Министерство промышленности и торговли Тверской области
Государственное бюджетное профессиональное
образовательное учреждение
«Тверской химико-технологический колледж»

Цикловая комиссия общеобразовательных дисциплин

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

учебной дисциплины

ЕН.01. Элементы высшей математики

для специальности
38.02.07 Банковское дело

Тверь, 2021

Рассмотрено
цикловой комиссией
общеобразовательных
дисциплин
Протокол № _____
от «___»__________ 202__ г.
Председатель ЦК
__________ С.Д. Никита

Принято
Методическим советом
Протокол № _____
от «___»__________ 202__ г.
Зам. директора по УР
___________ Е.А. Гусева

Разработчик: Михайлова Н.В., преподаватель

Пояснительная записка

Практические занятия служат связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, полученных на занятиях теоретического обучения, а так же для получения практических знаний. Практические задания выполняются студентом самостоятельно, с применением знаний и умений, полученных на занятиях, а так же с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя при выполнении практического задания. К практическому занятию от студента требуется предварительная подготовка, которую он должен провести перед занятием. Список литературы и вопросы, необходимые при подготовке, студент получает перед занятием из методических рекомендаций к практическому занятию.

Практические задания разработаны в соответствии с учебной программой. В зависимости от содержания они могут выполняться студентами индивидуально или фронтально.

Зачёт по каждой практической работе студент получает после её выполнения и предоставления в печатном виде, оформления отчёта в котором указывает полученные знания и умения в ходе выполнения практической работы, а также ответов на вопросы преподавателя, если таковые возникнут при проверке выполненного задания.

1. Перечень практических работ

№ и тема практической работы	Объем часов
ПР № 1: Решение задач с комплексными числами. Геометрическая интерпретация комплексного числа.	2
ПР № 2: Действия над матрицами.	2
ПР № 3: Определители второго и третьего порядка.	2
ПР № 4: Метод Гаусса (метод исключения неизвестных).	2
ПР № 5: Формулы Крамера (для систем линейных уравнений с тремя неизвестными.	2
ПР № 6: Решение матричных уравнений.	2
ПР № 7: Графический метод решения задачи линейного программирования.	2
ПР № 8: Экстремум функции нескольких переменных.	2
ПР № 9: Нахождение неопределенного интеграла с помощью таблиц, а также используя свойства.	2
ПР № 10: Методы замены переменной и интегрирование по частям.	2
ПР № 11: Интегрирование простейших рациональных дробей.	2
ПР № 12: Правила замены переменной и интегрирование по частям.	2
ПР № 13: Вычисление несобственных интегралов. Исследование сходимости интегралов.	2
ПР № 14: Приложение интегрального исчисления.	2
ПР № 15: Дифференциальные уравнения первого порядка и первой степени.	2
ПР № 16: Уравнения с разделяющимися переменными.	2
ПР № 17: Однородные дифференциальные уравнения.	2
ВСЕГО:	**34**

2. Методические указания к практическим занятиям

ПР №1. Решение задач с комплексными числами. Геометрическая интерпретация комплексного числа. (2 часа)

Задание:

Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме. Изобразить комплексное число на плоскости. Найти модуль комплексного числа.

Теория к работе:

Определение. Комплексным числом z называется выражение $z = a + ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением:

$$i^2 = -1; \qquad i = \sqrt{-1}.$$

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

1) Сложение и вычитание.

$$\boxed{z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)}$$

2) Умножение.

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2$$

$$\boxed{z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)}$$

3) Деление.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$$

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$\boxed{z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}}$$

Геометрическая интепретация комплексного числа.

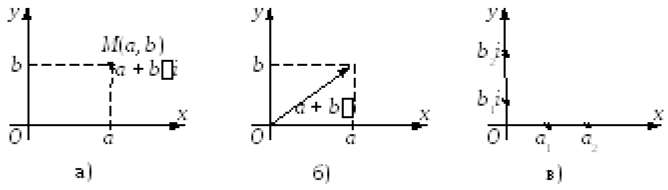


Рис. 19

Геометрическое представление комплексных чисел состоит в том, что каждому комплекс ному числу z = a + b·i ставится в соответствие точка M (a, b) плоскости в прямоугольной системе координат (рис. 1.9, а), таким образом, что действительная часть комплексного числа представляет собой абсциссу, а мнимая – ординату точки. Или вместо точки можно поставить в соответствие вектор с координатами (a, b) (рис. 1.9, б). Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и множеством точек координатной плоскости.

Ясно, что действительное число a + 0·i = a изображается точкой на оси Ox, а чисто мнимое число 0 + b·i, где b ≠ 0 – точкой на оси Oy. Поэтому ось Oy называется мнимой, а ось Ox – действительной.

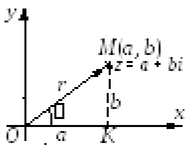


Рис. 1.11

Определение. Длина вектора, соответствующего комплексному числу z (или расстояние от начала системы координат до точки, изображающей комплексное число) называется модулем комплексного числа и обозначается |z| = r.

Определение. Радианная мера угла, образованного этим вектором с положительным направлением действительной оси Ox называется аргументом комплексного числа z и обозначается Arg z = φ.

Другими словами, аргумент комплексного числа – это угол между положительной полуосью Ox и лучом Oz.

Число ноль изображается нуль-вектором, для него модуль равен 0, аргумент нуля не определен. Для ненулевого комплексного числа z аргумент определяется с точностью до 2πk, где k – любое целое число.

Главным значение аргумента называется такое значение φ, что $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Часто главное значение аргумента обозначается arg z. Главное значение аргумента обратного комплексного числа отличается знаком аргумента исходного, т. е. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$.

Ход работы:

1. Выполнить действия $z_1 = 4 + 2i$; $z_2 = 1 - 5i$

Решение:

1) $z_1 + z_2 = (4 + 2i) + (1 - 5i) = (4 + 1) + (2i - 5i) = 5 - 3i$;
2) $z_1 - z_2 = (4 + 2i) - (1 - 5i) = (4 - 1) + (2i + 5i) = 3 + 7i$;
3) $z_1 \cdot z_2 = (4 + 2i) \cdot (1 - 5i) = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2i - 4 \cdot 5i - 2i \cdot 5i = 4 + 2i - 20i - 10(i)^2 =$
$= 4 + 10 - 18i = 14 - 18i$;
4) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(4 + 2i)}{(1 - 5i)} \cdot \frac{(1 + 5i)}{(1 + 5i)} = \frac{(4 \cdot 1) + (1 \cdot 2i) + (4 \cdot 5i) + (2i \cdot 5i)}{(1 - 5i) \cdot (1 + 5i)} = \frac{4 + 2i + 20i + 10(i)^2}{1^2 - (5i)^2} =$
$= \frac{4 - 10 + 22i}{1 + 25} = -\frac{6}{26} + \frac{22}{26}i = -\frac{3}{13} + \frac{11}{13}i$

2. Найти модуль и главное значение аргумента комплексного числа $z = 1 + i$

Решение:

Здесь $a = 1$, $b = 1$ (точка, изображающая данное число, лежит в I четверти);
$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $tg\varphi = \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1$; $\varphi = \frac{\pi}{4} = 45^*$

Самостоятельная работа:

Вариант 1.

1. Запишите для следующих комплексных чисел – сопряженные:
а) z = 1+5i ; б) z = 2-3i ; в) z =-2i.
2. Выполните действия с комплексными числами:
а) (5-2i) + (-4-8i); б) (3-i) - (-1+7i);
в) (3-4i)*(2-5i); г) (5+2i)/(2-4i); д) (1-2i)/(1+2i).
3. Изобразите множество точек на комплексной плоскости:
а) z = -2+3i; б) z = 4-i; в) z = 2i; г) z = 2.
4. Найдите модуль и главное значение аргумента комплексного числа:
а) z = -1+2i; б) z = 4-3i; в) z =3+2i.

Вариант 2.

1. Запишите для следующих комплексных чисел – сопряженные:
а) z = -1+4i ; б) z = 1-5i ; в) z = -4i.
2. Выполните действия с комплексными числами:
а) (3-2i) + (-2-3i); б) (1-2i) - (-5+6i);
в) (3-6i)*(1-2i); г) (2+7i)/(1-3i); д) (2-5i)/(2+5i).
3. Изобразите множество точек на комплексной плоскости:
а) z = -1+2i ; б) z = -3+i ; в) z =-4i ; г) z = 3.

4. Найдите модуль и главное значение аргумента комплексного числа:
а) z = -2+3i ; б) z = 1-3i ; в) z =3+4i.

Вариант 3.
1. Запишите для следующих комплексных чисел – сопряженные:
а) z = 2+4i ; б) z = 3-12i ; в) z = -6i.
2. Выполните действия с комплексными числами:
а) (4-2i) + (-5-7i); б) (3-5i) - (-6+3i);
в) (3-2i)*(2-i); г) (3+2i)/(4-2i); д) (3-2i)/(3+2i).
3. Изобразите множество точек на комплексной плоскости:
а) z = -3+i ; б) z = 2-2i ; в) z = 4i ; г) z = -3.
4. Найдите модуль и главное значение аргумента комплексного числа:
а) z = -3+i ; б) z = 5-2i ; в) z = 4-3i.

Вариант 4.
1. Запишите для следующих комплексных чисел – сопряженные:
а) z = -3+4i ; б) z = 2-5i ; в) z = -5i.
2. Выполните действия с комплексными числами:
а) (2-i) + (-3-4i); б) (1-3i) - (-6+3i);
в) (3-2i)*(1+2i); г) (1+2i)/(2-3i); д) (2-3i)/(2+3i).
3. Изобразите множество точек на комплексной плоскости:
а) z = -2+3i ; б) z = -5+i ; в) z = 2i ; г) z = -4.

4. Найдите модуль и главное значение аргумента комплексного числа:
а) z = -1+4i ; б) z = 2-5i ; в) z = -3+4i.

<u>На дом: выполнить задания по карточкам.</u>

ПР № 2: Действия над матрицами. (2 часа)

Задание:

Выполнить действия над матрицами.

Теория к работе:

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, которую записывают в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для обозначения матрицы используют прописные латинские буквы, для обозначения элементов матрицы – строчные латинские буквы с указанием номера строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Запись « матрица B имеет размер mxn» означает, что речь идет о матрице, состоящей из m строк и n столбцов. Например, матрица $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ имеет размер *2*x*3*. Далее, b_{ij} - обозначение элемента, стоящего на пересечении i-й строки и j-го столбца данной матрицы (в примере $b_{23}=5$).

При ссылке на *i-ю* строку матрицы A используют обозначение A_i, при ссылке на *j-й* столбец – обозначение A^j.

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется *квадратной*. Элементы a_{11} , a_{22} ,…, a_{nn} квадратной матрицы A (размера nxn) образуют *главную диагональ*. Квадратная матрица, у которой отличные от нуля элементы могут стоять только на главной диагонали, называется *диагональной.* Диагональная матрица, у которой все элементы (главной диагонали!) равны 1, называется *единичной.* Наконец, квадратная матрица, у которой ниже (выше) главной диагонали находятся только нули, называется *верхней (нижней) треугольной матрицей*. Например, среди квадратных матриц размера *3*x*3*

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

матрица A является верхней треугольной, B – диагональной, C – нижней треугольной, E – единичной.

Матрицы A, B называются *равными* ($A=B$), если они имеют одинаковый размер, и их элементы, стоящие на одинаковых позициях, совпадают.

Арифметические действия с матрицами.

Чтобы *умножить матрицу A на отличное от нуля вещественное число k,* необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$kA=k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти *сумму матриц A, B* одной размерности, необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах):

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Произведение AB можно определить только для матриц *A* размера *m*x*n* и *B* размера *n*x*p*, при этом *AB*=*C*, матрица *C* имеет размер *m*x*p*, и ее элемент c_{ij} находится как скалярное произведение *i-й* строки матрицы *A* на *j-й* столбец матрицы *B:* $c_{ij}=A_iB^j=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$ *(i=1,2,…,m; j=1,2,…,p).* Фактически необходимо каждую строку матрицы *A* (стоящей слева) умножить скалярно на каждый столбец матрицы *B* (стоящей справа).

Матрицей, *транспонированной* к матрице *A* размера *m*x*n,* называется матрица A^T размера *n*x*m,* строки которой являются столбцами исходной матрицы.

Например, если $C=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, то $C^T=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ход работы:

Пример 1. Найти *2A-B*, если $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Сначала умножаем матрицу *A* на число «2», затем матрицу *B* на число «-1», и, наконец, находим сумму полученных матриц:

$$2A-B=2\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Имеем: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=$

$$= 2(-1\cdot 0 - 2\cdot 5) + 3(4\cdot 0 - 2\cdot 3) - 1(4\cdot 5 - (-1)\cdot 3) = -20 - 18 - 23 = -61.$$

Пример 2. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Размер матрицы *A* *3*х*2*, матрицы *B* *2*х*2*. Поэтому произведение *AB* найти можно, произведение *BA* – нет. Действуя, по сформулированному выше правилу, получаем:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1;1)(1,3) & (-1;1)(-2;4) \\ (0;4)(1;3) & (0,4)(-2;4) \\ (2;1)(1;3) & (2;1)(-2;4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 & 2+4 \\ 0+12 & 0+16 \\ 2+3 & -4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Пример 3. Найти $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T$.

Решение. Воспользовавшись вычислениями, проведенными при решении примера, а также правилами умножения матрицы на число и сложения матриц, получим:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 16 \\ 20 & 30 \\ 17 & 6 \end{pmatrix}.$$

Самостоятельная работа:

Вариант 1.

1. Даны матрицы:

A= $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & 9 & 3 \\ 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ -2 & 9 & 2 \\ 6 & 3 & -8 \end{pmatrix}$

выполнить действия над матрицами:

а) *A+2B*; б) *3A-B*.

2. Найти произведения матриц A и B:

а) A= $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$;

б) A= $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

в) A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Транспонируйте матрицы:

1) $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 6 & 3 & -4 \\ 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Вариант 2.

1. Даны матрицы:

A= $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -6 & 10 & 9 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & -7 \end{pmatrix}$

выполнить действия над матрицами:

а) *2A+B*; б) *A-3B*.

2. Найти произведения матриц A и B:

а) A= $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

б) A= $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

в) A = $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 9 & 5 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Транспонируйте матрицы:

1) $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>На дом: Выполнить действия над матрицами по карточкам.</u>

ПР № 3: Определители второго и третьего порядка. (2 часа)

Задание:

Вычислить определители второго и третьего порядка. Найти обратную матрицу.

Теория к работе:

Вычисление определителей. Определитель матрицы *A* размера *2*x*2* (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Определитель матрицы *A* размера *3*х*3* (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу *«раскрытие определителя по первой строке»:*

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Если существуют квадратные матрицы X и A одного порядка, удовлетворяющие условию:

XA = AX = E,

где E - единичная матрица того же самого порядка, что и матрица A, то матрица X называется ***обратной к матрице A и обозначается A-1***.

Ход работы:

Пример 1. Найти: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

Решение. При нахождении определителя воспользуемся сначала формулой $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$, а затем (для вычисления определителей 2-го порядка) формулой $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Пример 2. Дана матрица A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти A-1.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = e_{11} = 1 \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = e_{12} = 0 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = e_{21} = 0 \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = e_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 1 \\ x_{12} + 2x_{22} = 0 \\ 3x_{11} + 4x_{21} = 0 \\ 3x_{12} + 4x_{22} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{11} = -2 \\ x_{12} = 1 \\ x_{21} = 3/2 \\ x_{22} = -1/2 \end{cases}$$

Таким образом, А-1= $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Самостоятельная работа:

Вариант 1.

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 10 \\ -2 & 12 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 67 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 11 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$.

2. Найти обратную матрицу:

1) $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 6 & 3 & -4 \\ 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Вариант 2.

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} -10 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 9 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ -10 & 15 & 20 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 0 \\ 10 & 9 & 12 \end{vmatrix}$.

2. Найти обратную матрицу:

1) $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>На дом: Вычислить определители по карточкам.</u>

ПР № 4: Метод Гаусса (метод исключения неизвестных). (2 часа)

Задание:

Решить СЛУ методом Гаусса.

Теория к работе:

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Разделим обе части 1–го уравнения на а11 ≠ 0, затем:

1) умножим на а21 и вычтем из второго уравнения
2) умножим на а31 и вычтем из третьего уравнения

и т.д.

Получим:

$$\begin{cases} x_1 + d_{12}x_2 + ... + d_{1n}x_n = d_1 \\ d_{22}x_2 + d_{23}x_3 + ... + d_{2n}x_n = d_2 \\ .... \\ d_{m2}x_2 + d_{m3} + ... + d_{mn}x_n = d_m \end{cases}$$

, где d1j = a1j/a11, j = 2, 3, …, n+1.

dij = aij – ai1d1j i = 2, 3, … , n; j = 2, 3, … , n+1.

Далее повторяем эти же действия для второго уравнения системы, потом – для третьего и т.д.

Ход работы:

Пример 1. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}$$

, откуда получаем: x3 = 2; x2 = 5; x1 = 1.

Пример 2. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 3 & 2 & 16 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & -11 & -16 & -70 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -5 & -10 & -40 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x+2y+3z=14 \\ -5y-10z=40 \\ 6z=18 \end{cases}$$

, откуда получаем: z = 3; y = 2; x = 1.

Самостоятельная работа:

Вариант 1

Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x-y+z=4 \\ x+3y-z=7 \\ 3x-y+4z=12 \end{cases}$$

Вариант 2

Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x+3y-4z=3 \\ 3x-4y+2z=-5 \\ 2x+7y-5z=13 \end{cases}$$

Вариант 3

Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x-7y+5z=9 \\ x+5y-5z=-2 \\ 4x-2y+7z=24 \end{cases}$$

Вариант 4

Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x-2y+4z=9 \\ y+z=2 \end{cases}$$

<u>На дом: Решить СЛУ по карточкам.</u>

ПР № 5: Формулы Крамера (для систем линейных уравнений с тремя неизвестными. (2 часа)

Задание:

Решить СЛУ по формулам Крамера.

Теория к работе:

Метод Крамера.

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

$$\det A \neq 0;$$

Действительно, если какое- либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой- либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое- либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Теорема. Система из n уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$xi = \Delta i/\Delta, \text{ где}$$

$\Delta = \det A$, а Δi – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов bi.

$$\Delta i = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ход работы:

Пример: Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 4 \\ x + y + 3z = 5 \\ 3x - 4y + z = 0 \end{cases}$$

Решение:

Найдем определитель основной матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 3\cdot 3 + 1\cdot(-1)\cdot(-4) - 3\cdot 1\cdot(-1) - 1\cdot 3\cdot 1 -$$

$$-2\cdot 3\cdot(-4) = 2 + 27 + 4 + 3 - 3 + 24 = 57 \neq 0$$

Найдем определитель Δ_x, для этого подставим в последний определитель вместо первого столбца столбец свободных членов $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) \cdot (-4) - 0 \cdot 1 \cdot (-1) - 5 \cdot 3 \cdot 1 -$$

$$-4 \cdot 3 \cdot (-4) = 4 + 0 + 20 + 0 - 15 + 48 = 57$$

Подставляя вместо второго столбца столбец свободных членов, найдем Δ_y :

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 0 - 3 \cdot 5 \cdot (-1) - 1 \cdot 4 \cdot 1 -$$

$$-2 \cdot 3 \cdot 0 = 10 + 36 + 0 + 15 - 4 - 0 = 57$$

Аналогично найдем Δ_z :

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 5 \cdot 3 + 1 \cdot 4 \cdot (-4) - 3 \cdot 1 \cdot 4 - 1 \cdot 3 \cdot 0 -$$

$$-2 \cdot 5 \cdot (-4) = 0 + 45 - 16 - 12 - 0 + 40 = 57$$

Далее по формуле Камера находим решение заданной системы

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{57}{57} = 1 \ ; \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{57}{57} = 1 \ ; \ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{57}{57} = 1$$

Ответ: $x = 1 \ ; \ y = 1 \ ; \ z = 1$

Самостоятельная работа:

Вариант 1

Решить систему по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y + 4z = 12 \end{cases}$$

Вариант 2

Решить систему по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 3 \\ 3x - 4y + 2z = -5 \\ 2x + 7y - 5z = 13 \end{cases}$$

Вариант 3

Решить систему по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x-7y+5z=9 \\ x+5y-5z=-2 \\ 4x-2y+7z=24 \end{cases}$$

Вариант 4

Решить систему по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ x-2y+4z=9 \\ y+z=2 \end{cases}$$

<u>На дом: Решить СЛУ по карточкам.</u>

ПР № 6: Решение матричных уравнений. (2 часа)

Задание:

Решить СЛУ методом обратной матрицы.

Теория к работе:

Матричный метод применим к решению систем уравнений, где число уравнений равно числу неизвестных.
Метод удобен для решения систем невысокого порядка.
Метод основан на применении свойств умножения матриц.
Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Составим матрицы: A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$; X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Систему уравнений можно записать:

A·X = B.

Сделаем следующее преобразование: A-1·A·X = A-1·B,

т.к. A-1·A = E, то E·X = A-1·B

X = A-1·B

Для применения данного метода необходимо находить обратную матрицу, что может быть связано с вычислительными трудностями при решении систем высокого порядка.

Ход работы:

Пример. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$, A = $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Найдем обратную матрицу А-1.

Δ = det A = $\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$ 5(4-9) + 1(2 – 12) – 1(3 – 8) = -25 – 10 +5 = -30.

M11 = $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ = -5; M21 = $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ = 1; M31 = $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ = -1;

M12 = $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10;$ M22 = $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14;$ M32 = $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 16;$

M13 = $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5;$ M23 = $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 19;$ M33 = $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11;$

$a_{11}^{-1} = \frac{5}{30};\quad a_{12}^{-1} = \frac{1}{30};\quad a_{13}^{-1} = \frac{1}{30};$

$a_{21}^{-1} = -\frac{10}{30};\quad a_{22}^{-1} = -\frac{14}{30};\quad a_{23}^{-1} = \frac{16}{30};$

$a_{31}^{-1} = \frac{5}{30};\quad a_{32}^{-1} = \frac{19}{30};\quad a_{33}^{-1} = -\frac{11}{30};$

A-1 = $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix}$;

Сделаем проверку:

A·A-1 = $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{30} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{10}{30} & -\frac{14}{30} & \frac{16}{30} \\ \frac{5}{30} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} = \frac{1}{30} \begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix}$ =E.

Находим матрицу Х.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\text{-}1B = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{30} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{7}{15} & \frac{8}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{19}{30} & -\frac{11}{30} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}0 + \frac{14}{30} + \frac{16}{30} \\ -\frac{1}{3}0 - \frac{98}{15} + \frac{128}{15} \\ \frac{1}{6}0 + \frac{266}{30} - \frac{176}{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Итого решения системы: x =1; y = 2; z = 3.

Самостоятельная работа:

Вариант 1

Решить систему методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y + 4z = 12 \end{cases}$$

Вариант 2

Решить систему методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 3 \\ 3x - 4y + 2z = -5 \\ 2x + 7y - 5z = 13 \end{cases}$$

Вариант 3

Решить систему методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x - 7y + 5z = 9 \\ x + 5y - 5z = -2 \\ 4x - 2y + 7z = 24 \end{cases}$$

Вариант 4

Решить систему методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + 4z = 9 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

<u>На дом: Решить СЛУ по карточкам.</u>

ПР № 7: Графический метод решения задачи линейного программирования. (2 часа)

Задание:

Решить задачу линейного программирования.

Теория к работе:

1 Математическое программирование — область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения многомерных экстремальных за- дач с ограничениями, т. е. задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

2 В линейном программировании изучаются свойства решений линейных систем уравнений и неравенств с n переменными, называемых системами ограничений, следующего вида:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & (i = 1; k) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = k+1; m) \\ x_j \ge 0 & (j = 1; l,\ l \le n) \end{cases}$$

, где $a_{ij}; b_i$ – постоянные величины и $k \le m$

3 Система ограничений образует область допустимых решений (область экономических возможностей). План, удовлетворяющий системе ограничений задачи, называется допустимым.

4 Основной задачей линейного программирования (ОЗЛП) с n переменными называется задача о нахождении такого допустимого плана, который дос-тавляет максимум (минимум) функции $F = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, называемой функцией

прибыли (целевой функцией, показателем эффективности или критерием оптимальности).

5 Допустимый план, доставляющий максимум (минимум) целевой функции, называется оптимальным планом.

6 Целевая функция, экстремальное значение которой нужно найти в условиях экономических возможностей, система ограничений составляют мате- матическую модель задачи — это отражение оригинала в виде функций, уравнений, неравенств, цифр и т. д.

7 Если x_j рассматривать как координаты точки, то система ограничений является пересечением конечного числа полуплоскостей, образующее многоугольную область, которую называют областью решений системы неравенств.

8 Область решений является выпуклой, но может быть неограниченной и даже пустой (если система неравенств - противоречива)

9 Прямую, которая имеет с областью решений по крайней мере одну общую точку, притом так, что вся область лежит по одну сторону от этой прямой, называют опорной по отношению к этой области

Ход работы:

Задача: Для производства компьютерных столов I-го и II-го видов требуются три типа ресурсов: дерево, пластик и трудозатраты. Потребности в ресурсах для производства одного стола каждого вида, запасы ресурсов, а также прибыль от реализации одного стола каждого вида, заданы в следующей таблице:

Тип ресурса	Единица продукции I вида	Единица продукции II вида	Запас ресурса
Дерево	1	3	24
Пластик	4	1	24
Трудозатраты	3	2	23
Прибыль	200	300	

Требуется, решив задачу графическим методом, найти план выпуска про- дукции, позволяющий получить наибольшую прибыль.

Решение:

1 Составим математическую модель задачи.

Обозначим x – количество выпущенной продукции I вида;

y – количество выпущенной продукции II вида,

тогда для изготовления x единиц продукции I вида и y единиц продукции II ви- да нам необходимо $(x + 3y)$ м^2 дерева, но это количество дерева не должно превышать имеющийся запас ресурса, поэтому имеем неравенство $(x + 3y) \leq 24$. Аналогично по остальным типам ресурсов, т. о. систему ограничений мож- но записать, используя данные таблицы:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 24 \\ 4x + y \leq 24 \\ 3x + 2y \leq 23 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lfloor y \geq 0$$

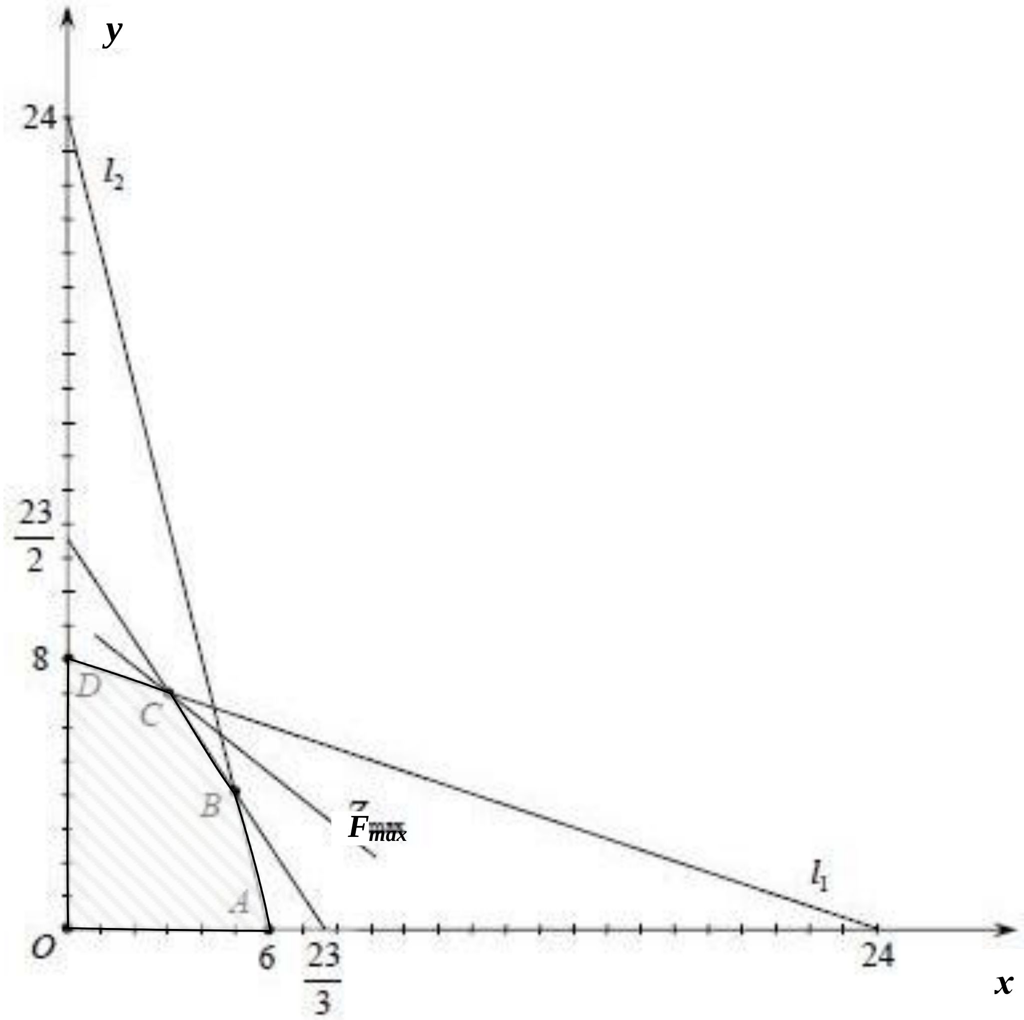
По условию задачи необходимо найти оптимальный план производства продукции, т.е. такой план (x, y), который доставляет максимум функции при- были

$$F = 200x + 300y.$$

2 Найдем область решений задачи

Для того чтобы решить поставленную задачу графическим методом, изо- бразим на координатной плоскости область, заданную системой ограничений. Это многоугольник лежит в первом координатном углу координатной плоско- сти, а его граница задается системой уравнений

$$\begin{cases} x+3y=24 \\ 4x+y=24 \\ 3x+2y=23 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$$



Многоугольник $ABCDO$ – область решений системы ограничений.

3 Построим график целевой функции.

Для этого рассмотрим вектор $N=(\overline{2;3})$ с началом в точке О (0; 0), параллельный вектору (200; 300), нормальному прямой $200x + 300y = 0$. Построим линию нулевого уровня прибыли F = 0, т.е. прямую *200 x + 300 y = 0.* При дви- жении этой прямой в положительном направлении вектора $\overline{N}$ она пройдет через вершины области решений и станет опорной. В одной из вершин целевая функ- ция примет наименьшее значение, в одной – наибольшее.

4 Найдем оптимальный план задачи.

Для этого найдем координаты вершин пятиугольника. Точка А – пересе- чение прямой *4 x + y = 24* и оси Ox, ее координаты (6; 0), D – пересечение *x +3 y = 24* и оси Oy, ее координаты (0; 8). Координаты точки *B* удовлетворяют сис-

теме уравнений $\begin{cases} 4x + y = 24 \\ 3x + 2y = 23 \end{cases}$ Решая эту систему, находим, что *B* = (5;4). Коорди-

наты точки *C* удовлетворяют системе уравнений $\begin{cases} x + 3y = 24 \\ 3x + 2y = 23 \end{cases}$ Решая эту систему

уравнений, находим, что *C* = (3;7). *O* = (0;0).

Подсчитаем теперь значения, которые принимает функция прибыли в вершинах пятиугольника:

$F(O) = F(0; 0) = 200 \cdot 0 + 300 \cdot 0 = 0;$

$F(A) = F(6; 0) = 200 \cdot 6 + 300 \cdot 0 = 1200;$

$F(B) = F(5; 4) = 200 \cdot 5 + 300 \cdot 4 = 2200;$

$F(C) = F(3; 7) = 200 \cdot 3 + 300 \cdot 7 = 2700;$

$F(D) = F(8; 0) = 200 \cdot 8 + 300 \cdot 0 = 1600.$

Таким образом, наибольшая прибыль достигается в точке $C(3; 7)$, и оптимальный план имеет вид $(x, y) = (3; 7)$.

Ответ. Наибольшая прибыль 2700 рублей достигается при выпуске 3-х компьютерных столов I-го вида и 7 компьютерных столов II-го вида.

Самостоятельная работа:

Вариант 1.

Требуется найти наиболее дешёвый набор из доступных исходных материалов, обеспечивающих получение смеси с заданными свойствами. Полученные смеси должны иметь в свойм составе *n* различных компонент в определённых количествах, а сами компоненты являются составными частями *m* исходных материалов. Для упрощения примем, что n=3 и m=4. Пусть стоимость одной единицы материала соответственно составляет , c_2, c_3, c_4. В свою очередь необходимое количество каждой из компонент в смеси составляет соответственно b_1, b_2, b_3.

Вариант 2.

Для изготовления двух видов продукции $П_1$ и $П_2$ требуется четыре вида ресурсов (сырья): S_1, S_2, S_3, S_4. Запасы сырья - соответственно b_1, b_2, b_3, b_4 единицы.

Доход от реализации одной единицы продукции $П_1$ равен c_1 у. е., а доход от реализации одной единицы продукции $П_2$ равен c_2 у. е. Требуется получить наибольший доход от изготовления продукции $П_1$ и $П_2$, то есть, узнать, сколько единиц $П_1$ и сколько единиц $П_2$ нужно изготовить из имеющегося запаса сырья, чтобы получить максимальный доход.

<u>На дом:</u> Решить задачи линейного программирования на карточках.

ПР № 8: Экстремум функции нескольких переменных. (2 часа)

Задание:

Найти экстремумы функции двух переменных.

Теория к работе:

Определение: Точками экстремума функции двух переменных называются точки минимума и максимума этой функции. Значения самой функции в точках экстремума называются экстремумами функции двух переменных.

Определение: Точка P(x0, y0) называется точкой максимума функции двух переменных z = z(x, y), если значение функции в этой точке больше, чем в точках её окрестности. Значение функции в точке максимума называется максимумом функции двух переменных.

Определение: Точка P(x0, y0) называется точкой максимума функции двух переменных z = z(x, y), если значение функции в этой точке больше, чем в точках её окрестности. Значение функции в точке максимума называется максимумом функции двух переменных.

Теорема (необходимый признак экстремума функции двух переменных). Если точка P(x0, y0) - точка экстремума функции двух переменных z = z(x, y), то первые **частные производные** функции (по "иксу" и по "игреку") в этой точке равны нулю или не существуют:

$z'_x(x_0, y_0) = 0$ или $z'_x(x_0, y_0)$ не существует

и

$z'_y(x_0, y_0) = 0$ или $z'_y(x_0, y_0)$ не существует.

Определение: Точки, в которой первые частные производные функции двух переменных равны нулю, называются стационарными точками.

Определение: Точки, в которой первые частные производные функции двух переменных равны нулю или не существуют, называются критическими точками.

Как и в случае с функцией одной переменной, необходимое условие существования экстремума функции двух переменных не является достаточным. Встречаются немало функций, в случаях которых первая частная производная функции равна нулю или не существует, но экстремумов в соответствующих точках нет. Каждая точка экстремума является критической точкой, но не каждая критическая точка является экстремумом.

Достаточный признак существования экстремума функции двух переменных. В точке P существует экстремум функции двух переменных, если в окрестности этой точки **полное приращение функции** не меняет знак. Так как в критической точке первый полный дифференциал равен нулю, то приращение функции определяет второй полный дифференциал

$$d^2z = z''_{xx}\,dx^2 + 2z''_{xy}\,dxdy + z''_{yy}\,dy^2.$$

Ход работы:

Пример. Найти экстремумы функции двух переменных $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Решение. Следуем изложенному выше алгоритму.

Шаг 1. Находим **частные производные**:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12.$$

Шаг 2. Составляем систему уравнений из равенств этих производных нулю:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

Делим первое уравнение системы на 3, а второе на 6 и получаем

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy - 2 = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения выражаем $y = \frac{2}{x}$, подставляем в первое уравнение и получаем

$$x^2 + \frac{4}{x^2} - 5 = 0$$

Умножаем это уравнение на x^2 и получаем

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$$

Производим замену переменной: $x^2 = t$ и получаем

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

Решаем полученное **квадратное уравнение**: $t_1 = 1;\ t_2 = 4$.

Так как $x^2 = t$ и $y = \dfrac{2}{x}$, то

$$x_1 = 1;\ y_1 = 2\ \Rightarrow M_1(1;\ 2)$$
$$x_2 = -1;\ y_2 = -2\ \Rightarrow M_2(-1;\ -2)$$
$$x_3 = 2;\ y_3 = 1\ \Rightarrow M_3(2;\ 1)$$
$$x_4 = -2;\ y_4 = -1\ \Rightarrow M_4(-2;\ -1)$$

Таким образом, получили четыре критических точки - точки возможного экстремума.

Шаг 3. Находим **частные производные второго порядка**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x = A,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x = C,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y = B.$$

Шаг 4. Находим определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$:

$M_1(1;\ 2) \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = -108 < 0$, т. е. экстремума в найденной критической точке нет,

$M_2(-1;\ -2) \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{vmatrix} = -108 < 0$, т. е. экстремума в найденной критической точке нет,

$M_3(2;\ 1) \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 108 > 0$ и $A = 12 > 0$, т. е. в найденной критической точке есть минимум функции двух переменных,

$M_4(-2;\ -1) \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 108 > 0$ и $A = -12 < 0$, т. е. в найденной критической точке есть максимум функции двух переменных.

Шаг 5. Подставляем значения критической точки, в которой найден экстремум, в исходную функцию двух переменных и получаем значения экстремума функции двух переменных:

$$M_3(2;\ 1) \Rightarrow z_{\min} =$$
$$= 2^3 + 3 \bullet 2 \bullet 1^2 - 15 \bullet 2 - 12 \bullet 1 = -28,$$

$$M_4(-2;\ -1) \Rightarrow z_{\max} =$$
$$= (-2)^3 + 3 \bullet (-2) \bullet (-1)^2 -$$
$$-15 \bullet (-2) - 12 \bullet (-1) = 28.$$

Самостоятельная работа:

Вариант 1.

Найти экстремумы функции двух переменных $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.

Вариант 2.

Найти экстремумы функции двух переменных $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.

Вариант 3.

Найти экстремумы функции двух переменных $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Вариант 4.

Найти экстремумы функции $z = x^3 + xy^2 + x^2 - y^2$.

<u>На дом: Решить задания по карточкам.</u>

ПР № 9: Нахождение неопределенного интеграла с помощью таблиц, а также используя свойства. (2 часа)

Задание:

Вычислить неопределенные интегралы.

Теория к работе:

Определение: Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением: *F(x) + C.*

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x.

$\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx;$

Пример: $\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2 dx - 2\int \sin xdx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C;$

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др.

Таблица основных интегралов.

	Интеграл	Значение		Интеграл	Значение
1	$\int tgxdx$	-ln | cosx | +C	9	$\int e^x dx$	ex + C
2	$\int ctgxdx$	ln | sinx | + C	10	$\int \cos xdx$	sinx + C
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \sin xdx$	-cosx + C
4	$\int \frac{dx}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$	tgx + C
5	$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x+a}{x-a}\right\| + C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$	-ctgx + C
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$ + C
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x}dx$	$\ln\left\|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\|x\| + C$	16	$\int \frac{1}{\sin x}dx$	$\ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\| + C$

Ход работы:

$$\int \frac{3x^4+2x^2-3x+7}{x^2}dx = 3\int x^2dx + 2\int dx - 3\int \frac{dx}{x} + 7\int x^{-2}dx = 3\frac{x^3}{3} + 2x - 3\ln|x| + 7\frac{x^{-1}}{(-1)} + C =$$

$$= x^3 + 2x - 3\ln|x| - \frac{7}{x} + C$$

Самостоятельная работа:

Вариант 1.
Вычислить неопределенный интеграл:

1. $\int 2\,dx$; 2. $\int 5x^4dx$; 3. $\int(2\cos x + 3e^x)dx$; 4. $\int(3x + x^3 - 6x^2)dx$;
5. $\int \frac{2dx}{x}$; 6. $\int \frac{5\,dx}{8x}$; 7. $\int 4^x dx$; 8. $\int(3x - 2e^x + 2\sin x)dx$; 9. $\int \sqrt{x}\,dx$;
10. $\int \frac{2dx}{x^3}$; 11. $\int \frac{x^3+3x^2-4x}{x}dx$; 12. $\int \frac{x^2-4}{x+2}dx$; 13. $\int \frac{2x^2+3x\sqrt{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$;
14. $\int \frac{2dx}{3\sqrt{1-x^2}}$; 15.$\int \frac{dx}{2cos^2x}$.

Вариант 2.
Вычислить неопределенный интеграл:
1. $\int 5\,dx$; 2. $\int 6x^5dx$;3. $\int(5sin\,x - 3e^x)dx$; 4. $\int(x^5 - 4x^3 + 2)dx$;
5. $\int \frac{3dx}{x}$; 6. $\int \frac{2xdx}{3x}$; 7. $\int(\frac{2}{5})^x dx$; 8. $\int(2x^3 + e^x - 3\cos x)dx$;
9. $\int \sqrt[3]{x}\,dx$; 10. $\int \frac{3dx}{x^4}$; 11. $\int \frac{x^4-2x^3+3x}{x}dx$; 12. $\int \frac{x^2-16}{x-4}dx$;
13. $\int \frac{4x^3-2x\sqrt{x}+3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$; 14. $\int \frac{dx}{4\sqrt{1-x^2}}$; 15. $\int \frac{3dx}{sin^2x}$.

Вариант 3.
Вычислить неопределенный интеграл:
1. $\int 4\,dx$;2. $\int 6x^2dx$; 3. $\int(\cos x + 4e^x)dx$; 4. $\int(2x + x^4 - 6x^5)dx$;
5. $\int \frac{2dx}{x}$; 6. $\int \frac{2dx}{7x}$; 7. $\int(\frac{3}{4})^x dx$; 8. $\int(4x - 2e^x + \sin x)dx$;
9. $\int \sqrt{x}\,dx$; 10. $\int \frac{2dx}{x^3}$; 11. $\int \frac{x^3+3x^2-4x}{x}dx$; 12. $\int \frac{x^2-1}{x+1}dx$;
13. $\int \frac{3x^2+x\sqrt{x}+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$; 14. $\int \frac{4dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 15. $\int \frac{4dx}{sin^2x}$.

Вариант 4.
Вычислить неопределенный интеграл:
$\int 6\,dx$; 2. $\int 4x^3dx$; 3. $\int(sin\,x + 2e^x)dx$; 4. $\int(x^3 - 3x^2 + 2)dx$;
5. $\int \frac{3dx}{x}$; 6. $\int \frac{3dx}{4x}$; 7. $\int 3^x dx$; 8. $\int(4x^3 + 2e^x - \cos x)dx$;
9. $\int \sqrt[3]{x}\,dx$; 10. $\int \frac{3dx}{x^4}$; 11. $\int \frac{x^4-2x^3+3x}{x}dx$; 12. $\int \frac{x^2-9}{x-3}dx$;
13. $\int \frac{x^3-x\sqrt{x}+2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$; 14. $\int \frac{3dx}{5\sqrt{1-x^2}}$; 15. $\int \frac{dx}{4cos^2x}$.

На дом: Выполнить задания на карточках.

ПР № 10: Методы замены переменной и интегрирование по частям. (2 часа)

Задание:

Вычислить неопределенные интегралы методом замены и по частям.

Теория к работе:

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается:
$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:
(uv)′ = u′v + v′u
где u и v – некоторые функции от x.
В дифференциальной форме: d(uv) = udv + vdu

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:
$uv = \int udv + \int vdu$ или $\int udv = uv - \int vdu$;

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Ход работы:

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos xdx$.
Сделаем замену *t = sinx, dt = cosxdt.*
$$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$$

Пример. $\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$

Замена $t = x^2+1; \quad dt = 2xdx; \quad dx = \dfrac{dt}{2x};$ Получаем:
$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C.$$

Пример.
$$\int x^2\sin xdx = \left\{\begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin xdx; \\ du = 2xdx; & v = -\cos x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + \int \cos x\cdot 2xdx =$$
$$= \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = \cos xdx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin xdx\right] = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Самостоятельная работа:

Вариант 1.

Вычислить интегралы методом замены и по частям:

1. $\int (3x+1)^4 dx;$
2. $\int \sqrt[3]{(3x+4)^2}\, dx;$
3. $\int \sin 4x\, dx;$
4. $\int \frac{dx}{(4-3x)^2};$
5. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1-\sin x}};$
6. $\int \frac{x^2 dx}{1+x^3}.$

Вариант 2.

Вычислить интегралы методом замены и по частям:

1. $\int (2x+3)^3 dx;$
2. $\int \sqrt{2x-1}\, dx;$
3. $\int \cos 5x\, dx;$
4. $\int \frac{dx}{(2x+1)^3};$
5. $\int \frac{\cos x\, dx}{2\sin x+1};$
6. $\int e^{\sin x} \cos x\, dx.$

Вариант 3.

Вычислить интегралы методом замены и по частям:

1. $\int (6x-5)^5 dx;$
2. $\int \sqrt[3]{(4-2x)^2}\, dx;$
3. $\int \sin 3x\, dx;$
4. $\int \frac{dx}{4x+5};$
5. $\int \frac{\cos\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{x}};$
6. $\int \frac{dx}{x\, sin^2 \ln x}.$

Вариант 4.

Вычислить интегралы методом замены и по частям:

1. $\int (4x+7)^6 dx;$
2. $\int \sqrt{3x+5}\, dx;$
3. $\int \cos 2x\, dx;$
4. $\int \frac{dx}{(3-x)^3};$
5. $\int \frac{x^2\ dx}{cos^2 x^3};$
6. $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}.$

<u>На дом: Выполнить задание на карточках.</u>

ПР № 11: Интегрирование простейших рациональных дробей. (2 часа)

Задание:

Вычислить интеграл от рациональной дроби.

Теория к работе:

Интегрирование рациональных функций и метод неопределённых коэффициентов

Алгоритм интегрирования рациональных функций

Шаг 1: разложение исходной дроби

Шаг 2: нахождение неопределённых коэффициентов

Шаг 3: нахождение интеграла исходной функции (дроби)

Рациональная функция - это дробь вида $\frac{P(x)}{Q(x)}$, числитель и знаменатель которой - многочлены или произведения многочленов.

Алгоритм интегрирования рациональных функций

Шаг 1. Определить вид многочлена в знаменателе дроби (он может иметь действительные, кратные действительные, комплексные и кратные комплексные корни) и в зависимости от вида разложить дробь на простые дроби, в числителях которых - неопределённые коэффициенты, число которых равно степени знаменателя.

Шаг 2. Определить значения неопределённых коэффициентов. Для этого потребуется решить систему уравнений, сводящуюся к системе линейных уравнений.

Шаг 3. Найти интеграл исходной рациональной функции (дроби) как сумму интегралов полученных простых дробей, к которым применяются табличные интегралы.

Многочлен в знаменателе имеет действительные корни. То есть, в знаменателе имеет место цепочка сомножителей вида $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_k)$, в которой каждый из сомножителей находится в первой степени. В этом случае разложение дроби с использованием метода неопределённых коэффициентов будет следующим:

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a_1)}+\frac{B_1}{(x-a_2)}+\dots+\frac{Z_1}{(x-a_k)}$$

Ход работы:

Пример. Шаг 1. Дан интеграл от рациональной функции $I=\int\frac{x^2+x+2}{x(x^2-1)}dx$.

От нас требуется разложить подынтегральное выражение - правильную дробь $\frac{x^2+x+2}{x(x^2-1)}$ на простые дроби.

Решение. **Дискриминант уравнения** x^2-1 положительный, поэтому многочлен в знаменателе имеет действительные корни. Получаем следующее разложение исходной дроби на сумму простых дробей:

$$\frac{x^2+x+2}{x(x^2-1)}=\frac{x^2+x+2}{x(x+1)(x-1)}=\frac{A_1}{x}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{C_1}{x-1}.$$

Пример. Шаг 2. На шаге 1 получили следующее разложение исходной дроби на сумму простых дробей с неопределёнными коэффициентами в числителях:

$$\frac{x^2+x+2}{x(x^2-1)}=\frac{x^2+x+2}{x(x+1)(x-1)}=\frac{A_1}{x}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{C_1}{x-1}.$$

Умножаем неопределённые коэффициенты на многочлены, которых нет в данной отдельной дроби, но которые есть в других полученных дробях:

$$A_1(x+1)(x-1)+B_1x(x-1)+C_1x(x+1).$$

Раскрываем скобки и приравниваем полученое к полученному выражению числитель исходной подынтегральной дроби:

$$x^2+x+2=A_1x^2-A_1+B_1x^2-B_1x+C_1x^2+C_1x.$$

В обеих частях равенства отыскиваем слагаемые с одинаковыми степенями икса и составляем из них систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2=A_1x^2+B_1x^2+C_1x^2 \\ x=-B_1x+C_1x \\ 2=-A_1 \end{cases}.$$

Сокращаем все иксы и получаем эквивалентную систему уравнений:

$$\begin{cases} 1=A_1+B_1+C_1 \\ 1=-B_1+C_1 \\ 2=-A_1 \end{cases}.$$

Решая систему, получаем следующие значения неопределённых коэффициентов:

$$A_1=-2,\ \ B_1=1,\ \ C_1=2.$$

Таким образом, окончательное разложение подынтегральной дроби на сумму простых дробей:

$$-\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}.$$

Пример. Шаг 3. На шаге 2 получили окончательное разложение подынтегральной дроби на сумму простых дробей:

$$-\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x-1}.$$

Интегрируем изначальную рациональную функцию как сумму дробей и используем **табличный интеграл**, приводящий к натуральному логарифму:

$$\int\frac{x^2+x+2}{x\left(x^2-1\right)}dx=-\int\frac{2dx}{x}+\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{2dx}{x-1}=$$
$$=-2\ln|x|+\ln|x+1|+2\ln|x-1|=$$
$$=\ln\frac{(x+1)(x-1)^2}{x^2}+C.$$

Последнее действие с натуральным логарифмом - приведение к единому выражению под логарифмом - может требоваться при выполнении работ, но требуется не всегда.

Самостоятельная работа:

Вариант 1.

Вычислить интеграл:

1) $\int \frac{2x+3}{x^2-9}dx$; 2) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$; 3) $\int \frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$.

Вариант 2.

Вычислить интеграл:

1) $\int \frac{x^2-2}{x+1}dx$; 2) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$; 3) $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

Вариант 3.

Вычислить интеграл:

1) $\int \frac{dx}{x^4+1}$; 2) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$; 3) $\int \frac{5x}{(x-1)^3}dx$.

Вариант 4.

Вычислить интеграл:

1) $\int \frac{2x-3}{x^2-9}dx$; 2) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$; 3) $\int \frac{dx}{(x^2+x-1)^2}$.

<u>На дом: Решить по карточкам.</u>

ПР № 12: Правила замены переменной и интегрирование по частям. (2 часа)

Задание:

Вычислить определенный интеграл разными способами.

Теория к работе:

ТЕОРЕМА. Пусть функция φ(t) имеет непрерывную производную на отрезке [α,β], а=φ(α), в=φ(β) и функция f(x) непрерывна в каждой точке x вида x=φ(t), где t∈[α,β].
Тогда справедливо следующее равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Эта формула носит название формулы замены переменной в определенном интеграле.

Формула **интегрирования по частям** для вычисления определенного интеграла:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Ход работы:

Пример 1. Вычислить $\int_0^1 x\cdot(2-x^2)^5\,dx$

Положим $t=2-x^2$. Тогда $dt=d(2-x^2)=(2-x^2)'dx=-2xdx$ и $xdx=-\frac{1}{2}dt$. Если $x=0$, то $t=2-0^2=2$, и если $x=1$, то $t=2-1^2=1$. Следовательно:

$$\int_0^1 x\cdot\left(2-x^2\right)^5 dx = \int_2^1 t^5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt = -\frac{1}{2}\int_2^1 t^5 dt = -\frac{1}{2}\left(\frac{t^6}{6}\Big|_2^1\right) =$$

$$= -\frac{1}{12}\cdot\left(t^6\Big|_2^1\right) = -\frac{1}{12}\cdot\left(1-2^6\right) = \frac{21}{4}$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$

Воспользуемся заменой переменной $t=\sqrt{1+3x}$. Тогда $x=\frac{t^2-1}{3}$ и $dx=\frac{2}{3}tdt$. Если $x=0$, то $t=1$ и, если $x=5$, то $t=4$. Выполняя замену, получим:

$$\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}} = \frac{2}{9}\int_1^4\left(t^2-1\right)dt = \frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3}\Big|_1^4 - t\Big|_1^4\right) = \frac{2}{9}\left(\frac{64-1}{3}-4+1\right) = 4$$

Пример 3. Вычислить определённый интеграл $I=\int_e^{e^2}\ln x\,dx.$

Решение. Интегрируем по частям, полагая $u = \ln x$, $dv = dx$; тогда

$du = (1/x)dx$, $v = x$. По формуле находим:

$$I = x\ln x\Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} dx =$$

$$= e^2\ln e^2 - e\ln e - x\Big|_e^{e^2} =$$

$$= 2e^2 - e - e^2 + e = e^2.$$

Самостоятельная работа:

Вариант 1

Вычислить определенный интеграл:

а) методом непосредственного интегрирования $\int_{-1}^{1}(x^3+1)dx$;

б) методом замены переменной интегрирования $\int_{\pi/18}^{\pi/12}\cos 3x dx$;

в) интегрированием по частям $\int_{2}^{e} x\cdot\ln x dx$.

Вариант 2

Вычислить определенный интеграл:

а) методом непосредственного интегрирования $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$;

б) методом замены переменной интегрирования $\int_{0}^{\pi/12}\frac{dx}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$;

в) интегрированием по частям $\int_{0}^{1} x\cdot 3^x dx$.

Вариант 3

Вычислить определенный интеграл:

а) методом непосредственного интегрирования $\int_{0}^{2}4^x dx$;

б) методом замены переменной интегрирования $\int_{2}^{3} x\cdot(3-x)^7 dx$;

в) интегрированием по частям $\int_{\pi/6}^{\pi/4} x\cdot\sin 2x dx$.

Вариант 4

Вычислить определенный интеграл:

а) методом непосредственного интегрирования $\int_{2}^{3}(1+2x+3x^2)dx$;

б) методом замены переменной интегрирования $\int\limits_0^2 x\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}dx$;

в) интегрированием по частям $\int\limits_0^1 (3x+1)\cdot 2^x dx$.

На дом: Выполнить задание на карточках.

ПР № 13: Вычисление несобственных интегралов. Исследование сходимости интегралов. (2 часа)

Задание:

Вычислить несобственный интеграл, исследовать интеграл на сходимость.

Теория к работе:

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную на бесконечном промежутке $[a; +\infty)$.

Несобственным интегралом от функции f(x) по промежутку $[a; +\infty)$ называется $\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx.$$

Если указанный предел существует и конечен, то несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Если $f(x) > 0$ на $[a, +\infty)$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx < \infty$, то данный интеграл представляет собой площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямой $x = a$ и бесконечным интервалом $[a; +\infty)$.

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке $(-\infty; b]$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{B\to-\infty}\int\limits_B^b f(x)dx,$$

а на интервале $(-\infty; +\infty)$ определяется формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

где c – любое действительное число.

Если сравнить две криволинейные трапеции на рис.3.1, то конечность или бесконечность их соответствующих несобственных интегралов зависит от скорости убывания функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ при $x \to +\infty$.

Так, например, $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

В этом легко убедится, вычислив $\int_{1}^{A} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$, если $A \to +\infty$.

Если $f(x) = \frac{1}{x}$, то $\int_{1}^{A} \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_{1}^{A} = \ln A - \ln 1 = \ln A \to +\infty$ при $A \to \infty$, поэтому $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ – расходится, следовательно, и площадь соответствующей криволинейной трапеции бесконечна.

$$\int_{1}^{A} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_{1}^{A} = -\frac{1}{A} + 1$$

$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{A \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{A}\right) = 1$ – несобственный интеграл сходящийся, следовательно, площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 1$ и бесконечным промежутком $[1; +\infty)$, является конечной и равна 1.

Ход работы:

Пример 1. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{0} x \cdot e^{x} dx$.

Решение. Воспользуемся определением несобственного интеграла с бесконечным нижним пределом интегрирования и далее – формулой интегрирования по частям

$$\int_{-\infty}^{0} x\cdot e^x dx = \lim_{\beta\to-\infty}\int_{\beta}^{0} x\cdot e^x dx = \left\{\begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^x dx, & v = e^x \end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{\beta\to-\infty}\left(x\cdot e^x \Big|_{\beta}^{0} - \int_{\beta}^{0} e^x dx \right) = \lim_{\beta\to-\infty}(x\cdot e^x - e^x)\Big|_{\beta}^{0} =$$

$$= \lim_{\beta\to-\infty}(0-\beta\cdot e^{\beta} - e^0 + e^{\beta}) = \lim_{\beta\to-\infty}\left(-\frac{\beta}{e^{-\beta}} - 1 + \frac{1}{e^{-\beta}}\right) = -1.$$

Несобственный интеграл сходится.

Пример 2. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$.

Решение. Воспользуемся определением несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования. Полагаем $c=-2$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5} = \lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{-2}\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5} + \lim_{A\to+\infty}\int_{-2}^{A}\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5} =$$

$$= \lim_{B\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{(x+2)}{\sqrt{5}}\Bigg|_{B}^{-2} + \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{(x+2)}{\sqrt{5}}\Bigg|_{-2}^{A} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{B\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}0 - \operatorname{arctg}\frac{B+2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{A\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{A+2}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg}0\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(0+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\pi.$$

Самостоятельная работа:

1. Вычислить интегралы $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}, \int_0^2\frac{dx}{x^2}$ и на основании полученных результатов исследовать сходимость интегралов: а) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$, б) $\int_0^2\frac{dx}{x^3}$.

2. Исследовать сходимость интеграла

$$\int_0^1\frac{dx}{3x^3+\sqrt{x}}$$

3. Исследовать сходимость интеграла

$$\int_0^{\pi/3} \frac{\cos x dx}{\sqrt[5]{x^4}}$$

4. Исследовать сходимость несобственного интеграла

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)dx}{\sqrt{x}}$$

5. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{\ln x dx}{x^2+1}$

6. Исследовать сходимость $\int_0^2 \frac{\sqrt{\sin x}dx}{x^2(x+4)}$.

<u>На дом: Выполнить задание на карточках.</u>

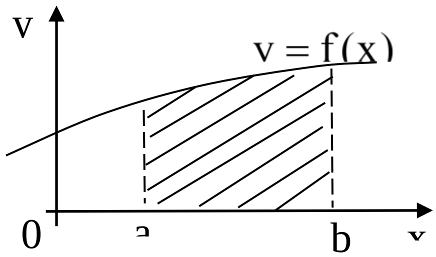
ПР № 14: Приложение интегрального исчисления. (2 часа)

Задание:

Вычислить площадь криволинейной трапеции.

Теория к работе:

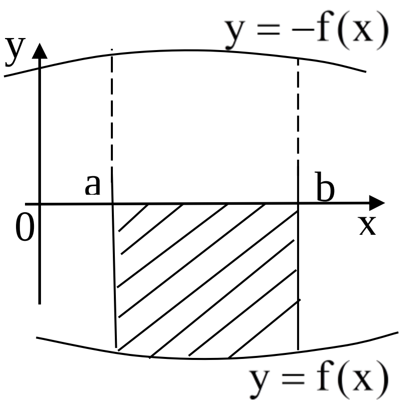
Если задана непрерывная функция $y = f(x)$ на [a,b], $f(x) > 0$, то определенный интеграл с геометрической точки зрения представляет собой площадь так называемой, криволинейной трапеции (рис.4.1).



$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (4.1)$$

Рис.4.1

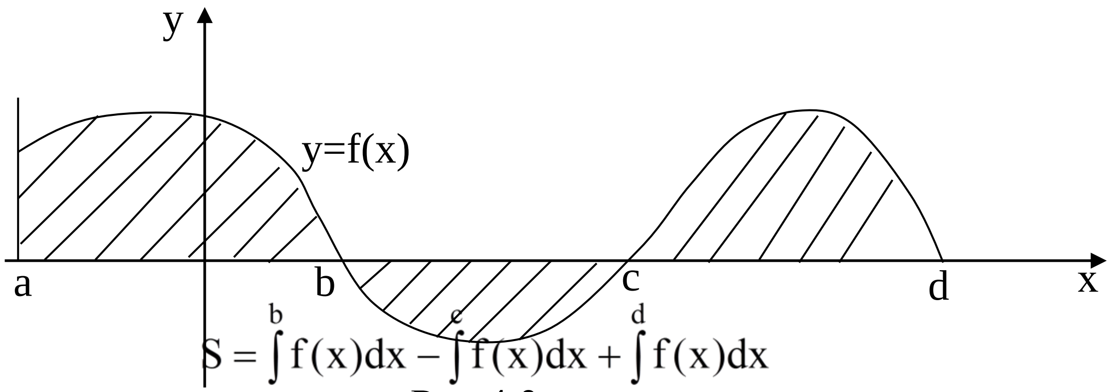
Пусть криволинейная трапеция с основанием [a,b] ограничена снизу кривой $y = f(x)$ (рис.4.2), то из соображений симметрии видим, что



$$S = -\int_a^b f(x)dx \qquad (4.2)$$

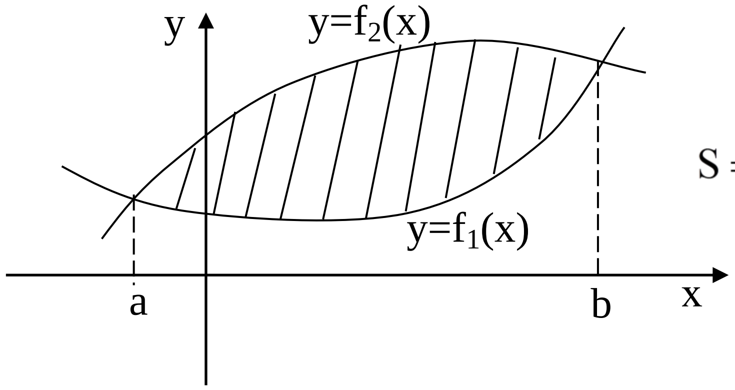
Рис.4.2

В некоторых случаях, чтобы вычислить площадь искомой фигуры, необходимо разбить ее на сумму или разность двух или более криволинейных трапеций и применить формулы (4.1) или (4.2) (рис.4.3. и 4.4)



$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx \qquad (4.3)$$

Рис.4.3



$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx \qquad (4.4)$$

Рис.4.4

Ход работы:

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$ и $y = -x$.

Решение. $y = 2x - x^2$ – парабола. Найдем ее вершину и точки пересечения с осями координат.

$y' = 2 - 2x$; $y' = 0$ или $2 - 2x = 0$, $x = 1$

Если $x_0 = 1$, то $y_0 = 2 - 1 = 1$. $M_0(1; 1)$ – вершина параболы.

$y = 0$ или $2x - x^2 = 0$ или $x(2 - x) = 0$ $x = 0$; $x = 2$.

$y = -x$ – прямая линия.

Найдем абсциссы точек пересечения прямой и параболы:

$2x - x^2 = -x$ или $x^2 - 3x = 0$ $x_1 = 0$; $x_2 = 3$.

Для вычисления площади заштрихованной области воспользуемся формулой (4.4)

$$S=\int_0^3 \left(2x-x^2-(-x)\right)dx=$$
$$=\int_0^3 (3x-x^2)dx=\left(3\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3=$$
$$=\frac{27}{2}-\frac{27}{3}=\frac{9}{2}=4{,}5\ (\text{кв.ед.}).$$

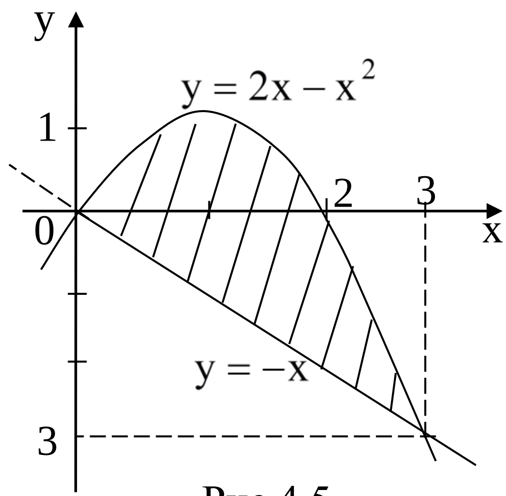
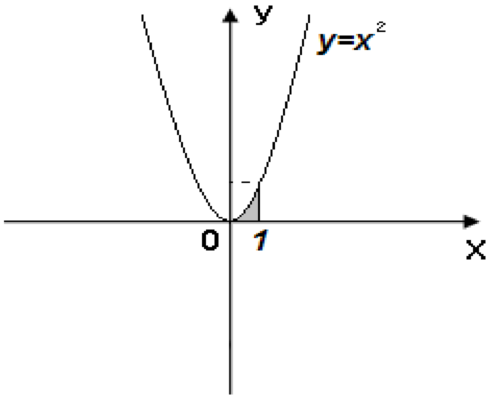
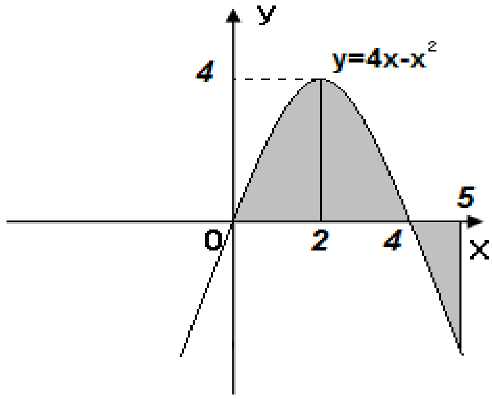


Рис.4.5

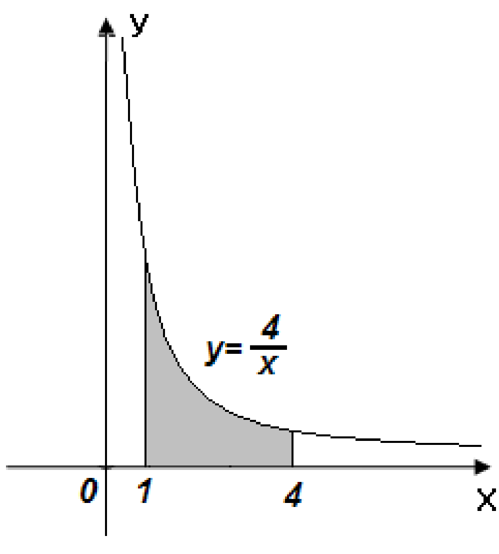
Самостоятельная работа:

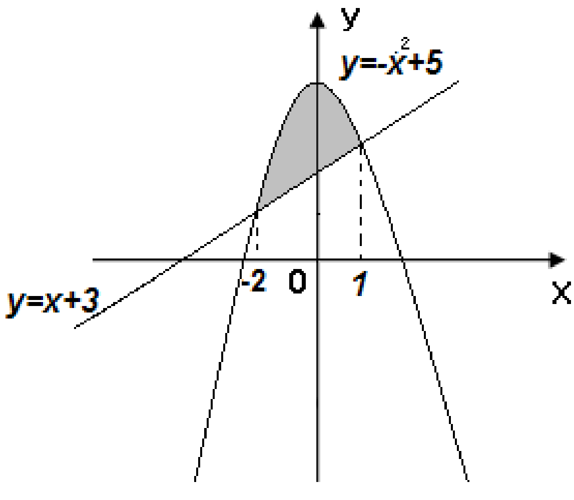
№1 Вычислить площадь:



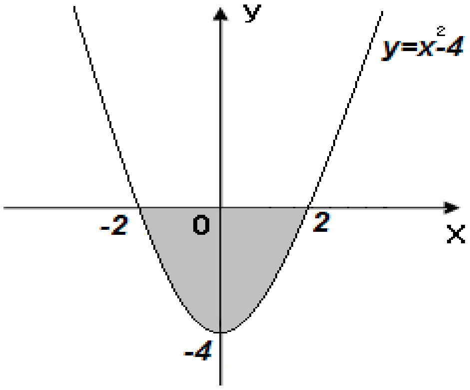


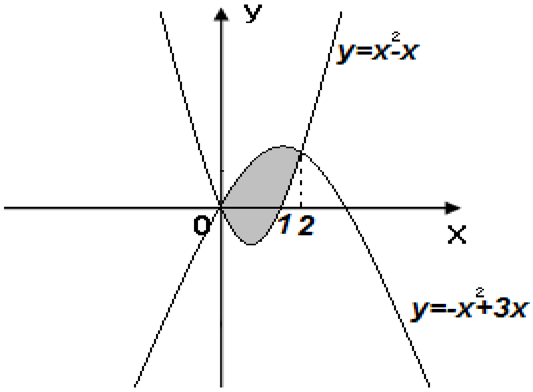
№2 Вычислить площадь:



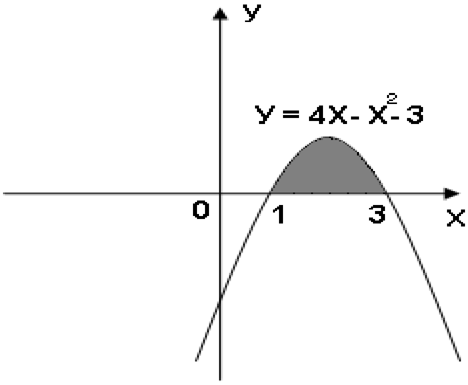


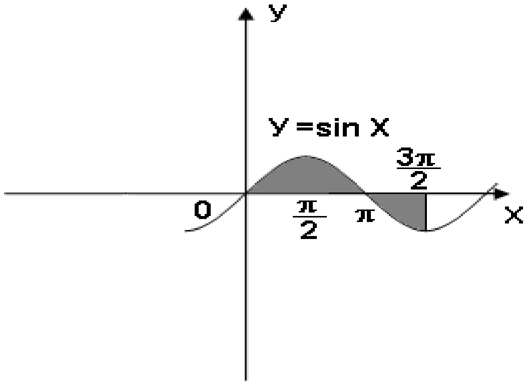
№3 Вычислить площадь :



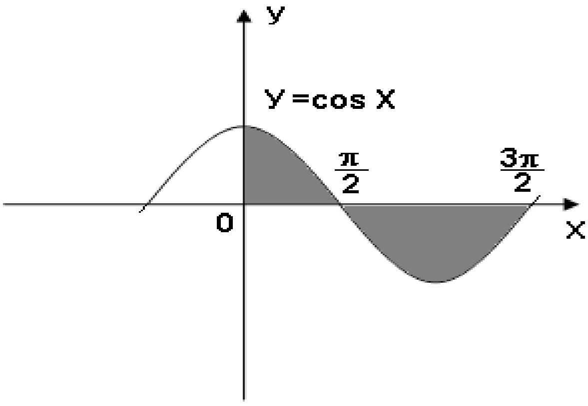


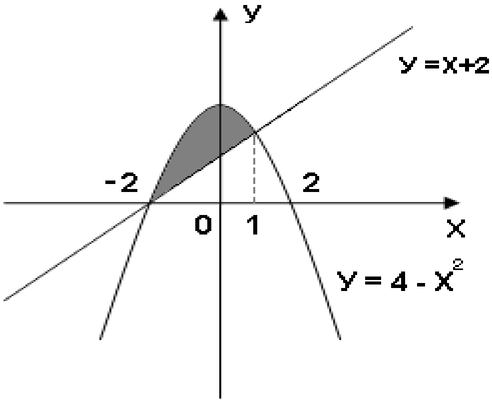
№4 Вычислить площадь:



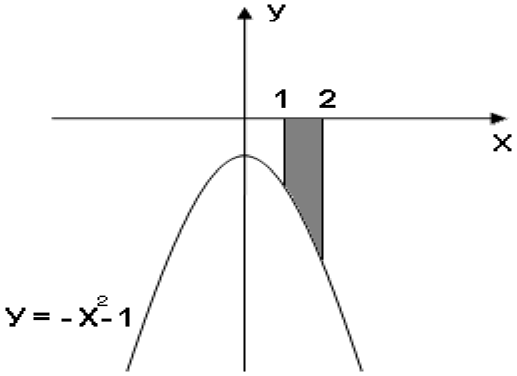


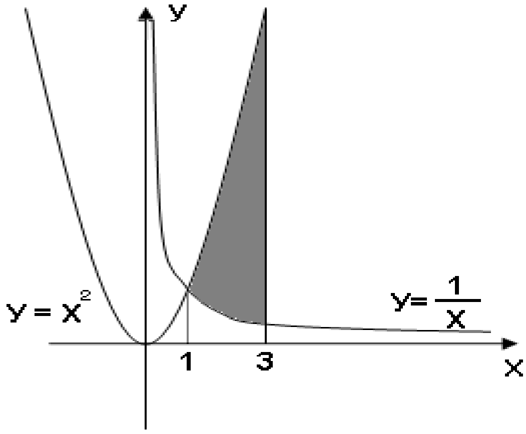
№5 Вычислить площадь:



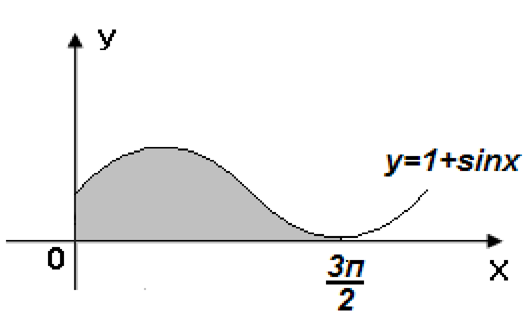


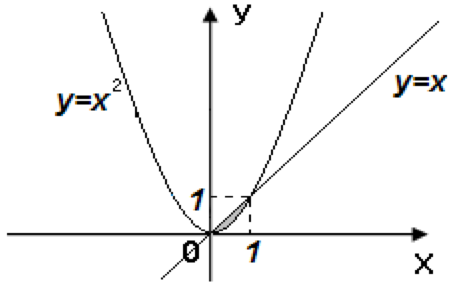
№6 Вычислить площадь:



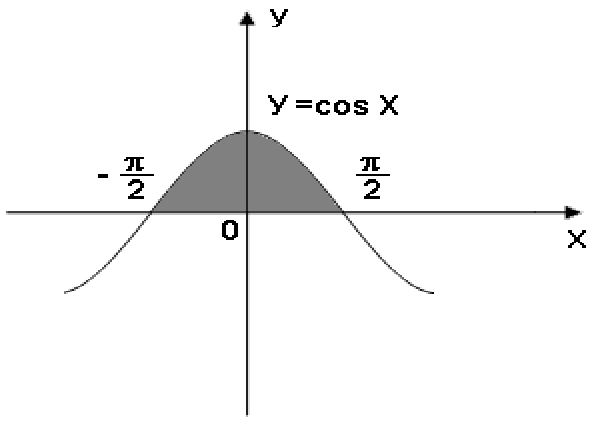


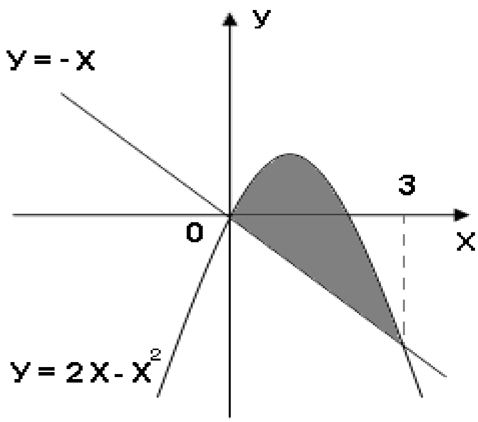
№7 Вычислить площадь:



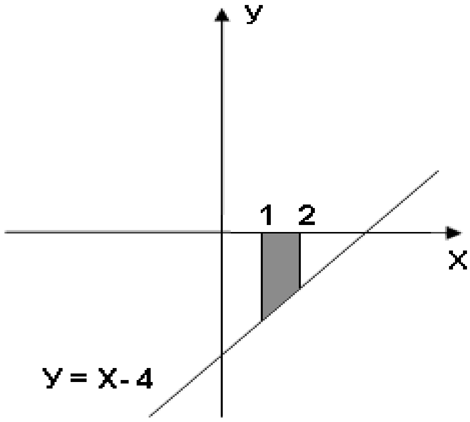


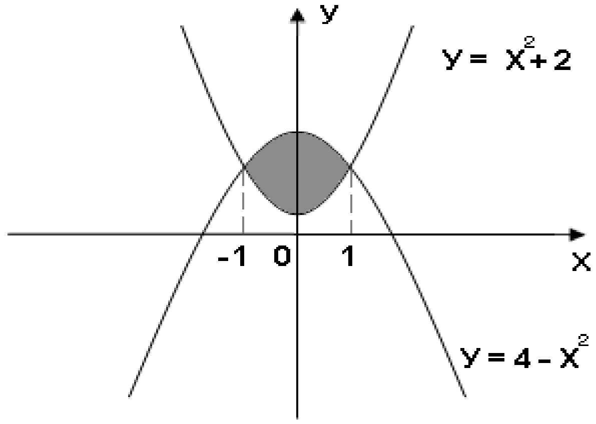
№8 Вычислить площадь:



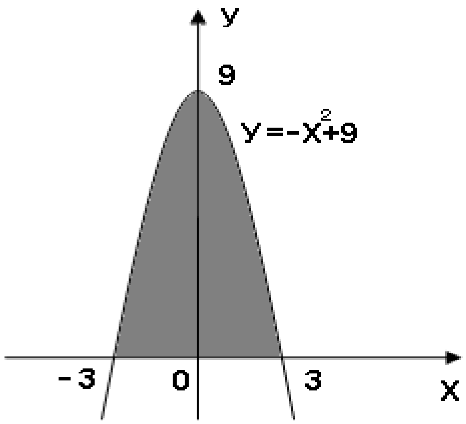


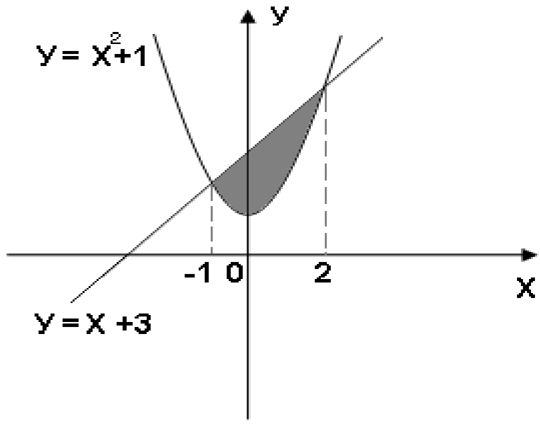
№ 9 Вычислить площадь:



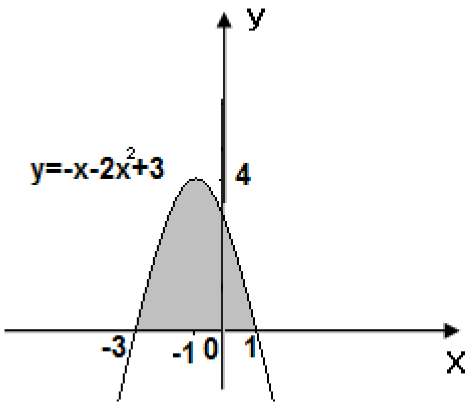


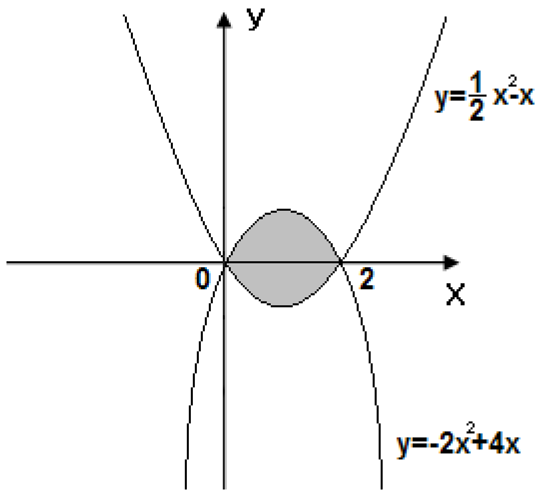
№ 10 Вычислить площадь:



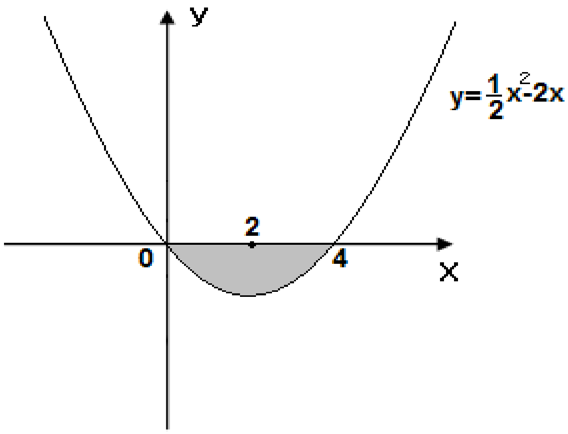


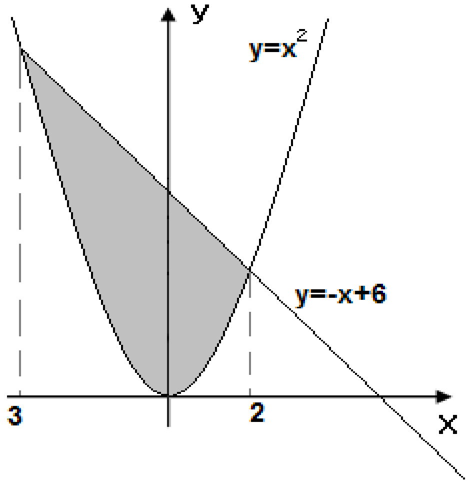
№11 *Вычислить площадь:*



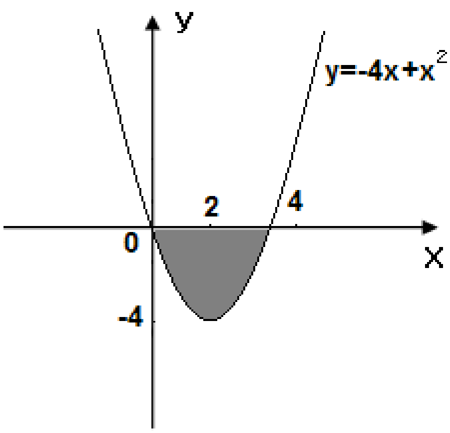


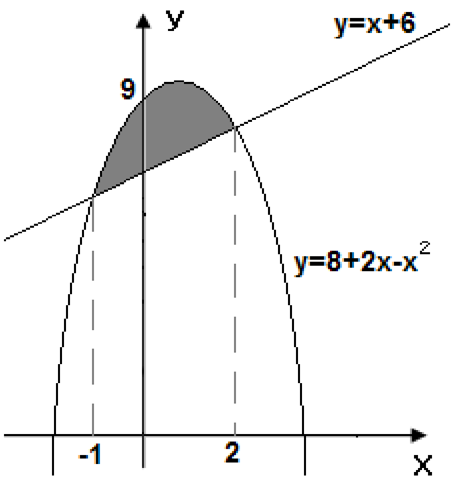
№12 Вычислить площадь:



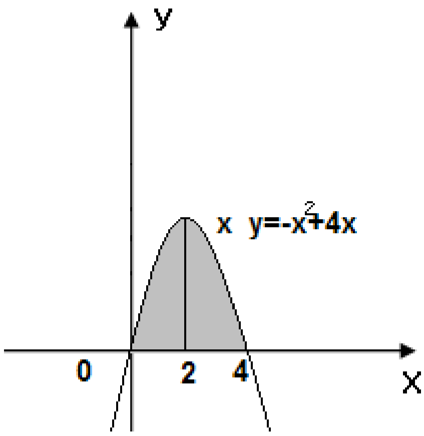


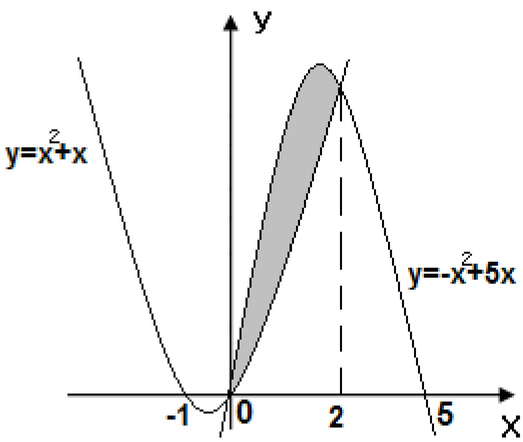
№13 Вычислить площадь:



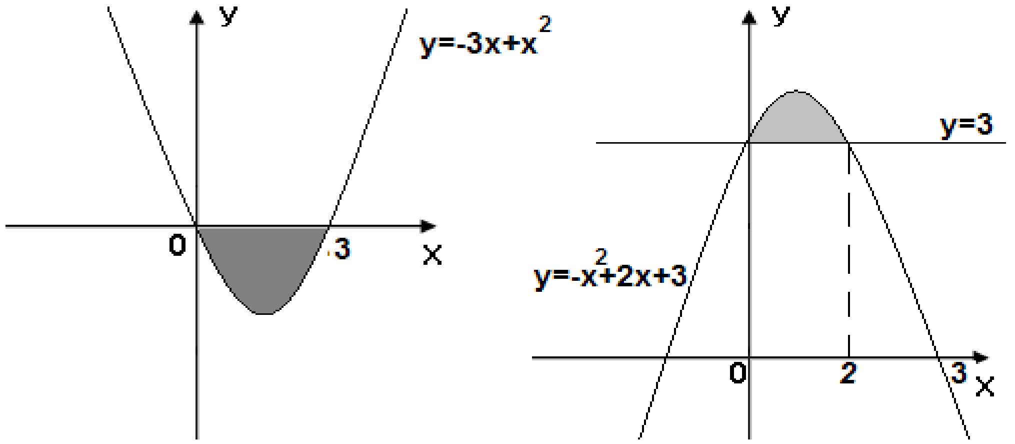


№14 Вычислить площадь:

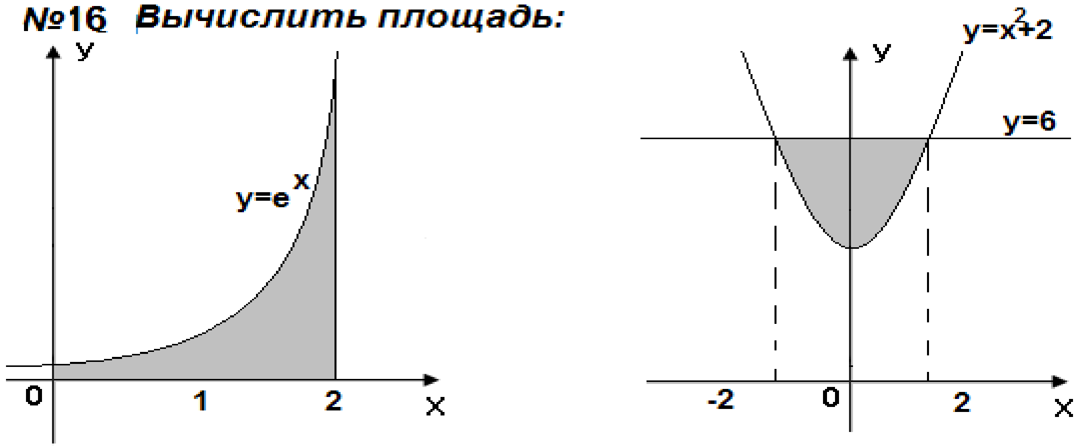




№15 Вычислить площадь:



№16 Вычислить площадь:



<u>На дом: Выполнить задание на карточках.</u>

ПР № 15: Дифференциальные уравнения первого порядка и первой степени. (2 часа)

Задание:

Решить дифференциальные уравнения первого порядка.

Теория к работе:

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные $y',\ \ y'',\ \ ...,\ \ y^{(n)}$.

$$F\left(x,\ \ y,\ \ y',\ \ y'',\ \ ...,\ \ y^{(n)}\right)=0$$

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$F\left(x,\ \ y,\ \ y'\right)=0$$

Задача нахождения частного решения ДУ, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется *задачей Коши.*

ДУ имеют либо *общее решение* (семейство кривых), либо *частное решение* (интегральная кривая).

Дифференциальное уравнение называется *уравнением с разделяющимися переменными,* если имеет следующий вид:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$$

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,$$

а затем проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

Ход работы:

Пример 1. Найти общее решение уравнения $\left(x^2y^2 - x^2y\right)dy - xy^2dx = 0, \quad x \neq 0$

Решение:

Преобразуем данное уравнение:

$$x^2y(y-1)dy = xy^2dx, \quad \text{или} \quad \frac{y-1}{y}dy = \frac{dx}{x}, \quad \text{где} \quad y \neq 0$$

Проинтегрируем обе части равенства:

$$\int \frac{y-1}{y}dy = \int \frac{dx}{x},$$

$$y - \ln|y| = \ln|x| + C_1$$

Для удобства потенцирования представим y в виде $y = \ln e^y$ и постоянную интегрирования C_1 в виде $C_1 = -\ln|C|, \quad C \neq 0$

Имеем

$$\ln e^y - \ln|y| = \ln|x| - \ln|C|$$

Потенцируя, получим

$$\frac{e^y}{y} = \frac{x}{C}, \quad \text{или} \quad Ce^y = xy, \quad C \neq 0$$

Ответ: общее решение ДУ - $Ce^y = xy$

Пример № 2. Найти частное решение ДУ $2yy' = 1 - 3x^2$, если $y_0 = 3$ при $x_0 = 1$

Решение:

Преобразуем данное уравнение:

$$2y\frac{dy}{dx}=1-3x^2,$$

$$2ydy=\left(1-3x^2\right)dx$$

Проинтегрируем обе части равенства:

$$2\int ydy=\int\left(1-3x^2\right)dx$$

Общее решение ДУ:

$$y^2=x-x^3+C$$

Подставив начальные значения $y_0=3$ и $x_0=1$, найдем *C:*

$9=1-1+C$, т. е. $C=9$

Следовательно, искомый частный интеграл будет

y^2x-x^3+9, или $x^3+y^2-x-9=0$

Ответ: частное решение ДУ - $x^3+y^2-x-9=0$

Самостоятельная работа:

Вариант 1.

1. Найдите общее решение уравнений:

   а) $x^2dx=3y^2dy$, б) $\sqrt{x}dx=\sqrt{y}dy$,

   в) $y^/-2y=0$, г) $(1+y)dx=(x-1)dy$.

2. Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

   $\frac{dy}{x^2}=\frac{dx}{y^2}$, y = 2 при $x=0$.

3. Составить уравнение кривой, проходящей через точку М (2; -3) и имеющей касательную с угловым коэффициентом $4x-3$.

Вариант 2.

1. Найдите общее решение уравнений:

   а) $x\,dx=2y\,dy$, б) $\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{y^2}$,

   в) $y^/=y+1$, г) $xydx=(1+x^2)dy$.

2. Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

   $\frac{dy}{x-1}=\frac{dx}{y-2}$, $y=4$ при $x=0$.

3. Составить уравнение кривой, проходящей через точку М (1; 3) и имеющей касательную с угловым коэффициентом $-2x$.

Вариант 3.

1. Найдите общее решение уравнений:

   а) $xdx=3y^2dy$, б) $2\sqrt{x}dx=\sqrt{y}dy$,

   в) $y^/-3y=0$, г) $(2+y)dx=(x-3)dy$.

2. Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

$\frac{2dy}{x^2} = \frac{dx}{y^2}$, y = 1 при x = 0.

Вариант 4.

1. Найдите общее решение уравнений:

а) $4x\ dx = 2y\ dy$, б) $\frac{2dx}{x^2} = \frac{dy}{2y^2}$,

в) $y^/ = 3y + 1$, г) $2xydx = (4 + x^2)dy$.

2. Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

$\frac{dy}{x-2} = \frac{dx}{y-3}$, y =5 при x = 0.

3. Составить уравнение кривой, проходящей через точку М (-1; 3) и имеющей касательную с угловым коэффициентом -2x+1.

<u>На дом: Решить дифференциальные уравнения на карточках.</u>

ПР № 16: Уравнения с разделяющимися переменными. (2 часа)

Задание:

Найти решение дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Теория к работе:

Дифференциальное уравнение *первого порядка*, **содержит**:
1) независимую переменную x;
2) зависимую переменную y (функцию);
3) первую производную функции: y'.

Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти **множество функций** $y = f(x) + C$, которые удовлетворяют данному уравнению. Такое множество функций называется **общим решением дифференциального уравнения**.

Ход работы:

Пример 1

Решить дифференциальное уравнение $xy' = y$

$y' = \frac{dy}{dx}$.

$x \cdot \frac{dy}{dx} = y$

В рассматриваемом примере переменные легко разделяются перекидыванием множителей по правилу пропорции:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

Переменные разделены. В левой части – только «игреки», в правой части – только «иксы».

Следующий этап – **интегрирование дифференциального уравнения.** Интегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

Решение дифференциального уравнения в неявном виде называется **общим интегралом дифференциального уравнения**. То есть, $\ln|y| = \ln|x| + C$ – это общий интеграл.

Вместо записи $\ln|y| = \ln|x| + C$ обычно пишут $\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|$.

В данном случае:

$$\ln|y| = \ln|Cx|$$

$$y = Cx$$

Функция представлена в явном виде. Это и есть общее решение.

Множество функций $y = Cx$, где $C = const$ является общим решением дифференциального уравнения $xy' = y$.

Придавая константе C различные значения, можно получить бесконечно много **частных решений** дифференциального уравнения.

Пример 2

Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = -2y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$

По условию требуется найти **частное решение** ДУ, удовлетворяющее начальному условию. Такая постановка вопроса также называется *задачей Коши*.

Сначала находим общее решение.

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

$$\frac{dy}{y} = -2dx$$

Интегрируем уравнение:

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int dx$$

$$\ln|y| = -2x + C^*$$

$$y = e^{-2x + C^*}$$

$$y = e^{C^*} \cdot e^{-2x}$$

Итак, общее решение: $y = Ce^{-2x}$, где $C = const$. На завершающем этапе нужно найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(0) = 2$.

Необходимо подобрать **такое** значение константы C, чтобы выполнялось заданное начальное условие $y(0) = 2$.

В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» двойку:

$$y(0) = Ce^{-2\cdot 0} = Ce^0 = C = 2$$

В общее решение $y = Ce^{-2x}$ подставляем найденное значение константы $C = 2$:

$y = 2e^{-2x}$ – это и есть нужное нам частное решение.

Пример 3

Решить дифференциальное уравнение $y' + (2y+1)ctgx = 0$

Решение: Переписываем производную в нужном нам виде:

$$\frac{dy}{dx} + (2y+1)ctgx = 0$$

Переносим второе слагаемое в правую часть со сменой знака:

$$\frac{dy}{dx} = -(2y+1)ctgx$$

$$\frac{dy}{2y+1} = -ctgxdx$$

Переменные разделены, интегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{2y+1} = -\int ctgxdx$$

$$\int \frac{dy}{2y+1} = -\int \frac{\cos x dx}{\sin x}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{d(2y+1)}{2y+1} = -\int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$$

$$\frac{1}{2}\ln|2y+1| = -\ln|\sin x| + \ln|C|$$

Решение распишу очень подробно:

$$\ln|2y+1|^{\frac{1}{2}} = \ln|\sin x|^{-1} + \ln|C|$$

$$\ln\sqrt{2y+1} = \ln\frac{1}{|\sin x|} + \ln|C|$$

$$\ln\sqrt{2y+1} = \ln\left|\frac{C}{\sin x}\right|$$

$$\sqrt{2y+1} = \frac{C}{\sin x}$$

Ответ: общий интеграл: $\sqrt{2y+1}\cdot\sin x = C$, где $C = const$

Примечание: общий интеграл любого уравнения можно записать не единственным способом. Таким образом, если у вас не совпал результат с заранее известным ответом, то это еще не значит, что вы неправильно решили уравнение.

Самостоятельная работа:

Вариант 1

1. Найти общее решение дифференциального уравнения к разделяющимися переменными.

$$xy' - y = 0$$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

$$tg\, x * y' = 1 + y, \quad \textit{если}$$
$$x = \frac{\Pi}{6}; y = -\frac{1}{2}$$

3.Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.

$$yy' = 2y - x$$

Вариант 2

1. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

$$xy' + y = 0$$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

$$(1 - x^2)\frac{dx}{dy} + xy = 0, \textit{если}\; x = 0, y = 4$$

3.Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.

$$x^2 + y^2 - 2xy * y' = 0$$

Вариант 3

1. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

$$yy' + x = 0$$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

$$dy + y\, dyx\, dx = 0, \textit{если } x = 0, y = 1$$

3.Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.

$$x^2 y' = y^2 + xy$$

Вариант 4

1. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

$$x^2 y' + y = 0$$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

$$\frac{2x - 1}{y + 1} = \frac{dx}{dy}, \textit{если } x = 5; y = 0$$

3.Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.

$$x^2 y^2 y' + yx^3 = 1$$

Вариант 5

1. Найти общее решение дифференциального уравнения к разделяющимися переменными.

$$y' = y$$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

$$(1 + y)dx - (1 - x) = 0, \textit{если } x = 0, y = 1$$

3.Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.

$$xy^2 dy = (x^3 + y^3)dx$$

Вариант 6

1. Найти общее решение дифференциального уравнения к разделяющимися переменными.

$$x^2 y' + y = 0$$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

$$2y' = y, \textit{если } x = 0; y = 1$$

3.Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.

$$(x^2 - 2y^2)dx + 2xy\, dy = 0$$

<u>На дом: Выполнить задание на карточках.</u>

ПР № 17: Однородные дифференциальные уравнения. (2 часа)

Задание:

Решить однородные дифференциальные уравнения второго порядка.

Теория к работе:

Уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0$$

называется л**инейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами p и q.**

Для каждого такого дифференциального уравнения можно записать так называемое **характеристическое уравнение:** $k^2 + pk + q = 0$. Общее решение однородного дифференциального уравнения зависит от корней характеристического уравнения, которое в данном случае будет являться квадратным уравнением. Возможны следующие случаи:

Возможные случаи	Корни характеристического уравнения	Дискриминант характеристического квадратного уравнения	Общее решение
1	Корни k_1 и k_2 действительны и различны.	D>0	$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2	Корни k_1 и k_2 действительны и равны	D=0	$y(x) = (C_1 x + C_2) e^{k_1 x}$
3	Комплексно-сопряженные корни $k_1=\alpha+\beta i$, $k_2=\alpha-\beta i$.	D<0	$y(x) = e^{\alpha x}[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)]$.

Ход работы:

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение y″−6′+5y=0.

Решение. Запишем сначала соответствующее характеристическое уравнение:

$$k^2 - 6k + 5 = 0.$$

Корни данного уравнения равны $k_1=1$, $k_2=5$. Поскольку корни действительны и различны, общее решение будет иметь вид:

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{5x},$$

где C_1 и C_2 − произвольные постоянные.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения y″−6y′+9y=0.

Решение. Вычислим корни характеристического уравнения:

$$k^2 - 6k + 9 = 0$$
$$D = 36 - 4 \cdot 9 = 0$$
$$k_{1,2} = 3.$$

Общее решение дифференциального уравнения определяется формулой:

$$y(x) = (C_1 x + C_2) e^{3x}$$

где C_1, C_2 – произвольные действительные числа.

Пример 3. Решить дифференциальное уравнение $y''+4y'+5y=0$.

Решение. Запишем характеристическое уравнение и определим его корни:

$$k^2 - 4k + 5 = 0$$
$$D = 16 - 4 \cdot 5 = -4$$
$$k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i.$$

Таким образом, характеристическое уравнение имеет пару комплексно-сопряженных корней: $k_1 = 2 + i$, $k_2 = 2 - i$, $\alpha=2$, $\beta=1$. В этом случае общее решение выражается формулой:

$$y(x) = e^{2x}[C_1 \cos x + C_2 \sin x],$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Самостоятельная работа:

Вариант 1.

1. Найдите общее решение уравнения:

а). $y^{//} = 2x$;
б) $y^{//} = x^{-3}$;
в) $y^{//} = 8x^3 + 1$;
г) $y^{//} = 2\cos x$;
д) $y^{//} = \sqrt{x}$.

2. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения:

а). $y''+3y' = 0$.
б). $y''+2y'+2y = 0$.
в). $y''-6y'+9y = 0$.
г). $y''-5y'+6y = 0$.

3. Найти частное решение дифференциального уравнения:
$y''-3y'-4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Вариант 2.

1. Найдите общее решение уравнения:

а) $y^{//} = 5x$;
б) $y^{//} = x^{\frac{1}{3}}$;
в) $y^{//} = 3x^2 - 5$;
г) $y^{//} = 3\,sin\,x$;
д) $y^{//} = \frac{2}{x^2}$.

2. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения:

а) $y''-2y'+3y=0$.

б) $y''-4y'+10y=0$.

в) $y''-2y'+y=0$.

г) $y''-y'-12y=0$.

3. Найти частное решение дифференциального уравнения:

$y''+3y'+2y=0$, $y(0)=-1$, $y'(0)=3$.

Вариант 3.

1. Найдите общее решение уравнения:

а). $y^{//}=6x$;

б) $y^{//}=x^{-4}$;

в) $y^{//}=3x^2-2$;

г) $y^{//}=2\sin x$;

д) $y^{//}=2\sqrt{x}$.

2. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения:

а) $y''+49y'=0$.

б) $y''+6y'+13y=0$.

в) $y''-8y'+16y=0$.

г) $y''-4y+8y=0$.

3. Найти частное решение дифференциального уравнения:

$y''-4y'+3y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Вариант 4.

1. Найдите общее решение уравнения:

а) $y^{//}=3x$;

б) $y^{//}=x^{\frac{2}{3}}$;

в) $y^{//}=4x^3-3$;

г) $y^{//}=sin\,x$;

д) $y^{//}=\frac{3}{x^4}$.

2. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения:

а) $y''-3y'+2y=0$.

б) $y''+14y'+49y=0$.

в) $y''-4y'+4y=0$.

г) $y''+6y'+25y=0$.

3. Найти частное решение дифференциального уравнения:

$y''-10y'+25y=0, y(0)=2, y'(0)=8$.

<u>На дом: выполнить задания по карточкам.</u>