrt{26}}\right)} = 5$$

Отсюда

Ответ: 5.

4. Найдите значение выражения

$$\frac{3 \cos (\pi - \beta) + \sin \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right)}{\cos (\beta + 3 \pi)}$$

Воспользуемся формулами приведения:

$$\cos (\pi - \beta) = -\cos \beta$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right) = \cos \beta$$

$$\cos (\beta + 3 \pi) = -\cos \beta$$

Получим:

$$\frac{3(-\cos \beta) + \cos \beta}{(-\cos \beta)} = \frac{-2 \cos \beta}{(-\cos \beta)} = 2$$

Ответ: 2

Самостоятельная работа:

Вариант 1.

1. Вычислить по формулам сложения и двойных углов:

а). $\sin 23^\circ \cos 22^\circ + \sin 22^\circ \cos 23^\circ$; б). $\cos 36^\circ \cos 24^\circ - \sin 36^\circ \sin 24^\circ$;

в). $\cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15} \sin \frac{\pi}{5}$; г). $\sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{3\pi}{20} + \sin \frac{3\pi}{20} \cos \frac{\pi}{10}$;

д). $\frac{\sin 72^\circ}{18 \sin 36^\circ \cos 36^\circ}$; е). $\frac{\cos^2 18^\circ - \sin^2 18^\circ}{9 \cos 36^\circ}$.

2. Упростить:

$$а). (1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha); \quad б). \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$в). \cos^2 \alpha + (1 - \sin^2 \alpha); \quad г). \frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$д). \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha; \quad е). \frac{\sin 2\alpha}{2 \cos \alpha}$$

$$ж). \frac{1}{\sin \alpha - 1} - \frac{1}{1 + \sin \alpha}$$

3. Вычислить:

$$а) \arccos 1 - \arccos -\frac{1}{2} + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad б) \arcsin -\frac{1}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$в) \operatorname{arctg} 2 \sin \frac{\pi}{6}.$$

$$4. \text{ Дано: } \sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}} \qquad \cos \alpha = ?$$

$$\operatorname{tg} \alpha = ?$$

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = ?$$

Найти:

5. Найти значение выражения:

$$а) \frac{7 \sin 17^\circ \cos 17^\circ}{\sin 34^\circ}; \quad б) \frac{-3 \cos 24^\circ}{6 \cos^2 12^\circ - 6 \sin^2 12^\circ}.$$

6. Упростить выражение:

$$а) \operatorname{tg} \frac{3}{2} \pi - \alpha \quad \operatorname{tg}(\pi + \alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin(\pi + \alpha);$$

$$б) \operatorname{ctg} \frac{3}{2} \pi + \alpha \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} - \alpha + \cos(\pi - \alpha) \sin \alpha - \frac{\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2} \alpha \quad \cos(\pi + \alpha).$$

Вариант 2.

1. Вычислить по формулам сложения и двойных углов:

$$а). \cos 35^\circ \cos 5^\circ + \sin 35^\circ \sin 5^\circ; \quad б). \sin 76^\circ \cos 16^\circ - \sin 16^\circ \cos 76^\circ;$$

$$в). \sin \frac{7\pi}{24} \cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{7\pi}{24}; \quad г). \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi}{4};$$

$$д). \frac{20 \sin 40^\circ \cos 40^\circ}{\sin 80^\circ}; \quad е). \frac{10 \cos 40^\circ}{\cos^2 20^\circ - \sin^2 20^\circ}.$$

2. Упростить:

$$а). (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha); \quad б). \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$в). \sin^2 \alpha + (1 - \cos^2 \alpha); \quad г). \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$д). \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{ctg} \alpha; \quad е). \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha}$$

$$ж). \frac{1}{1 + \cos \alpha} + \frac{1}{1 - \cos \alpha}$$

3. Вычислить:

- а) $\arccos(-1) - \arccos -\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\arcsin -\frac{\sqrt{2}}{2} + \arcsin(-1) - 2 \arcsin 0$;
 в) $\arctg(\cos 0)$.

4. Дано: $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\sin \alpha - ?$
 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ $tg \alpha - ?$
 $ctg \alpha - ?$
 Найти:

5. Найти значение выражения:

а) $\frac{\sin 68^\circ}{4 \sin 34^\circ \cos 34^\circ}$; б) $\frac{3 \cos^2 14^\circ - 3 \sin^2 14^\circ}{2 \cos 28^\circ}$.

6. Упростить выражение:

а) $\sin(\pi - \beta) \cos(\frac{3\pi}{2} - \beta) + \sin \frac{3}{2}\pi + \beta \quad ctg(\pi - \beta)$;
 б) $\cos(\frac{3}{2}\pi - \alpha) \sin(\pi - \alpha) + \cos(2\pi - \alpha) \sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) + tg(\pi - \alpha) \quad tg(\frac{3}{2}\pi - \alpha)$.

Вариант 3.

1. Вычислить по формулам сложения и двойных углов:

а). $\cos 98^\circ \cos 53^\circ + \sin 98^\circ \sin 53^\circ$; б). $\sin 56^\circ \cos 26^\circ - \sin 56^\circ \cos 26^\circ$;
 в) $\sin \frac{8\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} + \sin \frac{6\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7}$; г) $\cos \frac{10\pi}{6} \cos \frac{8\pi}{6} - \sin \frac{10\pi}{6} \sin \frac{8\pi}{6}$;
 д). $\frac{6 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\sin 40^\circ}$; е). $\frac{12 \cos 70^\circ}{\cos^2 35^\circ - \sin^2 35^\circ}$.

2. Упростить:

а) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$; б) $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$;
 $\sin^2 \alpha + (1 - \cos^2 \alpha)$; г). $\frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 + tg^2 \alpha}$
 д). $\sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha$; е). $\frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha}$
 ж). $\frac{1}{1 + \cos \alpha} + \frac{1}{1 - \cos \alpha}$

3. Вычислить:

а) $\arccos 0 + 2 \arccos -\frac{1}{2} + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\arcsin -\frac{1}{\sqrt{2}} + \arcsin 1 - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$;
 в) $\arctg \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$.

4. Дано: $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{11}}$ $\sin \alpha - ?$
 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ $tg \alpha - ?$
 $ctg \alpha - ?$
 Найти:

5. Найти значение выражения:

а) $\frac{5 \sin 23^0 \cos 23^0}{\sin 46^0}$; б) $\frac{-2 \cos 54^0}{5 \cos^2 27^0 - 5 \sin^2 27^0}$.

6. Упростить выражение:

а) $\sin \frac{3}{2} \pi - \alpha \quad \cos(\alpha - 2\pi) + \operatorname{tg}(\frac{3}{2} \pi + \alpha) \operatorname{tg}(\pi - \alpha)$;

б) $\sin(\pi - \alpha) \cos \frac{3}{2} \pi + \alpha + \cos^2(3\pi - \alpha) + \operatorname{tg}(3\pi + \alpha) \operatorname{ctg}(\pi - \alpha)$.

Вариант 4.

1. Вычислить по формулам сложения и двойных углов:

а). $\cos 69^\circ \cos 24^\circ + \sin 69^\circ \sin 24^\circ$; б). $\sin 198^\circ \cos 18^\circ - \sin 198^\circ \cos 18^\circ$;

в) $\sin \frac{5\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7}$; г) $\cos \frac{8\pi}{3} \cos \frac{7\pi}{3} - \sin \frac{8\pi}{3} \sin \frac{7\pi}{3}$;

д). $\frac{10 \sin 25^\circ \cos 25^\circ}{2 \sin 50^\circ}$; е). $\frac{2 \cos 140^\circ}{\cos^2 70^\circ - \sin^2 70^\circ}$.

2. Упростить:

а). $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)$; б). $\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$

в). $\cos^2 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)$; г). $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$

д). $\sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha$; е). $\frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha}$

ж). $\frac{1}{\sin \alpha - 1} + \frac{1}{1 + \sin \alpha}$

3. Вычислить:

а) $\arccos(-1) + 3 \arccos -\frac{\sqrt{3}}{2} - \arccos \frac{1}{2}$; б) $\arcsin 1 - \arcsin \frac{1}{2} + \arcsin -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\operatorname{arctg} \sin(-\frac{\pi}{2})$.

$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$

$\cos \alpha = ?$

$\operatorname{tg} \alpha = ?$

$\operatorname{ctg} \alpha = ?$

4. Дано:

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Найти:

5. Найти значение выражения:

а) $\frac{\sin 78^0}{5 \sin 39^0 \cos 39^0}$; б) $\frac{9 \cos^2 22^0 - 9 \sin^2 22^0}{2 \cos 44^0}$.

6. Упростить выражение:

а) $\cos(\pi + \beta) \sin(\frac{3}{2} \pi + \beta) - \operatorname{tg}(\beta - \pi) \operatorname{ctg} \frac{3}{2} \pi - \beta$;

б) $\sin(\frac{3}{2} \pi - \alpha) \cos(\pi - \alpha) + \sin(3\pi - \alpha) \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \operatorname{tg}(\pi - \alpha) \operatorname{tg}(\frac{3}{2} \pi + \alpha)$.

ПР №5: Функции и графики (решение задач). (2 часа)

Задание:

1. Ответить на теоретические вопросы по теме.
2. Построить графики функций.

Теория к работе:

Числовая функция

Числовой функцией с областью определения D называется соответствие, при котором каждому числу x из множества D сопоставляется по некоторому правилу число y , зависящее от x .

Функции обычно обозначают латинскими буквами. Рассмотрим произвольную функцию f . Независимую переменную x называют аргументом функции. Число y , соответствующее числу x , называют значением функции f в точке x и обозначают $f(x)$. Область определения функции f обозначают $D(f)$. Множество, состоящее из всех чисел $f(x)$, таких, что x принадлежит области определения функции f , называют областью значений функции и обозначают $E(f)$.

Графиком функции f называют множество всех точек $(x; y)$ координатной плоскости, где $y=f(x)$, а x «пробегают» всю область определения функции f .

График линейной функции

Линейная функция задается уравнением $y=ax+b$. Графиком линейной функций является прямая. Чтобы построить прямую достаточно две точки.

График квадратичной, кубической функции

Парабола. График квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) представляет собой параболу. Рассмотрим канонический случай: $y=x^2$. Область определения – любое действительное число. Функция $y=x^2$ является чётной. Если функция является чётной, то ее график симметричен относительно оси Оу.

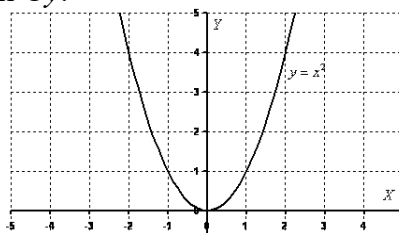


Рисунок 1. График функции $y=x^2$

Кубическая парабола

Кубическая парабола задается функцией $y=x^3$. Область определения, область значений – любое действительное число. Функция является нечётной. График строим по точкам:

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8

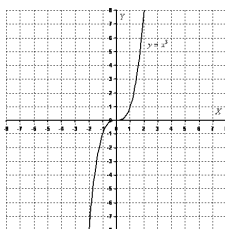


Рисунок 2. График функции $y=x^3$

График функции $y = \sqrt{x}$.

Область определения: $D(y): [0; +\infty)$. Область значений: $E(y): [0; +\infty)$. То есть, график функции полностью находится в первой координатной четверти. При построении подбираем такие значения «икс», чтобы корень извлекался нацело:

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

Строим график:

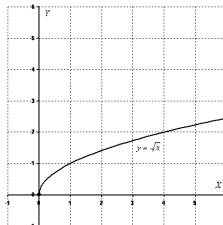


Рисунок 3. График функции $y = \sqrt{x}$

Гипербола

Общий вид $y = \frac{1}{x}$. Область определения: $D(y): (-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Область значений: $E(y): (-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Функция является нечётной, гипербола симметрична относительно начала координат.

Выполним чертёж:

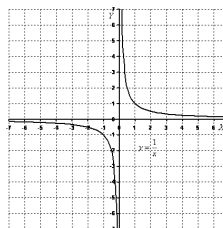


Рисунок 4. График функции $y = \frac{1}{x}$

График функции вида $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) представляют собой две ветви гиперболы.

Если $a > 0$, то гипербола расположена в первой и третьей координатных четвертях. Если $a < 0$, то гипербола расположена во второй и четвертой координатных четвертях.

Четные и нечетные функции

Рассмотрим функции области определения которых симметричны относительно начала координат, т.е. для любого x из области определения функции число $(-x)$ также принадлежит области определения. Среди таких функций выделяют четные и нечетные. Функция f называется четной, если для любого x из области определения $f(-x) = f(x)$. Функция f называется нечетной, если для любого x из области определения $f(-x) = -f(x)$.

Схема исследования функций:

1. Найти область определения и область значений данной функции.
2. Выяснить, обладает ли функция особенностями, облегчающими исследование, т.е. является ли функция четной (нечетной), периодической.
3. Вычислить координаты графика функции с осями координат.
4. Выяснить, на каких промежутках функция убывает, а на каких возрастает.

5. Найти точки экстремума, вид экстремума (минимум или максимум) и вычислить значения функции в этих точках.
6. Исследовать поведение функции в окрестности характерных точек, не входящих в область определения (например, точка $x=0$ для функции $f(x)=1/x$), и при больших (по модулю) значениях, аргумента.

Необходимо заметить, что этот план имеет примерный характер.

Ход работы:

Пример 1.

Построить график функции $y=2x+1$.

Решение:

найдем две точки. В качестве одной из точек выгодно выбрать нуль. Если $x=0$, то $y=2 \cdot 0 + 1 = 1$.

Берем еще какую-нибудь точку, например, 1. Если $x=1$, то $y=2 \cdot 1 + 1 = 3$.

При оформлении заданий координаты точек обычно сводятся в таблицу:

x	0	1
y	1	3

Две точки найдены, выполним чертеж:

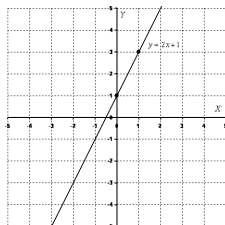


Рисунок 1. График функции $y=2x+1$

Пример 2.

Построить график функции $y = -x^2 + 2x$.

Решение:

сначала находим вершину параболы: $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $x_0 = -\frac{2}{-2} = 1$. Рассчитываем

соответствующее значение «игрек»: $y = -1^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$. Таким образом, вершина находится в точке (1; 1).

Теперь находим другие точки, при этом пользуемся симметричностью параболы.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-8	-3	0	1	0	-3	-8

Выполним чертеж:

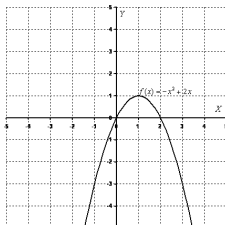


Рисунок 2. График функции $y=-x^2+2x$

Для квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) справедливо следующее: Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх. Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

Пример 3.

Построить правую ветвь гиперболы $y = \frac{6}{x}$.

Решение:

значения x выгодно подбираем так, чтобы делилось нацело:

x	1	2	3	6
y	6	3	2	1

Выполним чертеж:

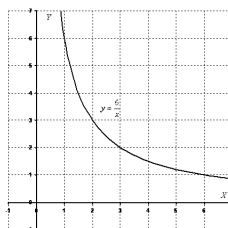


Рисунок 3. График функции $y = \frac{6}{x}$

Пример 4.

Определите какая из функций является четной (нечетной): $y=x^4$, $y=x^3$.

Решение:

функция $y=x^4$ четная, т.к. $x^4=(-x)^4$, т.е. $y(-x)=y(x)$, а функция $y=x^3$ является нечетной, т.к. $x^3=(-x)^3=-x^3$, т.е. $y(-x)=-y(x)$.

Самостоятельная работа:

Вариант 1.

Теоретическая часть:

1. Что такое функция?
2. Какая функция называется четной?
3. Приведите примеры видов функций.
4. Что означает монотонность функции?
5. Какая функция называется ограниченной сверху?

Практическая часть:

1. Установите является ли функция четной, нечетной, или никакой:

- а) $y = 2x + 5$;
- б) $y = x^3 - 3$;
- в) $y = \sqrt{3x - 7}$;
- г) $y = 2|x| + 3$.

2. Найдите обратную функцию и постройте графики функций на одной координатной плоскости:

- а) $y = 3x - 1$;
- б) $y = \sqrt{2x}$;
- в) $y = \frac{2}{x+1}$.

3. Постройте график функции и исследуйте функцию по плану:

- а) $y = |2x - 1|$;
- б) $y = -x^2 + 6x - 8$;
- в) $y = \sqrt{4 - x}$.

4. Постройте график кусочной функции, определите, есть ли точка разрыва у данной функции:

$$y = \begin{cases} -x^2, & x \geq 1; \\ 3x, & x < 1. \end{cases}$$

Вариант 2.

Теоретическая часть:

1. Что такое график функции?
2. Какая функция называется нечетной?
3. Дайте определение области определения функции.
4. Какая функция называется убывающей?
5. Какая функция называется ограниченной снизу?

Практическая часть:

1. Установите является ли функция четной, нечетной, или никакой:
 - а) $y = 3x$;
 - б) $y = x^2 - 3$;
 - в) $y = \sqrt{3 - x}$;
 - г) $y = |x| - 2$.
2. Найдите обратную функцию и постройте графики функций на одной координатной плоскости:
 - а) $y = 4 - 2x$;
 - б) $y = \sqrt{x + 2}$;
 - в) $y = \frac{1}{x-1}$.
3. Постройте график функции и исследуйте функцию по плану:
 - а) $y = |x| + 3$;
 - б) $y = x^2 - 2x - 8$;
 - в) $y = \sqrt{2x + 1}$.
4. Постройте график кусочной функции, определите, есть ли точка разрыва у данной функции:

$$y = \begin{cases} x^2, & x \geq -1; \\ -x, & x < -1. \end{cases}$$

Вариант 3.

Теоретическая часть:

1. Какая функция называется возрастающей?
2. График четной функции симметричен - ...?
3. Что такое множество значений функции?
4. Как называются оси координат?
5. Какая функция называется ограниченной?

Практическая часть:

1. Установите является ли функция четной, нечетной, или никакой:
 - а) $y = -2x$;
 - б) $y = 2x^4 - 5x^2$;
 - в) $y = \sqrt{x - 1}$;

- г) $y = 4|x| - 2$.
2. Найдите обратную функцию и постройте графики функций на одной координатной плоскости:
- а) $y = 2x + 3$;
 б) $y = \sqrt{3x}$;
 в) $y = \frac{2}{1-x}$.
3. Постройте график функции и исследуйте функцию по плану:
- а) $y = |3 - 2x|$;
 б) $y = x^2 - 5x - 6$;
 в) $y = \sqrt{x + 3}$.
4. Постройте график кусочной функции, определите, есть ли точка разрыва у данной функции:
- $$y = \begin{cases} -x^2, & x \leq 4; \\ \sqrt{x}, & x > 4. \end{cases}$$

Вариант 4.

Теоретическая часть:

1. Как называется зависимость $y = f(x)$?
2. График нечетной функции симметричен - ...?
3. Что такое область определения функции?
4. Какими способами может быть задана функция?
5. Какая функция называется обратной?

Практическая часть:

1. Установите является ли функция четной, нечетной, или никакой:

а) $y = x - 3$;
 б) $y = \frac{1}{x}$;
 в) $y = \sqrt{2 + x}$;
 г) $y = -|x| + 5$.
2. Найдите обратную функцию и постройте графики функций на одной координатной плоскости:

а) $y = 4x - 3$;
 б) $y = \sqrt{2 - x}$;
 в) $y = \frac{4}{x-1}$.
3. Постройте график функции и исследуйте функцию по плану:

а) $y = -|x| - 2$;
 б) $y = -x^2 - 2x + 3$;
 в) $y = \sqrt{2 - x}$.
4. Постройте график кусочной функции, определите, есть ли точка разрыва у данной функции:

$$y = \begin{cases} x^2, & x > -2; \\ x + 2, & x \leq -2. \end{cases}$$

ПР №6: Производная и ее применение (решение задач). (2 часа)

Задание:

1. Вычислить производные.
2. Решить задачи с помощью производной.

Теория к работе:

Дифференциальное исчисление (производная функции)

Основные понятия. Одним из основных понятий математического анализа является понятие о производной. Производной функции $y=f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю. Производная обозначается символами: y' , y'_x , $f'(x)$. Таким образом,

$$y' = y'_x = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (*)$$

Процесс нахождения производной называется дифференцированием. Продифференцировать данную функцию — значит найти ее производную. Из определения производной непосредственно вытекает общий метод ее нахождения. Числовое значение производной данной функции $y = f(x)$ при данном числовом значении аргумента $x=a$ называется частным значением производной. Это записывается так:

$$y' = y'_x = f'(x) = f'(a), \text{ т.е. } y'_{x=a} = f'(a).$$

Рассмотрим геометрическое и механическое значение производной. Производная $y' = f'(x)$ при данном значении $x=a$ равна угловому коэффициенту k касательной, проведенной к кривой через данную на ней точку M , абсцисса которой и есть данное значение $x=a$. Это можно записать так: $k = f'(a)$. Напомним что угловой коэффициент $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол, составленный касательной и положительным направлением оси Ox . Для каждой точки касания угол наклона α имеет свое единственное значение.

Если тело движется по закону $S=f(t)$, где S — путь в метрах, а t — время в секундах, то при изменении времени t на величину Δt влечет за собой изменение величины S на величину ΔS , то отношение ΔS к Δt ($\Delta S / \Delta t$) есть средняя скорость изменения пути по времени t , а именно:

$$V_{ср} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad (1^*)$$

Предел средней скорости при $\Delta t \rightarrow 0$ — мгновенная скорость (или скорость

в данный момент времени): $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} V_{ср} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = V_{мгн} \quad (2^*)$

Механический смысл производной: мгновенная скорость неравномерного движения есть производная от функции, выражающей зависимость пройденного пути S от времени t . Если закон прямолинейного движения задан уравнением $S=f(t)$, где S — путь в метрах, а t — время в секундах, то скорость

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t) \quad (3^*)$$

(при условии, что предел существует) — скорость в данный момент времени или мгновенная скорость. Итак $v = s'_t = f'(t)$, т.е. скорость точки в случае прямолинейного движения есть производная от пути по времени.

Формулы дифференцирования основных функций	
Производная постоянной величины равна нулю:	$c' = 0$, где $c = \text{const}$. (1)
Производная степенной функции:	$(x^n)' = nx^{n-1}$, n — действительное число (2)
Производная от аргумента:	$x' = 1$. (3)
Производная функции вида: $y = \sqrt{x}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (4)
Производная функции $y = 1/x$:	$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$ (5)
Производные тригонометрических функций:	
$y = \sin x$	$(\sin x)' = \cos x$ (6)
$y = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$ (7)

$Y = \operatorname{tg} x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \quad (8)$
$Y = \operatorname{ctg} x$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x \quad (9)$
Формула перехода от десятичных логарифмов к натуральным:	$\ln N = \frac{\lg N}{0.4343} = 2.303 \lg N \quad (10) \quad \text{где } 0.4343 = \lg e.$
Формула перехода от натуральных логарифмов к десятичным:	
	Число $\frac{1}{\lg e} = \frac{1}{0.4343} = 2.303$ называется модулем перехода от десятичных логарифмов к натуральным. (11)
Производная логарифмической функции $y = \ln x$:	$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (12)$
Производная показательной функции $y = a^x$:	$(a^x)' = a^x \ln a. \quad (13)$
Частный случай $y = e^x$:	$(e^x)' = e^x. \quad (14)$
Производные обратных тригонометрических функций:	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (15)$
$Y = \arccos x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (16)$
$Y = \operatorname{arctg} x$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (17)$
$Y = \operatorname{arcctg} x$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad (18)$

Основные правила дифференцирования

Производная алгебраической суммы конечного числа функций:

$$(u+v-w)' = u' + v' - w', \quad (1)$$

где u , v и w — различные функции от x , имеющие производные по x .

Производная произведений двух функций: $(uv)' = u'v + v'u$, (2)

где u и v — различные функции от x , имеющие производные по x .

Производная произведения постоянной на функцию: $(cu)' = cu'$, где $c = \text{const.}$ (3)

$$\text{Производная частного (дроби): } \frac{u}{v} = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (4) \quad \frac{u}{c} = \frac{u'}{c}, \text{ где } c = \text{const.} \quad (5)$$

где u и v — различные функции от x , имеющие производные по x , считая, что $v^2 \neq 0$ при том значении аргумента x , при котором находится производная:

Ход работы:

Пример 1. Дана функция $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 1$. Найти $f(0)$, $f(2)$, $f(-2)$

Решение.

$$f(0) = 3 \cdot (0)^3 - 2 \cdot (0)^2 + 0 + 1 = 1$$

$$f(2) = 3 \cdot (2)^3 - 2 \cdot (2)^2 + 2 + 1 = 19$$

$$f(-2) = 3 \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 - 2 + 1 = -33$$

Ответ: $f(0)=1$, $f(2)=19$, $f(-2)=-33$

Пример 2. Найти производную функции $y = (x + 5)(x^2 - 1)$

Решение: используя формулу $(uv)' = u'v + v'u$, (2)

– производная произведения двух функций, получим:

$$y' = (x + 5)'(x^2 - 1) + (x + 5)(x^2 - 1)',$$

$$y' = (1 + 0)(x^2 - 1) + (x + 5)(2x - 0),$$

$$y' = x^2 - 1 + 2x(x + 5), \quad \text{Ответ: } y' = 3x^2 + 10x - 1.$$

$$y' = x^2 - 1 + 2x(x + 5),$$

$$y' = 3x^2 + 10x - 1.$$

Иначе, перемножая двучлены, функцию $y = (x + 5)(x^2 - 1)$ можно

записать так: $y = x^3 + 5x^2 - x - 5$; тогда $y' = (x^3)' + (5x^2)' - (x)' - 5'$, $y' = 3x^2 + 10x - 1$

Ответ: $y' = 3x^2 + 10x - 1$

Пример 3. Найти производную функции $y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}$.

Решение. Перепишем функцию в виде

$y = 6x^{\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{1}{4}}$. По формулам (4) – производная алгебраической суммы и (2) – производная степенной функции –

продифференцируем функцию: $y = 6x^{\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{1}{4}}$.:

$$y' = 6x^{\frac{1}{3}-1} - 4x^{\frac{1}{4}-1}, \quad y' = 6 \cdot \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} - 4 \cdot \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1},$$

$$y' = 2x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{3}{4}}, \quad y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}.$$

$$\text{Ответ. } y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}.$$

Задача 4. Точка движется прямолинейно по закону $s = 2t^3 + t^2 + 1$, где s — путь в метрах, t — время в секундах. Найти величину скорости в момент $t = 3$ с и величину ускорения в момент $t = 4$ с.

Решение. Скорость равна

$$v = s'_t = (2t^3 + t^2 + 1)' = 6t^2 + 2t$$

$$v_{t=3} = 6 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 = 60 \text{ (м/с)}$$

Ускорение равно

$$a = v'_t = (6t^2 + 2t)' = 12t + 2$$

$$a_{t=4} = 12 \cdot 4 + 2 = 50 \text{ (м/с}^2\text{)}$$

Ответ: $v_{t=3} = 60 \text{ м/с}$, $a_{t=4} = 50 \text{ м/с}^2$.

Задача 5. Найти уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 4x + 2$ в точке, абсцисса которой равна 3.

Решение. Найдем ординату точки касания:

$$y_{x=3} = 3^2 - 4 \cdot 3 + 2 = -1$$

Итак, точка касания $M(3; -1)$ найдена. Для нахождения уравнения касательной воспользуемся уравнением пучка прямых $y - y_1 = k(x - x_1)$.

В нашем примере $x_1 = 3$, $y_1 = -1$, значит $y + 1 = k(x - 3)$.

Угловой коэффициент

$$k = y'_{x=3} = (x^2 - 4x + 2)'_{x=3} = (2x - 4)_{x=3} = 2.$$

Поэтому искомое уравнение касательной примет вид:

$$y + 1 = 2(x - 3) \text{ или } y = 2x - 7 \quad \text{в общем виде} \quad 2x - y - 7 = 0$$

Самостоятельная работа:

Вариант 1.

1. Найти производные функций:

1) $y = \frac{2}{5}x^5 - 2x^3 + x^2 - 6x - 12;$

2) $y = 5e^x - 4x^3 + 2 \log_3 x;$

3) $y = 4\sqrt{x} - x^{\frac{1}{5}} + \sqrt[5]{x^3};$

4) $y = \frac{3}{x^2} - \frac{6}{\sqrt[3]{x^2}};$

5) $y = 3 \cdot 2^x + 7 \cos x - 2 \ln x;$

6) $y = e^x \cos x;$

7) $y = 4^x \cdot \sqrt{x};$

8) $y = \frac{3x^2 - 5x}{x+3}.$

2. Найти производную функции в точке $x = 1$:

$$y = -x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 5x + 15.$$

3. Написать уравнение касательной к графику функции

$$f(x) = x^3 + x^2 - x - 2 \text{ в точке } x_0 = 1.$$

4. Найти интервалы монотонности следующих функций:

1) $y = x^2 - 6x + 5;$

2) $y = x^3 - 3x^2 + 1.$

5. Найти точки экстремума следующих функций:

1) $y = 2x^2 - 4x;$

2) $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x;$

3) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8.$

6. Путь, пройденный материальной точкой, задается следующей функцией времени: $s(t) = 4t^2 - 5t + 3$. Найти скорость движения точки в конце 6-й секунды. Какой путь пройдет тело за 6 секунд?

Вариант 2.

1. Найти производные функций:

1) $y = \frac{1}{3}x^6 - 4x^5 + x^3 - 7x - 1;$

2) $y = 2e^x - 3x^6 - 3 \log_6 x;$

3) $y = 6\sqrt{x} - 3x^{\frac{1}{3}} + 2\sqrt[4]{x^3};$

4) $y = -\frac{2}{x^3} + \frac{5}{\sqrt[5]{x^2}};$

5) $y = 4 \cdot 3^x + 8 \sin x - 6 \ln x;$

6) $y = e^x \sin x;$

7) $y = 2^x \cdot \ln x;$

8) $y = \frac{x^3 - x}{2x+1}.$

2. Найти производную функции в точке $x = -1$:

$$y = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 6.$$

3. Написать уравнение касательной к графику функции

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 6 \text{ в точке } x_0 = 2.$$

4. Найти интервалы монотонности следующих функций:

1) $y = 2x^2 - 4x + 5$;

2) $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2$.

5. Найти точки экстремума следующих функций:

1) $y = x^2 + 3x$;

2) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$;

3) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$.

6. Высота тела, брошенного вертикально вверх, меняется в зависимости от времени по закону $H = 150t - 4t^2$. Найти скорость тела в конце 8-ой секунды. Сколько секунд тело будет лететь вверх и какой наибольшей высоты достигнет?

Вариант 3.

1. Найти производные функций:

1) $y = \frac{3}{7}x^7 - 2x^5 + x^3 - 6x - 2$;

2) $y = 2e^x - 6x^3 + 5 \log_2 x$;

3) $y = 3\sqrt[3]{x} - 4x^{\frac{1}{6}} + 12\sqrt[6]{x^7}$;

4) $y = -\frac{2}{x^4} + \frac{6}{\sqrt[4]{x^3}}$;

5) $y = 3 \cdot 5^x - 3\cos x + \frac{3}{5}\ln x$;

6) $y = -e^x \cdot \cos x$;

7) $y = 3^x \cdot x^2$;

8) $y = \frac{x^4 - x}{2x - 1}$.

2. Найти производную функции в точке $x = 1$:

$$y = 2x^6 - \frac{1}{2}x^4 + x^3 - 6x + 4.$$

3. Написать уравнение касательной к графику функции

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x - 20 \text{ в точке } x_0 = -1.$$

4. Найти интервалы монотонности следующих функций:

1) $y = -x^2 + 4x + 1$;

2) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 15$.

5. Найти точки экстремума следующих функций:

1) $y = -x^2 + 2x$;

2) $y = -\frac{1}{4}x^4 + 8x$;

3) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$.

6. Для машины, движущейся со скоростью 40 м/с, тормозной путь определяется формулой $s(t) = 40t - 25t^2$, где $s(t)$ – путь в метрах, t – время торможения в секундах. В течение какого времени осуществляется торможение до полной остановки машины? Какое расстояние пройдет машина с начала торможения до полной ее остановки?

Вариант 4.

1. Найти производные функций:

1) $y = \frac{7}{8}x^8 - 2x^6 + 3x^2 - 4x - 10$;

2) $y = 7e^x - 5x^3 - 2 \log_4 x$;

- 3) $y = 6\sqrt{x} - 4x^{\frac{1}{6}} + 5\sqrt[5]{x^2};$
- 4) $y = \frac{5}{x^3} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$
- 5) $y = 2 \cdot 5^x + 3\sin x - \frac{7}{9}\ln x$
- 6) $y = 3^x \cdot \ln x;$
- 7) $y = e^x \cdot x^2;$
- 8) $y = \frac{x^2 - 2x}{x + 4}.$

2. Найти производную функции в точке $x = -1$:

$$y = 2x^4 + 4x^3 - x^2 - 3x + 12.$$

3. Написать уравнение касательной к графику функции

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 7x - 12 \text{ в точке } x_0 = -1.$$

4. Найти интервалы монотонности следующих функций:

1) $y = 3x^2 + 12x + 16;$

2) $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x - 15.$

5. Найти точки экстремума следующих функций:

1) $y = -x^2 + 2x + 3;$

2) $y = -\frac{1}{3}x^3 + 16x;$

3) $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x - 2.$

6. Тело движется прямолинейно по закону $s(t) = 2t^3 + t^2 - 4$. В какой момент времени скорость тела окажется равной нулю? Найти значение скорости в момент времени $t=5$.

ПР №7: Интеграл и его применение (решение задач). (2 часа)

Задание:

1. Вычислить неопределенный и определенный интегралы.
2. Найти площадь криволинейной трапеции.

Теория к работе:

Определение: Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

$$f(x)dx = F(x) + C;$$

Записывают:

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $\int f(x)dx = (F(x) + C) = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx;$
3. $dF(x) = F(x) + C;$

$$4. (u + v - w)dx = udx + vdx - wdx, \text{ где } u, v, w - \text{некоторые функции от } x.$$

$$\int_C f(x)dx = C \int f(x)dx,$$

Пример: $(x^2 - 2\sin x + 1)dx = x^2 dx - 2 \sin x dx + dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C;$

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др.

Таблица основных интегралов.

Интеграл		Значение
1	$a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
2	$x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
3	$\frac{dx}{x}$	$\ln x + C$
4	$e^x dx$	$e^x + C$
5	$\cos x dx$	$\sin x + C$
6	$\sin x dx$	$-\cos x + C$
7	$\frac{1}{\cos^2 x} dx$	$\operatorname{tg} x + C$
8	$\frac{1}{\sin^2 x} dx$	$-\operatorname{ctg} x + C$

Свойства определенного интеграла.

$$\int_a^b Af(x)dx = A \int_a^b f(x)dx,$$

$$1) \int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$$

$$2) \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$3) \int_a^a f(x)dx = 0$$

4) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница)

Если функция F(x) – какая-либо первообразная от непрерывной функции f(x), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Криволинейная трапеция

Фигура, ограниченная снизу отрезком $[a; b]$ оси Ox , сверху графиком непрерывной функции $y = f(x)$ такой, что $f(x) \geq 0$ при $x \in [a; b]$ и $f(x) > 0$ при $x \in (a; b)$, а с боков ограниченная отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, называется *криволинейной трапецией*.

Отрезок $[a; b]$ называют *основанием* этой криволинейной трапеции.

Площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле:

$$S_{\text{кр.тр}} = \int_a^b f(x) dx$$

Таким образом, геометрический смысл определенного интеграла заключается в вычислении площади криволинейной трапеции.

Алгоритм нахождения площади криволинейной трапеции:

1. Построить графики функции;
2. Определить пределы интегрирования a и b ;
3. Выбрать и записать соответствующую формулу площади криволинейной трапеции;
4. Вычислить площадь криволинейной трапеции.

Ход работы:

Пример 1: Вычислить неопределенный интеграл $\int x^5 dx$

Решение. Для решения данного интеграла не нужно использовать свойства неопределенных интегралов, достаточно формулы интеграла степенной функции:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

В нашем случае $n = 5$, тогда искомый интеграл равен:

$$\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C$$

Ответ. $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$

Пример 2: Вычислить определенный интеграл $\int_0^{10} (3t^2 + 2t + 1) dt$.

Решение:
по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_2^{10} (3t^2 + 2t + 1)dt = \frac{3t^3}{3} + \frac{2t^2}{2} + t \Big|_2^{10} = (t^3 + t^2 + t) \Big|_2^{10} =$$

$$= (10^3 + 10^2 + 10) - (2^3 + 2^2 + 2) = 1110 - 14 = 1096.$$

ПРИМЕР : Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ох, прямыми $x = -1$, $x = 2$ и параболой $y = 9 - x^2$.

Решение: Построим график функции $y = 9 - x^2$ и изобразим данную криволинейную трапецию:

$y = 9 - x^2$ -парабола, ветви вниз,

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{(-2)} = 0$$

координаты вершины:

$$y_0 = 9 - 0^2 = 9$$

(0 ; 9) - вершина

Точки пересечения с осью Ох:

$$9 - x^2 = 0$$

$$-x^2 = -9$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 3$$

Проведём прямые $x = -1$ и $x = 2$

$$f(x) = 9 - x^2 \quad a = -1 \quad b = 2$$

Формула для вычисления площади криволинейной трапеции:

$$S_{\text{кр.тр}} = \int_a^b f(x)dx$$

$$S_{\text{кр.тр}} = \int_{-1}^2 (9 - x^2)dx = \left(9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = \left(9 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) -$$

$$- \left(9 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right) = 24.$$

Ответ: $S_{\text{кр.тр}} = 24$ (кв.ед)

Самостоятельная работа:

Вариант 1.

1. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int 4 dx; \int 6x^2 dx; \int (\cos x + 4e^x) dx; \int (2x + x^4 - 6x^5) dx;$$

$$\int \frac{2dx}{x}; \int 2^x dx; \int (4x - 2e^x + \sin x) dx; \int \sqrt{x} dx; \int \frac{2dx}{x^3}; \int \frac{x^3 + 3x^2 - 4x}{x} dx.$$

2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^2 2x dx; \int_{-1}^1 (x + 2) dx; \int_1^2 \frac{2dx}{x}; \int_0^\pi (\sin x + \cos x) dx; \int_0^4 3\sqrt{x} dx.$$

3. Найдите площади фигур, ограниченные линиями:

а) $y = -3x$, $y = 0$ и $x = 2$;

б) $y = -x^2 + x + 6$ и $y = 0$;

в) $y = x^2 - 8x + 18$ и $y = -2x + 18$.

Вариант 2.

1. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int 6 dx; \int 4x^3 dx; \int (\sin x + 2e^x) dx; \int (x^3 - 3x^2 + 2) dx; \int \frac{3dx}{x};$$

$$\int 3x dx; \int (4x^3 + 2e^x - \cos x) dx; \int \sqrt[3]{x} dx; \int \frac{3dx}{x^4}; \int \frac{x^4 - 2x^3 + 3x}{x} dx.$$

2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_1^2 3x^2 dx; \int_0^2 (3x^2 + 4x) dx; \int_1^3 \frac{3dx}{x}; \int_0^{\pi/2} (\cos x + \sin x) dx; \int_0^1 \sqrt[3]{x^2} dx.$$

3. Найдите площади фигур, ограниченные линиями:

а) $x - y + 3 = 0$, $x + y - 1 = 0$ и $y = 0$;

б) $y = -x^2 + 2x + 3$ и $y = 0$;

в) $y = -x^2 + 10x - 16$ и $y = x + 2$.

Вариант 3.

1. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int 3 dx; \int 5x^2 dx; \int (\cos x - 2e^x) dx; \int (x - 3x^2 + 7x^3) dx; \int \frac{dx}{3x};$$

$$\int 4x dx; \int (3x + e^x - 2 \sin x) dx; \int 2\sqrt{x} dx; \int \frac{dx}{x^2}; \int \frac{2x^3 - x^2 - 6x}{x} dx.$$

2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^3 3x dx; \int_{-1}^2 (x - 3) dx; \int_1^2 \frac{4dx}{x}; \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x) dx; \int_1^2 2\sqrt{x} dx.$$

3. Найдите площади фигур, ограниченные линиями:

а) $2x - 3y + 6 = 0$, $y = 0$ и $x = 3$;

б) $y = x^2 - 4$ и $y = 0$.

в) $y = x^2 - 2x + 3$ и $y = 3x - 1$.

Вариант 4.

1. Вычислить неопределенный интеграл:

$$\int 7 dx; \int 2x^4 dx; \int (\sin x - 3e^x) dx; \int (2x^3 + 4x^2 - 3) dx; \int \frac{dx}{4x};$$

$$\int 5x dx; \int (x^3 + 3e^x + 2 \cos x) dx; \int \sqrt[4]{x} dx; \int \frac{dx}{2x^4}; \int \frac{4x^4 - 2x^3 + x}{x} dx.$$

2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_1^3 6x^2 dx; \int_0^1 (6x^2 - 2x) dx; \int_1^3 \frac{5dx}{x}; \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos x - \sin x) dx; \int_0^2 \sqrt[3]{8x^2} dx.$$

3. Найдите площади фигур, ограниченные линиями:

а) $y = 2x$, $y = 0$ и $x = -3$;

б) $y = -x^2 - 1$, $y = 0$, $x = -2$ и $x = 1$;

в) $y = x^2 - 6x + 9$ и $3x - y - 9 = 0$.

Задание:

Решение задач на вероятность.

Теория к работе:

Предмет теории вероятностей - изучение вероятностных закономерностей, возникающих при рассмотрении массовых однотипных случайных событий.

Событие - это любое явление, в отношении которого имеет смысл говорить, наступило оно или не наступило, в результате определенного комплекса условий или случайного эксперимента. Обозначаются события заглавными латинскими буквами $A, B, \dots$.

Вероятностью $P(A)$ события A называется отношение числа m – элементарных исходов испытания, благоприятствующих наступлению события A , к числу n – всех возможных элементарных исходов испытания.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Вероятность любого события заключена между нулем и единицей $0 \leq P(A) \leq 1$

Можно выделить следующие виды случайных событий:

Событие называется **достоверным**, если оно обязательно происходит при каждом осуществлении определенной совокупности условий. Вероятность достоверного события B равна единице: $P(B) = 1$.

Событие называется **невозможным**, если оно заведомо не произойдет ни при одном осуществлении данной совокупности условий. Вероятность невозможного события C равна нулю: $P(C) = 0$.

Событие называется **случайным**, если оно может произойти, а может и не произойти при осуществлении данной совокупности условий.

События называются **несовместными**, если их одновременное появление при осуществлении комплекса условий невозможно, т.е. появление события A в данном испытании исключает появление события B в этом же испытании.

События называются **единственновозможными**, если появление в результате испытания одного и только одного из них является достоверным событием.

События называются **равновозможными**, если есть основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможным, чем другие.

Если событие A - какое-либо событие, то событие, состоящее в том, что событие A не наступило, называется **противоположным** событию A и обозначается как $\bar{A}$.

События, происходящие при реализации определенного комплекса условий или в результате случайного эксперимента, называются **элементарными исходами**.

Считается, что при проведении случайного эксперимента реализуется только один из возможных элементарных исходов.

Теорема 1: Вероятность суммы двух **несовместных** событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Теорема 2: Вероятность суммы двух **совместных** событий А и В равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного появления, т.е. $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Два события А и В называются **независимыми**, если появление одного из них не изменяет вероятности появления другого.

События А и В называются **зависимыми**, если появление одного из них изменяет вероятность появления другого.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называется вероятность события В, вычисленная в предположении, что событие А уже произошло. Обозначив условную вероятность $P(A/B)$, получим формулу

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad (P(B) > 0).$$

Теорема 3: Вероятность произведения двух зависимых событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, в предположении, что первое уже произошло, т.е. $P(AB) = P(A)P_A(B)$

Теорема 4: Вероятность произведения двух независимых событий А и В равна произведению их вероятностей $P(AB)=P(A)P(B)$.

Случайная величина X – это числовая функция, определенная на пространстве элементарных событий.

Случайные величины, имеющие счетные множества возможных значений, называются **дискретными**.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Дискретная случайная величина может быть задана таблично (ряд распределения), аналитически и графически.

X_1	X_2	...	X_i	...	X_n
P_1	P_2	...	P_i	...	P_n

,где $\sum_{i=1}^n P_i = 1$.

Многоугольник или полигон распределения вероятностей – это ломаная, концы звеньев которой есть точки с координатами (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$.

Ход работы:

Пример 1. В урне 3 красных, 5 синих и 2 белых шара. Наудачу вынимают один шар. Какова вероятность того, что шар окажется цветным?

Решение: Пусть событие А- вынут синий шар, событие В- красный шар. Эти события несовместны. Интересующее событие- вынут цветной шар, означает, что вынут красный или синий, т.е. событие А+В. используем теорему о сумме несовместных событий $P(A+B)=P(A)+P(B)$. вычислим вероятности событий А и В:

$P(A)=5/10=1/2$; $P(B)=3/10$. Тогда искомая вероятность равна $P(A+B) = 1/2+3/10=8/10=0,8$.

Пример 2. На 100 лотерейных билетов приходится 5 выигрышных. Какова вероятность выигрыша хотя бы по одному билету, если приобретено: а) 2 билета; б) 4 билета?

Решение. Пусть событие $A_i = \{\text{выигрыш по } i\text{-му билету}\}$, $i=1, 2, 3, 4$. События A_i - совместные, но зависимые.

а) По формулам (8) и (4) вероятность выигрыша хотя бы по одному из двух билетов

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) P(A_2 / A_1) = \\ = \frac{5}{100} + \frac{5}{100} - \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} = 0,098.$$

Пример 3. По мишени стреляют три стрелка. Вероятности попадания соответственно равны 0,7; 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что попадут все три.

Решение:

Пусть событие А- попал 1-й, В- 2-й и С-3-й. Эти события независимые, тогда применяя соответствующую теорему получим, что вероятность совместного появления всех трех событий равна: $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)= 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,9=0,504$.

Пример 4. Определить вероятность того, что выбранное наудачу изделие является первосортным, если известно, что 4 % всей продукции является браком, а 75 % небракованных изделий удовлетворяют требованиям первого сорта.

Решение. Пусть событие $A = \{\text{выбранное изделие небракованное}\}$, событие $B = \{\text{небракованное изделие удовлетворяет требованиям первого сорта}\}$, событие

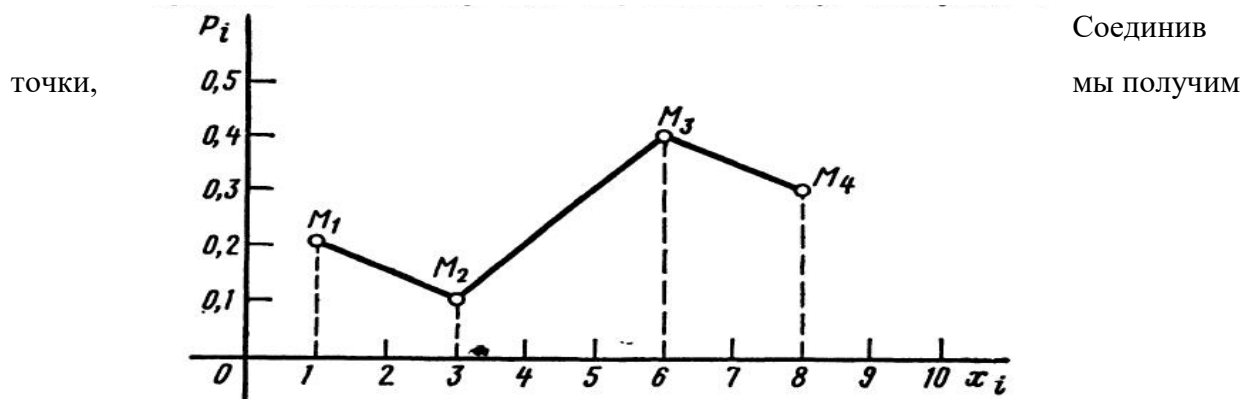
$C = \{\text{выбранное наудачу изделие первосортное}\}$. Событие C представляет собой произведение событий A и B : $C = AB$. По условию $P(A) = 1 - 0,04 = 0,96$, $P(B/A) = 0,75$. Тогда по теореме умножения вероятностей (см. 2.1) искомая вероятность $P(AB) = P(A) P(B/A) = 0,96 \cdot 0,75 = 0,72$.

Пример 5. Дискретная случайная величина X заданна законом распределения:

X	1	3	6	8
p	0.2	0.1	0.4	0.3

Построить многоугольник распределения заданной величины.

Решение: построим прямоугольную систему координат, причем по оси абсцисс будем откладывать возможные значения x_i , а по оси ординат – соответствующие им вероятности p_i , т.е. строим точки $M_1(1; 0,2)$, $M_2(3; 0,1)$, $M_3(6; 0,4)$, $M_4(8; 0,3)$



многоугольник распределения.

Пример 6. Дискретная случайная величина распределена по закону:

X	-1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Найти $D(X)$.

Решение. Сначала находим $M(X)$.

$$M(X) = -1 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,4 = 0,9,$$

а затем $M(X^2)$.

$$M(X^2) = (-1)^2 \cdot 0,2 + 0^2 \cdot 0,1 + 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,4 = 2,1.$$

По формуле $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$ имеем

$$D(X) = 2,1 - (0,9)^2 = 2,1 - 0,81 = 1,29.$$

Самостоятельная работа:

1 вариант.

1. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.
2. В цехе работают 10 мужчин и 5 женщин. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.
3. В урне 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно наугад вынуть 3 шара, чтобы 2 шара оказались белыми, а один черным?
4. Отдел технического контроля обнаружил 15 бракованных ламп в партии из случайно отобранных 200 ламп. Найти относительную частоту появления бракованных ламп.
5. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,8. найти число годных приборов, если всего было проверено 250 приборов.
6. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. найти вероятность того, что студент сдаст только второй экзамен.
7. При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что двигатель начнет работать при третьем включении зажигания.
8. У сборщика имеется 5 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял последовательно 2 валика. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков – конусный, а второй эллиптический.
9. Слово *арифметика* составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Затем карточки смешивают и вынимают без возврата по одной. Найти вероятность случая, когда буквы вынимаются в порядке заданного слова.
10. Имеется три ящика, содержащих по 12 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три вынутые детали окажутся стандартными.
11. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины X , заданной законом

X	2	4	5	6
P	0,3	0,1	0,4	0,2

распределения:

12. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	3	4	5	6	7
P	p_1	0,15	p_3	0,25	0,35

Найти вероятности p_1 и p_3 , если известно, что p_3 в 4 раза больше p_1 .

2 вариант.

1. В урне имеется 20 шаров, среди которых 12 красного цвета. Из урны наудачу извлекают 5 шаров. Найти вероятность того, что извлеченные шары не красные.
2. В партии из 15 деталей имеется 3 стандартных. Наудачу отобраны 4 детали. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно 2 стандартных.
3. В группе 20 юношей и 10 девушек. Сколькими способами можно избрать трех юношей и двух девушек для участия в слете студентов?

4. По цели произведено 40 выстрелов, причем зарегистрировано 37 попаданий. Найти относительную частоту промахов.
5. При испытании партии телевизоров относительная частота бракованных телевизоров оказалась равной 0,15. найти число качественных телевизоров, если было проверено 400 телевизоров.
6. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. найти вероятность того, что студент сдаст три экзамена.
7. При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,75. Найти вероятность того, что двигатель начнет работать при втором включении зажигания.
8. В урне 10 красных шаров и 5 белых. Из урны последовательно вынимают два шара. Найти вероятность того, что первый из взятых шаров – белый, а второй – красный.
9. Слово *программист* составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Затем карточки смешивают и вынимают без возврата по одной. Найти вероятность случая, когда буквы вынимаются в порядке заданного слова.
10. В трех коробках лежат книги: в первой – 10(из них 3 словаря), во второй – 15(из них 5 словарей) и в третьей – 8(из них 5 словарей). Из каждой коробки наудачу вынимают по одной книге. Найти вероятность того, что все три книги окажутся словарями.
11. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины X , заданной законом распределения:

X	2	5	8	9
P	0,2	0,4	0,1	0,3

12. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	2	5	8	11	14
P	p_1	0,15	p_3	0,45	0,15

Найти вероятности p_1 и p_3 , если известно, что p_1 в 2 раза меньше p_3 .

3 вариант.

1. В ящике 100 деталей, из них 18 бракованных. Наудачу извлечены 4 детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей нет бракованных.
2. На складе имеется 25 кинескопов, причем 15 из них изготовлены Минским заводом. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу кинескопов окажутся 4 кинескопа Минского завода.
3. В урне 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно наугад вынуть 3 шара, чтобы один шар оказался белыми, а два черным?
4. По цели произведено 30 выстрелов, причем зарегистрировано 28 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель.
5. При проверке качества электрических лампочек оказалось, что относительная частота бракованных лампочек равна 0,2. Найти число качественных электрических лампочек, если всего было проверено 600 лампочек.
6. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. найти вероятность того, что студент сдаст только один экзамен.

7. При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что двигатель начнет работать при третьем включении зажигания.
8. В ящике находятся 5 окрашенных деталей и 7 обычных. Сборщик взял последовательно 2 детали. Найти вероятность того, что первая из взятых деталей – окрашенная, а вторая обычная.
9. Слово *статистика* составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Затем карточки смешивают и вынимают без возврата по одной. Найти вероятность случая, когда буквы вынимаются в порядке заданного слова.
10. В двух ящиках находятся детали: в первом -10(из них 3 стандартных), во втором – 15(из них 6 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.
11. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины X , заданной законом распределения:

X	1	3	5	9
P	0,2	0,4	0,1	0,3

12. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	2	6	10	14	18
P	p_1	0,15	p_3	0,45	0,15

Найти вероятности p_1 и p_3 , если известно, что p_1 в 4 раза меньше p_3 .

4 вариант.

1. Устройство состоит из 15 элементов, из которых 4 изношены. При включении устройства включаются случайным образом 3 элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.
2. В группе 28 студентов, среди которых 6 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 4 отличника.
3. В партии из 12 деталей имеется 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наугад деталей 4 - стандартные.
4. Отдел технического контроля обнаружил 25 бракованных деталей в партии из случайно отобранных 300 деталей. Найти относительную частоту появления стандартных деталей.
5. При проверке учебников относительная частота качественных учебников оказалась равной 0,85. найти число бракованных книг, если всего было проверено 400 учебников.
6. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. найти вероятность того, что студент сдаст не менее двух экзаменов.
7. При включении зажигания двигатель начнет работать с вероятностью 0,65. Найти вероятность того, что двигатель начнет работать при втором включении зажигания.
8. У сборщика имеется 10 конусных и 5 эллиптических валиков. Сборщик взял последовательно 2 валика. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков – конусный, а второй эллиптический.

9. Слово *вероятность* составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Затем карточки смешивают и вынимают без возврата по одной. Найти вероятность случая, когда буквы вынимаются в порядке заданного слова.

10. Имеется 3 урны по 12 шаров в каждой. В первой урне 10, во второй 8 и в третьей 9 шаров белого цвета. Из каждой урны наудачу вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что все три шара окажутся белыми.

11. Построить многоугольник распределения дискретной случайной величины X , заданной законом распределения:

X	1	4	7	9
P	0,1	0,6	0,2	0,1

12. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	3	6	9	12	18
P	0,25	P_2	p_3	0,25	0,15

Найти вероятности p_2 и p_3 , если известно, что p_2 в 2 раза больше p_1 .

ПР №9: Решение уравнений и неравенств. (2 часа)

Задание:

1. Решить иррациональные уравнения и неравенства.
2. Решить показательные уравнения и неравенства.
3. Решить логарифмические уравнения и неравенства.
4. Решить тригонометрические уравнения.

Теория к работе:

Решение иррациональных уравнений наиболее часто используемым при решении иррациональных уравнений способом является возведение обеих частей уравнения в квадрат.

Решение иррациональных неравенств

Сначала мы рассмотрим решение неравенства вида $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$

Чтобы его решить, нужно обе части неравенства возвести в квадрат и вовремя вспомнить об ОДЗ: подкоренное выражение меньшего из корней должно быть неотрицательным - тогда подкоренное выражение большего корня автоматически будет больше нуля. Таким

образом, неравенство вида $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Показательные уравнения и неравенства

Уравнение, содержащее переменную в показателе, называется *показательным*.

При решении показательных уравнений вида $a^{f(x)} = a^{k(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) используется следующее свойство: $(a^{f(x)} = a^{k(x)}) \rightarrow (f(x) = k(x))$.

Простейшее **показательное неравенство** имеет вид:

$$a^{f(x)} \text{ V } a^{g(x)}, \text{ где V - один из знаков: } <, >, \leq, \text{ или } \geq.$$

Чтобы решить **показательное неравенство**, нам нужно от сравнения степеней перейти к сравнению показателей.

Показательная функция $y = a^{f(x)}$ возрастает при всех действительных значениях x , если $a > 1$. Это значит, что большему значению аргумента соответствует большее значение функции. То есть из неравенства

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \text{ следует неравенство } f(x) > g(x)$$

Аналогично, так как показательная функция убывает, если $0 < a < 1$, и большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, из неравенства

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \text{ следует неравенство } f(x) < g(x)$$

То есть при решении простейших показательных неравенств, прежде чем сравнивать выражения, стоящие в показателе степени, нужно сравнить с единицей основание степеней.

Все показательные неравенства любого уровня сложности, в конечном итоге, сводятся к решению простейших показательных неравенств.

Логарифмические уравнения и неравенства

Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма или в основании логарифма, называется *логарифмическим*.

Рассмотрим простейшее логарифмическое уравнение: $\log_a x = b$.

Логарифмическая функция возрастает (или убывает) на промежутке $(0; +\infty)$ и принимает на этом промежутке все действительные значения.

Теорема о корне: пусть функция f возрастает (убывает) на промежутке I , число a – любое из значений, принимаемых f на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x) = a$ имеет единственный корень в промежутке I .

По вышесказанной теореме следует, что для любого b данное уравнение имеет, и притом только одно, решение.

Из определения логарифма числа следует, что таким числом является a^b .

Простейшее **логарифмическое неравенство** имеет вид:

$$\log_a f(x) \text{ V } \log_a g(x), \text{ где V - один из знаков неравенства: } <, >, \leq \text{ или } \geq.$$

Если основание логарифма больше единицы ($a > 1$), то при переходе от логарифмов к выражениям, стоящим под знаком логарифма, знак неравенства сохраняется, и

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

неравенство

равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Если основание логарифма больше нуля, но меньше единицы ($0 < a < 1$), то при переходе от логарифмов к выражениям, стоящим под знаком логарифма, знак неравенства меняется на противоположный, и неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$

равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Решение простейших тригонометрических уравнений

Уравнение $\cos t = a$

Очевидно, что если $|a| > 1$, то уравнение $\cos t = a$ не имеет решений, т.к. $|\cos t| \leq 1$ для любого t . Пусть $|a| \leq 1$. Надо найти все такие числа t , что $\cos t = a$. На отрезке $[0; \pi]$ существует только одно решение уравнения $\cos t = a$ – это число $\arccos a$.

Косинус – четная функция, и, значит на отрезке $[-\pi; 0]$ уравнение также имеет единственное решение – это число $-\arccos a$.

Итак, уравнение $\cos t = a$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ длиной 2π имеет два решения $t = \pm \arccos a$ (совпадающие при $a = 1$).

Вследствие периодичности функции косинус все остальные решения отличаются от найденных на $2\pi n$, ($n \in \mathbb{Z}$), т.е. формула корней уравнения $\cos t = a$ имеет вид:

$$t = \pm \arccos a + 2\pi n, (n \in \mathbb{Z}).$$

Уравнение $\sin t = a$

Очевидно, что если $|a| > 1$, то уравнение $\sin t = a$ не имеет решений, т.к. $|\sin t| \leq 1$ для любого t .

При $|a| \leq 1$ на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ уравнение $\sin t = a$ имеет одно решение $t_1 = \arcsin a$. На отрезке $[\pi/2; 3\pi/2]$ функция синус убывает и принимает все значения от -1 до 1. По теореме о корне уравнение и на этом отрезке имеет одно решение.

Это решение есть число $t_2 = \pi - \arcsin a$, т.к. $\sin t_2 = \sin(\pi - t_1) = \sin t_1 = a$.

Кроме того, поскольку $-\pi/2 \leq t_1 \leq \pi/2$,

имеем $-\pi/2 \leq -t_1 \leq \pi/2$

и $\pi - \pi/2 \leq \pi - t_1 \leq \pi + \pi/2$,

т.е. $\pi/2 \leq t_2 \leq 3\pi/2$, $t_2 \in [\pi/2; 3\pi/2]$.

Итак, уравнение $\sin t = a$ на отрезке $[\pi/2; 3\pi/2]$ имеет два решения $t_1 = \arcsin a$ и $t_2 = \pi - \arcsin a$ (совпадающие при $a = 1$). Учитывая, что период синуса равен 2π , получаем формулу для решения уравнения $\sin t = a$:

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$

При любом a на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ существует одно число t , что $\operatorname{tg} t = a$, – это $\operatorname{arctg} a$.

Поэтому уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет на интервале $(-\pi/2; \pi/2)$ длиной π единственный корень.

Функция тангенс имеет период π . Следовательно, остальные корни уравнения $\operatorname{tg} t = a$ отличаются от найденного на πn , ($n \in \mathbb{Z}$), т.е.

$$t = \operatorname{arctg} a + \pi n, (n \in \mathbb{Z}).$$

Ход работы:

Пример 1.

Решите уравнение: $\sqrt{x-3} = x-9$.

Решение:

возведем обе части уравнения в квадрат, при этом в уравнении появятся посторонние корни, поэтому проверка при решении иррациональных уравнений обязательна:

$$(\sqrt{x-3})^2 = (x-9)^2;$$

$$x-3 = x^2 - 18x + 81;$$

$$x^2 - 18x + 81 - x + 3 = 0;$$

$$x^2 - 19x + 84 = 0.$$

Получилось обычное квадратное уравнение, корни которого вычисляем через дискриминант: $x_1=12$, $x_2=7$.

Выполним проверку, для этого подставим в наше исходное уравнение получившиеся корни:

$$\begin{aligned} x_1=12: \quad & \sqrt{12-3} = 12-9; \\ & 3 = 3 \text{ (верно)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2=7: \quad & \sqrt{7-3} = 7-9; \\ & 2 = -2 \text{ (не верно)}. \end{aligned}$$

Ответ: 12.

Пример 2.

Решить неравенство:

$$\sqrt{x-2} > -x^2 + x - 2$$

Это неравенство второго типа, оно равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -x^2 + x - 2 < 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -x^2 + x - 2 \geq 0 \\ x - 2 > (-x^2 + x - 2)^2 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Решим каждое неравенство:

$$1. -x^2 + x - 2 < 0$$

$$x^2 - x + 2 > 0$$

$D=1-8=-7$, старший коэффициент больше нуля, следовательно это неравенство верно при любом значении x . Решением первой системы будет решение ее второго неравенства: $x \geq 2$.

2. $-x^2 + x - 2 \geq 0$ Очевидно, что это неравенство не имеет решений. Следовательно, и вся вторая система не имеет решений.

Ответ: $x \geq 2$.

Пример 3.

Решите уравнение: $\frac{1}{0,125}^{2x} = 128.$

Решение:

приведем обе части уравнения к основанию 2:

$$\frac{1}{0,125}^{2x} = 128,$$

$$\frac{1000}{125}^{2x} = 2^7,$$

$$8^{2x} = 2^7,$$

$$(2^3)^{2x} = 2^7,$$

$$2^{6x} = 2^7.$$

По свойству $(a^{f(x)} = a^{k(x)}) \rightarrow (f(x) = k(x))$, получаем $6x = 7$ и $x = 7/6$.

Ответ: $7/6$.

Пример 4.

Решите уравнение: $2^{x-2} = 5^{x-2}.$

Решение:

разделив обе части уравнения на одно и то же число 5^{x-2} , получим:

$$\frac{2^{x-2}}{5^{x-2}} = \frac{5^{x-2}}{5^{x-2}},$$

$$\frac{2^{x-2}}{5^{x-2}} = 1,$$

$$\frac{2^{x-2}}{5^{x-2}} = \frac{2^0}{5^0},$$

$$x - 2 = 0,$$

$$x = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 5.

Решите уравнение: $2^{x+3} - 2^x = 112.$

Решение:

вынесем общий множитель 2^x за скобку, получим:

$$2^{x+3} - 2^x = 112,$$

$$2^x(2^3 - 1) = 112,$$

$$2^x \cdot 7 = 112,$$

$$2^x = 112 / 7,$$

$$2^x = 16,$$

$$2^x = 2^4,$$

$$x = 4.$$

Ответ: 4.

Пример 6.

Решим неравенство: $(0,3)^{\frac{x}{x-2}} < (0,3)^{\frac{6}{x-1}}$

Так как основание степеней $0,3 < 1$, при переходе к выражениям, стоящим в показателе, знак неравенства меняется на противоположный:

$$\frac{x}{x-2} > \frac{6}{x-1}$$

Перенесем все влево, и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{x}{x-2} - \frac{6}{x-1} > 0$$

$$\frac{x(x-1) - 6(x-2)}{(x-1)(x-2)} > 0$$

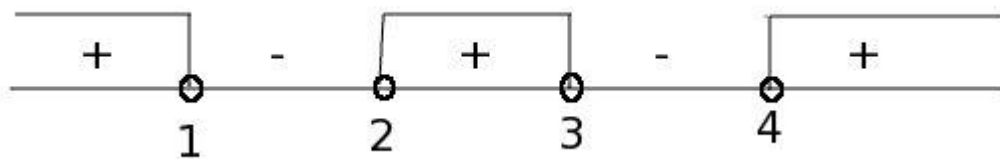
$$\frac{x^2 - 7x + 12}{(x-1)(x-2)} > 0$$

Корни числителя:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 4$$

$$\frac{(x-3)(x-4)}{(x-1)(x-2)} > 0$$

Решим неравенство методом интервалов: нанесем корни числителя и знаменателя на числовую ось и расставим знаки:



Ответ: $x < 1, 2 < x < 3, x > 4$

Пример 7.

Решим неравенство:

$$25^x < 6 \times 5^x - 5$$

Перенесем все слагаемые влево и разложим основания степеней на простые множители:

$$5^{2x} - 6 \times 5^x + 5 < 0$$

Если бы это было уравнение, мы решали бы его с помощью замены переменной.
Поступим также.

Введем замену: $t = 5^x$, $t > 0$

Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} t^2 - 6t + 5 < 0 \\ t > 0 \end{cases}$$

Отсюда:

$$\begin{cases} 1 < t < 5 \\ t > 0 \end{cases}$$

То есть $1 < t < 5$

Запишем двойное неравенство в виде системы:

$$\begin{cases} t > 1 \\ t < 5 \end{cases}$$

Вот теперь мы можем вернуться к исходной переменной:

$$\begin{cases} 5^x > 1 \\ 5^x < 5 \end{cases}$$

Отсюда: $x > 0$, $x < 1$

Ответ: $0 < x < 1$

Пример 8.

Решите уравнение: $\log_2(x^2 + 4x + 3) = 3$.

Решение:

данному уравнению удовлетворяют те значения x , для которых выполнено равенство:
 $x^2 + 4x + 3 = 2^3$.

Получаем обычное квадратное уравнение $x^2 + 4x + 3 = 8$ или $x^2 + 4x - 5 = 0$, корни которого вычисляем с помощью дискриминанта: $x_1 = 1$; $x_2 = -5$.

Пример 9.

Решите уравнение: $\log_5(2x+3) = \log_5(x+1)$.

Решение:

данное уравнение определено для тех значений x , при которых выполнены неравенства:
 $2x+3 > 0$ и $x+1 > 0$ (это следует из определения логарифма).

Для этих x данное уравнение равносильно уравнению: $2x+3 = x+1$, из которого находим $x = -2$.

Выполняя проверку, убеждаемся, что $x = -2$ не удовлетворяет неравенству $x+1 > 0$.

Следовательно, данное уравнение корней не имеет.

Пример 10.

Решить неравенство:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+4) > \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 2x - 2)$$

Так как основание логарифмов в обеих частях неравенства меньше 1, при переходе к выражениям, стоящим под знаком логарифма, знак неравенства меняется на противоположный. Выражения, стоящие под знаком логарифма должны быть строго больше нуля. Перейдем к системе:

$$\begin{cases} x+4 < x^2 + 2x - 2 \\ x+4 > 0 \end{cases}$$

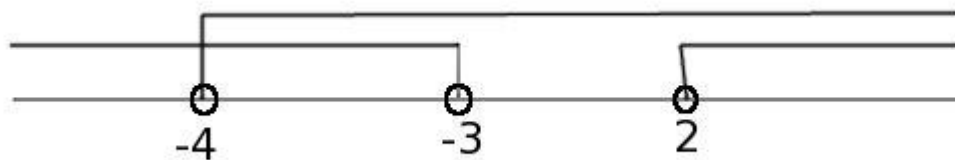
Обратите внимание: мы указываем, что больше нуля должно быть меньшее из выражений, которые стоят под знаком логарифма. В этом случае большее выражение автоматически будет больше нуля.

Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 > 0 \\ x > -4 \end{cases}$$

Корни квадратного трехчлена: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$

Отсюда:



Ответ: $x \in (-4; -3) \cup x \in (2; \infty)$

Пример 11.

Решите уравнение: $\cos t = 1/2$.

Решение:

по формуле $t = \pm \arccos(1/2) + 2\pi n$, ($n \in \mathbb{Z}$).

Поскольку $\arccos(1/2) = \pi/3$ приходим к ответу $t = \pm \pi/3 + 2\pi n$, ($n \in \mathbb{Z}$).

Пример 12.

Решите уравнение: $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение:

по формуле $t = (-1)^k \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Поскольку $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi/4$ приходим к ответу $t = (-1)^k \pi/4 + \pi k$, ($k \in \mathbb{Z}$).

Пример 13.

Решите уравнение: $\operatorname{tg} t = \sqrt{3}$.

Решение:

по формуле $t = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) + \pi n, (n \in \mathbb{Z})$.

Поскольку $\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ приходим к ответу $t = \frac{\pi}{3} + \pi n, (n \in \mathbb{Z})$.

Самостоятельная работа:

Вариант 1.

1. Решите иррациональные уравнения:

$$\sqrt{x} = x - 6;$$

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1} = 5;$$

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = \sqrt{2x-8};$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+2} = \frac{4}{\sqrt{x+2}};$$

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} = 0.$$

2. Решите иррациональные неравенства:

$$\sqrt{x-1} > 3;$$

$$\sqrt{3x+1} > \sqrt{2-x};$$

$$\sqrt{x+3} > x+1.$$

3. Решите показательные уравнения:

$$(0,2)^{2-3x} = 25;$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{x+1} = 13;$$

$$4 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 1 = 0.$$

4. Решите показательные неравенства:

$$(\sqrt{5})^{x-6} < 25;$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-9} \geq 1;$$

$$8 \cdot 2^{x-1} - 2^x > 48.$$

5. Решите логарифмические уравнения и неравенства:

$$\log_{\frac{1}{2}}(7 - 8x) = -2$$

$$\log_3(x+2) + \log_3 x = 1$$

$$\log_3(x^2 - x - 3) = 1$$

$$\log_3(x-2) + \log_3(x+2) = \log_3(2x-1)$$

$$\log_{0,3}(8-6x) \geq \log_{0,3} 2x$$

$$\log_5(6-x) < \log_5(4-3x)$$

$$\log_{0,5} \frac{x}{3} = -2$$

$$\log_2(5x-9) = \log_2(3x+1).$$

6. Решить тригонометрические уравнения:

$$\sin x = 0;$$

$$2 \operatorname{tg} 3x = 0;$$

$$2 \cos x = 1;$$

$$2 \sin(2x - 4\pi) = -\sqrt{3};$$

$$\cos 2x = 2;$$

$$1 - \sin x = 0;$$

$$(1 - \cos 2x)(\operatorname{tg} 2x + \sqrt{3}) = 0.$$

Вариант 2.

1. Решите иррациональные уравнения:

$$\sqrt{x^2 - 12} = \sqrt{x};$$

$$\sqrt{2x - 4} - \sqrt{x + 5} = 1;$$

$$\sqrt{x + 7} + \sqrt{x + 2} = \sqrt{3x + 19};$$

$$\sqrt{x - 3} + \sqrt{2x - 5} = \frac{x-2}{\sqrt{2x-5}};$$

$$\sqrt{4x - 3} = -4.$$

2. Решите иррациональные неравенства:

$$\sqrt{x + 2} > 4;$$

$$\sqrt{2x + 1} > \sqrt{3 - x};$$

$$\sqrt{2x + 9} < 3 - x.$$

3. Решите показательные уравнения:

$$(0,1)^{2x-3} = 10;$$

$$7^{x+1} + 5 \cdot 7^x = 588;$$

$$9^x - 7 \cdot 3^x - 18 = 0.$$

4. Решите показательные неравенства:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^{x+6} > \frac{1}{9};$$

$$(5)^{x^2-4} \leq 1;$$

$$2^{x+1} + \frac{1}{2} \cdot 2^x < 5.$$

5. Решите логарифмические уравнения и неравенства:

$$\log_2(3x - 6) = \log_2(2x - 3)$$

$$\log_2(x^2 - 3x - 8) = 1$$

$$\lg(9x + 1) = 1 + 2\lg x$$

$$\log_{0,6}(x + 3) + \log_{0,6}(x - 3) = \log_{0,6}(2x - 1)$$

$$\log_{0,6}(2x - 1) < \log_{0,6} x$$

$$\log_2(5x - 9) \leq \log_2(3x + 1)$$

$$\log_{\sqrt{3}}(2x - 1) < 4$$

$$\log_{\frac{1}{3}} x^2 - 3 \log_{\frac{1}{3}} x - 8 < 0.$$

6. Решить тригонометрические уравнения:

$$\cos x = 0;$$

$$3 \operatorname{ctg} 2x = 0;$$

$$2 \sin x = \sqrt{2};$$

$$2 \cos (2x - 4\pi) = \sqrt{3};$$

$$\frac{1}{2} \sin 4x = 1;$$

$$1 - \cos x = 0;$$

$$(\sin x + 1)(\operatorname{tg} 2x - \sqrt{3}) = 0.$$

Вариант 3.

1. Решите иррациональные уравнения:

$$\sqrt{x-3} = x-9;$$

$$\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1} = 1;$$

$$\sqrt{3x+1} + \sqrt{4x-3} = \sqrt{5x+4};$$

$$\sqrt{x+2} = \frac{2x-5}{\sqrt{x+2}};$$

$$\sqrt{x^2+2} + \sqrt{2x-1} = -2.$$

2. Решите иррациональные неравенства:

$$\sqrt{x-3} < 4;$$

$$\sqrt{4x-3} < \sqrt{x+9};$$

$$\sqrt{2x+1} > 1-x.$$

3. Решите показательные уравнения:

$$(0,2)^{3x+3} = 25;$$

$$3^{x+3} + 4 \cdot 3^x = 279;$$

$$4^x - 2 \cdot 2^x - 8 = 0.$$

4. Решите показательные неравенства:

$$(\sqrt{7})^{x-8} < 49;$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-16} \geq 1;$$

$$27^{1+2x} > \left(\frac{1}{9}\right)^{2+x}.$$

5. Решите логарифмические уравнения и неравенства:

$$\log_{\frac{1}{6}}(7x-9) = \log_{\frac{1}{6}} x$$

$$\log_2(x-2) + \log_2(x-3) = 1$$

$$\log_3(x^2 - x - 3) = 1$$

$$\log_3(x-2) + \log_3(x+2) = \log_3(2x-1)$$

$$\log_{0,3}(8-6x) \geq \log_{0,3} 2x$$

$$\log_5(6-x) < \log_5(4-3x)$$

$$\log_{0,5}(7-x) \leq \log_{0,5}(3-2x)$$

$$\log_2(x^2 - 3x - 10) > 3.$$

6. Решить тригонометрические уравнения:

$$\sin x = 1;$$

$$2 \operatorname{ctg} 3x = 0;$$

$$2 \sin x = 1;$$

$$2 \cos (2x - 6\pi) = \sqrt{3};$$

$$\cos 2x = 3;$$

$$\sin x - 1 = 0;$$

$$(1 - \sin 2x)(3 \operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = 0.$$

Вариант 4.

1. Решите иррациональные уравнения:

$$\sqrt{x+2} = x-4;$$

$$\sqrt{5x+20} - \sqrt{x+8} = 2;$$

$$\sqrt{3x+3} + \sqrt{4x-4} = \sqrt{6x+13};$$

$$\sqrt{x+15} - \sqrt{x-1} = \frac{10}{\sqrt{x-1}};$$

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{2-x} = -1.$$

2. Решите иррациональные неравенства:

$$\sqrt{x-2} < 3;$$

$$\sqrt{5x-2} < \sqrt{3x+4};$$

$$\sqrt{3x-x^2} < 4-x.$$

3. Решите показательные уравнения:

$$(0,1)^{3x-4} = 100;$$

$$2^{x+3} + 4 \cdot 2^x = 24;$$

$$9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0.$$

4. Решите показательные неравенства:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\right)^{x+8} > \frac{1}{25};$$

$$(6)^{x^2-25} \leq 1;$$

$$9 \cdot 3^{x-1} + 3^x < 36.$$

5. Решите логарифмические уравнения и неравенства:

$$\log_4 x = \log_4 2 + \log_4 7$$

$$\log_2(x^2 - 3x - 8) = 1$$

$$\log_4(x+4) = 2 - \log_4(x-2)$$

$$\log_{0,6}(x+3) + \log_{0,6}(x-3) = \log_{0,6}(2x-1)$$

$$\log_{0,6}(2x-1) < \log_{0,6}x$$

$$\log_2(5x-9) \leq \log_2(3x+1)$$

$$\log_5(3x+1) > 2$$

$$\log_2 x^2 - \log_2 x - 4 = 0$$

6. Решить тригонометрические уравнения:

$$\cos x = -1;$$

$$3 \operatorname{tg} 2x = 0;$$

$$2 \cos x = \sqrt{2};$$

$$2 \sin (2x - 4 \pi) = -\sqrt{3};$$

$$\frac{1}{3} \sin 4x = 1;$$

$$\cos x - 1 = 0;$$

$$(\cos x + 1)(3 \operatorname{tg} 2x + \sqrt{3}) = 0.$$

ПР №10: Решение систем уравнений и неравенств. (2 часа)

Задание:

1. Решить систему уравнений.

2. Решить систему неравенств.

Теория к работе:

Система уравнений — это условие, состоящее в одновременном выполнении нескольких уравнений относительно нескольких (или одной) переменных.

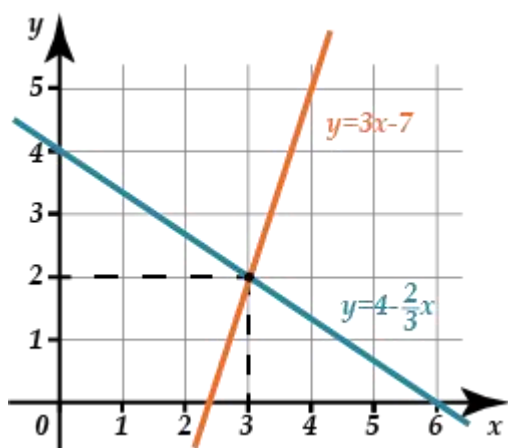
Решение системы уравнений методом подстановки

Это самый простой метод, но зачастую – самый трудоемкий. Идея проста – нужно в одном из уравнений выразить одну переменную через другие, а затем полученное выражение подставить в остальные уравнения вместо этой переменной.

Затем точно так же выражаем и подставляем другую переменную и т.д., пока не получим уравнение с одной переменной. После его решения и нахождения одной из переменных – последовательно возвращаемся к ранее выраженным, подставляя найденные значения.

Решение систем уравнений графическим методом

Недаром ответ записывается так же, как координаты какой-нибудь точки. Ведь если построить графики для каждого уравнения в одной системе координат, **решениями системы уравнений будут точки пересечения графиков.**



Графический метод – самый неточный. Практически его можно применять только для **систем линейных уравнений** графиками, которых являются прямые. Если же хотя бы одно из уравнений имеет более сложный вид (содержит квадрат, корень, логарифм и т.д.), то не рекомендуется использовать графический метод (лучше использовать его только для иллюстраций).

Решение систем уравнений методом сложения

Метод сложения основан на следующем: если сложить левые части двух (или больше) уравнений, полученное выражение будет равно сложенным правым частям этих же уравнений.

Решение систем неравенств

Система неравенств состоит из нескольких неравенств с одной переменной. Эти неравенства объединяются фигурной скобкой (так же, как и уравнения в системах уравнений). Задача состоит в том, чтобы найти все общие решения заданных неравенств. *Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы становится верным числовым неравенством, называют решением системы неравенств.*

Множество всех решений системы неравенств является общим решением (чаще всего — просто решением системы неравенств).

Решить систему неравенств — это найти все её решения.

Ход работы:

Пример 1: Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x - 4y = 2 \\ 3x - 2y = 16 \end{cases}$$

Сначала найдём чему равен x в первом уравнении, для этого перенесём все члены уравнения, не содержащие неизвестное x , в правую часть:

$$x - 4y = 2$$

$$x = 2 + 4y$$

Так как x , на основании определения системы уравнений, имеет такое же значение и во втором уравнении, то подставляем его значение во второе уравнение и получаем уравнение с одним неизвестным:

$$3x - 2y = 16$$

$$3(2 + 4y) - 2y = 16$$

Решаем полученное уравнение, чтобы найти чему равен y . Как решать уравнения с одним неизвестным вы можете посмотреть в соответствующей теме.

$$3(2 + 4y) - 2y = 16$$

$$6 + 12y - 2y = 16$$

$$6 + 10y = 16$$

$$10y = 16 - 6$$

$$10y = 10$$

$$y = 10 : 10$$

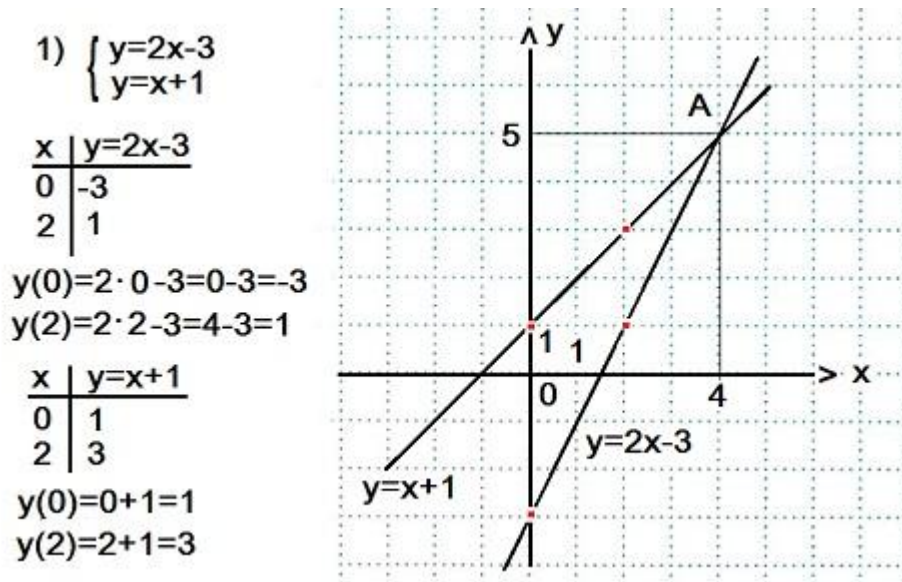
$$y = 1$$

Мы определили что $y = 1$, теперь, для нахождения численного значения x , подставим значение y в преобразованное первое уравнение, где мы ранее нашли какому выражению равен x :

$$x = 2 + 4y = 2 + 4 \cdot 1 = 2 + 4 = 6$$

Ответ: $x = 6, y = 1$.

Пример 2. Решить графическим способом систему уравнений.



Графиком каждого уравнения служит прямая линия, для построения которой достаточно знать координаты **двух точек**. Мы составили таблицы значений x и y для каждого из уравнений системы.

Прямую $y=2x-3$ провели через точки $(0; -3)$ и $(2; 1)$.

Прямую $y=x+1$ провели через точки $(0; 1)$ и $(2; 3)$.

Графики данных уравнений системы **1)** пересекаются в точке $A(4; 5)$. Это и есть единственное решение данной системы.

Ответ: $(4; 5)$.

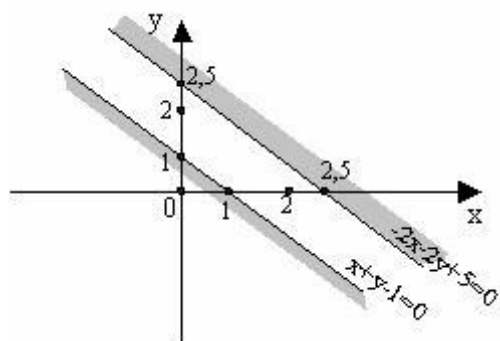
ПРИМЕР 3. Решить графически систему:

$$x + y - 1 \leq 0;$$

$$-2x - 2y + 5 \leq 0.$$

Решение:

- рассмотрим уравнения $x+y-1=0$ и $-2x-2y+5=0$, соответствующие неравенствам;
- построим прямые, задающиеся этими уравнениями.



Определим полуплоскости, задаваемые неравенствами. Возьмем произвольную точку, пусть $(0; 0)$. Рассмотрим $x + y - 1 \leq 0$, подставим точку $(0; 0)$: $0 + 0 - 1 \leq 0$. значит, в той полуплоскости, где лежит точка $(0; 0)$, $x + y - 1 \leq 0$, т.е. полуплоскость, лежащая ниже прямой, является решением первого неравенства. Подставив эту точку $(0; 0)$, во второе,

получим: $-2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 5 \leq 0$, т.е. в полуплоскости, где лежит точка $(0; 0)$, $-2x - 2y + 5 \geq 0$, а нас спрашивали, где $-2x - 2y + 5 \leq 0$, следовательно, в другой полуплоскости – в той, что выше прямой.

Найдем пересечение этих двух полуплоскостей. Прямые параллельны, поэтому плоскости нигде не пересекаются, значит система данных неравенств решений не имеет, несовместна.

Самостоятельная работа:

1 Вариант

1. Решить систему уравнений графически.

Изобразить на координатной плоскости множество решений системы уравнений с двумя неизвестными. Дать ответ в координатах.

$$a) \begin{cases} x + y = 18 \\ 2x + 5y = 24 \end{cases}; \quad б) \begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 10x - 4y = 2 \end{cases}$$

2. Решить систему уравнений:

$$a) \begin{cases} x - y = 6, \\ x^3 - y^3 = 126 \end{cases}; \quad б) \begin{cases} y^2 - xy + 1 = 0, \\ x^2 + 2x = -y^2 - 2y - 1. \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x + 2y = 3, \\ \frac{4^{x-2,5}}{4^{3y}} = 2 \end{cases}; \quad г) \begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 2, \\ x - 2y = 12 \end{cases}.$$

3. Решить систему неравенств - графическим способом:

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 1 \\ x - y \geq -3 \end{cases}$$

4. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 3 - x \leq 3x - 5, \\ x^2 - x - 12 < 0. \end{cases}$$

2 Вариант

1. Решить систему уравнений графически.

Изобразить на координатной плоскости множество решений системы уравнений с двумя неизвестными. Дать ответ в координатах.

$$a) \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 10 \end{cases}; \quad б) \begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

2. Решить систему уравнений:

$$a) \begin{cases} 3(x + 1) + 2(y - 2) = 20, \\ x + 2y = 4 \end{cases}; \quad б) \begin{cases} x^2 + xy = 42x, \\ 6x^2 + 6xy = 7y. \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} y - x = 7, \\ 3^x \cdot 3^{2(y-1)} = 27 \end{cases}; \quad г) \begin{cases} \log_3 x + \log_9 y = 2 \\ \log_9 x - \log_3 y = 1 \end{cases}$$

3. Решить систему неравенств - графическим способом:

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 1 \\ x - y \geq -3 \end{cases}; \quad .$$

4. Решить систему неравенств:

$$\begin{aligned} 3 - x &\geq 2x - 9, \\ x^2 - x - 12 &< 0. \end{aligned}$$

3 Вариант

1. Решить систему уравнений графически.

Изобразить на координатной плоскости множество решений системы уравнений с двумя неизвестными. Дать ответ в координатах.

$$\begin{aligned} a) \quad & \begin{cases} 6x - 2y = 1 \\ 12x - 4y = 2 \end{cases}; \quad б) \quad \begin{cases} 8x - 6y = 14 \\ 4x - 3y = 10 \end{cases}. \end{aligned}$$

2. Решить систему уравнений:

$$a) \begin{cases} x(1 + y) = y + 7, \\ x^2 y - xy^2 = 6 \end{cases}; \quad б) \begin{cases} x^2 - 2y = 3, \\ y^2 + 2x = 3. \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x - y = 8, \\ 2^{x-3y} = 16 \end{cases}; \quad г) \begin{cases} 5 \log_y x - \log_x y = 26 \\ xy = 64 \end{cases}$$

3. Решить систему неравенств - графическим способом:

$$\begin{aligned} 4x + 2y &\leq 1 \\ x - y &\leq 2 \end{aligned}$$

4. Решить систему неравенств:

$$\begin{aligned} -4 - x &> 2x + 5, \\ x^2 + x - 12 &\leq 0. \end{aligned}$$

4 Вариант

1. Решить систему уравнений графически.

Изобразить на координатной плоскости множество решений системы уравнений с двумя неизвестными. Дать ответ в координатах.

$$\begin{aligned} a) \quad & \begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - 4y = 2 \end{cases}; \quad б) \quad \begin{cases} 3x - 6y = 6 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases}. \end{aligned}$$

2. Решить систему уравнений:

$$a) \begin{cases} 3(x + 1) + 2(y - 2) = 20, \\ x + 2y = 4 \end{cases}; \quad б) \begin{cases} x - y = 6, \\ x^3 - y^3 = 126. \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x + y = 3, \\ 5^{x+3y} = \frac{1}{5} \end{cases}; \quad г) \begin{cases} \log_x y - 2 \log_y x = 1 \\ x^2 + 2y^2 = 3 \end{cases}$$

3. Решить систему неравенств - графическим способом:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

4. Решить систему неравенств:
- $$\begin{cases} -5 - x > 3x + 7, \\ x^2 + x - 12 \leq 0. \end{cases}$$

Рекомендуемая литература

Основные источники

1. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М. и др. Алгебра и начала математического анализа М. Просвещение 2017.
2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф. и др. Геометрия 10-11 классы М. Просвещение 2015
3. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика: Учеб. пособие для техникумов. – М.: Высш.шк., 1991. – 480 с.: ил.
4. Пехлецкий И.Д. Математика – М., Издательский центр «Академия», 2001.
5. Башмаков М.И. Математика: Учебник. М., Издательский центр «Академия», 2013.
6. Башмаков М.И. Математика: Задачник. М., Издательский центр «Академия», 2013.

Дополнительные источники:

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: В 3 т.- М.: Дрофа, 2014.
2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. - М.: Наука, 2012.
3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии: Учеб. пособие для втузов / ред. Ефимов Н.В. - изд., стер. - СПб: Профессия, 2011.
4. Григорьев С.Г., Иволгина С.В. Математика. – М.: Образовательно-издательский центр «Академия», 2011
4. Григорьев В.П., Сабурова Т.Н. Сборник задач по высшей математике. – М.: Издательский центр «Академия», 2011
5. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. – М.: Высшая школа, 2009
6. Дадаян А.А. Математика: учеб.- М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2005