Системы счисления

Введение

В данной главе рассмотрим общие положения, касающиеся систем счисления. Для упрощения изложения опустим достаточно большой блок выкладок из теории множеств, при желании познакомиться с ними можно по ссылкам [1], [2].

Что такое система счисления

Система счисления – символический метод записи чисел, представление чисел с помощью письменных знаков [3].

Система счисления представляет собой набор правил, который позволяет записывать числа, определяет их структуру и методы работы с ними.

Существует великое множество различных систем счисления – это и известная нам из уроков истории «римская» система счисления, и привычная «десятичная» система счисления, которой мы пользуемся при выполнении арифметических операций, и еще несколько десятков разновидностей.

В рамках данного материала мы рассматриваем рациональные числа в позиционных системах счисления с базисом вида $\{N^0, N^1, N^2\ldots\}$, где N – целое число не меньше, чем 2. Забегая вперед, N – основание системы счисления, значения, перечисленные в базисе, - веса разрядов.

Иррациональные, комплексные и числа с базисами другого вида в данном учебном материале не обсуждаются. Ознакомиться с материалом о них можно по ссылкам [4], [5], [6].

Автор: Евгений Джобс
Проект: Информатика с Джобсом

Про числа и их представление

Мы используем числа, чтобы описать такие характеристики предмета или явления, как длину, массу или количество, относительно её эталона – одного метра, одного килограмма или одной штуки. Например, 3 яблока, 12,6 килограммов муки, XII век.

Числа без размерности бывают только в учебниках математики и используются исключительно для отработки навыков выполнения арифметических операций. Поэтому при решении любой задачи все получаемые числа должны интерпретироваться (иметь смысл).

Любое число записывается с помощью цифр, каждая из которых вносит определенный вклад в конечное значение. Для определения итогового значения числа́ производится сложение, XIII = 10+1+1+1 = 13, 13 = 1·10 + 3·1.

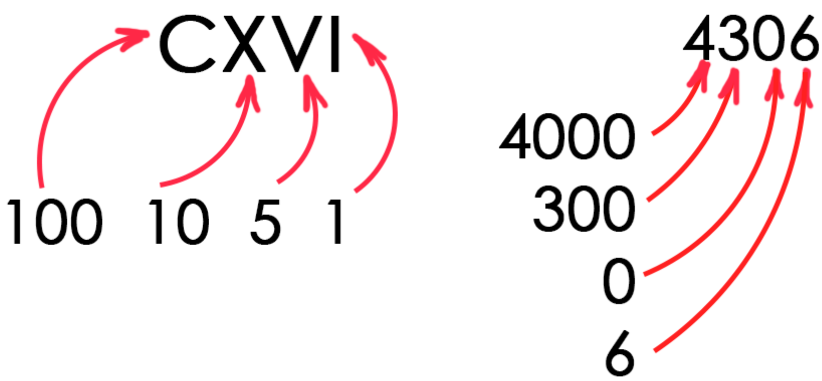

Рисунок 1. Разложение числа

В разных системах счисления используются разные принципы формирования числа. Однако в большинстве из них так или иначе используется принцип группировки измеряемых объектов. Так, например, римская цифра L означает 50 и заменяет запись из пяти X, то есть служит для более компактной записи конечного числа.

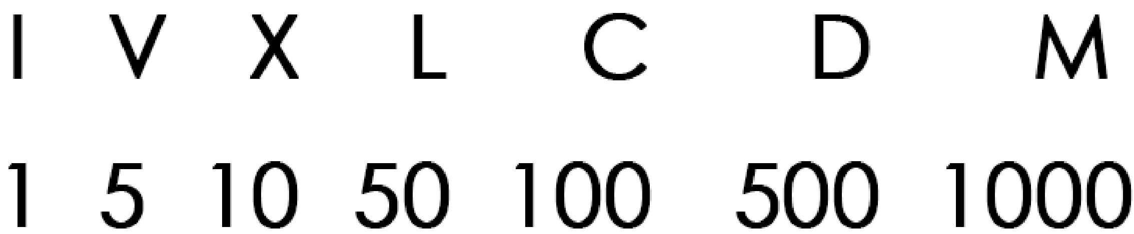

Рисунок 2. Соответствие цифр римской системы счисления десятичным числам

Для привычных нам чисел принцип немного иной, однако, также основывается на группировках. Для удобства вводится понятие «разряд».

У разряда есть две характеристики – вес и его значение. Вес определяет своего рода коэффициент (множитель) на который необходимо умножить значение разряда, чтобы узнать, какой вклад в число он вносит.

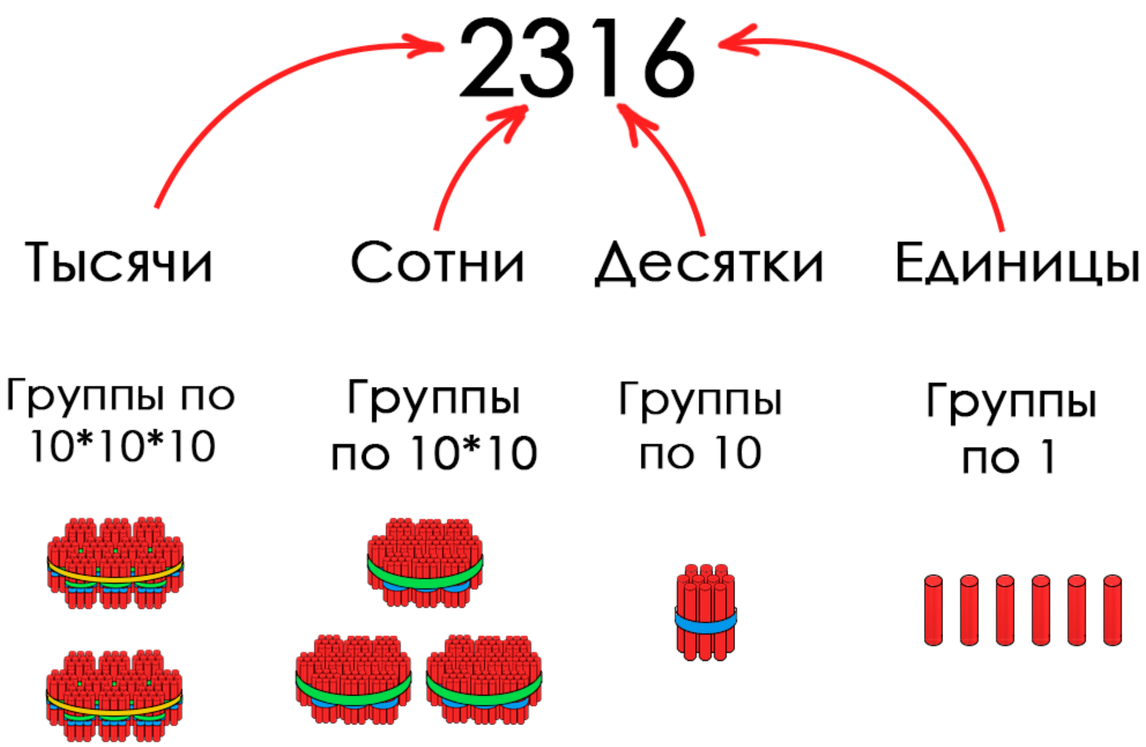

Рисунок 3. Группировка элементов при формировании числа

Идея представления чисел на пальцах

Первое положение для рассматриваемых систем счисления – фиксированный набор символов для представления чисел. Для наглядности возьмем троичную систему счисления с цифрами {0, 1, 2}.

0 для выбранной системы счисления обозначает ничего (отсутствие групп для разряда),

1 – один элемент (одна часть),

2 – два элемента (две части).

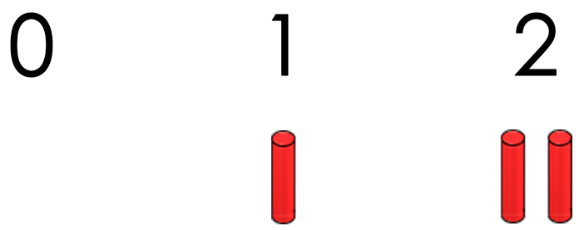

Рисунок 4. Графическая аналогия для цифр троичной системы счисления

С помощью выбранных цифр можно досчитать до 2. Чтобы считать дальше необходимо использовать два и более разрядов. Поэтому, добавляя разряд, мы как бы говорим: «берем группу в 3 раза больше».

Теперь, добавив к 2 единицу, получим одну группу по 3 (10_3).

Досчитав до 22_3 (8_{10}) понимаем, что следующее число будет уже с тремя разрядами, и в числе появятся группы по $3^2 = 9$ (100_3).

Также можно последовательно перебирать все комбинации в порядке возрастания: 0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101, …

Вклад разряда в число зависит от его позиции. Например, в числе 2101_3 единица (1) на третьей справа позиции добавляет к числу $1 \cdot 3^2$, когда самая правая единица добавляет 1.

Поэтому такие системы счисления называются позиционными.

При работе с дробной частью все также. Выбираем необходимое число частей – 1/3, 1/9, 1/27 или меньших (0.1_3, 0.01_3, 0.001_3). При этом, если разница между нужным значением и текущим меньше перебираемого разряда, присваиваем ему значение 0.

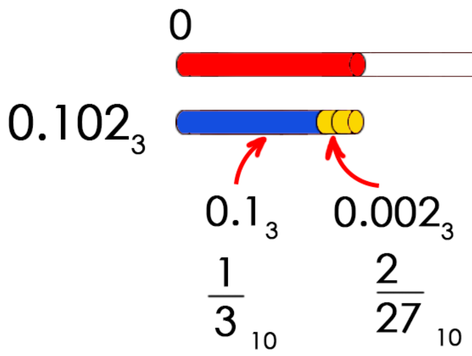

Рисунок 5. Пример «вычисления» дроби

Аналогично совершается и обратный процесс. Например, число 0.538_{10} раскладывается на части следующим образом.

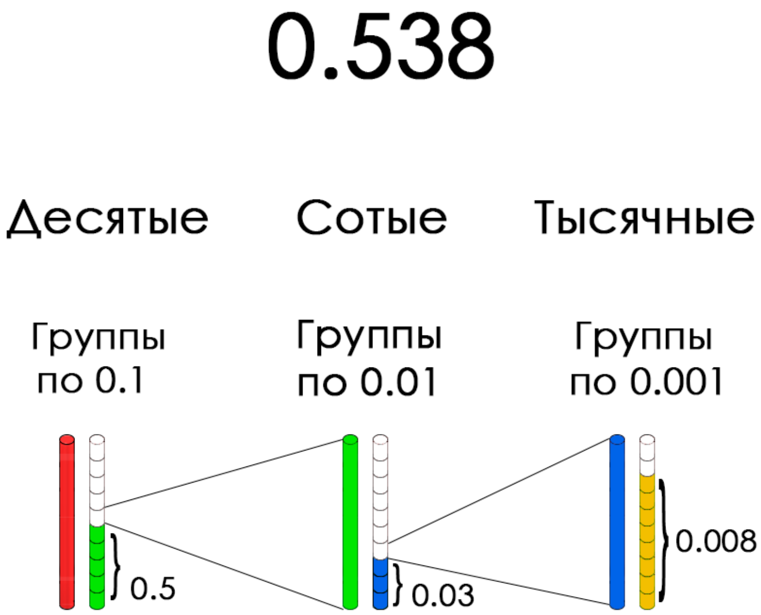

Рисунок 6. Представление десятичной дроби в виде частей

Терминология

В позиционных системах счисления счёт начинается с единиц. В общем случае число можно представить следующим образом:

$$a_3a_2a_1E,a_{-1}a_{-2}a_{-3}$$

, где E – разряд, отвечающий за количество «свободных» единиц.

С каждым шагом влево от разряда единиц вес следующего разряда увеличивается в N раз, вправо – уменьшается в N раз. Так вес разряда a_{-2} равен $1/N^2$, a_3 – N^3.

N в данном случае – основание системы счисления, число большее или равное 2. В рассматриваемых позиционных системах счисления *основанием называется количество используемых для представления чисел цифр*, подробнее см. [6].

В привычных нам числах с цифрами 0-9 основание равно 10. Обычно, основание системы счисления указывают в виде нижнего индекса около числа. Для универсальности основание системы счисления всегда записывается в десятичной системе счисления.

Символы, используемые для представления числа, образуют алфавит.

A_2 = {0, 1}

A_{10} = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

A_{16} = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}

Также важно понимать, что все символы, используемые для записи чисел называются цифрами. Так, например, в 16 системе счисления с алфавитом {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F} символы {A, B, C, D, E, F} также являются цифрами.

В алфавите все символы (цифры) имеют строгий порядок. Другими словами между любыми двумя символами можно однозначно определить отношение больше/меньше. Для десятичной системы счисления это означает, что $0<1<2<3<4<5<6<7<8<9$.

Одно из замечательных свойств позиционных систем счисления – цифра, обозначающая ничего. Обычно в качестве такой цифры используется 0. Наличие такого символа позволяет не включать в число разряды с определенными весами.

Значение разряда представляется в виде символа. Однако для анализа числа нам удобнее работать с его десятичным представлением. Поэтому каждой цифре всегда соответствует конкретное число, для нас десятичное.

Например, для шестнадцатеричной системы счисления имеем следующие соответствия.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Понимание, как строятся такие соответствия, пригодится нам дальше.

Разряды в числе делят на две категории – значащие и незначащие.

Значащий разряд вносит в запись числа информацию о его величине. Так, например, в числе 102 все разряды значащие, несмотря на то, что в нем есть один 0. В данном случае 0 говорит нам о том, что нет групп по 10. Однако записанная в разряде сотен единица не определяла бы сотни, если бы в числе не было 0.

Незначащий разряд – разряд, который не имеет в числе смысла. Так, например, мы можем убрать ведущие нули в целой части, которые могли быть записаны для удобства, или нули, на которые оканчивается часть после запятой.

В числе 00023405.20980000 первые три и последние 4 нуля являются незначащими, потому что не вносят в записанное число никакой информации.

Словарь:

Алфавит – упорядоченный набор символов, используемый для записи чисел в системе счисления.

Цифра – символ, используемый в качестве значений разрядов. Все символы алфавита в системе счисления называют цифрами.

Основание – количество используемых для представления чисел цифр. Количество цифр в алфавите.

Разряд – позиция в числе.

Номер разряда – положение разряда относительно разряда единиц. Разряд единиц считается нулевым. Номера разрядов увеличиваются справа налево, уменьшаются, соответственно, слева направо.

Вес разряда – множитель, на который нужно домножить значение разряда, чтобы определить, какой вклад в число вносит разряд. В рассматриваемых системах счисления равен основанию в степени номера разряда.

Значение разряда – количественное значение цифры, записанной в разряде.

Развернутая запись числа

Теперь разберемся, что же это за веса разрядов и какой в них смысл.

Для примера возьмем число 342.05_{10}.

Начнем с простого – цифра 2 → 2·1.

При движении влево вес разряда увеличивается в 10 раз. Значит, имеем 4·10., затем 3·100.

Теперь начнем движение вправо от разряда единиц. Разряды с отрицательными номерами означают, что мы уменьшаем вес предыдущего старшего разряда в *10* раз.

Для нашего числа - $0 \cdot \frac{1}{10}$ и $5 \cdot \frac{1}{10^2}$.

Запишем все полученные рассуждения в виде степенного ряда 10 и получим развернутую запись числа.

$$3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 2 + 0 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{10^2}$$

Развернутая запись числа позволяет переводить числа в десятичную систему счисления. Для этого достаточно представить цифры числа в N-ричной системе счисления в виде десятичных чисел.

ВАЖНО: степенной ряд, получаемый для числа в системе счисления с основанием N, не содержит коэффициентов при степенях больших или равных N.

Задача 1: представить число 452.24_7 в виде развернутой записи.

На самом деле, развернутая запись может выглядеть так:

$$4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 2 + 2 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{10^2}$$

Тут читатель может резонно заметить, что отличий с предыдущим примером не наблюдается. Хотя система счисления другая. Небольшое пояснение:

$$4_7 \cdot 10_7^2 + 5_7 \cdot 10_7^1 + 2_7 + 2_7 \cdot \frac{1}{10_7} + 4_7 \cdot \frac{1}{10_7^2}$$

Получилось найти разницу? Дело в том, что если мы используем при построении развернутой записи числа основание, в котором число записано, то всегда получаем такую запись. Вспомним про то, как изменяется вес разряда и перепишем данное выражение в десятичной системе счисления.

$$4 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7^1 + 2 + 2 \cdot \frac{1}{7} + 4 \cdot \frac{1}{7^2}$$

Задача 2: представить число $1FB.2C_{16}$ в виде развернутой записи.

Сначала представим в шестнадцатеричной системе счисления.

$$1_{16} \cdot 10_{16}^2 + F_{16} \cdot 10_{16}^1 + B_{16} + 2_{16} \cdot \frac{1}{10_{16}} + C_{16} \cdot \frac{1}{10_{16}^2}$$

Теперь представим это в десятичном представлении

$$1 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16^1 + 11 + 2 \cdot \frac{1}{16} + 12 \cdot \frac{1}{16^2}$$

Для перевода числа из любой системы счисления в десятичную необходимо построить его развернутую запись в десятичной системе счисления.

ВАЖНО: помни, что каждый разряд в числе соответствует ровно одной степени основания в развернутой записи числа.

КАК НЕЛЬЗЯ

$1FB.2C_{16} = 1\{15\}\{11\}.2\{12\}_{16} = 11511.212_{16}$

Интересное:

Нумерация разрядов в числе для определения веса разряда является логарифмической шкалой по основанию N, где N – основание системы счисления (не путать с логарифмическими системами счисления [7]).

Так, например, развернутую запись числа 42.305_{10} на графике можно представить, как набор точек.

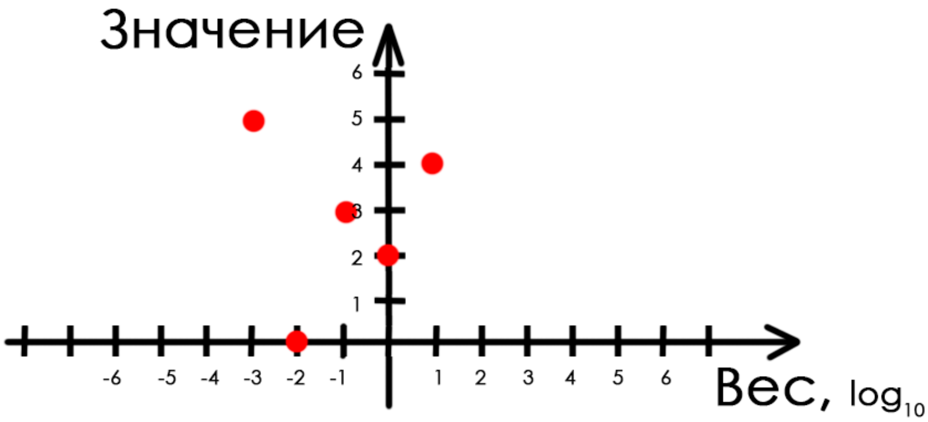

Рисунок 7. Представление числа в виде набора точек

Про перевод из десятичной системы счисления

Как мы уже знаем, любое число представимо в виде

$$x = a_k N^k + \cdots + a_1 N^1 + a_0 + a_{-1} N^{-1} + \cdots + a_{-m} N^{-m}$$

, где $k + 1$ – количество разрядов до запятой, m – после запятой, N – основание системы счисления.

<u>Перевод целой части</u>

Математическая составляющая

Представим целую часть ($x_ц$), как

$$x_ц = a_k N^k + a_{k-1} N^{k-1} + \cdots + a_2 N^2 + a_1 N^1 + a_0$$

$$x_ц = \Big(\big((a_k N + a_{k-1})N + \cdots + a_2\big)N + a_1\Big)N + a_0$$

Несложно заметить, что число раскладывается на сумму числа, кратного N, и количества единиц. Значит количество единиц можно найти, как остаток от деления числа на основание N.

Также можно заметить, что

$$\big((a_k N + a_{k-1})N + \cdots + a_2\big)N + a_1 = \left[\frac{x_ц}{N}\right]$$

, где $[A]$ – вычисление целой части выражения A.

Также заметим, что запись стала аналогичной изначальной. Следовательно, для получения значения разряда с номером 1 необходимо взять остаток от деления полученного значения на N.

Из вышесказанного можно заключить, что

$$a_0 = x_ц \,\%\, N$$

$$a_1 = \left[\frac{x_ц}{N}\right] \,\%\, N$$

$$a_2 = \left[\frac{x_ц}{N^2}\right] \,\%\, N$$

$$\ldots$$

$$a_k = \left[\frac{x_ц}{N^k}\right] \,\%\, N$$

, где % - операция взятия остатка от деления

Ручной способ

Из выведенных формул следует, что можно использовать следующий алгоритм перевода.

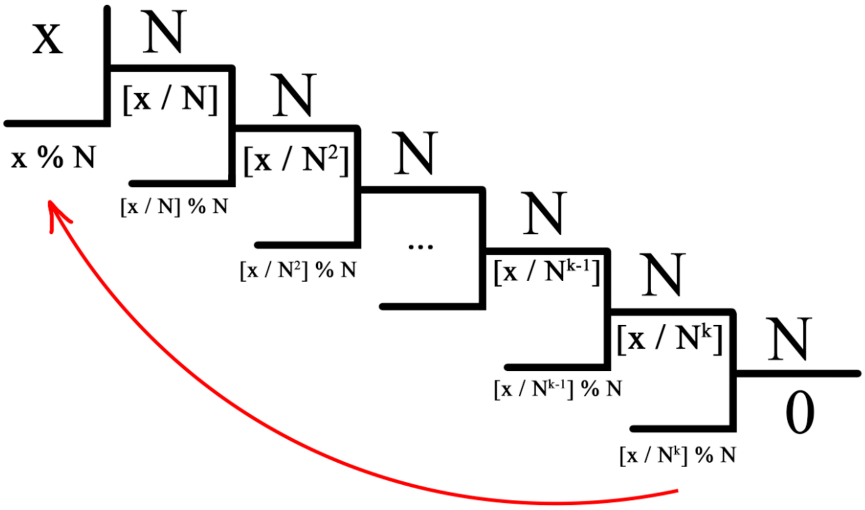

Рисунок 8. Обобщенный способ перевода в *N*-ричную систему счисления

Пример 1: Перевести число 143_{10} в семеричную систему счисления.

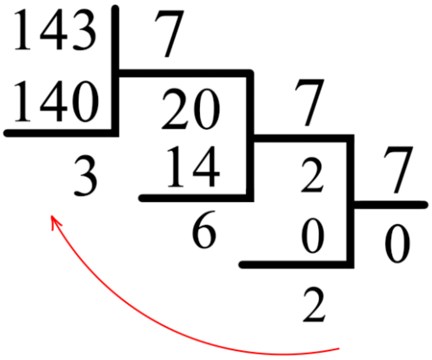

Рисунок 9. Решение задачи

Ответ: $143_{10} = 263_7$

Автор: Евгений Джобс
Проект: Информатика с Джобсом

Пример 2: Перевести число 3867_{10} в шестнадцатеричную систему счисления.

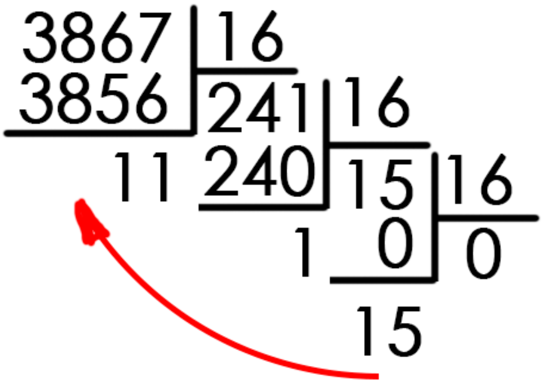

Рисунок 10. Перевод в 16-ю систему счисления

При переводе в систему счисления с основанием больше 10 необходимо помнить, что каждый получаемый остаток соответствует ровно одной цифре в конечном числе.

Поэтому необходимо найти соответствие всем остаткам в 16 системе счисления и записать ответ.

$15_{10} = F_{16}$

$11_{10} = B_{16}$

Ответ: $3867_{10} = F1B_{16}$

<u>Перевод дробной части</u>

Математическая составляющая

Дробная часть ($x_д$) соответствует выражению

$$x_д = a_{-1}N^{-1} + \cdots + a_{-m}N^{-m}$$

Данное число заведомо меньше единицы, так как все коэффициенты при степенях меньше N.

Найти a_{-1} можно умножив все выражение на N и взяв целую часть.

$$a_{-1} = [x_д \cdot N]$$

Следующий разряд можно найти так:

$$a_{-2} = [x_д \cdot N^2] \ \% \ N$$

Проверим это утверждение

$$x_д \cdot N^2 = a_{-1}N^1 + a_{-2} + \cdots + a_{-m}N^{-m+2}$$

$$[x_д \cdot N^2] = a_{-1}N^1 + a_{-2}$$

$$[x_д \cdot N^2] \ \% \ N = a_{-2}$$

Следовательно, имеем общую формулу

$$a_{-m} = [x_д \cdot N^m] \ \% \ N$$

Также данную формулу можно пояснить так: сдвигаем запятую в числе на m разрядов вправо $x_д \cdot N^m$ и вычисляем значение младшего разряда, найдя остаток от деления целой части $[x_д \cdot N^m]$ получившегося числа на N.

Ручной способ

Делается все то же самое, до достижения необходимой точности. Не любое число переводимо в виде непериодической дроби в другую систему счисления, поэтому обычно выбирают точность, с которой число будет представлено.

С этим же связаны ошибки при работе с вещественными числами в различных языках программирования – не любое вещественное число представимо в двоичной системе счисления с выбранной точностью (зависит от используемого типа данных).

Пример:

Перевести число 0.436_{10} в троичную систему счисления с точностью до 5 знаков после запятой.

Решение:

$$a_{-1} = [0.436 \cdot 3] = [1.308] = 1$$

Дальше для удобства алгоритм продолжается только с дробной частью полученного числа.

$$a_{-2} = [0.308 \cdot 3] = [0.924] = 0$$

$$a_{-3} = [0.924 \cdot 3] = [2.772] = 2$$

$$a_{-4} = [0.772 \cdot 3] = [2.316] = 2$$

$$a_{-5} = [0.316 \cdot 3] = [0.948] = 0$$

Мы достигли необходимой точности.

Ответ: $0.436_{10} \approx 0.1022_3$

Альтернативные алфавиты

Как говорилось ранее, в качестве цифр могут быть использованы любые символы. Главное, договориться о порядке их следования.

Например, в качестве алфавита мы можем использовать буквы слова КОТ. Для которых обозначить, что К < О < Т. Или К = 0, О = 1, Т = 2 при составлении соответствия значений цифр десятичным числам.

Теперь мы можем записывать числа, используя выбранный алфавит.

Так, число ООКТО будет соответствовать числу 115_{10}.

ООКТО = О·ОКККК + О·ОККК + К·ОКК + Т·ОК + О·О =

$= 1 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 1 = 115$

Задача:

Все 5-буквенные слова, составленные из букв А, К, Р, У, записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:

1. **АAAAA**
2. **АААAК**
3. **АААAР**
4. **ААААУ**
5. **АААКА**

......

Укажите номер первого слова, которое начинается с буквы К.

Решение:

Исходя из условия задачи, мы понимаем, что имеем дело со списком пятиразрядных чисел с сохранением незначащих нулей.

Алфавит = {А, К, Р, У}, следовательно, необходимо найти номер для последовательности КАААА.

КАААА = $1 \cdot 4^4 = 256$.

На первой позиции стоит число, соответствующее 0, далее – 1, 2 и т.д. Значит номер последовательности больше на 1, чем значение соответствующего числа.

Ответ: 257

Четность числа

Четное число – это целое число, которое представимо как сумма двух одинаковых целых чисел.

Математически такие числа описываются формулой

$$x = 2n, n \in \mathbb{Z}$$

Соответственно, нечетные числа описываются формулой

$$x = 2m + 1, m \in \mathbb{Z}$$

В рамках обсуждения признака четности у чисел в позиционных системах счисления нам необходимо разобраться, как определить четность суммы степенного ряда.

Сумма любого количества четных чисел четная.

$$x = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + \cdots + 2n_k$$

$$x = 2(n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k)$$

, где k – количество слагаемых в сумме.

Сумма нечетных чисел определяется их количеством. Если нечетных чисел в сумме нечетное количество – сумма нечетна, если четное количество – четна.

$$x = (2m_1 + 1) + (2m_2 + 1) + (2m_3 + 1) + \cdots + (2m_k + 1)$$

Для нечетного $k = 2a + 1$

$$x = 2(m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_k) + 1 \cdot k$$

$$x = 2(m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_k) + (2a + 1)$$

$$x = 2(m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_k + a) + 1$$

Для четного $k = 2a$

$$x = 2(m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_k) + 1 \cdot k$$

$$x = 2(m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_k) + (2a)$$

$$x = 2(m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_k + a)$$

Произведение четного числа с любым другим четное.

Четное и нечетное $2n \cdot (2m+1) = 2(2nm+n)$

Четное и четное $2n_1 \cdot 2n_2 = 2(2n_1 n_2)$

Произведение двух нечетных чисел нечетное

$$(2m_1+1)(2m_2+1) = 4m_1 m_2 + 2m_1 + 2m_2 + 1 = \\ = 2(2m_1 m_2 + m_1 + m_2) + 1$$

Теперь вернемся к системам счисления, конкретно к развернутой записи числа.

$$x_{ц} = a_k N^k + a_{k-1} N^{k-1} + \cdots + a_2 N^2 + a_1 N^1 + a_0$$

При анализе числа на четность первое, что необходимо определить, это четность основания системы счисления.

При четном основании имеем N^n – четное число, при $n \geq 1$.

Следовательно,

1) Произведение $a_n N^n$ – четное,
2) Сумма $a_k N^k + a_{k-1} N^{k-1} + \cdots + a_2 N^2 + a_1 N^1$ четна, так как все слагаемые четные,
3) a_0 определяет четность числа.

При нечетном основании имеем N^n – нечетное число, при $n \geq 0$.

Следовательно,

1) Четность $a_n N^n$ определяется значением a_n,
2) $a_k N^k + a_{k-1} N^{k-1} + \cdots + a_2 N^2 + a_1 N^1 + a_0$ четное, если количество нечетных слагаемых четно,
3) Четность числа определяется количеством нечетных разрядов в числе: четное количество нечетных разрядов – число четное, нечетное количество нечетных разрядов – число нечетное.

или

3) Четность числа определяется суммой разрядов: четная сумма разрядов – число четное, нечетная сумма разрядов – число нечетное.

Список литературы

[1] «Порядковое число,» ВикипедиЯ, [В Интернете]. Available: https://ru.wikipedia.org/wiki/Порядковое_число. [Дата обращения: 30 07 2021].

[2] «Мощность множества,» ВикипедиЯ, [В Интернете]. Available: https://ru.wikipedia.org/wiki/Мощность_множества. [Дата обращения: 30 07 2021].

[3] «Система счисления,» [В Интернете]. Available: https://ru.wikipedia.org/wiki/Система_счисления. [Дата обращения: 03 08 2021].

[4] «Иррациональное число,» [В Интернете]. Available: https://ru.wikipedia.org/wiki/Иррациональное_число. [Дата обращения: 30 07 2021].

[5] «Комплексное число,» [В Интернете]. Available: https://ru.wikipedia.org/wiki/Комплексное_число. [Дата обращения: 31 07 2021].

[6] Е. А. Еремин и К. Ю. Поляков, «Насколько правильно мы рассказываем школьникам про количество цифр в разных системах счисления?,» *Информатика в школе,* № 6, pp. 8-18, 2020.

[7] «Логарифмическая система счисления,» [В Интернете]. Available: https://ru.wikipedia.org/wiki/Логарифмическая_система_счисления. [Дата обращения: 01 08 2021].