АЛГЕБРА

ОГЭ 2019

МОДУЛЬНЫЙ КУРС

ОГЭ 2019

И. В. Ященко
С. А. Шестаков

ПО МАТЕМАТИКЕ от А до Я

МОДУЛЬНЫЙ КУРС

ФГОС

АЛГЕБРА

- методические рекомендации с разбором задач
- тренинги к каждому заданию
- тренировочные варианты в формате ОГЭ-2019

И. В. Ященко, С. А. Шестаков

ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс

Алгебра

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС)

Москва
Издательство МЦНМО
2019

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Я97

Ященко И. В., Шестаков С. А.

Я97 ОГЭ по математике от А до Я. Модульный курс. Алгебра. — М.: МЦНМО, 2019. — 224 с.

ISBN 978-5-4439-1349-0

Настоящее пособие является первой частью модульного курса «ОГЭ по математике от А до Я» и предназначено для подготовки к Основному государственному экзамену (ОГЭ) по математике, модуль «Алгебра».

Первая часть пособия содержит описание типов и особенностей заданий демоверсии и открытого банка задач, методические рекомендации и примеры решения задач 1—14, 21—23 модуля «Алгебра». Наряду с методическими рекомендациями и большим числом разобранных примеров она включает в себя 34 тренинга из 10 задач каждый: по два тренинга к каждому из перечисленных выше заданий ОГЭ по математике. Вторую часть пособия составили тренировочные варианты ОГЭ по математике модуля «Алгебра».

Такая структура пособия представляется универсальной, она позволяет познакомиться со всем спектром заданий открытого банка ОГЭ по математике и методами их решения, обеспечить качественную и полноценную подготовку к экзамену на любом уровне.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации Московский центр непрерывного математического образования включён в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, допущенных к использованию в образовательном процессе.

12+

Учебно-методическое пособие

Подписано в печать 20.08.2018 г. Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 14. Тираж 3000 экз. Заказ №   .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499)241-08-04.

Отпечатано с электронных носителей издательства.
ОАО «Тверской полиграфический комбинат». 170024, г. Тверь, пр-т Ленина, 5.
Телефон: (4822) 44-42-15, (495) 748-04-67, Телефон/факс: (4822) 55-42-15.

ISBN 978-5-4439-1349-0

Предисловие

Настоящее пособие является первой частью модульного курса «ОГЭ по математике от А до Я» и предназначено для подготовки к Основному государственному экзамену (ОГЭ) по математике (модуль «Алгебра», задания 1—14 первой части варианта ОГЭ по математике и задания 21—23 второй его части).

Каждое задание первой части работы оценивается одним баллом, каждое задание второй части — максимум двумя баллами. Для успешного прохождения итоговой аттестации необходимо набрать 8 баллов, из которых не менее двух должны быть получены за решение геометрических задач.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Пособие состоит из двух частей. Первая часть содержит описание типов и особенностей заданий демоверсии и открытого банка задач (именно на его основе формируются варианты экзаменационной работы), методические рекомендации и примеры решения задач модуля «Алгебра» открытого банка. Наряду с методическими рекомендациями и большим числом разобранных примеров она включает в себя 34 тренинга из 10 задач каждый: по два тренинга к каждому из заданий 1—14 и 21—23 для отработки навыков их решения.

При самостоятельной работе с пособием следует сначала прочитать методические рекомендации к соответствующему заданию ОГЭ, затем попытаться выполнить подготовительные задания (они составляют первый тренинг) и понять, какие задачи решены неправильно. Повторив теоретический материал и еще раз обратившись при необходимости к методическим рекомендациям, следует выполнить зачетные задания (они составляют второй тренинг). Отметим, что задания в пособии подобраны так, чтобы читатель мог ознакомиться со всем спектром задач соответствующего модуля открытого банка ОГЭ по математике и по окончании работы с пособием чувствовать себя на экзамене уверенно и спокойно.

Вторую часть пособия составили тренировочные варианты ОГЭ по математике (модуль «Алгебра», задания 1—14 и 21—23).

Надеемся, что пособие окажется полезным как выпускникам основной школы, так и учителям и методистам, позволив им лучше ориентироваться в предстоящей итоговой аттестации.

Пособие может быть использовано для организации итогового повторения (в том числе с начала учебного года) и завершающего этапа подготовки к экзамену в 9 классе.

Авторы глубоко признательны и благодарны О. А. Васильевой за внимательное и вдумчивое чтение рукописи, замечания и предложения, в значительной степени способствовавшие улучшению пособия.

Задание 1

Краткие методические рекомендации

Задание 1 ОГЭ по математике представляет собой задачу на арифметические действия с дробями — как десятичными, так и обыкновенными. Статистика решения подобных задач на ОГЭ является удручающей, поэтому таким задачам надо уделить самое пристальное внимание, отработав с учащимися как действия с десятичными дробями, так и — особенно! — действия с обыкновенными дробями и комбинациями десятичных и обыкновенных дробей.

В случае обыкновенных дробей стандартный рецепт один — приведение дробей к общему знаменателю, если знаменатели различны. Наиболее простой случай — когда знаменатели одной или двух дробей являются делителями знаменателя другой.

Пример 1. Найдите значение выражения $\frac{2}{15}-\frac{3}{5}+\frac{2}{3}$.

Решение. Приведём дроби к общему знаменателю и выполним арифметические действия:

$$\frac{2}{15}-\frac{3}{5}+\frac{2}{3}=\frac{2-3\cdot3+2\cdot5}{15}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

Ответ. 0,2.

В более сложных случаях общий знаменатель находится как произведение знаменателей данных дробей.

Пример 2. Найдите значение выражения $\frac{5}{8}+\frac{7}{25}$.

Решение. Приведём дроби к общему знаменателю и выполним арифметические действия:

$$\frac{5}{8}+\frac{7}{25}=\frac{5\cdot25}{8\cdot25}+\frac{7\cdot8}{8\cdot25}=\frac{125+56}{200}=\frac{181}{200}=0{,}905.$$

Ответ. 0,905.

Если тема усвоена достаточно хорошо, лучше не просто находить произведение знаменателей данных дробей, а выбирать в качестве общего знаменателя их наименьшее общее кратное, когда это возможно.

Пример 3. Найдите значение выражения $\left(\frac{17}{28}-\frac{11}{21}\right)\cdot30$.

Решение. Заметим, что $28=7\cdot4$, а $21=7\cdot3$. Поэтому в качестве общего знаменателя дробей можно выбрать $7\cdot4\cdot3=84$. Приведём дроби к общему знаменателю и выполним арифметические действия:

$$\left(\frac{17}{28}-\frac{11}{21}\right)\cdot30=\left(\frac{17\cdot3}{84}-\frac{11\cdot4}{84}\right)=\frac{7}{84}\cdot30=\frac{1}{12}\cdot30=\frac{5}{2}=2{,}5.$$

Ответ. 2,5.

Пример 4. Найдите значение выражения $\left(1\frac{7}{8}-1\frac{2}{3}\right)\cdot 48$.

Решение. Обратим дроби в скобках в неправильные, приведём их к общему знаменателю и выполним арифметические действия:

$$\left(1\frac{7}{8}-1\frac{2}{3}\right)\cdot 48=\left(\frac{15}{8}-\frac{5}{3}\right)\cdot 48=\frac{45-40}{24}\cdot 48=10.$$

Ответ. 10.

В некоторых случаях при решении подобных задач бывает удобно выполнить действия, используя распределительные свойства. Например, при решении предыдущего примера после обращения дробей в скобках в неправильные можно было сначала умножить каждое из полученных в скобках слагаемых на 48. Рассмотрим ещё один пример.

Пример 5. Найдите значение выражения $18\frac{18}{19}:\frac{18}{19}$.

Решение. Имеем

$$18\frac{18}{19}:\frac{18}{19}=\left(18+\frac{18}{19}\right):\frac{18}{19}=18:\frac{18}{19}+\frac{18}{19}:\frac{18}{19}=19+1=20.$$

Ответ. 20.

Иногда можно использовать навыки рационального счёта, например, не выполняя умножение двухзначных или трёхзначных чисел, поскольку на одно из них в конце решения удаётся сократить дробь.

Пример 6. Найдите значение выражения $15\frac{15}{17}:\frac{15}{17}$.

Решение. Пример можно решить, обратив первую дробь в неправильную:

$$15\frac{15}{17}:\frac{15}{17}=\frac{15\cdot 17+15}{17}:\frac{15}{17}=\frac{15\cdot 18}{17}:\frac{15}{17}=\frac{15\cdot 18}{17}\cdot\frac{17}{15}=18.$$

Разумеется, этот пример можно было решить и аналогично примеру 5:

$$15\frac{15}{17}:\frac{15}{17}=\left(15+\frac{15}{17}\right):\frac{15}{17}=15:\frac{15}{17}+\frac{15}{17}:\frac{15}{17}=17+1=18.$$

Действия с конечными десятичными дробями обычно приводят к меньшему числу ошибок по сравнению с задачами на действия с обыкновенными дробями или комбинациями обыкновенных и смешанных дробей. Связано это, видимо, с тем, что конечные десятичные дроби как бы являются «по умолчанию» дробями «с общим знаменателем»: в самом сложном случае достаточно дописать необходимое количество нулей после запятой, чтобы получить дроби с одним и тем же числом знаков после запятой. Иногда вычисления удаётся рационализировать стандартными приёмами: вынесением за скобку общего множителя, применением формул сокращённого умножения, распределительных свойств и т. п.

Пример 7. Найдите значение выражения $0{,}987\cdot999+0{,}987$.

Решение. Вынесем за скобку общий множитель:

$$0{,}987\cdot999+0{,}987=0{,}987(999+1)=0{,}987\cdot1000=987.$$

Ответ. 987.

Пример 8. Найдите значение выражения $\dfrac{75^2-(0{,}75)^2}{75{,}75}$.

Решение. Применим к числителю данной дроби формулу разности квадратов:

$$\frac{75^2-(0{,}75)^2}{75{,}75}=\frac{(75-0{,}75)(75+0{,}75)}{75{,}75}=\frac{74{,}25\cdot75{,}75}{75{,}75}=74{,}25.$$

Ответ. 74,25.

Задания, в которых встречаются как десятичные, так и обыкновенные дроби, вызывают порой значительные затруднения у части школьников. Если знаменатели всех дробей в условии являются степенями двойки и пятёрки или произведением таких степеней, дроби лучше обратить в конечные десятичные. Если хотя бы один из знаменателей дробей отличен от степеней двойки и пятёрки или произведения таких степеней, дроби лучше обратить в обыкновенные. Рассмотрим примеры.

Пример 9. Обратите $\dfrac{3}{40}$ в десятичную дробь.

Решение. Заметим, что $40=2\cdot2\cdot2\cdot5$. Поэтому для того, чтобы обратить данную обыкновенную дробь в конечную десятичную, можно либо выполнить деление числителя дроби на её знаменатель столбиком, либо записать её в виде дроби со знаменателем, являющимся степенью числа 10. Для этого достаточно умножить числитель и знаменатель дроби на 25. Получим

$$\frac{3}{40}=\frac{3}{2\cdot2\cdot2\cdot5}=\frac{3\cdot25}{2\cdot5\cdot2\cdot5\cdot2\cdot5}=\frac{75}{1000}=0{,}075.$$

Ответ. 0,075.

Пример 10. Обратите 2,34 в обыкновенную дробь.

Решение. Имеем $2{,}34=2\dfrac{34}{100}=2\dfrac{17}{50}$.

Ответ. $2\dfrac{17}{50}$.

Пример 11. Найдите значение выражения $\left(12{,}5-6\dfrac{2}{3}\right)\cdot19{,}2$.

Решение. Обратим все дроби в неправильные обыкновенные дроби и раскроем скобки (в данном случае это наиболее рациональный способ):

$$\left(12{,}5-6\frac{2}{3}\right)\cdot 19{,}2=\left(\frac{25}{2}-\frac{20}{3}\right)\cdot\frac{96}{5}=\frac{25}{2}\cdot\frac{96}{5}-\frac{20}{3}\cdot\frac{96}{5}=$$
$$=\frac{25}{5}\cdot\frac{96}{2}-\frac{20}{5}\cdot\frac{96}{3}=5\cdot 48-4\cdot 32=112.$$

Ответ. 112.

Отметим, что если рациональный способ вычислений не очевиден, то не надо тратить время на его поиск, а следует решить задачу стандартным образом.

Пример 12. Найдите значение выражения $29:\left(11\frac{29}{45}-5{,}2\right)$.

Решение. Преобразуем выражение в скобках, приведя дроби к общему знаменателю, а затем выполним действия:

$$29:\left(11\frac{29}{45}-5{,}2\right)=29:\left(11\frac{29}{45}-5\frac{9}{45}\right)=29:6\frac{20}{45}=29:6\frac{4}{9}=$$
$$=29:\frac{58}{9}=29\cdot\frac{9}{58}=\frac{9}{2}=4{,}5.$$

Ответ. 4,5.

Подготовительные задачи

1. Найдите значение выражения $7{,}9+2{,}2$.

2. Найдите значение выражения $6{,}4-4{,}8$.

3. Найдите значение выражения $9{,}9\cdot 7{,}1$.

4. Найдите значение выражения $\dfrac{4{,}8}{0{,}4}$.

5. Найдите значение выражения $\dfrac{1}{2}+\dfrac{33}{50}$.

6. Найдите значение выражения $\dfrac{1}{25}-\dfrac{7}{50}$.

7. Найдите значение выражения $\dfrac{21}{5}\cdot\dfrac{3}{7}$.

8. Найдите значение выражения $\dfrac{6}{5}:\dfrac{4}{11}$.

9. Найдите значение выражения $-12\cdot(-8{,}6\Big)-9{,}4$.

10. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{1}{13}-2\dfrac{3}{4}\right)\cdot 26$.

Зачётные задачи

1. Найдите значение выражения $\frac{7{,}2-6{,}1}{2{,}2}$.

2. Найдите значение выражения $\frac{1{,}2}{6{,}7-7{,}3}$.

3. Найдите значение выражения $\frac{9}{4{,}5\cdot 2{,}5}$.

4. Найдите значение выражения $0{,}9\cdot(-10)^2-120$.

5. Найдите значение выражения $(6\cdot 10^2)^3\cdot(13\cdot 10^{-5})$.

6. Найдите значение выражения $(2\cdot 10^2)^4\cdot(19\cdot 10^{-6})$.

7. Найдите значение выражения $\dfrac{1}{\frac{1}{72}-\frac{1}{99}}$.

8. Найдите значение выражения $\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)\cdot 3$.

9. Найдите значение выражения $\left(1\frac{11}{16}-3\frac{7}{8}\right)\cdot 4$.

10. Найдите значение выражения $9\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2-19\cdot\frac{1}{9}$.

Задание 2

Краткие методические рекомендации

Задание 2 ОГЭ по математике представляет собой задачу на чтение и анализ данных, представленных в виде таблиц, либо задачу, связанную с записью чисел в стандартном виде и их сравнением.

Рассмотрим несколько таких задач, начав с наиболее простой.

Пример 1. В таблице даны результаты забега мальчиков 8 класса на дистанцию 60 м. Зачёт выставляется при условии, что показан результат не хуже 10,6 с.

Номер дорожки	I	II	III	IV
Время (в секундах)	10,8	9,9	10,3	11,1

а) Укажите время победителя.

б) Укажите номера дорожек, по которым бежали мальчики, получившие зачёт.

1) только I

2) только II

3) I, IV

4) II, III

Решение. а) Время победителя — наименьшее из всех, т. е. 9,9.

б) Для ответа на вопрос достаточно найти в нижней строчке таблицы числа, меньшие либо равные 10,6. Это 9,9 (вторая дорожка) и 10,3 (третья дорожка).

Ответ. а) 9,9; б) 4.

Типичной ошибкой при ответе на вопрос пункта а) является указание наибольшего времени, хотя это время соответствует худшему результату. Другой типичной ошибкой (как правило, обусловленной обычной невнимательностью при чтении условия) является указание вместо искомого значения некоторого другого, которое также может содержаться в таблице.

Пример 2. В таблице приведена информация о крупнейших городах России (по данным на 2014 год). Какой город занимает седьмое место по площади? В ответе укажите *численность населения* этого города (в тыс. человек).

Город	Население (в тыс. чел.)	Площадь (в кв. км)	Плотность (в чел./кв. км)
Екатеринбург	1412	491	2866
Казань	1191	425	1560
Москва	12 108	2511	4823
Нижний Новгород	1273	410	3100
Новосибирск	1548	506	3961
Омск	1166	573	1968
Ростов-на-Дону	1110	349	3167
Самара	1172	541	2164
Санкт-Петербург	5132	1439	3566
Челябинск	1169	500	2254

Решение. Всего в таблице представлены данные по 10 городам. Расположим числа из третьего столбика в порядке возрастания, ограничившись первыми четырьмя (седьмое место в порядке убывания будет соответствовать четвёртому месту в порядке возрастания): 349; 410; 425; 491. Значит, искомым городом является Екатеринбург, а искомая численность равна 1412 тыс. человек.

Ответ. 1412.

В более сложных случаях ответ на вопрос задания требует некоторых вычислений, а иногда сравнения и сопоставления данных.

Пример 3. В таблице приведены расстояния от Солнца до четырёх планет Солнечной системы. Какая из этих планет дальше других от Солнца?

Планета	Марс	Меркурий	Нептун	Сатурн
Расстояние (в км)	$2{,}28 \cdot 10^8$	$5{,}79 \cdot 10^7$	$4{,}497 \cdot 10^9$	$1{,}427 \cdot 10^9$

1) Марс 2) Меркурий 3) Нептун 4) Сатурн

Решение. Числа в таблице записаны в стандартном виде. Поэтому больший показатель степени числа 10 будет соответствовать большему значению расстояния. Таким образом, достаточно сравнить числа в двух последних столбцах таблицы. Поскольку показатели степени числа 10 в этих столбцах одинаковы, а $4{,}497 > 1{,}427$, из четырёх данных планет наиболее удалённой от Солнца планетой является Нептун.

Ответ. 3.

Подготовительные задачи

1. Площадь территории Австралии составляет 7680 тыс. км^2. Как эта величина записывается в стандартном виде?

1) $7{,}68 \cdot 10^7$ км^2 3) $7{,}68 \cdot 10^5$ км^2

2) $7{,}68 \cdot 10^6$ км^2 4) $7{,}68 \cdot 10^4$ км^2

2. Расстояние от Сатурна до Солнца равно 1427 млн км. В каком случае записана эта же величина?

1) $1{,}427 \cdot 10^9$ км 3) $1{,}427 \cdot 10^7$ км

2) $1{,}427 \cdot 10^8$ км 4) $1{,}427 \cdot 10^6$ км

3. Расстояние от Юпитера до его спутника Ио равно 0,4217 млн км. В каком случае записана эта же величина?

1) $4{,}217 \cdot 10^8$ км 3) $4{,}217 \cdot 10^6$ км

2) $4{,}217 \cdot 10^7$ км 4) $4{,}217 \cdot 10^5$ км

4. В таблице приведены расстояния от Солнца до четырёх планет Солнечной системы. Какая из этих планет дальше всех от Солнца?

Планета	Меркурий	Уран	Марс	Сатурн
Расстояние (в км)	$5{,}79 \cdot 10^7$	$2{,}871 \cdot 10^9$	$2{,}28 \cdot 10^8$	$1{,}427 \cdot 10^9$

1) Меркурий 3) Марс

2) Уран 4) Сатурн

5. В таблице даны результаты забега девочек 8 класса на дистанцию 60 м. Зачёт выставляется при условии, что показан результат не хуже 10,8 с.

Номер дорожки	I	II	III	IV
Время (в секундах)	10,7	10,9	9,8	11,4

Укажите номера дорожек, по которым бежали девочки, *не получившие* зачёт.

1) только II 2) только III 3) II, IV 4) I, III

6. В таблице приведены нормативы по бегу на 60 метров для учащихся 9 класса.

	Мальчики			Девочки		
Отметка	«5»	«4»	«3»	«5»	«4»	«3»
Время (в секундах)	8,5	9,2	10,0	9,4	10,0	10,5

Какую отметку получит девочка, пробежавшая 60 метров за 10,47 секунды?

1) «5» 3) «3»
2) «4» 4) норматив не выполнен

7. В таблице приведены нормативы по бегу на лыжах на 1 километр для учащихся 10 класса.

	Мальчики			Девочки		
Отметка	«3»	«4»	«5»	«3»	«4»	«5»
Время (минуты:секунды)	5:30	5:00	4:40	7:10	6:30	6:00

Какую отметку получит девочка, пробежавшая на лыжах 1 километр за 6 минут 33 секунды?

1) «5» 3) «3»
2) «4» 4) норматив не выполнен

8. Студент Сидоров выезжает из Наро-Фоминска в Москву на занятия в университет. Занятия начинаются в 9:30. В таблице дано расписание утренних электропоездов от станции Нара до Киевского вокзала в Москве.

Отправление от ст. Нара	Прибытие на Киевский вокзал
06:37	07:59
07:02	08:06
07:16	08:30
07:31	08:52

Путь от вокзала до университета занимает 35 минут. Укажите время отправления от станции Нара самого позднего (по времени отправления) электропоезда, который подходит студенту.

1) 06:37 2) 07:02 3) 07:16 4) 07:31

9. В таблице приведены размеры штрафов, установленные на территории России с 1 сентября 2013 года за превышение максимальной разрешённой скорости, зафиксированное с помощью средств автоматической фиксации.

Превышение скорости (в км/ч)	21—40	41—60	61—80	81 и более
Размер штрафа (в руб.)	500	1000	2000	5000

Какой штраф должен заплатить владелец автомобиля, зафиксированная скорость которого составила 183 км/ч на участке дороги с максимальной разрешённой скоростью 110 км/ч?

1) 500 рублей 2) 1000 рублей 3) 2000 рублей 4) 5000 рублей

10. Куриные яйца в зависимости от их массы подразделяют на пять категорий: высшую, отборную, первую, вторую, третью. Используя данные, представленные в таблице, определите, к какой категории относится яйцо массой 72,5 г.

Категория	Масса одного яйца (в г)
Высшая	75,0 и более
Отборная	65,0—74,9
Первая	55,0—64,9
Вторая	45,0—54,9
Третья	менее 45,0

1) отборная 2) первая 3) вторая 4) третья

Зачётные задачи

1. Площадь территории Канады составляет 9970 тыс. км^2. Как эта величина записывается в стандартном виде?

1) $9{,}97 \cdot 10^6$ км^2
3) $9{,}97 \cdot 10^4$ км^2
2) $9{,}97 \cdot 10^5$ км^2
4) $9{,}97 \cdot 10^3$ км^2

2. Расстояние от Нептуна до Солнца равно 4497 млн км. В каком случае записана эта же величина?

1) $4{,}497 \cdot 10^6$ км
3) $4{,}497 \cdot 10^8$ км
2) $4{,}497 \cdot 10^7$ км
4) $4{,}497 \cdot 10^9$ км

3. Расстояние от Нептуна до его спутника Тритона равно 0,3548 млн км. В каком случае записана эта же величина?

1) $3{,}548 \cdot 10^8$ км
3) $3{,}548 \cdot 10^6$ км
2) $3{,}548 \cdot 10^7$ км
4) $3{,}548 \cdot 10^5$ км

4. В таблице приведены расстояния от Солнца до четырёх планет Солнечной системы. Какая из этих планет дальше всех от Солнца?

Планета	Юпитер	Меркурий	Сатурн	Венера
Расстояние (в км)	$7{,}781 \cdot 10^8$	$5{,}79 \cdot 10^7$	$1{,}427 \cdot 10^9$	$1{,}082 \cdot 10^8$

1) Юпитер
3) Сатурн
2) Меркурий
4) Венера

5. В таблице даны результаты забега мальчиков 8 класса на дистанцию 60 м. Зачёт выставляется при условии, что показан результат не хуже 10,5 с.

Номер дорожки	I	II	III	IV
Время (в секундах)	10,3	10,6	11,0	9,1

Укажите номера дорожек, по которым бежали мальчики, *не получившие* зачёт.

1) I, IV
2) II, III
3) только III
4) только IV

6. В таблице приведены нормативы по бегу на 60 метров для учащихся 9 класса.

	Мальчики			Девочки		
Отметка	«5»	«4»	«3»	«5»	«4»	«3»
Время (в секундах)	8,5	9,2	10,0	9,4	10,0	10,5

Какую отметку получит мальчик, пробежавший 60 метров за 8,75 секунды?

1) «5»
2) «4»
3) «3»
4) норматив не выполнен

7. В таблице приведены нормативы по бегу на лыжах на 1 километр для учащихся 10 класса.

	Мальчики			Девочки		
Отметка	«3»	«4»	«5»	«3»	«4»	«5»
Время (минуты:секунды)	5:30	5:00	4:40	7:10	6:30	6:00

Какую отметку получит мальчик, пробежавший на лыжах 1 километр за 6 минут 15 секунд?

1) «5»
2) «4»
3) «3»
4) норматив не выполнен

8. Студентка Цветкова выезжает из Наро-Фоминска в Москву на занятия в университет. Занятия начинаются в 9:00. В таблице дано расписание утренних электропоездов от станции Нара до Киевского вокзала в Москве.

Отправление от ст. Нара	Прибытие на Киевский вокзал
05:55	07:11
06:29	07:41
06:37	07:59
07:02	08:06

Путь от вокзала до университета занимает 45 минут. Укажите время отправления от станции Нара самого позднего (по времени отправления) электропоезда, который подходит студентке.

1) 05:55 2) 06:29 3) 06:37 4) 07:02

9. В таблице приведены размеры штрафов, установленные на территории России с 1 сентября 2013 года за превышение максимальной разрешённой скорости, зафиксированное с помощью средств автоматической фиксации.

Превышение скорости (в км/ч)	21—40	41—60	61—80	81 и более
Размер штрафа (в руб.)	500	1000	2000	5000

Какой штраф должен заплатить владелец автомобиля, зафиксированная скорость которого составила 195 км/ч на участке дороги с максимальной разрешённой скоростью 110 км/ч?

1) 500 рублей 2) 1000 рублей 3) 2000 рублей 4) 5000 рублей

10. Куриные яйца в зависимости от их массы подразделяют на пять категорий: высшую, отборную, первую, вторую, третью. Используя данные, представленные в таблице, определите, к какой категории относится яйцо массой 77,5 г.

Категория	Масса одного яйца (в г)
Высшая	75,0 и более
Отборная	65,0—74,9
Первая	55,0—64,9
Вторая	45,0—54,9
Третья	менее 45,0

1) высшая 2) отборная 3) вторая 4) третья

Задание 3

Краткие методические рекомендации

Задание 3 ОГЭ по математике представляет собой задачу на взаимное расположение чисел на числовой (координатной) прямой, их сравнение и оценку. Рассмотрим несколько типичных примеров.

Пример 1. На координатной прямой точки A, B, C, D соответствуют числам 0,0137, 0,103, 0,03, 0,021.

Какой точке соответствует число 0,021?

1) A 2) B 3) C 4) D

Решение. Для ответа на вопрос задачи достаточно расположить данные числа в порядке возрастания, что для конечных десятичных дробей сделать совсем не сложно: $0{,}0137 < 0{,}021 < 0{,}03 < 0{,}103$. Следовательно, числу 0,021 соответствует точка B, и правильным ответом является 2.

Ответ. 2.

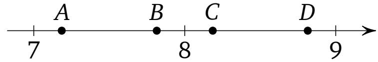
Пример 2. Какому из данных промежутков принадлежит число $\frac{3}{11}$?

1) [0,1; 0,2] 2) [0,2; 0,3] 3) [0,3; 0,4] 4) [0,4; 0,5]

Решение. Ясно, что $\frac{3}{11} < \frac{3}{10} = 0{,}3$. Поэтому третий и четвёртый варианты ответов отпадают. Сравним $\frac{3}{11} = \frac{15}{55}$ и $0{,}2 = \frac{1}{5} = \frac{11}{55}$. Поскольку $\frac{15}{55} > \frac{11}{55}$, получаем, что $\frac{3}{11} > 0{,}2$. Следовательно, правильным ответом является 2.

Ответ. 2.

Пример 3. На координатной прямой отмечены точки A, B, C, D. Одна из них соответствует числу $\sqrt{67}$. Какая это точка?



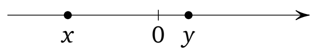
1) точка A 2) точка B 3) точка C 4) точка D

Решение. Для ответа на вопрос задачи нужно установить, между какими двумя последовательными натуральными числами заключено число $\sqrt{67}$. Ясно, что $64 < 67 < 81$, откуда $8 < \sqrt{67} < 9$. Значит, одна из точек C или D является искомой. Кроме того, очевидно, что число 67 расположено значительно ближе к числу 64, чем к числу 81. Поэтому и число $\sqrt{67}$ расположено ближе к числу 8, чем к числу 9. Значит, числу $\sqrt{67}$ соответствует точка C.

Ответ. 3.

В части таких задач не задано ни одно конкретное число и отвечать на вопрос задачи приходится исходя из взаимного расположения точек на числовой прямой, пользуясь свойствами числовых неравенств.

Пример 4. На координатной прямой отмечены числа x и y.



Какое из приведённых утверждений для этих чисел **неверно**?

1) $xy^3 < 0$ 2) $x^4y > 0$ 3) $2x + y > 0$ 4) $x - 2y < 0$

Решение. Из условия задачи следует, что $x < 0$, $y > 0$ и $|x| > |y|$. Поэтому $xy^3 < 0$, $x^4y > 0$, $2x + y < 0$, $x - 2y < 0$. Значит, неверно утверждение 3.

Ответ. 3.

Подготовительные задачи

1. Какому из данных промежутков принадлежит число $\frac{3}{7}$?

1) $[0{,}1; 0{,}2]$ 2) $[0{,}2; 0{,}3]$ 3) $[0{,}3; 0{,}4]$ 4) $[0{,}4; 0{,}5]$

2. Какое из следующих чисел заключено между числами $\frac{2}{17}$ и $\frac{4}{19}$?

1) 0 2) 0,1 3) 0,2 4) 0,3

3. Какое из следующих чисел заключено между числами $\frac{4}{11}$ и $\frac{7}{17}$?

1) 0,1 2) 0,2 3) 0,3 4) 0,4

4. Какое из данных чисел принадлежит промежутку $[6; 7]$?

1) $\sqrt{6}$ 2) $\sqrt{7}$ 3) $\sqrt{40}$ 4) $\sqrt{51}$

5. Между какими числами заключено число $\sqrt{60}$?

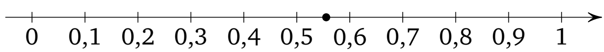
1) 20 и 22 2) 7 и 8 3) 59 и 61 4) 3 и 4

6. На координатной прямой точки A, B, C и D соответствуют числам 0,0256; 0,115; 0,04; 0,033.

Какой точке соответствует число 0,04?

1) A 2) B 3) C 4) D

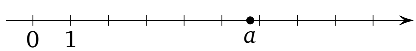
7. Одно из чисел $\frac{5}{9}$; $\frac{11}{9}$; $\frac{13}{9}$; $\frac{14}{9}$ отмечено на прямой точкой.



Какое это число?

1) $\frac{5}{9}$ 2) $\frac{11}{9}$ 3) $\frac{13}{9}$ 4) $\frac{14}{9}$

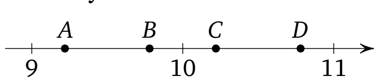
8. На координатной прямой отмечено число a.



Какое из утверждений для этого числа является верным?

1) $8-a<0$ 2) $a-5<0$ 3) $8-a>0$ 4) $a-6>0$

9. На координатной прямой отмечены точки A, B, C, D. Одна из них соответствует числу $\sqrt{85}$. Какая это точка?



1) точка A 2) точка B 3) точка C 4) точка D

10. На координатной прямой отмечены числа a, b и c.

Какая из разностей $a-b$, $a-c$, $c-b$ отрицательна?

1) $a-b$

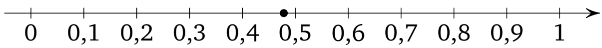
2) $a-c$

3) $c-b$

4) ни одна из них

Зачётные задачи

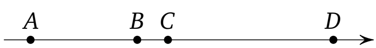
1. Одно из чисел $\frac{6}{23}$; $\frac{7}{23}$; $\frac{11}{23}$; $\frac{12}{23}$ отмечено на прямой точкой.



Какое это число?

1) $\frac{6}{23}$ 2) $\frac{7}{23}$ 3) $\frac{11}{23}$ 4) $\frac{12}{23}$

2. На координатной прямой точки A, B, C и D соответствуют числам 0,1032; $-0{,}031$; $-0{,}01$; $-0{,}104$.



Какой точке соответствует число $-0{,}031$?

1) A 2) B 3) C 4) D

3. Какое из следующих чисел заключено между числами $\frac{15}{11}$ и $\frac{13}{9}$?

1) 1,4 2) 1,5 3) 1,6 4) 1,7

4. Какому из данных промежутков принадлежит число $\frac{5}{7}$?

1) [0,5; 0,6] 2) [0,6; 0,7] 3) [0,7; 0,8] 4) [0,8; 0,9]

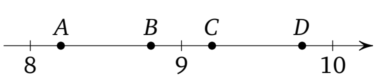
5. Между какими числами заключено число $\sqrt{59}$?

1) 7 и 8 2) 29 и 30 3) 58 и 60 4) 3 и 4

6. Какое из данных чисел принадлежит промежутку [7; 8]?

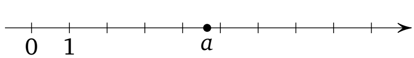
1) $\sqrt{7}$ 2) $\sqrt{8}$ 3) $\sqrt{45}$ 4) $\sqrt{60}$

7. На координатной прямой отмечены точки A, B, C, D. Одна из них соответствует числу $\sqrt{96}$. Какая это точка?



1) точка A 2) точка B 3) точка C 4) точка D

8. На координатной прямой отмечено число a.



Какое из утверждений для этого числа является верным?

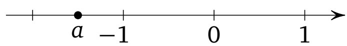
1) $5-a<0$ 2) $a-6>0$ 3) $a-5<0$ 4) $4-a>0$

9. На координатной прямой отмечены числа p, q и r.

Какая из разностей $q-p$, $q-r$, $r-p$ отрицательна?

1) $q-p$
2) $q-r$
3) $r-p$
4) ни одна из них

10. На координатной прямой отмечено число a.



Расположите в порядке возрастания числа $a-1$, $\frac{1}{a}$, a.

1) $a-1$, $\frac{1}{a}$, a
2) a, $\frac{1}{a}$, $a-1$
3) $a-1$, a, $\frac{1}{a}$
4) a, $a-1$, $\frac{1}{a}$

Задание 4

Краткие методические рекомендации

Задание 4 ОГЭ по математике продолжает линию заданий 1 и 3 и является задачей на преобразование числовых и буквенных выражений и вычисление их значений. При этом задачи открытого банка по этой позиции варианта ОГЭ можно разделить на две чётко разграниченные группы: задачи на действия с целыми степенями и задачи на действия с корнями.

Операция возведения в натуральную степень вводится в школьном курсе математики, в сущности, как сокращённая запись умножения одинаковых чисел:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}} \quad (\text{здесь } n \in \mathbb{N}).$$

Затем для всех $a \neq 0$ это определение распространяется на степени с целым отрицательным показателем: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ и нулевую степень: $a^0 = 1$. Напомним основные свойства целых степеней.

• Произведение и частное степеней с одинаковыми основаниями:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

• Произведение и частное степеней с одинаковыми показателями:

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

• Возведение степени в степень: $(a^n)^m = a^{nm}$.

При решении задач на действия со степенями обычно достаточно применить одно из двух следующих правил:

• привести степени к одному основанию,

• привести степени к одному показателю.

Пример 1. Найдите значение выражения $7^{14} : 49^6$.

Решение. Приведём степени к одному основанию и воспользуемся свойствами степеней:

$$7^{14} : 49^6 = 7^{14} : (7^2)^6 = 7^{14} : 7^{12} = 7^{14-12} = 7^2 = 49.$$

Ответ. 49.

Пример 2. Найдите значение выражения $\dfrac{4^6 \cdot 25^{12}}{50^{13}}$.

Решение. Сначала приведём степени в числителе к одному показателю, а затем приведём степени в числителе и знаменателе к одному основанию и применим свойства степеней:

$$\frac{4^6\cdot 25^{12}}{50^{13}}=\frac{(2^2)^6\cdot 25^{12}}{50^{13}}=\frac{2^{12}\cdot 25^{12}}{50^{13}}=\frac{(2\cdot 25)^{12}}{50^{13}}=\frac{50^{12}}{50^{13}}=\frac{1}{50}=0{,}02.$$

Ответ. 0,02.

Пример 3. Найдите значение выражения $4^7\cdot 3^9:12^8$.

Решение. Приведём две первые степени к одному показателю:

$$4^7\cdot 3^9=4^7\cdot 3^7\cdot 3^2=(4\cdot 3)^7\cdot 3^2=12^7\cdot 9.$$

Разделив полученное выражение на 12^8, получим

$$\frac{12^7\cdot 9}{12^8}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}=0{,}75.$$

Ответ. 0,75.

Пример 4. Найдите значение выражения $3^{-17}:21^{-19}\cdot 7^{-18}$.

Решение. Перепишем данное выражение в виде $\frac{3^{-17}\cdot 7^{-18}}{21^{-19}}$ и воспользуемся свойствами степеней:

$$\frac{3^{-17}\cdot 7^{-18}}{21^{-19}}=\frac{3^{-17}\cdot 7^{-18}}{3^{-19}\cdot 7^{-19}}=3^{-17+19}\cdot 7^{-18+19}=3^2\cdot 7=63.$$

Ответ. 63.

При преобразовании сумм, в которых слагаемыми являются степени некоторого числа, бывает удобно вынести за скобки степень с наименьшим показателем.

Пример 5. Найдите значение выражения

$$\frac{2+17\cdot 2^{-3}-3}{2+3\cdot 5^{-2}-256\cdot 5^{-3}}.$$

Решение. В числителе степень с наименьшим показателем — это 2^{-3}, а в знаменателе — 5^{-3}. Вынесем эти степени за скобки:

$$\frac{2+17\cdot 2^{-3}-3}{2+3\cdot 5^{-2}-256\cdot 5^{-3}}=\frac{2^{-3}(2^4+17-3\cdot 2^3)}{5^{-3}(2\cdot 5^3+3\cdot 5-256)}=\frac{2^{-3}(16+17-24)}{5^{-2}(250+15-256)}.$$

Выполнив действия с целыми числами, а затем со степенями, получим

$$\frac{2^{-3}\cdot 9}{5^{-3}\cdot 9}=\frac{2^{-3}}{5^{-3}}=\frac{5^3}{2^3}=\frac{125}{8}=15{,}625.$$

Ответ. 15,625.

Напомним теперь определение и основные свойства корня степени n.

Определение. Алгебраическим корнем n-й степени ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) из числа a называется такое число b, n-я степень которого равна a. Арифметическим корнем n-й степени ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) из числа a называется такое *неотрицательное* число b, n-я степень которого равна a.

Обозначается корень степени n так: $\sqrt[n]{a}$. Знак «$\sqrt[n]{}$» называется радикалом, n — показателем степени корня. Корень второй степени называется квадратным, при его обозначении степень корня не указывается: пишут $\sqrt{a}$, а не $\sqrt[2]{a}$. Корень третьей степени называется кубическим корнем и обозначается стандартным образом: $\sqrt[3]{a}$. Подавляющее большинство иррациональных выражений школьного курса математики связано именно с квадратными и (реже) кубическими корнями. Алгебраическое выражение $a(x)$ под знаком корня в записи вида $\sqrt[n]{a(x)}$ называется подкоренным выражением.

Замечание 1. Для записи алгебраического и арифметического корня используется один и тот же символ. Понятие арифметического корня вводится для того, чтобы сделать однозначным определение корня чётной степени: ведь чётные степени двух противоположных чисел одинаковы и, если при извлечении корня чётной степени не оговаривать, какое из них имеется в виду, это приведёт к различного рода противоречиям. Тем самым, когда говорят и пишут о корне чётной степени из числа, всегда (если не оговорено противное) имеют в виду арифметический корень, который по определению является неотрицательным числом. Для корней нечётной степени обычно используют определение алгебраического корня. Таким образом, *корень любой степени из неотрицательного числа является неотрицательным числом, корень нечётной степени из отрицательного числа является отрицательным числом*.

Замечание 2. Краткое определение арифметического корня чётной степени можно записать так:

$$\sqrt[2n]{a} = b \iff \begin{cases} a = b^{2n}, \\ b \geqslant 0 \end{cases} \quad (\text{здесь } n \in \mathbb{N}).$$

Отсюда следует, что арифметический корень определён только для неотрицательных чисел. В самом деле, по определению $b \geqslant 0$, но $a = b^{2n}$, и, значит, $a \geqslant 0$. Поэтому область допустимых значений корня чётной степени $\sqrt[2n]{a(x)}$ находится из условия $a(x) \geqslant 0$ неотрицательности подкоренного выражения. Область определения корня нечётной степени $\sqrt[2n+1]{a(x)}$ (здесь $n \in \mathbb{N}$) такого ограничения не предполагает: он определён при любом значении переменной, для которого имеет смысл выражение $a(x)$.

Укажем основные свойства арифметического корня (n и k — натуральные числа, бо́льшие 1, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$):

1) $\sqrt[n]{a^n} = a$;	4) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$;
2) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$;	5) $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$;
3) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$;	6) $\sqrt[n]{a^l} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^l$ (если $l \leqslant 0$, то $a \neq 0$);
	7) если $a < b$, то и $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Замечание 3. Если n и k — нечётные натуральные числа, бо́льшие 1, то приведённые свойства справедливы и для отрицательных a и b. Для корня нечётной степени укажем ещё одно полезное свойство: $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$ (знак «минус» можно «выносить» за знак корня нечётной степени и «вносить» под знак такого корня).

Замечание 4. При внесении множителя под знак корня чётной степени знак «минус» под корень не вносится, а остаётся перед корнем. При преобразовании числовых выражений проблем обычно нет: $-2\sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = -\sqrt[4]{48}$, а вот при преобразовании буквенных встречаются ошибки. Так, например, если число a отрицательно, то $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$.

Пример 6. Найдите значение выражения $\sqrt{229^2 - 60^2}$.

Решение. Воспользуемся формулой разности квадратов:

$$\sqrt{229^2 - 60^2} = \sqrt{(229-60)(229+60)} = \sqrt{169 \cdot 289} = 13 \cdot 17 = 221.$$

Ответ. 221.

Пример 7. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{3{,}4} \cdot \sqrt{11{,}9}}{\sqrt{0{,}14}}$.

Решение. Сначала упростим данное выражение, воспользовавшись свойствами корня, а затем выполним необходимые преобразования:

$$\frac{\sqrt{3{,}4} \cdot \sqrt{11{,}9}}{\sqrt{0{,}14}} = \sqrt{\frac{3{,}4 \cdot 11{,}9}{0{,}14}} = \sqrt{\frac{34 \cdot 119}{14}} = \sqrt{\frac{34 \cdot 119}{2 \cdot 7}} = \sqrt{17 \cdot 17} = 17.$$

Ответ. 17.

Подготовительные задачи

1. Найдите значение выражения
$$4^{-6}\cdot(4^3)^3.$$

2. Найдите значение выражения
$$216\cdot 6^{-2}.$$

3. Найдите значение выражения
$$\frac{(5^{-3})^6}{5^{-19}}.$$

4. Найдите значение выражения
$$\frac{3^{15}\cdot 4^{16}}{12^{14}}.$$

5. Найдите значение выражения
$$\frac{4^8}{8^5}.$$

6. Найдите значение выражения
$$\left(\sqrt{37}-8\right)\left(\sqrt{37}+8\right).$$

7. Найдите значение выражения
$$\frac{294}{\left(7\sqrt{2}\right)^2}.$$

8. Найдите значение выражения
$$8\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{15}.$$

9. Найдите значение выражения
$$\left(\sqrt{35}+2\right)^2+\left(\sqrt{35}-2\right)^2.$$

10. Найдите значение выражения
$$\frac{1}{5+2\sqrt{6}}+\frac{1}{5-2\sqrt{6}}.$$

Зачётные задачи

1. Найдите значение выражения

$$6^{-8}(6^5)^2.$$

2. Найдите значение выражения

$$256\cdot 4^{-2}.$$

3. Найдите значение выражения

$$\frac{(7^{-5})^4}{7^{-22}}.$$

4. Найдите значение выражения

$$\frac{2^{18}\cdot 6^{17}}{2^{16}}.$$

5. Найдите значение выражения

$$\frac{9^{10}}{27^6}.$$

6. Найдите значение выражения

$$\left(\sqrt{26}-6\right)\left(\sqrt{26}+6\right).$$

7. Найдите значение выражения

$$\frac{792}{\left(6\sqrt{11}\right)^2}.$$

8. Найдите значение выражения

$$2\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{11}\cdot\sqrt{55}.$$

9. Найдите значение выражения

$$\left(\sqrt{41}+3\right)^2+\left(\sqrt{41}-3\right)^2.$$

10. Найдите значение выражения

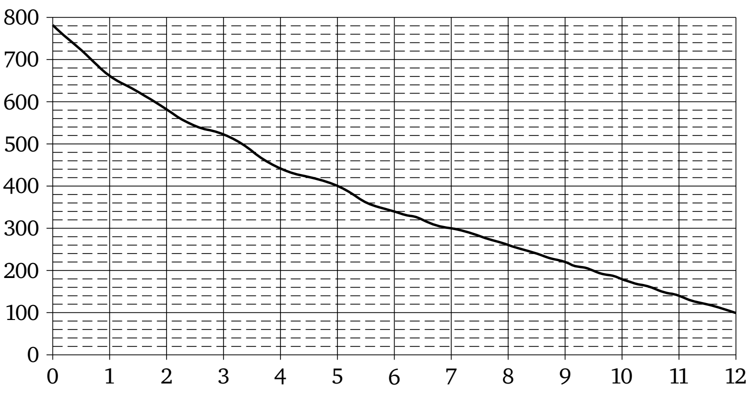
$$\frac{1}{8+3\sqrt{7}}+\frac{1}{8-3\sqrt{7}}.$$

Задание 5

Краткие методические рекомендации

Задание 5 ОГЭ по математике — это задача на чтение и анализ данных, представленных в виде графиков. Эти задачи делятся на две чётко разграниченные группы: в первой требуется найти точку оси абсцисс, ответив на вопрос типа «какого числа значение величины было равно данному?», во второй — найти наибольшее или наименьшее значение некоторой величины, т. е. точку оси ординат. Ошибочные ответы обычно обусловлены невнимательностью: перепутаны наибольшее и наименьшее значения, вместо температуры в ответе указана дата и т. п.

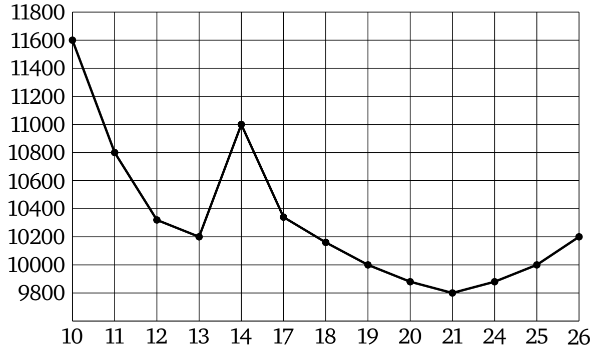
Пример 1. На графике изображена зависимость атмосферного давления от высоты над уровнем моря. На горизонтальной оси отмечена высота над уровнем моря в километрах, на вертикальной — давление в миллиметрах ртутного столба. Определите по графику, на какой высоте атмосферное давление равно 260 миллиметрам ртутного столба. Ответ дайте в километрах.



Решение. Одно деление на вертикальной оси соответствует 20 миллиметрам ртутного столба. Для ответа на вопрос задачи достаточно мысленно провести горизонтальную прямую через точку вертикальной оси, находящуюся на два деления ниже отметки 300. Эта прямая пересечёт данный график в точке с абсциссой 8.

Ответ. 8.

Пример 2. На рисунке жирными точками показана цена никеля на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 10 по 26 ноября 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена тонны никеля в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены ломаной линией. Определите по рисунку наименьшую цену никеля на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).

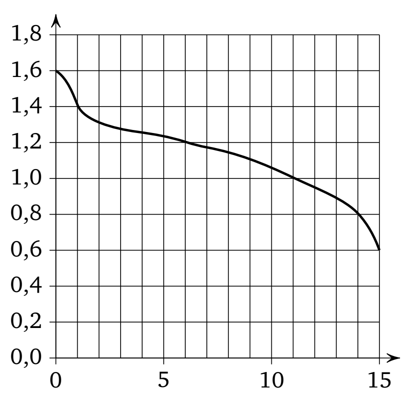


Решение. Для ответа на вопрос задачи достаточно найти самую «низкую» точку графика. Очевидно, эта точка соответствует закрытию торгов 21 ноября. Искомая цена в этот момент была равна 9800 долларам за тонну.

Ответ. 9800.

Типичной ошибкой при решении подобных задач является запись в ответе даты вместо стоимости.

Пример 3. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На графике показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по графику, на сколько вольт упадёт напряжение за первые шесть часов работы фонарика.

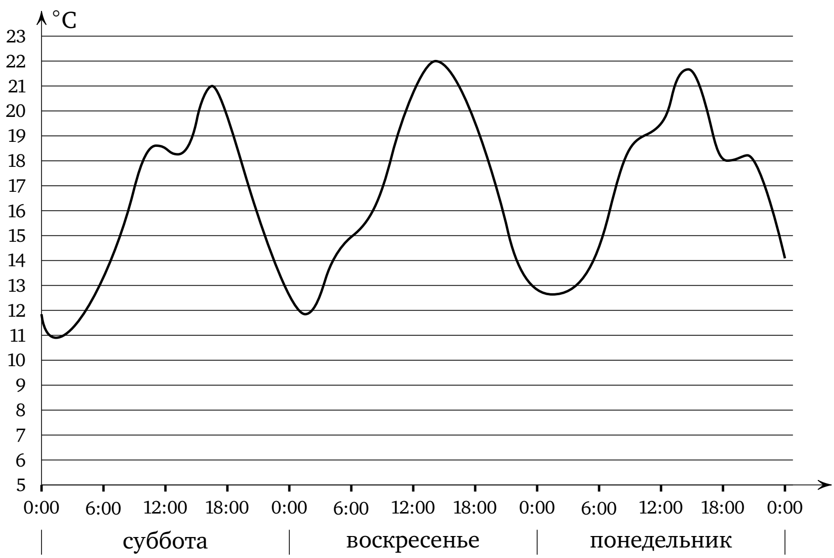


Решение. Цена деления горизонтальной оси равна одному часу. За первые шесть часов работы фонарика напряжение упадёт с 1,6 вольт до 1,2 вольт, т. е. падение напряжения составит 0,4 вольт.

Ответ. 0,4.

В более сложных случаях ответ на вопрос задания требует минимальных вычислений: нахождения разности наибольшего и наименьшего значений некоторой величины, расчёта стоимости или числа акций, подсчёта среднего арифметического и т. п.

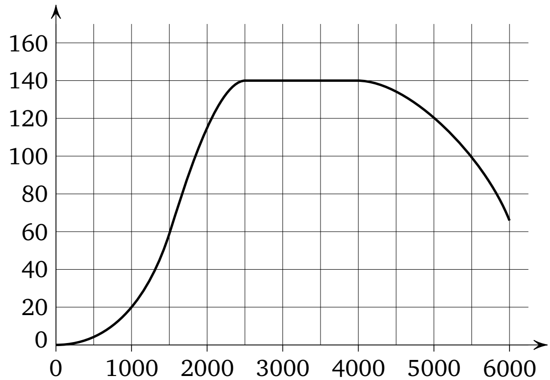
Пример 4. На графике показано изменение температуры воздуха (в градусах Цельсия) в некотором населённом пункте на протяжении трёх суток сентября. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах. Определите по графику разницу между наибольшими значениями температуры в воскресенье и субботу. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Решение. Наибольшая температура в воскресенье составила 22°, а в субботу — 21°, поэтому разница температур равна 1°.

Ответ. 1.

Пример 5. На графике изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа оборотов в минуту. На горизонтальной оси отмечено число оборотов в минуту, на вертикальной оси — крутящий момент в Н · м.



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу числа оборотов в минуту характеристику крутящего момента.

ИНТЕРВАЛЫ	ХАРАКТЕРИСТИКИ
А) 0—500 об./мин.	1) Самый быстрый рост крутящего момента при увеличении числа оборотов.
Б) 1500—2000 об./мин.	2) Крутящий момент не превышает 20Н · м на всём интервале.
В) 3000—4000 об./мин.	3) При увеличении числа оборотов крутящий момент не меняется.
Г) 4500—6000 об./мин.	4) При увеличении числа оборотов крутящий момент падает.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В	Г

Решение. На экзамене отвечать на вопросы можно, начав с самого простого для себя (для каждого такой вопрос может быть своим). Но и последовательный поиск нужного соответствия довольно быстро приводит к цели.

Начнём с первой характеристики. Рост крутящего момента происходит при росте оборотов от нуля до двух с лишним тысяч. Этим значениям соответствуют только интервалы А и Б. На интервале А одному горизонтальному делению соответствует рост менее чем на одно деление по вертикали. На интервале Б одному горизонтальному делению соответствует рост более чем на одно деление по вертикали. Поэтому характеристике 1 отвечает интервал Б.

Характеристика 2 является одной из наиболее простых для поиска нужного соответствия: крутящий момент не превышает 20 Н · м только при оборотах от 0 до 1000. Поэтому характеристике 2 отвечает интервал А.

Характеристика 3 не сложнее предыдущей для поиска нужного соответствия: при увеличении числа оборотов крутящий момент не меняется при числе оборотов от двух с лишним тысяч до 4000. Из двух оставшихся интервалов только интервал В лежит в указанных пределах. Значит, характеристике 3 отвечает интервал В, а характеристике 4 — интервал Г (в самом деле, только на этом интервале начинается падение числа оборотов двигателя).

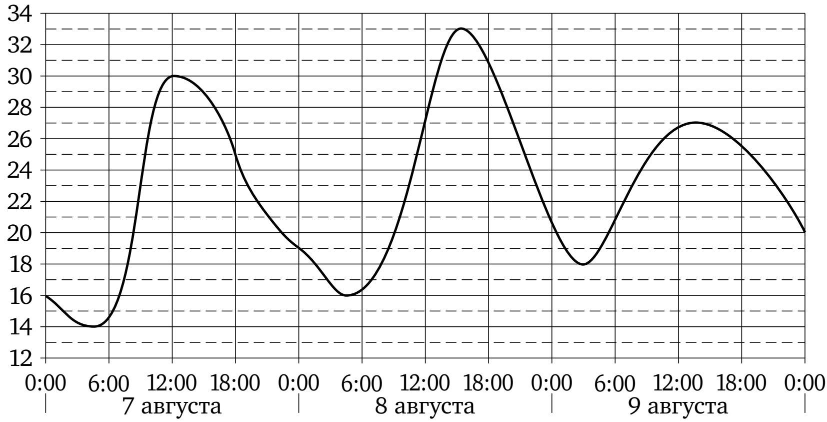
Заполним таблицу:

А	Б	В	Г
2	1	3	4

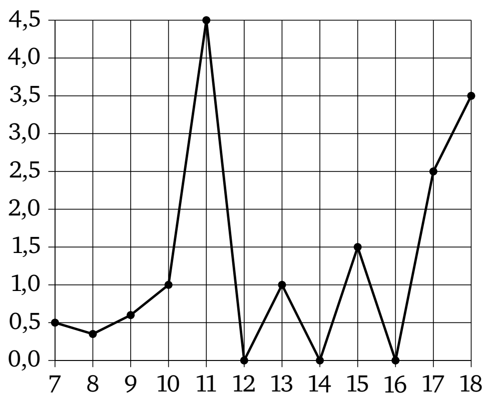
Ответ. 2134.

Подготовительные задачи

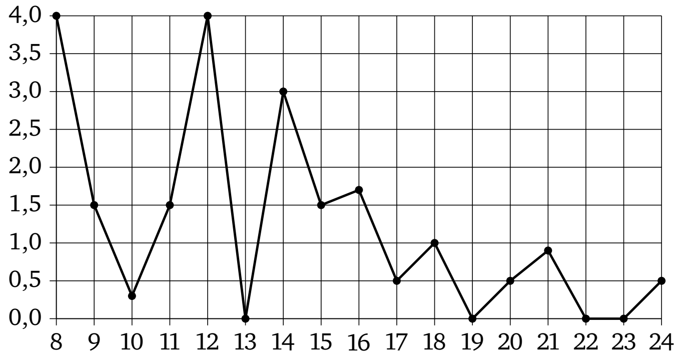
1. На графике показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указываются дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по графику наибольшую температуру воздуха 7 августа. Ответ дайте в градусах Цельсия.



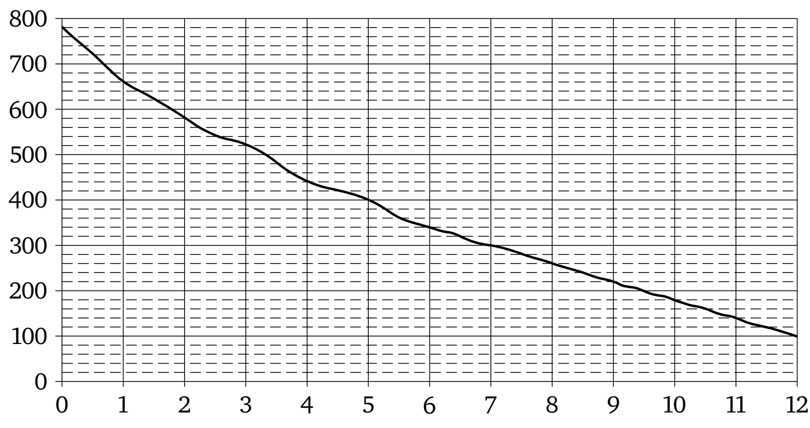
2. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Элисте с 7 по 18 декабря 2001 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены ломаной линией. Определите по рисунку, какого числа из данного периода в Элисте выпало наибольшее количество осадков.



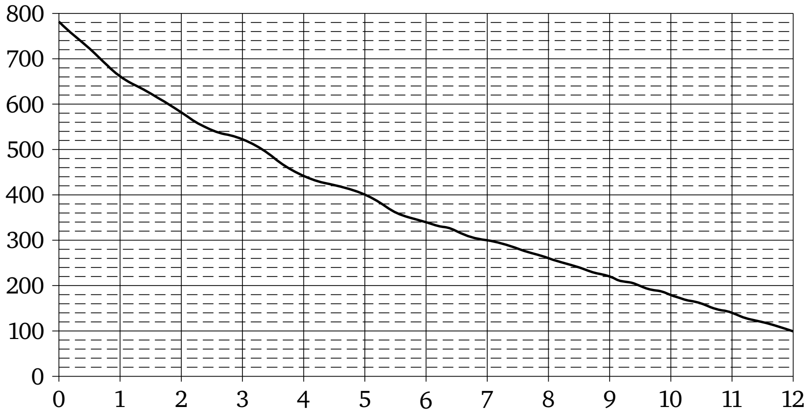
3. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Томске с 8 по 24 января 2005 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены ломаной линией. Определите по рисунку, какого числа из данного периода в Томске впервые выпало ровно 1,5 миллиметра осадков.



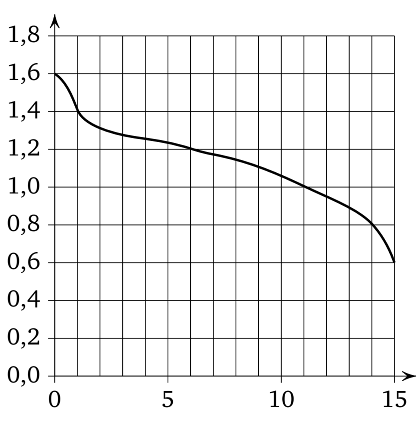
4. На графике изображена зависимость атмосферного давления от высоты над уровнем моря. На горизонтальной оси отмечена высота над уровнем моря в километрах, на вертикальной — давление в миллиметрах ртутного столба. Определите по графику, чему равно атмосферное давление на высоте 2 км над уровнем моря. Ответ дайте в миллиметрах ртутного столба.



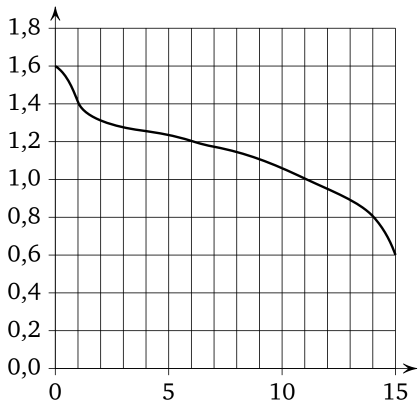
5. На графике изображена зависимость атмосферного давления от высоты над уровнем моря. На горизонтальной оси отмечена высота над уровнем моря в километрах, на вертикальной — давление в миллиметрах ртутного столба. Определите по графику, на какой высоте атмосферное давление равно 660 миллиметрам ртутного столба. Ответ дайте в километрах.



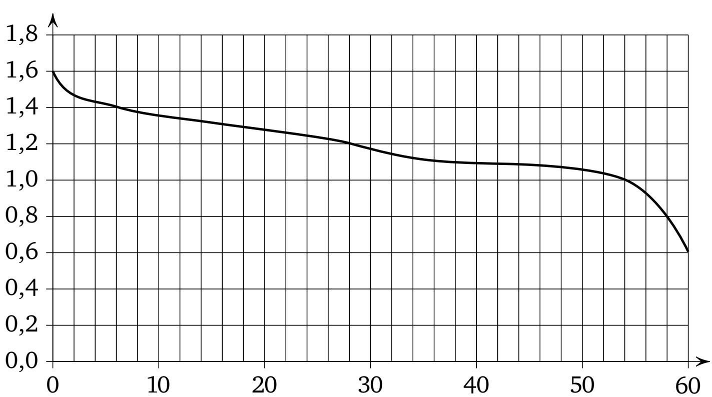
6. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На графике показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по графику, на сколько вольт упадёт напряжение за первый час работы фонарика.



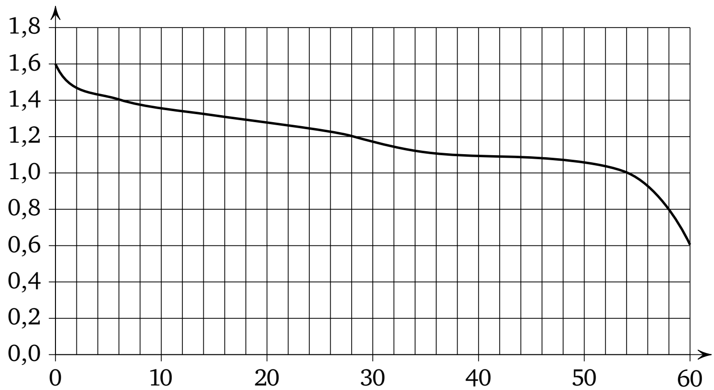
7. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На графике показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по графику, на сколько вольт упадёт напряжение с 1-го по 11-й час работы фонарика.



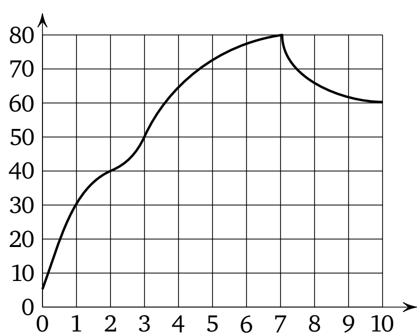
8. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На графике показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по графику, на сколько вольт упадёт напряжение за первые 28 часов работы фонарика.



9. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На графике показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по графику, за сколько часов работы фонарика напряжение упадёт с 1,6 В до 1,2 В.

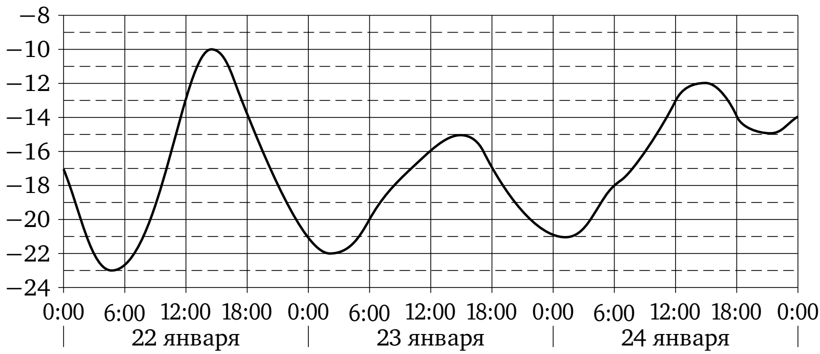


10. На графике показано изменение температуры в процессе разогрева двигателя легкового автомобиля. На горизонтальной оси отмечено время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на вертикальной оси — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, через сколько минут с момента запуска двигатель нагреется до 40°C.

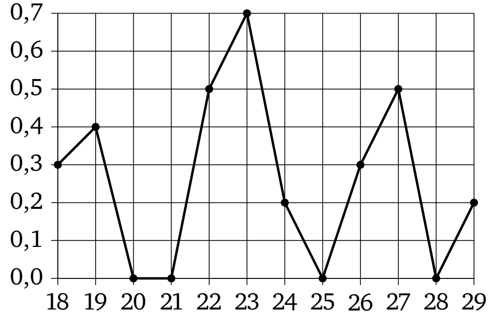


Зачётные задачи

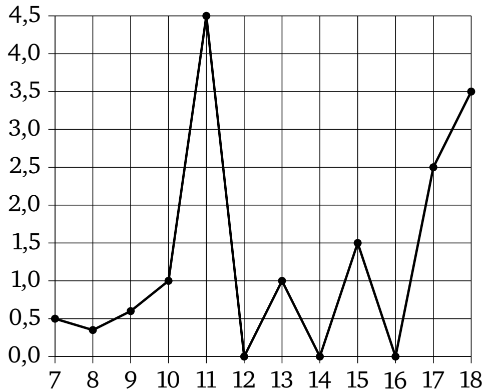
1. На графике показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указываются дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по графику наибольшую температуру воздуха 22 января. Ответ дайте в градусах Цельсия.



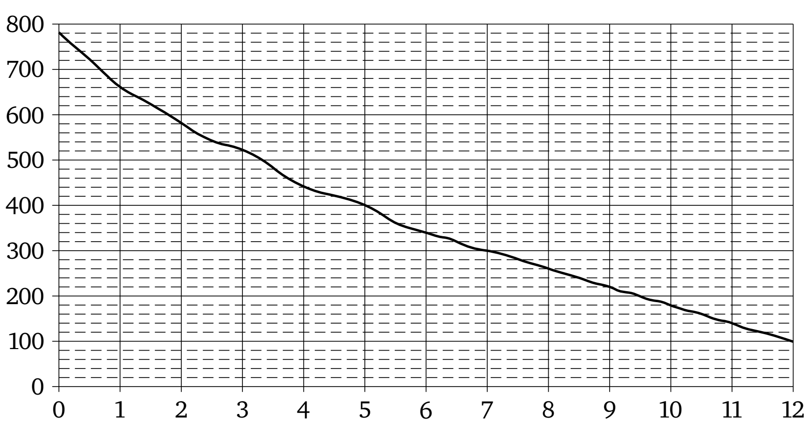
2. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Якутске с 18 по 29 октября 1986 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены ломаной линией. Определите по рисунку, какого числа из данного периода в Якутске выпало наибольшее количество осадков.



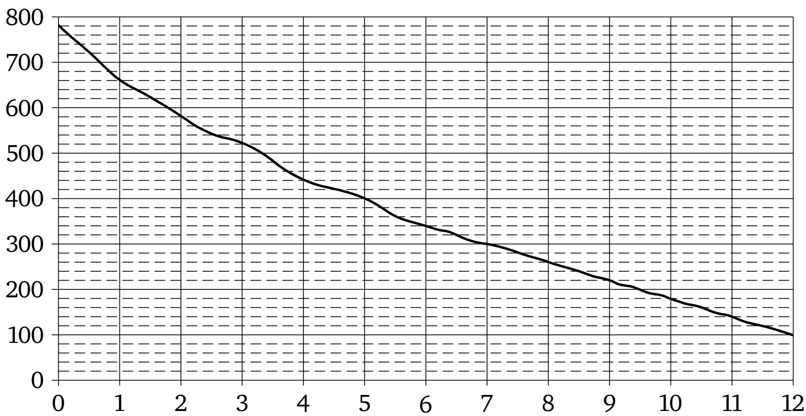
3. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Элисте с 7 по 18 декабря 2001 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены ломаной линией. Определите по рисунку, какого числа из данного периода в Элисте выпало ровно 1,5 миллиметра осадков.



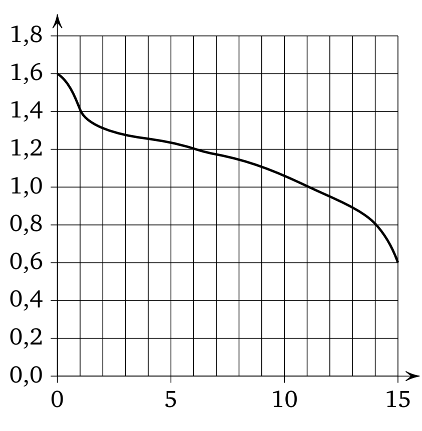
4. На графике изображена зависимость атмосферного давления от высоты над уровнем моря. На горизонтальной оси отмечена высота над уровнем моря в километрах, на вертикальной — давление в миллиметрах ртутного столба. Определите по графику, чему равно атмосферное давление на высоте 1 км над уровнем моря. Ответ дайте в миллиметрах ртутного столба.



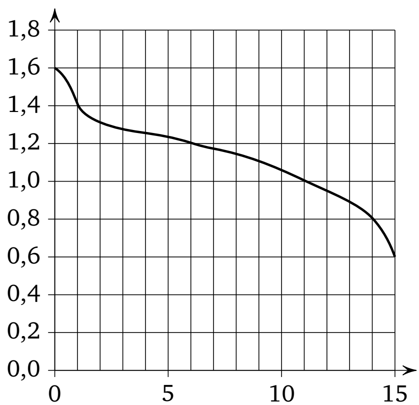
5. На графике изображена зависимость атмосферного давления от высоты над уровнем моря. На горизонтальной оси отмечена высота над уровнем моря в километрах, на вертикальной — давление в миллиметрах ртутного столба. Определите по графику, на какой высоте атмосферное давление равно 780 миллиметрам ртутного столба. Ответ дайте в километрах.



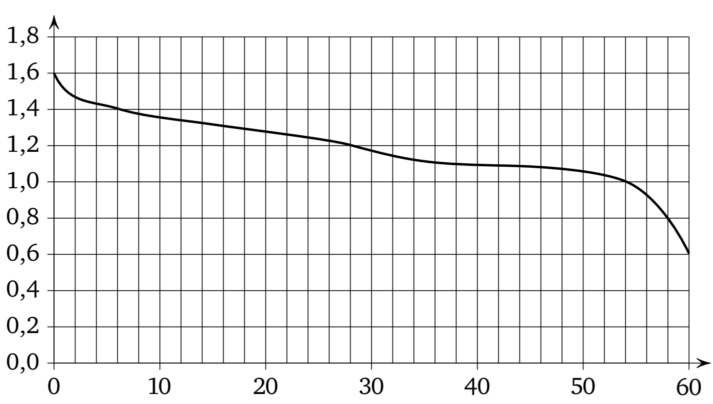
6. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На графике показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по графику, на сколько вольт упадёт напряжение за первые 11 часов работы фонарика.



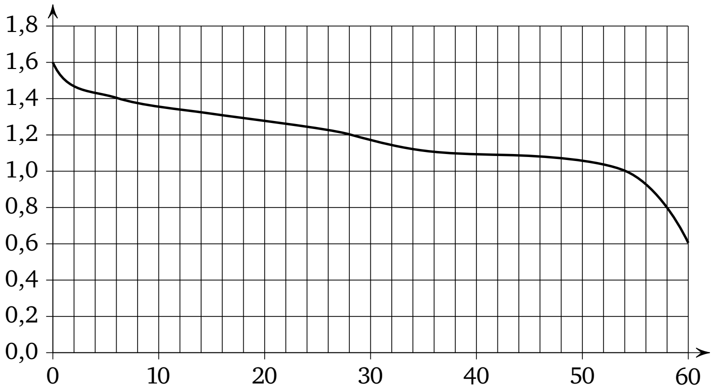
7. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На графике показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по графику, на сколько вольт упадёт напряжение с 1-го по 6-й час работы фонарика.



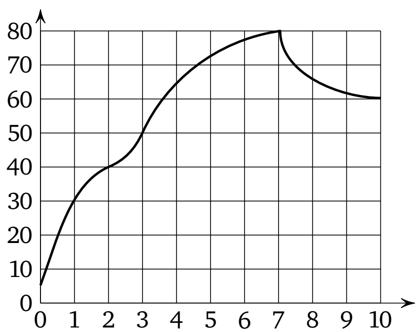
8. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На графике показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по графику, на сколько вольт упадёт напряжение за первые 54 часа работы фонарика.



9. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На графике показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по графику, за сколько часов работы фонарика напряжение упадёт с 1,4 В до 1,2 В.



10. На графике показано изменение температуры в процессе разогрева двигателя легкового автомобиля. На горизонтальной оси отмечено время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на вертикальной оси — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, через сколько минут с момента запуска двигатель нагреется до 80°C.



Задание 6

Краткие методические рекомендации

Задание 6 ОГЭ по математике представляет собой несложное рациональное уравнение — линейное или квадратное либо сводящееся в одно-два действия к одному из них целое или дробно-линейное уравнение. Квадратные уравнения представлены в открытом банке ОГЭ по математике всеми типами: неполные (с нулевым вторым или третьим коэффициентом) и полные (приведённые и неприведённые). Для того чтобы успешно справиться с подобным заданием на ОГЭ, достаточно уметь решать линейные и квадратные уравнения, помнить правило переноса слагаемого из одной части уравнения в другую (знак этого слагаемого меняется на противоположный), обладать определёнными вычислительными навыками, связанными с арифметическими действиями над целыми числами и дробями.

Пример 1. Решите уравнение $\frac{4}{9}x = 8\frac{4}{9}$.

Решение. Сначала обратим дробь в правой части уравнения в неправильную: $8\frac{4}{9} = \frac{76}{9}$. Разделим обе части уравнения на число $\frac{4}{9}$. Получим $x = \frac{76}{9} : \frac{4}{9}$, откуда $x = \frac{76}{9} \cdot \frac{9}{4}$, и, значит, $x = 19$.

Ответ. 19.

Решение квадратных уравнений $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ обычно основывается на формуле

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

корней квадратного уравнения. Напомним, что выражение $b^2 - 4ac$ называется дискриминантом квадратного уравнения и обозначается буквой D. Может также применяться формула для чётного второго коэффициента: если b — чётное число, т. е. $b = 2b_1$, то

$$x = \frac{-2b_1 \pm \sqrt{4b_1^2 - 4ac}}{2}, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{-2b_1 \pm 2\sqrt{b_1^2 - ac}}{2a},$$

т. е.

$$x = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - ac}}{a}, \quad \text{или} \quad x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}.$$

Пример 2. Решите уравнение $2x^2 - 17x - 9 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Решение. Вычислим дискриминант уравнения:

$$D = (-17)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9) = 361.$$

В формуле корней квадратного уравнения меньшему корню соответствует знак «минус» перед квадратным корнем из дискриминанта. Значит, искомый корень $x = \dfrac{17 - \sqrt{361}}{4} = \dfrac{17 - 19}{4}$, откуда $x = -0{,}5$.

Ответ. $-0{,}5$.

Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, корнями которого являются числа x_1 и x_2. Тогда справедливы формулы Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Эти формулы обычно используются применительно к приведённому квадратному уравнению, т. е. к уравнению, старший коэффициент левой части которого равен 1. Тем не менее, формулы Виета можно использовать и для вычисления корней неприведённого квадратного уравнения. Если умножить обе части первого уравнения системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

на a, а обе части второго уравнения на a^2, получим систему, которую можно записать так:

$$\begin{cases} (ax_1) + (ax_2) = -b, \\ (ax_1)(ax_2) = ac. \end{cases}$$

Таким образом, если найти два числа, произведение которых равно ac, а сумма равна $-b$, то это будут числа ax_1 и ax_2, после чего останется каждое из найденных чисел разделить на a и получить корни данного уравнения. При определённом навыке такие вычисления легко проводятся устно: на «роль» ax_1 и ax_2 претендуют делители числа ac, и, перебирая «по возрастанию» возможные делители этого числа (начиная с простейшего — единицы), можно довольно быстро получить ответ.

Пример 3. Решите уравнение $9x^2 - 73x + 8 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Решение. Найдём сначала два числа, произведение которых равно $9\cdot 8=72$, а сумма равна 73. Уже простейший делитель числа 72 позволяет получить ответ: $1\cdot 72=72$, $1+72=73$. Осталось разделить найденные числа на 9 и получить корни данного уравнения: $\frac{1}{9}$ и $\frac{72}{9}=8$.

Ответ. 8.

Пример 4. Решите уравнение $4x^2-15x+9=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Решение. Сначала найдём два числа, произведение которых равно $4\cdot 9=36$, а сумма равна 15. Перебирая пары делителей числа 36 «по возрастанию» меньшего делителя (1 и 36, 2 и 18, 3 и 12), уже на третьем шаге находим искомые числа, сумма которых равна 15: это 3 и 12. Разделив каждое из них на 4, получим корни данного уравнения: $\frac{3}{4}=0{,}75$ и $\frac{12}{4}=3$.

Ответ. 0,75.

Пример 5. Решите уравнение $6x^2+5x-4=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Решение. Для вычисления корней уравнения найдём два числа, произведение которых равно $6\cdot(-4)=-24$, а сумма равна -5. Поскольку произведение двух этих чисел отрицательно, одно из них является положительным, другое — отрицательным. Сумма этих чисел также отрицательна, поэтому меньший делитель числа 24 будем брать со знаком «плюс», а больший — со знаком «минус»: 1 и -24, 2 и -12, … На третьем шаге получаем два числа, сумма которых равна -5: это 3 и -8. Разделив каждое из этих чисел на 6, найдём корни данного уравнения: $\frac{3}{6}=0{,}5$ и $\frac{-8}{6}=-\frac{4}{3}$.

Ответ. 0,5.

Для решения простейших дробно-рациональных уравнений достаточно уметь выполнять действия с алгебраическими дробями. Одни из таких уравнений после несложных преобразований сводятся к линейным, другие — к квадратным. Отметим, что дробно-рациональные уравнения, сводимые к квадратным, относятся к более сложным и в банке задач задания 6 не представлены.

Пример 6. Решите уравнение $\frac{x-5}{x+2}=2$.

Решение. Заметим, что $x\neq -2$. Умножив обе части уравнения на $x+2$, получим $x-5=2(x+2)$, откуда $x-5=2x+4$, и $x=-9$.

Ответ. -9.

Подготовительные задачи

1. Найдите корень уравнения $6x+1=-4x$.

2. Найдите корень уравнения $-4+7x=8x+1$.

3. Найдите корень уравнения $5(x+9)=-8$.

4. Найдите корень уравнения $x-\frac{x}{12}=\frac{11}{3}$.

5. Найдите корень уравнения $\frac{12}{x+5}=-\frac{12}{5}$.

6. Решите уравнение $(x+2)(-x+6)=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

7. Решите уравнение $3x^2+18x=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

8. Решите уравнение $x^2+18=9x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

9. Решите уравнение $2x^2-3x+1=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

10. Решите уравнение $2x^2+5x-7=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Зачётные задачи

1. Найдите корень уравнения $-4x-9=6x$.

2. Найдите корень уравнения $2+3x=-7x-5$.

3. Найдите корень уравнения $5(x+4)=-9$.

4. Найдите корень уравнения $x-\frac{x}{12}=\frac{55}{12}$.

5. Найдите корень уравнения $\frac{6}{x+8}=-\frac{3}{4}$.

6. Решите уравнение $(x+20)(-x+10)=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

7. Решите уравнение $4x^2-20x=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

8. Решите уравнение $x^2+3x=10$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

9. Решите уравнение $5x^2+4x-1=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

10. Решите уравнение $5x^2+8x+3=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Задание 7

Краткие методические рекомендации

Задание 7 ОГЭ по математике представляет собой несложную арифметическую текстовую задачу на проценты, отношения величин или производительность. Для решения этих практико-ориентированных задач достаточно уметь выполнять арифметические действия с целыми числами и дробями (вычисления по действиям), деление с остатком и последующее округление с недостатком или избытком и т. п. В таких задачах желательно делать проверку, в том числе и на здравый смысл — с помощью прикидки и оценки. В некоторых случаях, когда речь идёт о небольших числах, ответ можно получить и с помощью обычного перебора. Значительную часть заданий открытого банка ОГЭ на этой позиции в вариантах экзаменационных работ составляют именно задачи на проценты.

Трудности, которые вызывают у многих учащихся даже несложные задачи на проценты, обычно во многом обусловлены достаточно формальным подходом к изложению темы. А ведь для решения подавляющего большинства задач на проценты достаточно понимать, что процент — это просто одна сотая часть числа, и научиться «переводить» условие задачи на язык десятичных дробей, а после её решения делать обратный «перевод». Так, например, если товар стоил a рублей, а потом его цена выросла, например, на 7, 17 или 27 процентов, это означает, что для нахождения новой цены нужно число a увеличить соответственно на 7, 17 или 27 сотых. Получим $1{,}07a$, $1{,}17a$, $1{,}27a$ соответственно. Если же цена уменьшилась на 7, 17 или 27 процентов, это означает, что для нахождения новой цены нужно число a уменьшить соответственно на 7, 17 или 27 сотых. Получим $0{,}93a$, $0{,}83a$, $0{,}73a$ соответственно.

Так как процент — это сотая часть числа, для того чтобы найти $k\,\%$ от числа a, достаточно умножить число a на k сотых. Получим

$$a \cdot \frac{k}{100} = \frac{ak}{100}.$$

Пример 1. Найдите 30 % от 77 килограммов. Ответ дайте в килограммах.

Решение. 30 % данной величины — это тридцать сотых (т. е. три десятых) этой величины. Поэтому 30 % от 77 килограммов — это $0{,}3 \cdot 77 = 23{,}1$ кг.

Ответ. 23,1.

Попробуем ответить на следующий вопрос: на сколько процентов товар b дороже товара a, если товар a дешевле товара b на 80%? Кажется, ответ очевиден: на 80%. Но это не так. В самом деле, $a = 0{,}2b = \frac{1}{5}b$, значит, $b = 5a$. Таким образом, b больше a на $4a$, т. е. b дороже a на 400%. Этот «парадокс» объясняется просто: в одном случае мы выражаем a в процентах от b, в другом случае — b в процентах от a.

Пример 2. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Олег Иванович получил 26 100 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Олега Ивановича?

Решение. Обозначим заработную плату Олега Ивановича буквой З, а его получку после удержания налога — буквой П. Налог составляет 13%, поэтому П меньше З на 13 сотых, т. е. $\text{П} = 0{,}87 \cdot \text{З}$. По условию $\text{П} = 26\,100$. Значит, $0{,}87 \cdot \text{З} = 26\,100$, откуда

$$\text{З} = \frac{26\,100}{0{,}87} = 30\,000 \text{ рублей.}$$

Ответ. 30 000.

Отметим ещё следующее. Последовательное увеличение величины на некоторое число процентов, а затем уменьшение результата на то же число процентов не приводит к начальной величине: ведь второе действие мы совершаем уже с другой величиной. То же самое можно сказать и об обратной последовательности действий. Интересно, что в любом случае мы получим в итоге величину, меньшую начальной. Например, увеличив a на 10%, получим $1{,}1a$. Уменьшив полученную величину на 10%, получим $0{,}9 \cdot 1{,}1a = 0{,}99a$ — полученная величина меньше начальной на 1%. При этом порядок действий не играет роли: если сначала уменьшить a на 10%, а затем результат увеличить на 10%, получим $1{,}1 \cdot 0{,}9a = 0{,}99a$ — ту же самую величину. В общем случае при увеличении величины a на k%, получим величину $a_1 = a\left(1 + \frac{k}{100}\right)$. Если же теперь уменьшить a_1 на k%, получим

$$a_2 = a_1\left(1 - \frac{k}{100}\right) = a\left(1 + \frac{k}{100}\right)\left(1 - \frac{k}{100}\right),$$

т. е. $a_2 = a\left(1 - \left(\frac{k}{100}\right)^2\right) < a$.

Пример 3. В июле товар стоил 60 000 рублей. В сентябре цену на товар снизили на 8%, а в декабре подняли на 7%. Сколько рублей стоил товар после повышения цены в декабре?

Решение. Стоимость товара в сентябре уменьшилась на 8 сотых по сравнению с июлем, т. е. составила $0{,}92 \cdot 60\,000 = 55\,200$ рублей. Полученная стоимость увеличилась в декабре на 7 сотых, т. е. составила $1{,}07 \cdot 55\,200 = 59\,064$ рубля.

Ответ. 59 064.

Пример 4. Семь рубашек дороже куртки на 5 %. На сколько процентов шесть рубашек дешевле куртки?

Решение. Обозначим буквой P стоимость одной рубашки, а буквой K — стоимость куртки. Из условия задачи следует, что $7P = 1{,}05K$, откуда $P = \frac{1{,}05K}{7} = 0{,}15K$. Следовательно, $6P = 6 \cdot 0{,}15K = 0{,}9K$. Значит, стоимость шести рубашек меньше стоимости куртки на одну десятую, или десять сотых, т. е. шесть рубашек дешевле куртки на 10 %.

Ответ. 10.

Обратим внимание на то, что при изложенном подходе к решению задач на проценты не нужно запоминать никаких правил, составлять пропорции и т. п. — все решения сводятся к действиям с десятичными дробями.

В некоторых случаях, если не задана какая то величина, например стоимость товара, её можно считать равной любому удобному для решения задачи числу.

Пример 5. Во время распродажи Игорь купил пять одинаковых по цене футболок со скидкой 30 %. Сколько таких футболок он мог бы купить на ту же сумму, если бы скидка составила 50 %?

Решение. Будем считать, что до распродажи футболка стоила 100 д. е. (денежных единиц). Тогда стоимость футболки со скидкой 30 % будет равна 70 д. е. Значит, Игорь потратил на покупку пяти футболок $5 \cdot 70 = 350$ д. е. Если скидка составит 50 %, то стоимость футболки будет равна 50 д. е. и на 350 д. е. можно будет купить $350 : 50 = 7$ футболок.

Ответ. 7.

Среди практических арифметических задач ОГЭ по математике встречаются и задачи на части и доли.

Пример 6. На птицефабрике разводят кур и уток, причём число уток относится к числу кур как $3:8$. Сколько уток на птицефабрике, если общее число птиц на ней равно 12 100?

Решение. Пусть число уток равно $3x$, тогда из условия задачи следует, что число кур равно $8x$, поэтому всего птиц на птицефабрике — $11x$. Значит,

$$11x = 12\,100, \quad \text{откуда } x = 1100, \text{ а } 3x = 3300.$$

Ответ. 3300.

Разумеется, подобные задачи можно решать, не прибегая к составлению уравнения. В самом деле, из условия рассмотренной задачи следует, что утки составляют три части от числа всех птиц, а куры — восемь частей, т. е. количество всех птиц можно разделить на одиннадцать частей. Значит, число уток равно $\frac{3}{11}$ от числа всех птиц, т. е. равно $\frac{3}{11}\cdot 12\,100=3300$.

Последняя группа заданий открытого банка ЕГЭ для этой позиции в варианте экзаменационной работы связана с производительностью.

Пример 7. Принтер печатает 3 страницы за 8 секунд. Сколько страниц напечатает принтер за 6 минут?

Решение. 6 минут — это $6\cdot 60=360$ секунд. Поскольку $360:8=45$, за 6 минут принтер напечатает $45\cdot 3=135$ страниц.

Ответ. 135.

Подготовительные задачи

1. Принтер печатает одну страницу за 5 секунд. Сколько страниц можно напечатать на этом принтере за 6,5 минут?

2. Площадь земель крестьянского хозяйства, отведённая под посадку сельскохозяйственных культур, составляет 42 гектара и распределена между зерновыми и техническими культурами в отношении $3:4$. Сколько гектаров занимают зерновые культуры?

3. После уценки телевизора его новая цена составила 0,52 старой цены. На сколько процентов уменьшилась цена телевизора в результате уценки?

4. Для приготовления чайной смеси смешивают индийский и цейлонский чай в отношении $9:11$. Сколько процентов этой смеси составляет цейлонский чай?

5. Средний вес мальчиков того же возраста, что и Гоша, равен 66 кг. Вес Гоши составляет 120 % среднего веса. Сколько килограммов весит Гоша?

6. Банк начисляет на счёт 11 % годовых. Вкладчик положил на счёт 1500 рублей. Сколько рублей будет на этом счёте через год, если никаких операций, кроме начисления процентов, со счётом проводиться не будет?

7. В начале года число абонентов телефонной компании «Восток» составляло 800 тысяч человек, а в конце года их стало 880 тысяч человек. На сколько процентов увеличилось за год число абонентов этой компании?

8. Поступивший в продажу в феврале мобильный телефон стоил 1800 рублей. В июне он стал стоить 1530 рублей. На сколько процентов снизилась цена на мобильный телефон в период с февраля по июнь?

9. Стоимость проезда в электропоезде составляет 198 рублей. Школьникам предоставляется скидка 50 %. Сколько рублей будет стоить проезд для 4 взрослых и 12 школьников?

10. Товар на распродаже уценили на 35 %, при этом он стал стоить 520 рублей. Сколько рублей стоил товар до распродажи?

Зачётные задачи

1. Принтер печатает одну страницу за 6 секунд. Сколько страниц можно напечатать на этом принтере за 10,5 минут?

2. Площадь земель крестьянского хозяйства, отведённая под посадку сельскохозяйственных культур, составляет 63 гектара и распределена между зерновыми и бахчевыми культурами в отношении $4:5$. Сколько гектаров занимают бахчевые культуры?

3. После уценки телевизора его новая цена составила 0,59 старой цены. На сколько процентов уменьшилась цена телевизора в результате уценки?

4. Для приготовления фарша взяли говядину и свинину в отношении $11:39$. Сколько процентов фарша составляет свинина?

5. Средний вес мальчиков того же возраста, что и Толя, равен 56 кг. Вес Толи составляет 140 % среднего веса. Сколько килограммов весит Толя?

6. Банк начисляет на счёт 19 % годовых. Вкладчик положил на счёт 1300 рублей. Сколько рублей будет на этом счёте через год, если никаких операций, кроме начисления процентов, со счётом проводиться не будет?

7. В начале года число абонентов телефонной компании «Запад» составляло 200 тысяч человек, а в конце года их стало 230 тысяч человек. На сколько процентов увеличилось за год число абонентов этой компании?

8. Поступивший в продажу в марте мобильный телефон стоил 3000 рублей. В августе он стал стоить 1890 рублей. На сколько процентов снизилась цена на мобильный телефон в период с марта по август?

9. Стоимость проезда в электропоезде составляет 132 рубля. Школьникам предоставляется скидка 50 %. Сколько рублей будет стоить проезд для 2 взрослых и 16 школьников?

10. Товар на распродаже уценили на 45 %, при этом он стал стоить 770 рублей. Сколько рублей стоил товар до распродажи?

Задание 8

Краткие методические рекомендации

Для представления, сопоставления, интерпретации, прогнозирования и анализа информации наряду с таблицами и графиками часто используют диаграммы — круговые и столбчатые. Такие диаграммы позволяют наглядно представить различие в росте тех или иных показателей и параметров, доли тех или иных величин в общей совокупности некоторых характеристик и т. п.

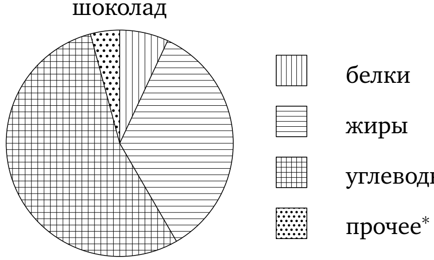
Задание 8 ОГЭ по математике представляет собой задачу на чтение и анализ информации, представленной в виде диаграмм — круговых или столбчатых.

Задачи на чтение диаграмм не сложнее задач на чтение графиков. В простейших случаях надо определить, оценить или соотнести с условием долю, которую занимает в общей площади круговой диаграммы сектор, соответствующий одной из характеристик, подсчитать число столбиков, удовлетворяющих тому или иному требованию, либо сравнить некоторые из них по высоте. Немного сложнее задачи, требующие определённого расчёта или сопоставления данных.

Заметим, что диаграммы применяются для наглядного, качественного сравнения тех или иных показателей или характеристик. Решение подобных задач не предполагает использования транспортира (для круговых диаграмм) или линейки (для столбчатых диаграмм).

Пример 1. На диаграмме показано содержание питательных веществ в молочном шоколаде. Определите по диаграмме, содержание каких веществ наименьшее.

шоколад



*К прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества.

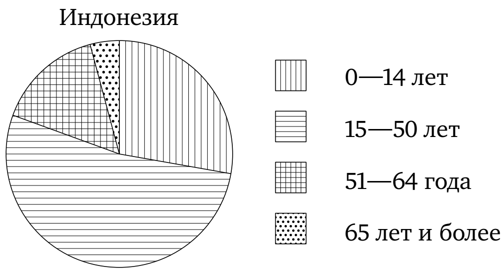
1) белки 2) жиры 3) углеводы 4) прочее

Запишите номер выбранного варианта ответа.

Решение. Наименьшая по площади часть диаграммы соответствует наименьшему содержанию вещества. В данном случае это прочие вещества.

Ответ. 4.

Пример 2. На диаграмме показан возрастной состав населения Индонезии. Определите по диаграмме, доли населения каких возрастов составляют более 25 % от всего населения.



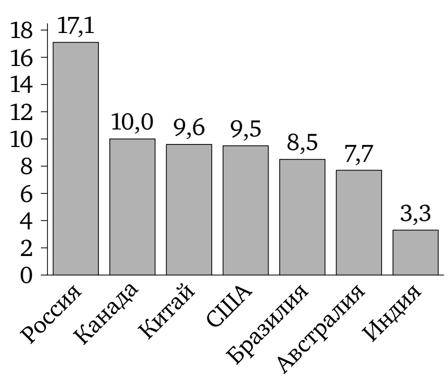
1) 0—14 лет 2) 15—50 лет 3) 51—64 года 4) 65 лет и более

Запишите номера выбранных ответов в порядке возрастания без пробелов, запятых и любых других символов.

Решение. Двадцати пяти процентам населения соответствует площадь четверти круга, занятого диаграммой. Ясно, что площадь каждого из секторов, отвечающих возрастам 1 и 2, больше четверти площади круга, а площадь каждого из двух других секторов меньше площади четверти круга.

Ответ. 12.

Пример 3. На диаграмме представлены семь крупнейших по площади территории (в млн км^2) стран мира.



Какие из следующих утверждений верны?

1) Судан входит в семёрку крупнейших по площади территории стран мира.

2) Площадь территории США составляет 9,5 млн км^2.

3) Площадь территории Австралии больше площади территории Канады.

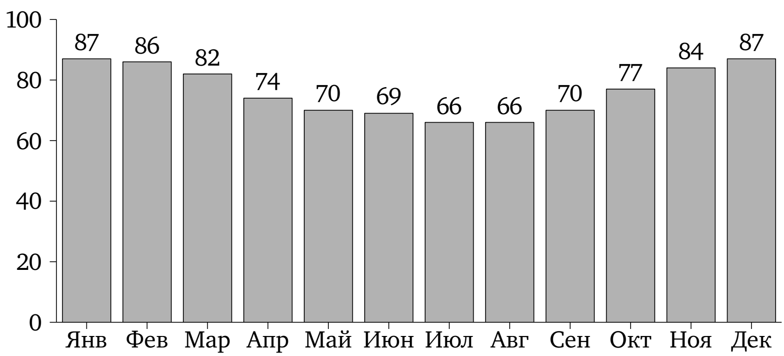
4) Площадь территории России больше площади территории Бразилии примерно вдвое.

Запишите номера выбранных ответов в порядке возрастания без пробелов, запятых и любых других символов.

Решение. Поскольку Судан не входит в семёрку представленных стран, утверждение 1 ложно. Утверждение 3 является ложным, а утверждения 2 и 4 являются истинными, что следует из данных диаграммы.

Ответ. 24.

Пример 4. На диаграмме показано распределение относительной влажности воздуха (в процентах) в городе N по месяцам года. Определите среднюю относительную влажность воздуха в городе N летом.



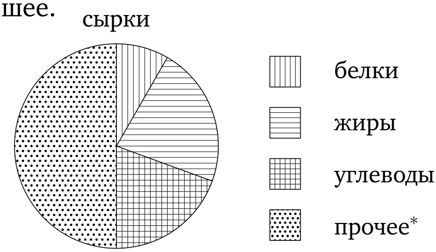
Решение. Средняя относительная влажность воздуха в городе N летом равна среднему арифметическому значений относительной влажности (в процентах) в июне, июле и августе, т. е. равна

$$\frac{69+66+66}{3} = 67.$$

Ответ. 67.

Подготовительные задачи

1. На диаграмме показано содержание питательных веществ в творожных сырках. Определите по диаграмме, содержание каких веществ наименьшее.

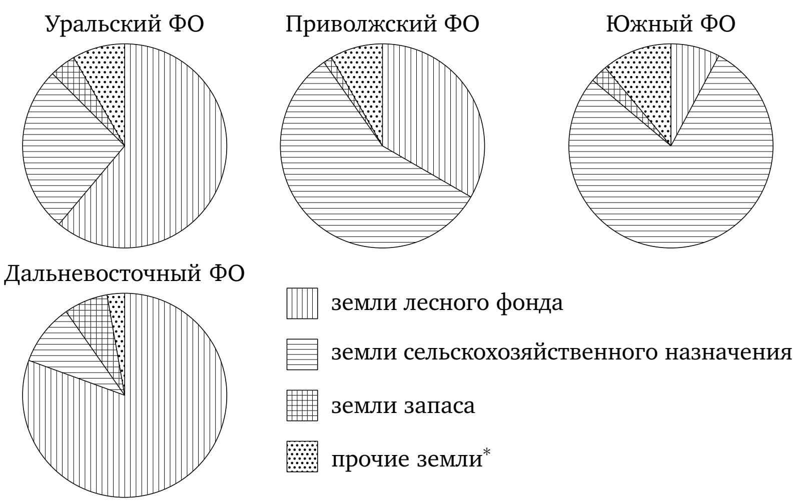


*К прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества.

1) белки 2) жиры 3) углеводы 4) прочее

Запишите номер выбранного варианта ответа.

2. На диаграммах показано распределение земель по категориям Уральского, Приволжского, Южного и Дальневосточного федеральных округов. Определите по диаграммам, в каком округе доля земель лесного фонда наибольшая.



*Прочие земли — это земли поселений; земли промышленности и иного специального назначения; земли особо охраняемых территорий и объектов.

1) Уральский ФО

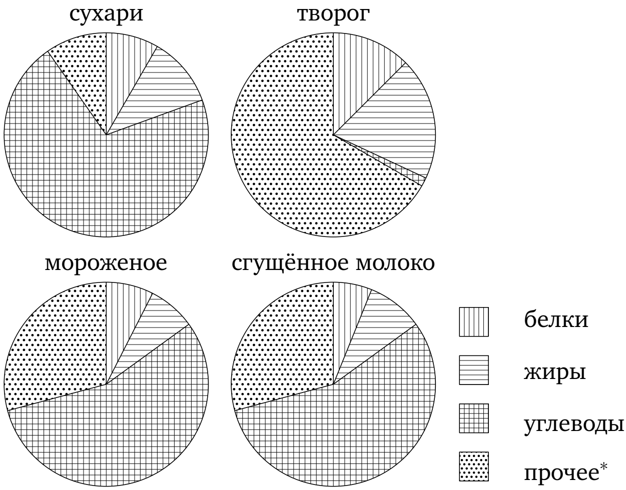
2) Приволжский ФО

3) Южный ФО

4) Дальневосточный ФО

Запишите номер выбранного варианта ответа.

3. На диаграммах показано содержание питательных веществ в сухарях, твороге, сливочном мороженом и сгущённом молоке. Определите по диаграммам, в каком продукте содержание белков наименьшее.



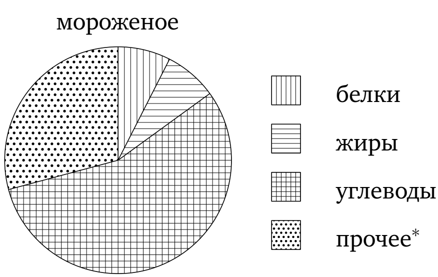
*К прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества.

1) сухари 3) мороженое

2) творог 4) сгущённое молоко

Запишите номер выбранного варианта ответа.

4. На диаграмме показано содержание питательных веществ в сливочном мороженом. Определите по диаграмме, содержание каких веществ превосходит 25 %.

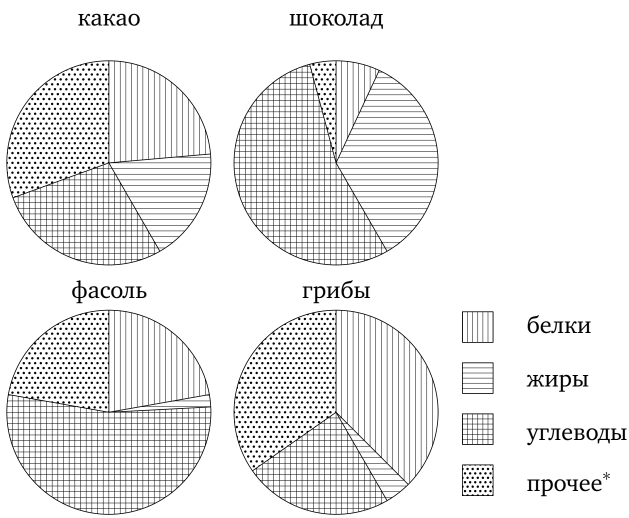


*К прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества.

1) белки 2) жиры 3) углеводы 4) прочее

Запишите номера выбранных вариантов ответов в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

5. На диаграммах показано содержание питательных веществ в какао, молочном шоколаде, фасоли и сушёных белых грибах. Определите по диаграммам, в каких продуктах содержание углеводов превышает 50 %.

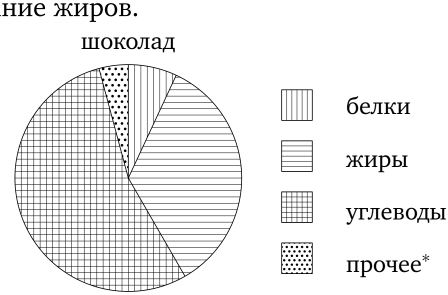


*К прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества.

1) какао 2) шоколад 3) фасоль 4) грибы

Запишите номера выбранных вариантов ответов в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

6. На диаграмме показано содержание питательных веществ в молочном шоколаде. Определите по диаграмме, в каких пределах находится содержание жиров.

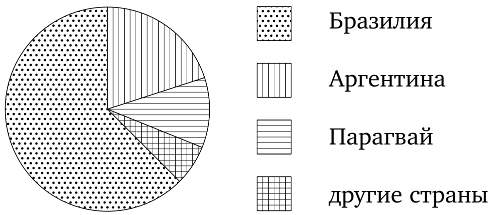


*К прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества.

1) 5—15 % 2) 15—25 % 3) 30—40 % 4) 60—70 %

Запишите номер выбранного варианта ответа.

7. На диаграмме представлено распределение количества пользователей некоторой социальной сети по странам мира. Всего в этой социальной сети 9 миллионов пользователей.



Какие из следующих утверждений верны?

1) Пользователей из Бразилии больше, чем пользователей из Аргентины.

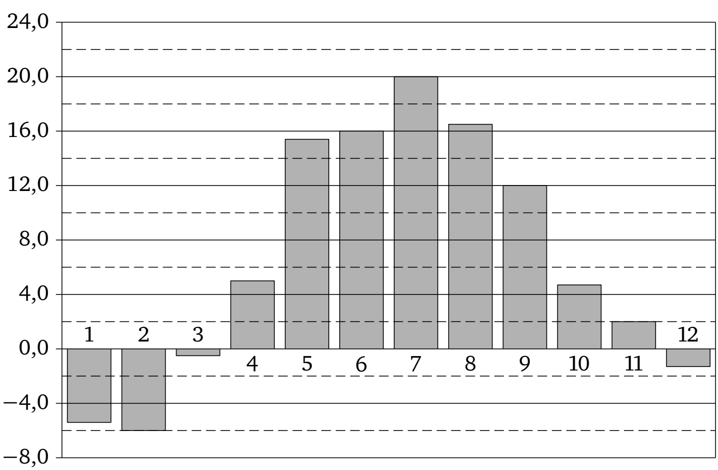
2) Больше трети пользователей сети — из Аргентины.

3) Пользователей из Парагвая больше, чем пользователей из Аргентины.

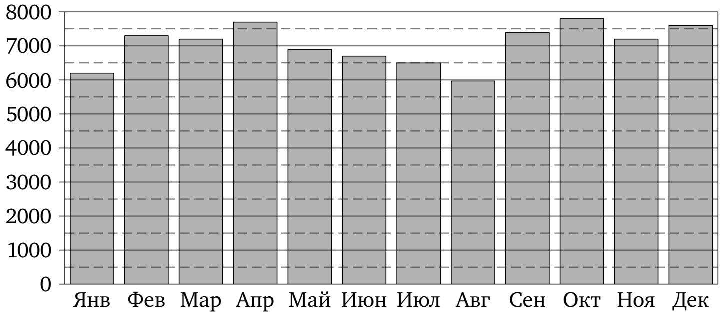
4) Пользователей из Бразилии больше 4 миллионов.

Запишите номера выбранных утверждений в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

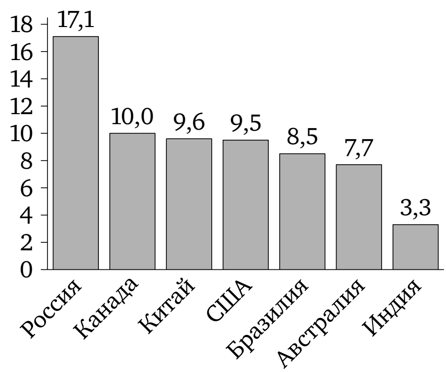
8. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Минске за каждый месяц 2003 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в 2003 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



9. На диаграмме показано среднесуточное количество перевезённых пассажиров в Московском метрополитене за каждый месяц 2008 года (в тыс. человек). Сколько было месяцев, в каждый из которых среднесуточное число перевезённых пассажиров составило не менее 7500 тыс. человек?



10. На диаграмме представлены семь крупнейших по площади территории (в млн км^2) стран мира.



Какие из следующих утверждений верны?

1) Алжир входит в семёрку крупнейших по площади территории стран мира.

2) Площадь территории Бразилии составляет 8,7 млн км^2.

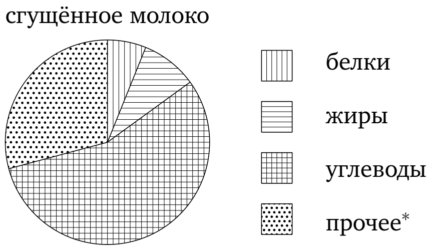
3) Площадь территории Канады больше площади территории Австралии.

4) Площадь территории Австралии больше площади территории Индии на 4,4 млн км^2.

Запишите номера выбранных утверждений в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Зачётные задачи

1. На диаграмме показано содержание питательных веществ в сгущённом молоке. Определите по диаграмме, содержание каких веществ наименьшее.

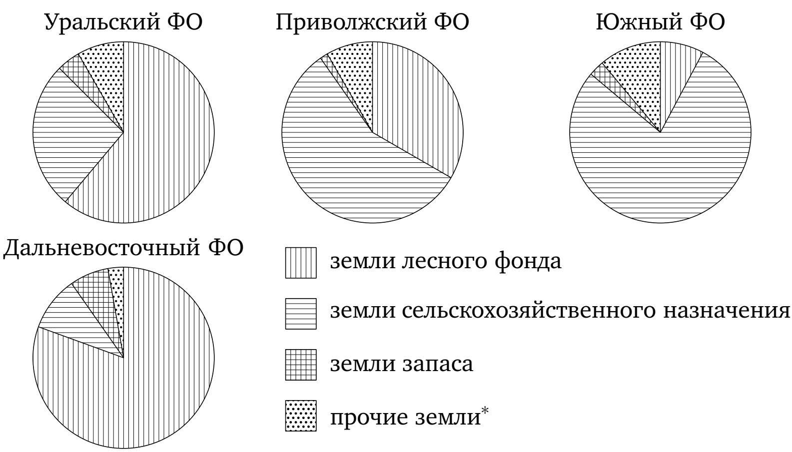


*К прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества.

1) белки 2) жиры 3) углеводы 4) прочее

Запишите номер выбранного варианта ответа.

2. На диаграммах показано распределение земель по категориям Уральского, Приволжского, Южного и Дальневосточного федеральных округов. Определите по диаграммам, в каком округе доля земель запаса наибольшая.



*Прочие земли — это земли поселений; земли промышленности и иного специального назначения; земли особо охраняемых территорий и объектов.

1) Уральский ФО

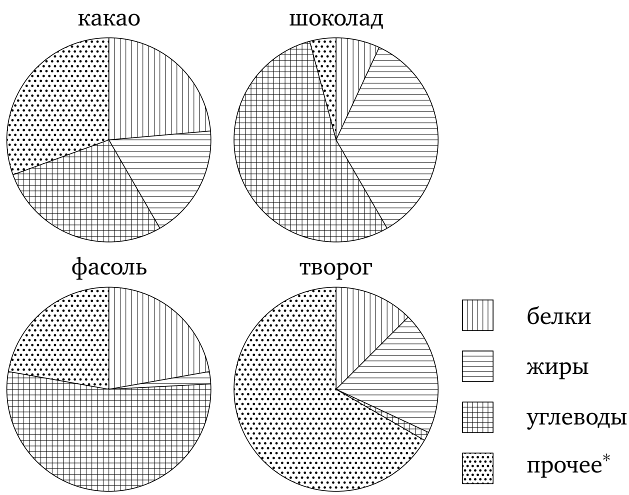
2) Приволжский ФО

3) Южный ФО

4) Дальневосточный ФО

Запишите номер выбранного варианта ответа.

3. На диаграммах показано содержание питательных веществ в какао, молочном шоколаде, фасоли и твороге. Определите по диаграммам, в каком продукте содержание белков наименьшее.

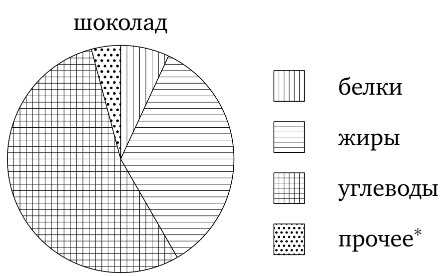


*К прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества.

1) какао 2) шоколад 3) фасоль 4) творог

Запишите номер выбранного варианта ответа.

4. На диаграмме показано содержание питательных веществ в молочном шоколаде. Определите по диаграмме, содержание каких веществ превосходит 25 %.

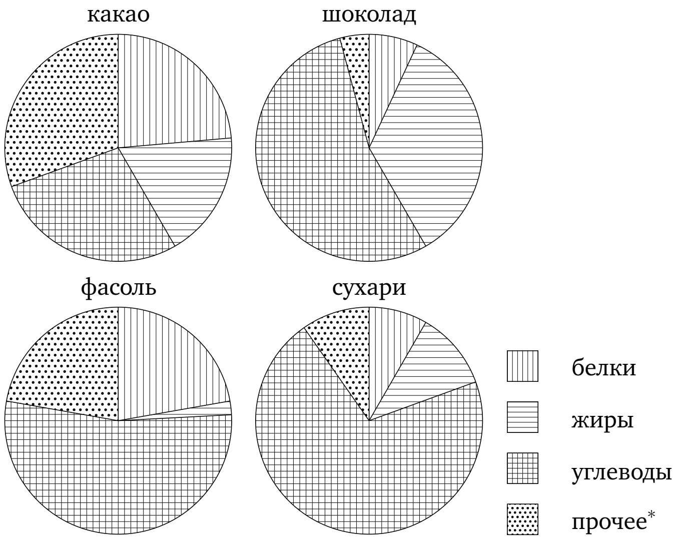


*К прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества.

1) белки 2) жиры 3) углеводы 4) прочее

Запишите номера выбранных вариантов ответов в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

5. На диаграммах показано содержание питательных веществ в какао, молочном шоколаде, фасоли и сухарях. Определите по диаграммам, в каких продуктах суммарное содержание углеводов и жиров превышает 75 %.

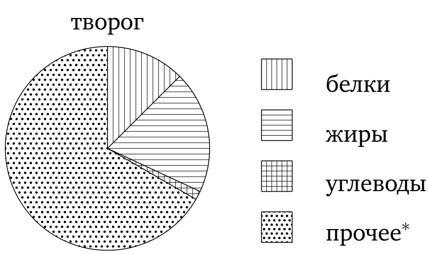


*К прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества.

1) какао 2) шоколад 3) фасоль 4) сухари

Запишите номера выбранных вариантов ответов в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

6. На диаграмме показано содержание питательных веществ в твороге. Определите по диаграмме, в каких пределах находится содержание жиров.

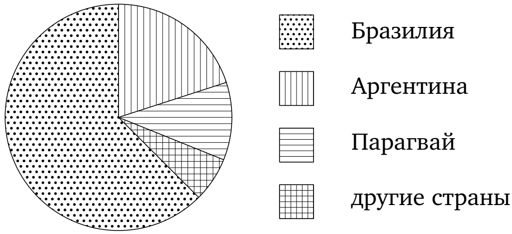


*К прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества.

1) 5—15 % 2) 15—25 % 3) 25—35 % 4) 35—45 %

Запишите номер выбранного варианта ответа.

7. На диаграмме представлено распределение количества пользователей некоторой социальной сети по странам мира. Всего в этой социальной сети 9 миллионов пользователей.



Какие из следующих утверждений верны?

1) Пользователей из Парагвая больше, чем пользователей из Бразилии.

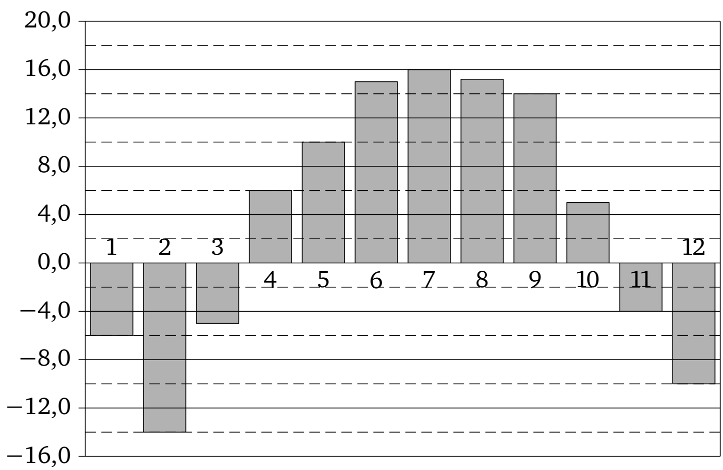
2) Пользователей из Аргентины меньше трети общего числа пользователей.

3) Пользователей из Парагвая больше, чем пользователей из Дании.

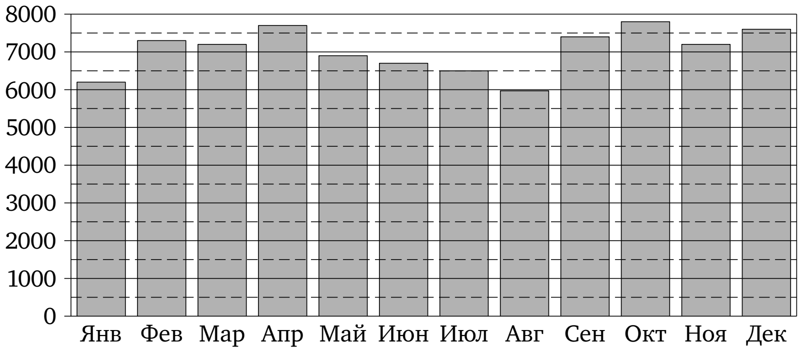
4) Пользователей из Бразилии меньше 4 миллионов.

Запишите номера выбранных утверждений в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

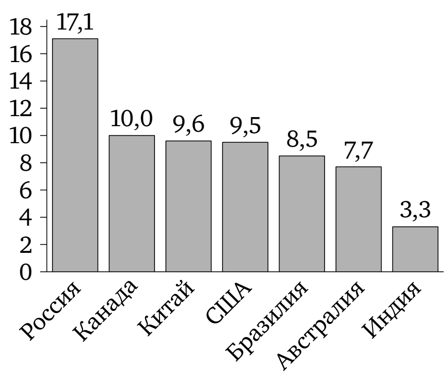
8. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде (Горьком) за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в 1994 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



9. На диаграмме показано среднесуточное количество перевезённых пассажиров в Московском метрополитене за каждый месяц 2008 года (в тыс. человек). Сколько было месяцев, в каждый из которых среднесуточное число перевезённых пассажиров составило не менее 6500 тыс. человек?



10. На диаграмме представлены семь крупнейших по площади территории (в млн км^2) стран мира.



Какие из следующих утверждений *неверны*?

1) Монголия входит в семёрку крупнейших по площади территории стран мира.

2) Площадь территории Индии составляет 3,3 млн км^2.

3) Площадь территории Австралии больше площади территории Канады.

4) Площадь территории Канады больше площади территории Индии более чем в 3 раза.

Запишите номера выбранных утверждений в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Задание 9

Краткие методические рекомендации

Задание 9 ОГЭ по математике — это простейшая задача на вычисление вероятности. Для решения таких задач достаточно уметь находить отношение числа благоприятных для наступления некоторого события исходов к числу всех равновозможных исходов. Иногда это требует определённых вычислительных навыков, а также действий с отношениями и/или процентами. Для более глубокого усвоения темы могут оказаться полезными следующие простейшие правила и формулы вычисления вероятностей.

• Формула вероятности противоположного события:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A), \quad P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

• Формула умножения вероятностей независимых событий: если события A и B независимы, то вероятность наступления обоих этих событий равна

$$P(A) \cdot P(B).$$

Пример 1. В коробке лежит 25 одинаковых по внешнему виду конфет, в восьми из которых нет фруктовой начинки. Галя берёт одну конфету. Найдите вероятность того, что в этой конфете будет фруктовая начинка.

Решение. Число конфет с фруктовой начинкой равно 17, число всех конфет равно 25. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{17}{25} = 0{,}68$.

Ответ. 0,68.

Пример 2. В соревнованиях по гимнастике участвуют 90 спортсменок: 33 из США, 21 из Мексики, остальные из Канады. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая последней, окажется из Канады.

Решение. Число спортсменок из Канады равно $90 - 33 - 21 = 36$. Поскольку искомая вероятность P равна отношению числа $n = 36$ благоприятных для данного события исходов к числу $N = 90$ всех равновозможных исходов, находим

$$P = \frac{n}{N} = \frac{36}{90} = \frac{4}{10} = 0{,}4.$$

Ответ. 0,4.

Пример 3. Найдите вероятность того, что случайно выбранное однозначное число делится на 2.

Решение. Всего однозначных чисел $N=10$ (от 0 до 9). Пять из них $(0, 2, 4, 6, 8)$ делятся на 2. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{5}{10}=0{,}5$.

Ответ. 0,5.

Пример 4. В конехозяйстве число пони относится к числу остальных лошадей как $7:13$ (других животных нет). Найдите вероятность того, что случайно встреченное в этом конехозяйстве животное окажется пони.

Решение. Если обозначить число пони через $7x$, то число остальных лошадей будет равно $13x$, а всех животных на конюшне будет $20x$. Тогда вероятность случайно встретить пони равна $\frac{7x}{20x}=\frac{7}{20}=0{,}35$.

Ответ. 0,35.

Пример 5. На птицеферме разводят кур, уток и гусей. Известно, что уток в 4 раза больше, чем гусей, и на 20 % меньше, чем кур. Найдите вероятность того, что случайно увиденная на этой птицеферме птица окажется гусем.

Решение. Если обозначить число кур через x, то число уток будет равно $0{,}8x$, а число гусей — в 4 раза меньше, т. е. $0{,}2x$. Значит, число всех птиц на этой птицеферме равно $x+0{,}8x+0{,}2x=2x$. Поэтому вероятность случайно увидеть гуся будет равна $\frac{0{,}2x}{2x}=0{,}1$.

Ответ. 0,1.

Пример 6. Из водоплавающих животных в заповеднике обитают только бобры, ондатры и выдры. Найдите вероятность того, что случайно встреченное в заповеднике водоплавающее животное окажется бобром, если из трёх следующих утверждений два истинны, а одно ложно:

1) бобры составляют 65 % водоплавающих животных заповедника;

2) ондатры составляют 54 % водоплавающих животных заповедника;

3) выдры составляют 43 % водоплавающих животных заповедника.

Решение. Предположим, что утверждение 1 истинно. Тогда оба утверждения 2 и 3 ложны, так как общее число животных не может быть больше 100 %. По условию только одно утверждение является ложным. Получили противоречие. Значит, утверждение 1 является ложным, а утверждения 2 и 3 истинны. Поэтому бобры составляют $100\,\% - 54\,\% - 43\,\% = 3\,\%$ водоплавающих животных заповедника, а искомая вероятность равна 0,03.

Ответ. 0,03.

Подготовительные задачи

1. У бабушки 20 чашек: 15 с красными цветами, остальные с синими. Бабушка наливает чай в случайно выбранную чашку. Найдите вероятность того, что это будет чашка с синими цветами.

2. На экзамене 50 билетов, Оскар *не выучил* 7 из них. Найдите вероятность того, что ему попадётся выученный билет.

3. Родительский комитет закупил 20 пазлов для подарков детям в связи с окончанием учебного года, из них 11 с машинами и 9 с видами городов. Подарки распределяются случайным образом между 20 детьми, среди которых есть Илюша. Найдите вероятность того, что Илюше достанется пазл с машиной.

4. На тарелке лежат одинаковые на вид пирожки: 4 с мясом, 5 с рисом и 21 с повидлом. Андрей наугад берёт один пирожок. Найдите вероятность того, что пирожок окажется с повидлом.

5. В фирме такси в данный момент свободно 20 машин: 3 чёрные, 3 жёлтые и 14 зелёных. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчику. Найдите вероятность того, что к нему приедет жёлтое такси.

6. В среднем из 150 карманных фонариков, поступивших в продажу, три неисправных. Найдите вероятность того, что выбранный наудачу в магазине фонарик окажется исправен.

7. В лыжных гонках участвуют 11 спортсменов из России, 6 спортсменов из Норвегии и 3 спортсмена из Швеции. Порядок, в котором спортсмены стартуют, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен из России.

8. В лыжных гонках участвуют 11 спортсменов из России, 6 спортсменов из Норвегии и 3 спортсмена из Швеции. Порядок, в котором спортсмены стартуют, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен из Норвегии или Швеции.

9. В магазине канцтоваров продаётся 112 ручек: 17 красных, 44 зелёные, 29 фиолетовых, остальные синие и чёрные, их поровну. Найдите вероятность того, что случайно выбранная в этом магазине ручка будет красной или чёрной.

10. Из крупных животных в заповеднике обитают только косули, благородные олени и лоси. Найдите вероятность того, что случайно встреченное в заповеднике крупное животное окажется косулей, если из трёх следующих утверждений два истинны, а одно ложно:

1) лоси составляют 33 % крупных животных заповедника;

2) благородные олени составляют 55 % крупных животных заповедника;

3) косули составляют 77 % крупных животных заповедника.

Зачётные задачи

1. У бабушки 25 чашек: 2 с красными цветами, остальные с синими. Бабушка наливает чай в случайно выбранную чашку. Найдите вероятность того, что это будет чашка с синими цветами.

2. На экзамене 25 билетов, Костя *не выучил* 4 из них. Найдите вероятность того, что ему попадётся выученный билет.

3. Родительский комитет закупил 25 пазлов для подарков детям в связи с окончанием учебного года, из них 18 с машинами и 7 с видами городов. Подарки распределяются случайным образом между 25 детьми, среди которых есть Володя. Найдите вероятность того, что Володе достанется пазл с машиной.

4. На тарелке лежат одинаковые на вид пирожки: 1 с творогом, 12 с мясом и 3 с яблоками. Ваня наугад берёт один пирожок. Найдите вероятность того, что пирожок окажется с мясом.

5. В фирме такси в данный момент свободно 12 машин: 3 чёрные, 3 жёлтые и 6 зелёных. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчику. Найдите вероятность того, что к нему приедет жёлтое такси.

6. В среднем из 80 карманных фонариков, поступивших в продажу, шесть неисправных. Найдите вероятность того, что выбранный наудачу в магазине фонарик окажется исправен.

7. В лыжных гонках участвуют 13 спортсменов из России, 2 спортсмена из Норвегии и 5 спортсменов из Швеции. Порядок, в котором спортсмены стартуют, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен из России.

8. В лыжных гонках участвуют 13 спортсменов из России, 2 спортсмена из Норвегии и 5 спортсменов из Швеции. Порядок, в котором спортсмены стартуют, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен из Норвегии или Швеции.

9. В магазине канцтоваров продаётся 100 ручек: 37 красных, 8 зелёных, 17 фиолетовых, остальные синие и чёрные, их поровну. Найдите вероятность того, что случайно выбранная в этом магазине ручка будет красной или чёрной.

10. Из крупных животных в заповеднике обитают только косули, благородные олени и лоси. Найдите вероятность того, что случайно встреченное в заповеднике крупное животное окажется лосем, если из трёх следующих утверждений два истинны, а одно ложно:

1) лоси составляют 68 % крупных животных заповедника;

2) благородные олени составляют 48 % крупных животных заповедника;

3) косули составляют 38 % крупных животных заповедника.

Задание 10

Краткие методические рекомендации

Задания, связанные с функциями и их графиками (именно к ним относится задание 10 ОГЭ), ежегодно включаются в варианты ОГЭ по математике. По большей части это задания на чтение графиков функций, содержащие вопросы о свойствах функций, задания, в которых требуется установить соответствие между функциями, заданными формулами, и графиками этих функций, либо вариации последних, предполагающие ответ на вопрос, какая из нескольких данных формул задаёт функцию, график которой приведён в условии, или какой из нескольких данных графиков соответствует функции, заданной указанной в условии формулой.

Напомним, что графиком линейной функции является прямая, уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$, а для построения этой прямой достаточно задать координаты двух её точек.

Поскольку $y(0) = b$, прямая $y = kx + b$ пересекает ось ординат в точке $(0; b)$ (в силу чего коэффициент b называют начальной ординатой).

Коэффициент k в уравнении прямой $y = kx + b$ равен тангенсу угла, который эта прямая образует с положительным направлением оси абсцисс.

Если $k > 0$, то линейная функция $y = kx + b$ является возрастающей на всей числовой прямой, принимает положительные значения при всех $x \in \left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$, отрицательные значения — при всех $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$ и обращается в нуль при $x = -\frac{b}{k}$ (рис. 1).

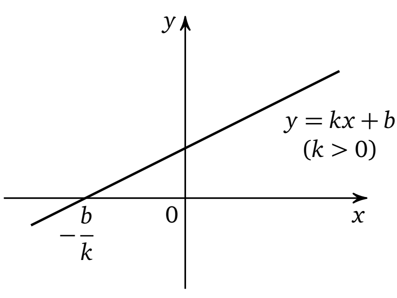


Рис. 1

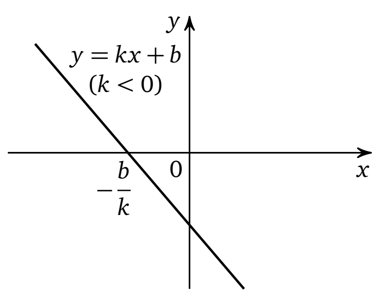


Рис. 2

В тех случаях, когда на рисунках не указан масштаб, считайте, что размер клетки равен 1×1.

Если $k<0$, то линейная функция является убывающей на всей числовой прямой, принимает положительные значения при всех $x \in \left(-\infty; -\frac{b}{k}\right)$, отрицательные значения — при всех $x \in \left(-\frac{b}{k}; +\infty\right)$ и обращается в нуль при $x = -\frac{b}{k}$ (рис. 2).

Наконец, если $k=0$, то уравнение прямой $y=kx+b$ принимает вид $y=b$. Эта прямая, очевидно, параллельна оси абсцисс (поскольку ординаты всех её точек одинаковы) и пересекает ось ординат в точке $(0; b)$ (рис. 3).

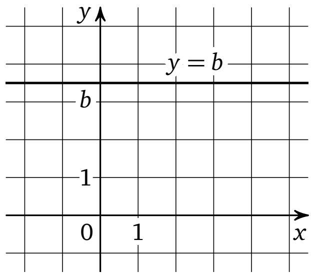


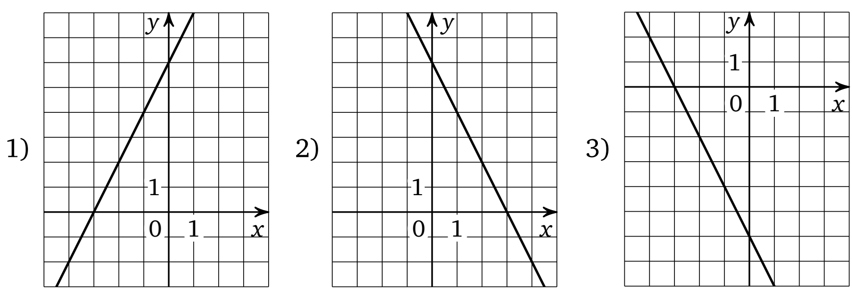
Рис. 3

Пример 1. Установите соответствие между функциями и их графиками.

ФУНКЦИИ

А) $y=2x+6$ Б) $y=-2x-6$ В) $y=-2x+6$

ГРАФИКИ



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

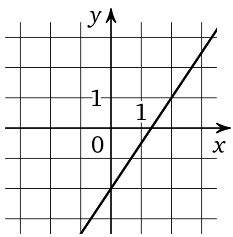
А	Б	В

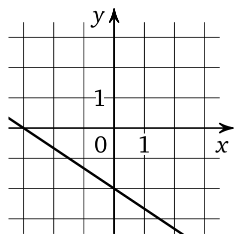
Решение. Единственная прямая, угловой коэффициент которой положителен, — это прямая А. Значит, этой прямой соответствует график 1. У прямой Б начальная ордината равна −6, а у прямой В начальная ордината равна 6. Значит, прямой Б соответствует график 3, а прямой В — график 2.

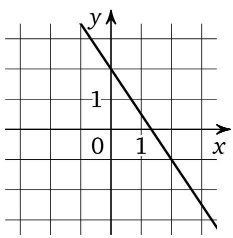
Ответ.

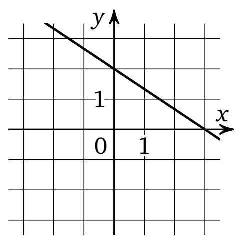
А	Б	В
1	3	2

Пример 2. На каком рисунке изображён график функции $y=2-\frac{2}{3}x$?

1) 

3) 

2) 

4) 

Решение. Если $x=0$, то $y=2$. Значит, прямая $y=2-\frac{2}{3}x$ пересекает ось ординат в точке с ординатой 2. Если $y=0$, то $2-\frac{2}{3}x=0$, откуда $x=3$. Значит, прямая $y=2-\frac{2}{3}x$ пересекает ось абсцисс в точке с абсциссой 3. Поэтому искомым графиком является 4.

Ответ. 4.

Напомним теперь, что функция $y=ax^2+bx+c$ при $a\neq 0$ называется квадратичной.

Сначала рассмотрим случай $a>0$. В этом случае графиком квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Абсцисса x_0 вершины параболы находится по формуле $x_0=-\frac{b}{2a}$. Функция убывает на промежутке $\left(-\infty;\,-\frac{b}{2a}\right]$, возрастает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a};\,+\infty\right)$ и достигает своего наименьшего значения $y_0=-\frac{D}{4a}$ в точке $x_0=-\frac{b}{2a}$. Расположение графика квадратичной функции относительно оси абсцисс существенным образом связано со знаком дискриминанта $D=b^2-4ac$ квадратного трёхчлена ax^2+bx+c.

Если $D > 0$, то график функции $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось абсцисс в двух точках x_1 и x_2. Числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$; условимся, что здесь и далее x_1 — меньший корень, x_2 — больший корень этого уравнения, т. е. $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, а $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$. Таким образом, если $a > 0$ и $D > 0$, то квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные значения при всех $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$, отрицательные значения — при всех $x \in (x_1; x_2)$ и обращается в нуль в точках $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ (рис. 4).

Если $D = 0$, то $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = x_0$, т. е. график функции $y = ax^2 + bx + c$ имеет с осью абсцисс единственную общую точку — вершину параболы. Таким образом, если $a > 0$ и $D = 0$, то квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает положительные значения для всех $x \in (-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$, обращается в нуль в точке $x_0 = -\frac{b}{2a}$, а отрицательных значений не принимает (рис. 5).

Если $D < 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ действительных корней не имеет и, следовательно, график функции $y = ax^2 + bx + c$ не имеет с осью абсцисс ни одной общей точки, т. е. целиком расположен выше оси абсцисс. Таким образом, если $a > 0$ и $D < 0$, то квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ принимает только положительные значения (рис. 6).

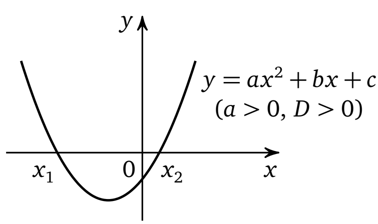


Рис. 4

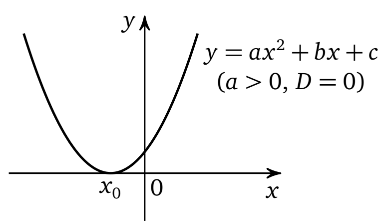


Рис. 5

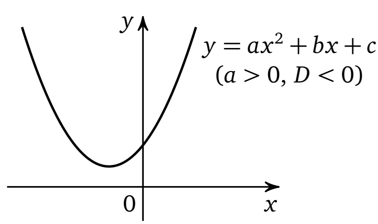


Рис. 6

Случай $a<0$ рассматривается аналогично. В этом случае графиком квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Функция убывает на промежутке $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$, возрастает на промежутке $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ и достигает наибольшего значения $y_0=-\frac{D}{4a}$ в точке $x_0=-\frac{b}{2a}$. Если $D>0$, то график функции $y=ax^2+bx+c$ пересекает ось абсцисс в двух точках x_1 и x_2. Таким образом, при $a<0$ и $D>0$ квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$ принимает положительные значения для всех $x\in(x_1; x_2)$, отрицательные значения — для всех $x\in(-\infty; x_1)\cup(x_2; +\infty)$ и обращается в нуль в точках $x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ (рис. 7). Если $D=0$, то график функции $y=ax^2+bx+c$ имеет с осью абсцисс единственную общую точку — вершину x_0 параболы. Таким образом, если $a<0$ и $D=0$, то квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$ принимает отрицательные значения для всех $x\in(-\infty; x_0)\cup(x_0; +\infty)$, обращается в нуль в точке $x_0=-\frac{b}{2a}$, а положительных значений не принимает (рис. 7). Если $D<0$, то квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ действительных корней не имеет и, следовательно, график функции $y=ax^2+bx+c$ не имеет с осью абсцисс ни одной общей точки, т. е. целиком расположен ниже оси абсцисс. Таким образом, если $a>0$ и $D<0$, то квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$ принимает только отрицательные значения (рис. 9).

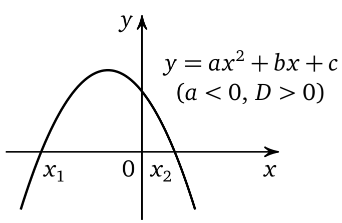


Рис. 7

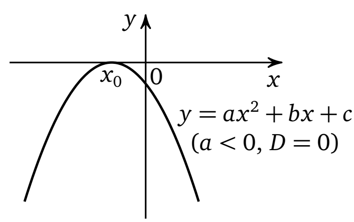


Рис. 8

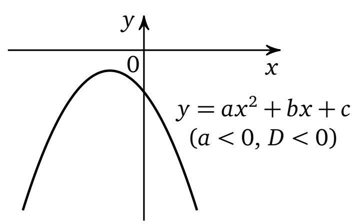
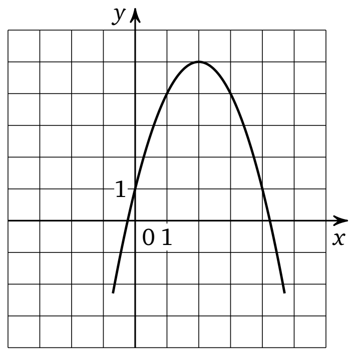


Рис. 9

Пример 3. На рисунке изображён график квадратичной функции.



а) Найдите значение функции при $x = 1$.

б) Найдите значения x, при которых $y = 4$.

в) Найдите наибольшее значение функции.

Решение. а) Для ответа на этот вопрос достаточно мысленно провести через точку 1 оси абсцисс прямую, параллельную оси ординат. Эта прямая пересечёт параболу в точке с ординатой 4.

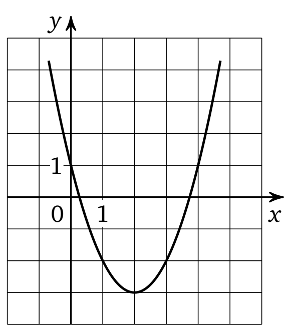
б) Для ответа на второй вопрос задания достаточно мысленно провести через точку 4 оси ординат прямую, параллельную оси абсцисс. Эта прямая пересечёт параболу в точках с абсциссами 1 и 3.

в) Наибольшему значению функции соответствует ордината вершины параболы. Эта ордината в данном случае равна 5.

Ответ. а) 4; б) 1; 3; в) 5.

Заметим, что типичной ошибкой при ответе на вопрос в) является запись в ответе абсциссы вершины, а не её ординаты. Следует акцентировать внимание учащихся на этом факте.

Пример 4. На рисунке изображён график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$.



а) Найдите значение коэффициента c.

б) Найдите значение коэффициента a.

в) Найдите значение коэффициента b.

г) Найдите значение функции при $x = -3$.

Решение. а) График квадратичной функции пересекает ось ординат в точке $(0; c)$, т. е. в точке с ординатой c. Поэтому $c = 1$.

б) и в) Из предыдущего следует, что $y = ax^2 + bx + 1$. Найдём оставшиеся коэффициенты, получив два уравнения с этими неизвестными коэффициентами. Получить эти уравнения можно, заметив, что точки $(1; -2)$ и $(2; -3)$ принадлежат параболе. Значит, $-2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 1$ и $-3 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 1$, откуда $\begin{cases} a + b = -3, \\ 2a + b = -2. \end{cases}$ Вычтя почленно из второго уравнения системы её первое уравнение, найдём $a = 1$. Подставив это значение в первое уравнение системы, получим $b = -4$.

г) Ответить на последний вопрос задания по имеющемуся фрагменту графика невозможно, поскольку точка графика с абсциссой -3 на рисунке не изображена. Но теперь известна формула, задающая данную квадратичную функцию: $y = x^2 - 4x + 1$. Поэтому

$$y(-3) = (-3)^2 - 4 \cdot (-3) + 1 = 22.$$

Ответ. а) 1; б) 1; в) -4; г) 22.

Графиком обратной пропорциональности, т. е. функции $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$, является гипербола, ветви которой при $k > 0$ расположены в первой и третьей координатных четвертях (рис. 10), а при $k < 0$ — во второй и четвёртой координатных четвертях (рис. 11).

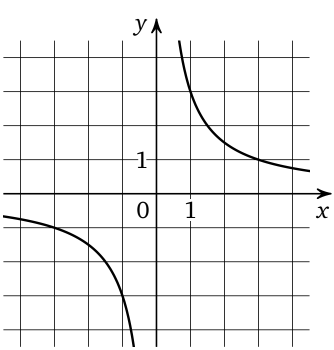


Рис. 10

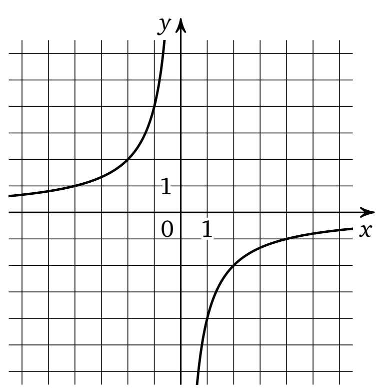


Рис. 11

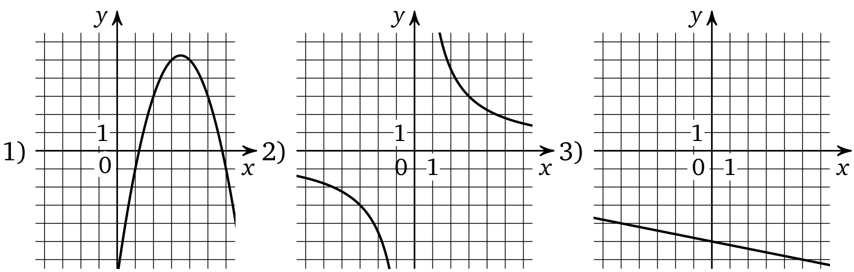
График обратной пропорциональности проходит через точку $(1; k)$. При $k>0$ функция $y=\frac{k}{x}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ своей области определения; при $k<0$ — возрастает на каждом из этих промежутков. Отметим, что говорить о возрастании или убывании функции $y=\frac{k}{x}$ на всей области определения нельзя, это является математической ошибкой: ведь из того, что $2>-1$, не следует, что $y(2)<y(-1)$ при $k>0$ (см. рис. 10), и, значит, функция $y=\frac{k}{x}$ при $k>0$ не является убывающей на объединении промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, хотя и убывает на каждом из них. Аналогично функция $y=\frac{k}{x}$ при $k<0$ не является возрастающей на объединении промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, хотя и возрастает на каждом из них.

Пример 5. Установите соответствие между функциями и их графиками.

ФУНКЦИИ

А) $y=-\frac{1}{5}x-5$ Б) $y=-x^2+7x-7$ В) $y=\frac{9}{x}$

ГРАФИКИ



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

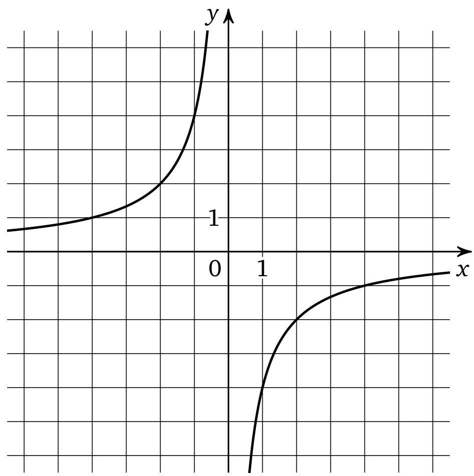
А	Б	В

Решение. Графиком функции А является прямая, графиком функции Б — парабола, графиком функции В — гипербола. На рисунке 1 изображена парабола, на рисунке 2 — гипербола, на рисунке 3 — прямая. Значит, формуле А соответствует график 3, формуле Б — график 1, формуле В — график 2.

Ответ.

А	Б	В
3	1	2

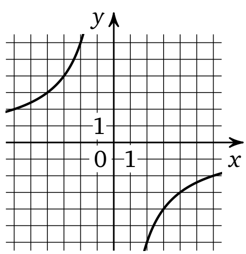
Пример 6. На рисунке изображён график функции $y=\frac{k}{x}$. Найдите k.

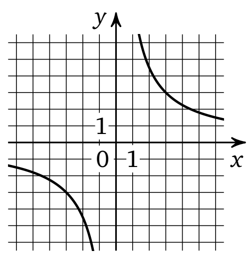


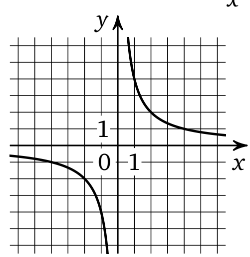
Решение. Для решения подобных задач достаточно найти на графике точку с целыми координатами. В данном случае одной из таких точек является, например, точка $(4; -1)$. Значит, $-1=\frac{k}{4}$, откуда $k=-4$.

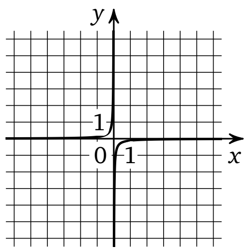
Ответ. -4.

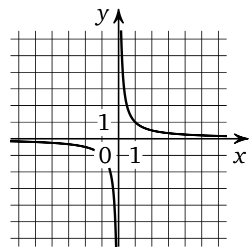
Пример 7. На рисунках изображены графики функций вида $y=\frac{k}{x}$.

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

Определите, на каком из них изображена гипербола, у которой значение k:

а) наибольшее;

б) наименьшее;

в) наименьшее положительное;

г) наибольшее отрицательное;

д) наибольшее по модулю;

е) наименьшее по модулю.

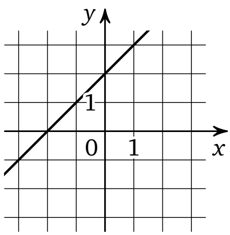
Решение. Поскольку график функции $y=\frac{k}{x}$ проходит через точку $(1; k)$, достаточно сравнить ординаты точек с абсциссой 1, принадлежащих данным графикам. Наибольшая из ординат будет у точки $(1; k)$ графика 2, наименьшая — у точки $(1; k)$ графика 1. Наименьшая положительная ордината будет у точки $(1; k)$ графика 5, наибольшая отрицательная — у точки $(1; k)$ графика 4. Для ответа на вопрос д) достаточно сравнить графики, соответствующие наибольшему положительному значению k (график 2) и наименьшему отрицательному значению k (график 1). Графику 1 принадлежит, например, точка $(2; -6)$, откуда $-6=\frac{k}{2}$, и $k=-12$. Графику 2 принадлежит, например, точка $(3; 3)$, откуда $3=\frac{k}{3}$, и $k=9$. Поскольку $|-12|=12>9$, искомым графиком является график 1. Для ответа на вопрос е) вовсе не обязательно находить конкретные значения k: совершенно очевидно, что самая маленькая по модулю ордината будет у точки $(1; k)$ графика 4.

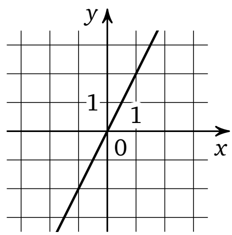
Ответ. а) 2; б) 1; в) 5; г) 4; д) 1; е) 4.

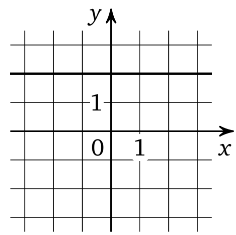
Подготовительные задачи

1. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

А) 

Б) 

В) 

ФОРМУЛЫ

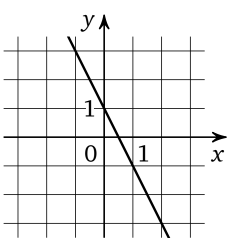
1) $y = 2x$ 2) $y = x + 2$ 3) $y = 2$

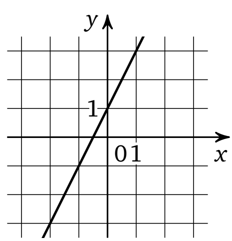
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

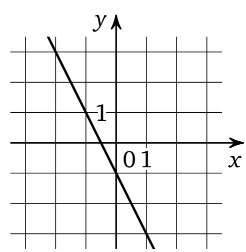
А	Б	В

2. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

А) 

Б) 

В) 

ФОРМУЛЫ

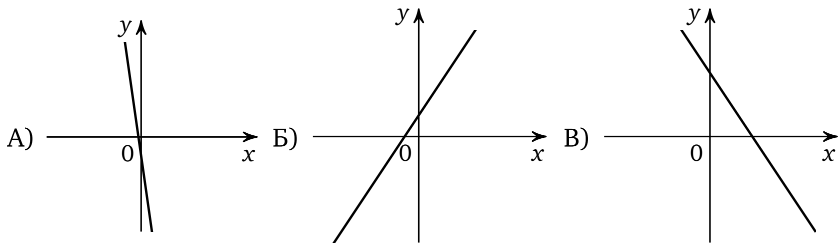
1) $y = -2x - 1$ 2) $y = -2x + 1$ 3) $y = 2x + 1$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

3. На рисунках изображены графики функций вида $y = kx + b$. Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов k и b.

ГРАФИКИ



КОЭФФИЦИЕНТЫ

1) $k < 0$, $b < 0$ 2) $k < 0$, $b > 0$ 3) $k > 0$, $b > 0$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

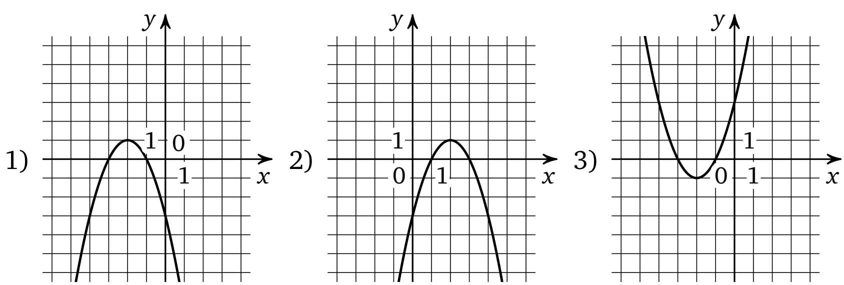
А	Б	В

4. Установите соответствие между функциями и их графиками.

ФУНКЦИИ

А) $y = -x^2 - 4x - 3$ Б) $y = -x^2 + 4x - 3$ В) $y = x^2 + 4x + 3$

ГРАФИКИ



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

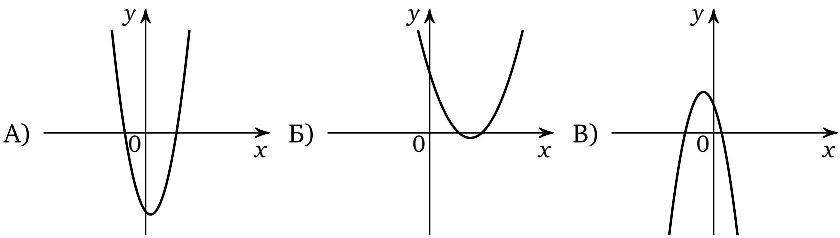
А	Б	В

5. На рисунках изображены графики функций вида

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов a и c.

ГРАФИКИ



КОЭФФИЦИЕНТЫ

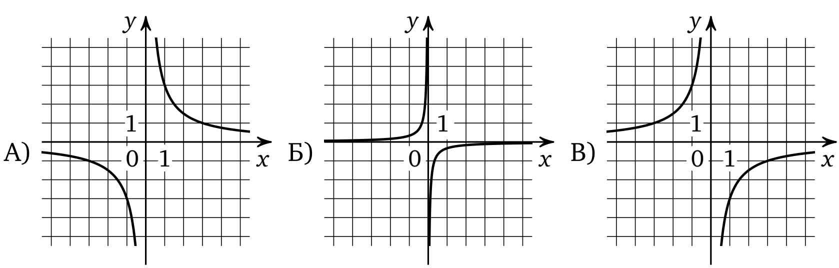
1) $a < 0,\ c > 0$ 2) $a > 0,\ c > 0$ 3) $a > 0,\ c < 0$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

6. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

1) $y = -\dfrac{1}{3x}$ 2) $y = \dfrac{3}{x}$ 3) $y = -\dfrac{3}{x}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

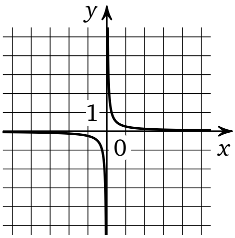
А	Б	В

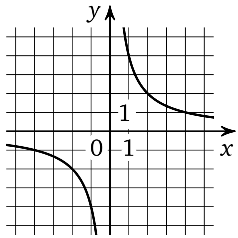
7. Установите соответствие между функциями и их графиками.

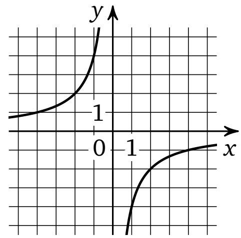
ФУНКЦИИ

А) $y = -\dfrac{4}{x}$ Б) $y = \dfrac{1}{4x}$ В) $y = \dfrac{4}{x}$

ГРАФИКИ

1) 

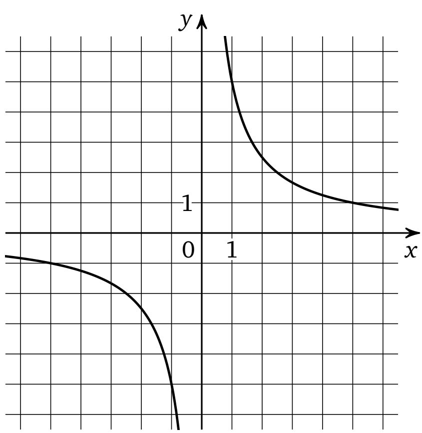
2) 

3) 

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

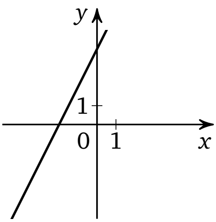
8. На рисунке изображён график функции $y = \dfrac{k}{x}$.

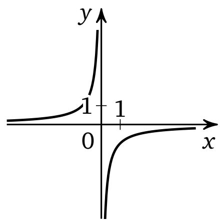


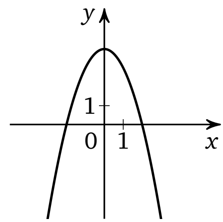
Определите значение коэффициента k.

9. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

А) 

Б) 

В) 

ФОРМУЛЫ

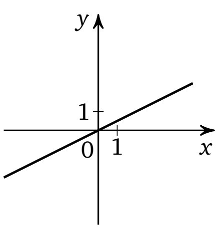
1) $y = -\frac{1}{x}$ 2) $y = 4 - x^2$ 3) $y = 2x + 4$

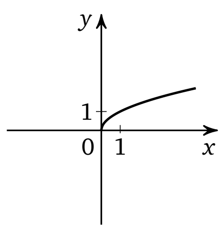
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

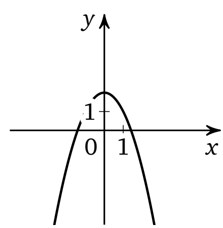
А	Б	В

10. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

А) 

Б) 

В) 

ФОРМУЛЫ

1) $y = \frac{1}{2}x$ 2) $y = 2 - x^2$ 3) $y = \sqrt{x}$

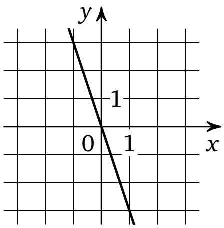
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

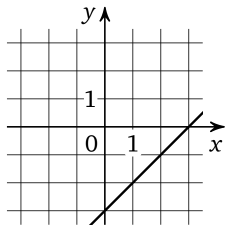
А	Б	В

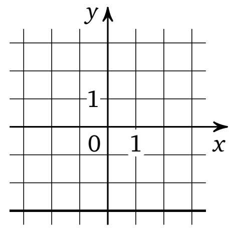
Зачётные задачи

1. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

А) 

Б) 

В) 

ФОРМУЛЫ

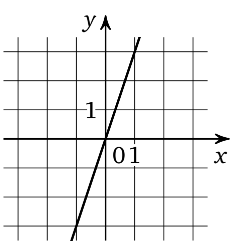
1) $y = -3$ 2) $y = x - 3$ 3) $y = -3x$

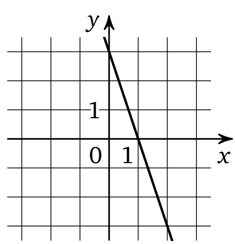
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

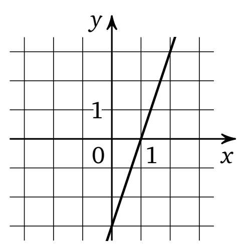
А	Б	В

2. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

А) 

Б) 

В) 

ФОРМУЛЫ

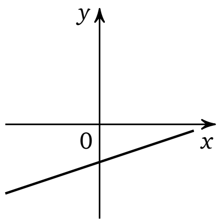
1) $y = -3x + 3$ 2) $y = 3x$ 3) $y = 3x - 3$

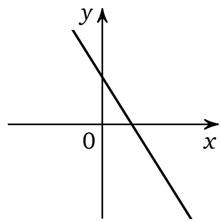
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

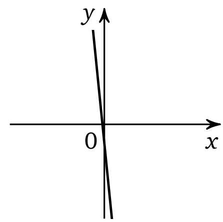
А	Б	В

3. На рисунках изображены графики функций вида $y = kx + b$. Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов k и b.

ГРАФИКИ

А) 

Б) 

В) 

КОЭФФИЦИЕНТЫ

1) $k < 0,\ b > 0$ 2) $k < 0,\ b < 0$ 3) $k > 0,\ b < 0$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

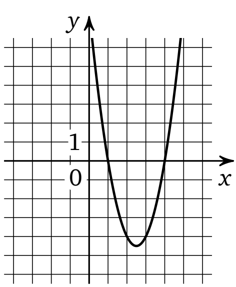
А	Б	В

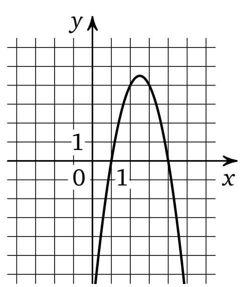
4. Установите соответствие между функциями и их графиками.

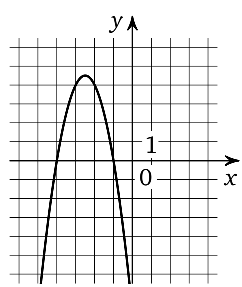
ФУНКЦИИ

А) $y = 2x^2 - 10x + 8$ Б) $y = -2x^2 + 10x - 8$ В) $y = -2x^2 - 10x - 8$

ГРАФИКИ

1) 

2) 

3) 

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

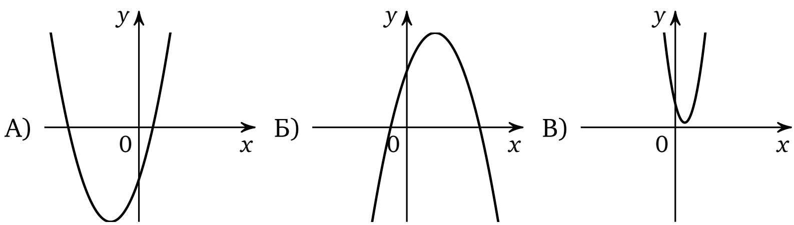
А	Б	В

5. На рисунках изображены графики функций вида

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов a и c.

ГРАФИКИ



КОЭФФИЦИЕНТЫ

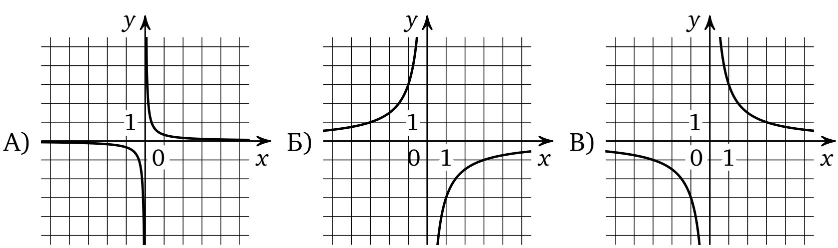
1) $a < 0, c > 0$ 2) $a > 0, c > 0$ 3) $a > 0, c < 0$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

6. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

1) $y = -\dfrac{3}{x}$ 2) $y = \dfrac{1}{3x}$ 3) $y = \dfrac{3}{x}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

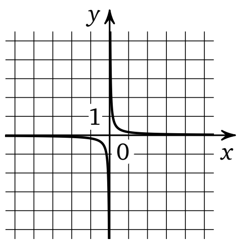
А	Б	В

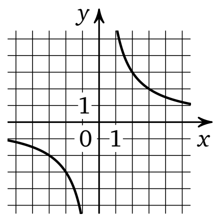
7. Установите соответствие между функциями и их графиками.

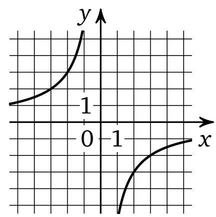
ФУНКЦИИ

А) $y = \dfrac{1}{6x}$ Б) $y = -\dfrac{6}{x}$ В) $y = \dfrac{6}{x}$

ГРАФИКИ

1) 

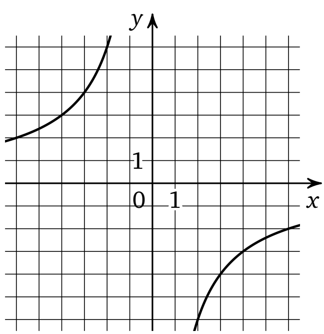
2) 

3) 

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

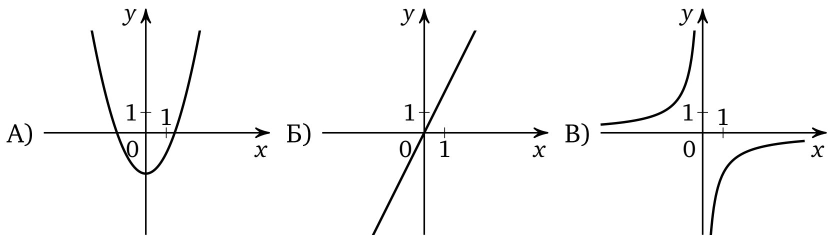
8. На рисунке изображён график функции $y = \dfrac{k}{x}$.



Определите значение коэффициента k.

9. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

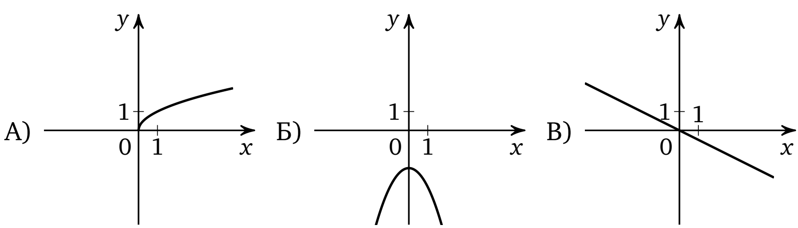
1) $y = -\dfrac{2}{x}$ 2) $y = 2x$ 3) $y = x^2 - 2$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

10. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

1) $y = -\dfrac{1}{2}x$ 2) $y = -x^2 - 2$ 3) $y = \sqrt{x}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

Задание 11

Краткие методические рекомендации

Задание 11 ОГЭ по математике представляет собой задачу на числовые последовательности, прежде всего на арифметическую или геометрическую прогрессию.

Напомним, что *числовой последовательностью* называется набор чисел, для которых указан порядок их следования, т. е. каждому из чисел набора приписан определённый порядковый номер, причём любые два числа из набора (даже если они равны) имеют разные номера. Иными словами, последовательность — это не что иное, как функция, определённая на множестве натуральных чисел. График такой функции представляет собой множество точек с натуральными абсциссами, ординаты которых находятся по определённому правилу. Это правило, как и в случае любой другой функции, может быть дано в виде описания, таблицы, формулы либо даже сразу в виде самого графика. Обычно последовательность обозначается (a_n) или $\{a_n\}$. Скобки указывают именно на обозначение последовательности, а их отсутствие, т. е. запись a_n, означает, что речь идёт об n-м члене последовательности.

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой начиная со второго равен предыдущему, сложенному с одним и тем же для данной последовательности числом d, называемым *разностью прогрессии*. Разность арифметической прогрессии может быть любым числом: положительным, отрицательным, нулём. Таким образом, для того чтобы однозначно определить арифметическую прогрессию, достаточно знать какой-то её член и разность, т. е. арифметическая прогрессия задаётся двумя элементами. В самых простых и стандартных случаях это первый член прогрессии и её разность. На числовой прямой члены арифметической прогрессии с разностью, отличной от нуля, изображаются точками, расстояние между двумя любыми соседними из которых равно $|d|$.

Из определения арифметической прогрессии вытекают формула её n-го члена

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

и формула суммы S_n её первых n членов

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

При решении некоторых задач могут оказаться полезными следующие свойства, также вытекающие из определения арифметической прогрессии:

1) для непостоянной прогрессии $a_k + a_l = a_p + a_q$ в том и только том случае, если $k + l = p + q$, т. е. сумма двух любых членов арифметической прогрессии равна сумме двух любых других её членов с той же суммой индексов;

2) $a_k = \dfrac{a_{k-m} + a_{k+m}}{2}$ (здесь $k > m$), т. е. каждый член арифметической прогрессии начиная со второго есть среднее арифметическое двух равноотстоящих от него членов этой прогрессии; в частности, каждый член арифметической прогрессии начиная со второго равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов этой прогрессии.

Обратим внимание на то, что если для какой-то числовой последовательности выполнено свойство 2, то эта последовательность является арифметической прогрессией, поэтому свойство 2 иногда называют характеристическим свойством арифметической прогрессии.

Перейдём к примерам.

Пример 1. Арифметическая прогрессия (a_n) задана двумя первыми членами: -11; -8; ... Найдите: а) разность прогрессии; б) третий член прогрессии.

Решение. а) Разность d арифметической прогрессии равна разности любого её члена начиная со второго и предыдущего члена. В данном случае $d = -8 - (-11) = 3$.

б) Третий член прогрессии равен сумме её второго члена и разности прогрессии: $-8 + 3 = -5$.

Ответ. а) 3; б) -5.

При решении предыдущей задачи можно было бы обойтись без формального выписывания разности, заметив, что второй член прогрессии на 3 больше первого. Значит, число 3 и есть разность прогрессии. Тогда и третий больше второго на 3, т. е. равен -4.

Пример 2. Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = 8n + 3$. Какое из следующих чисел является её членом?

1) 88 881 2) 88 882 3) 88 883 4) 88 884

Решение. Членами последовательности являются натуральные числа, остаток от деления которых на 8 равен 3. Таким числом среди указанных в условии является, очевидно, только 88 883.

Ответ. 3.

Обратим внимание на то, что данная в условии примера 2 последовательность является арифметической прогрессией. Это следует из того, что разность между любым её членом начиная со второго и предыдущим членом одна и та же. В самом деле, если $a_n = 8n + 3$, то $a_{n+1} = 8(n+1) + 3 = 8n + 11$, откуда $a_{n+1} - a_n = 8n + 11 - 8n - 3 = 8$, т. е. (a_n) — арифметическая прогрессия с разностью $d = 8$.

Пример 3. Последовательность (c_n) задана условиями $c_1 = 6$, $c_{n+1} = c_n - 9$. Найдите c_7.

Решение. Поскольку $c_{n+1} - c_n = -9$, последовательность (c_n) является арифметической прогрессией с разностью $d = -9$. Поэтому $c_7 = c_1 + 6d = 6 + 6 \cdot (-9) = -48$.

Ответ. −48.

Пример 4. (a_n) — арифметическая прогрессия с разностью, отличной от нуля. Вычислите $\frac{a_{10} - a_1}{a_9 - a_7} + \frac{a_{11} - a_6}{a_8 - a_4}$.

Решение. Воспользуемся формулой n-го члена арифметической прогрессии и перепишем данное выражение в виде

$$\frac{a_1 + 9d - a_1}{a_1 + 8d - a_1 - 6d} + \frac{a_1 + 10d - a_1 - 5d}{a_1 + 7d - a_1 - 3d},$$

откуда после упрощений получим

$$\frac{9d}{2d} + \frac{5d}{4d} = \frac{9}{2} + \frac{5}{4} = \frac{23}{4} = 5{,}75.$$

Ответ. 5,75.

Пример 5. Найдите сумму первых тридцати членов арифметической прогрессии (a_n), если сумма первых десяти её членов равна 640, а сумма первых шестидесяти её членов равна −960.

Решение. Найдём сначала a_1 и d. По условию

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = (a_1 + a_1 + 9d) \cdot 5 = 640,$$

откуда $2a_1 + 9d = 128$. Аналогично

$$S_{60} = \frac{a_1 + a_{60}}{2} \cdot 60 = (a_1 + a_1 + 59d) \cdot 30 = -960,$$

откуда $2a_1 + 59d = -32$. Вычтем из последнего равенства почленно равенство $2a_1 + 9d = 128$. Получим $50d = -160$, откуда $d = -3{,}2$. Но тогда $2a_1 = 128 + 9 \cdot 3{,}2 = 156{,}8$, откуда $a_1 = 78{,}4$. Осталось найти искомую сумму:

$$S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30 = (a_1 + a_1 + 29d) \cdot 15 = \\ = (2 \cdot 78{,}4 + 29 \cdot (-3{,}2)) \cdot 15 = 960.$$

Ответ. 960.

Заметим, что ответ примера 5 был получен с использованием стандартного алгоритма решения подобных задач: по данным условия были составлены два уравнения, которые позволили найти a_1 и d — базовые элементы прогрессии, после чего с их помощью была вычислена требуемая величина.

Если условие задачи позволяет составить только одно равенство (уравнение), то, скорее всего, для решения задачи нужно воспользоваться определением прогрессии (см. пример 4) или применить свойства 1 или 2.

Пример 6. Найдите значение выражения $\dfrac{a_{13}+a_{15}+a_{17}+a_{19}}{a_{16}}$, если известно, что числовая последовательность (a_n) является арифметической прогрессией.

Решение. Из условия задачи следует, что $a_{16}\neq 0$. Для решения задачи воспользуемся свойством 2, из которого следует, что

$$a_{13}+a_{19}=2a_{16}, \quad a_{15}+a_{17}=2a_{16}.$$

Поэтому искомое значение равно $\dfrac{4a_{16}}{a_{16}}=4$.

Ответ. 4.

Приведём теперь основные определения и факты, связанные с геометрической прогрессией.

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность (b_n), первый член которой отличен от нуля, а любой другой её член равен предыдущему, умноженному на одно и то же для данной последовательности отличное от нуля число q, называемое *знаменателем прогрессии*. Таким образом, в отличие от определения арифметической прогрессии, определение геометрической прогрессии, содержит ограничения на оба её базовых элемента: $b_1\neq 0$, $q\neq 0$. Из определения геометрической прогрессии следует и то, что любой её член отличен от нуля.

Таким образом, для того чтобы однозначно определить геометрическую прогрессию, достаточно знать какой-то её член и знаменатель, т. е. геометрическая прогрессия, как и арифметическая, задаётся двумя элементами. В самых простых и стандартных случаях это первый член прогрессии и её знаменатель. В более сложных задачах по данным условия можно составить два равенства (уравнения), которые позволят найти b_1 и q, а уже затем с их помощью вычислить искомую величину.

Определение геометрической прогрессии позволяет найти формулу её n-го члена $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$ и формулу суммы S_n её первых n членов $S_n = b_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ (для прогрессии, знаменатель которой отличен от 1). Если же знаменатель геометрической прогрессии равен 1, то все её члены равны первому и $S_n = n \cdot b_1$.

Напомним ещё два свойства, которые могут оказаться полезными при решении ряда задач:

1) для непостоянной прогрессии $b_k \cdot b_l = b_p \cdot b_q$ в том и только том случае, если $k + l = p + q$, т. е. произведение двух любых членов геометрической прогрессии равно произведению двух любых других её членов с той же суммой индексов;

2) $b_k^2 = b_{k-m} \cdot b_{k+m}$ (здесь $k > m$), т. е. квадрат каждого члена геометрической прогрессии начиная со второго равен произведению двух равноотстоящих от него членов этой прогрессии; в частности, для прогрессии с положительными членами $b_k = \sqrt{b_{k-m} \cdot b_{k+m}}$, т. е. каждый член геометрической прогрессии с положительными членами начиная со второго равен среднему геометрическому двух соседних с ним членов этой прогрессии.

Обратим внимание на то, что если для какой-то числовой последовательности выполнено свойство 2, то эта последовательность является геометрической прогрессией, поэтому свойство 2 иногда называют характеристическим свойством геометрической прогрессии.

Пример 7. Геометрическая прогрессия (b_n) задана двумя первыми членами: -2; 10; … Найдите: а) знаменатель прогрессии; б) пятый член прогрессии.

Решение. а) Знаменатель q геометрической прогрессии равен отношению любого её члена начиная со второго и предыдущего члена. В данном случае $q = \dfrac{10}{-2} = -5$.

б) Пятый член прогрессии равен произведению её второго члена и куба знаменателя прогрессии: $10 \cdot (-5)^3 = -1250$.

Ответ. а) -5; б) -1250.

При решении предыдущей задачи можно было бы обойтись без формального выписывания знаменателя, заметив, что второй член прогрессии получается умножением первого на -5. Значит, число -5 и есть знаменатель прогрессии. Тогда её пятый член равен $10 \cdot (-5)^3 = -1250$.

Пример 8. Числовая последовательность (b_n) задана условиями $b_1 = -128$, $b_{n+1} = \dfrac{3}{4} b_n$. Найдите b_4.

Решение. Из условия задачи следует, что первый член данной последовательности отличен от нуля, а каждый её член начиная со второго равен предыдущему, умноженному на число $\dfrac{3}{4}$. Значит, данная последовательность является геометрической прогрессией со знаменателем $q=\frac{3}{4}$. Поэтому

$$b_4 = b_1 \cdot q^3 = -128 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = -128 \cdot \frac{27}{64} = -2 \cdot 27 = -54.$$

Ответ. -54.

Пример 9. Найдите сумму первых семи членов геометрической прогрессии (b_n), если известно, что $b_6=6$, $b_9=0{,}75$.

Решение. Из формулы n-го члена геометрической прогрессии следует, что $b_9=b_1\cdot q^8$, $b_6=b_1\cdot q^5$. Значит,

$$\frac{b_9}{b_6} = \frac{b_1 \cdot q^8}{b_1 \cdot q^5} = q^3, \quad \text{т. е.} \quad q^3 = \frac{0{,}75}{6} = \frac{1}{8},$$

откуда $q=\frac{1}{2}$. Тогда

$$b_1 = \frac{b_6}{q^5} = \frac{6}{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = 6 \cdot 2^5 = 6 \cdot 32 = 192.$$

Поэтому

$$S_7 = b_1\frac{q^7-1}{q-1} = 192 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 1}{\frac{1}{2}-1} = 192 \cdot \frac{-\frac{127}{128}}{-\frac{1}{2}} = 192 \cdot \frac{127}{64} = 3 \cdot 127 = 381.$$

Ответ. 381.

Если условие задачи позволяет составить только одно равенство (уравнение) или вовсе не предполагает этого, то, скорее всего, для решения задачи нужно применить свойства 1 или 2.

Пример 10. Найдите значение выражения

$$\frac{b_2 \cdot b_{32} + b_4 \cdot b_{30} + b_6 \cdot b_{28}}{20b_{17}^2},$$

если известно, что числовая последовательность (b_n) является геометрической прогрессией.

Решение. Из условия задачи следует, что $b_{17} \neq 0$. Для решения задачи воспользуемся свойством 2, из которого следует, что каждое слагаемое числителя равно b_{17}^2. Поэтому искомое значение равно $\frac{3b_{17}^2}{20b_{17}^2}=0{,}15$.

Ответ. 0,15.

Подготовительные задачи

1. Дана арифметическая прогрессия (a_n), разность которой равна $-8{,}5$ и $a_1=-6{,}8$. Найдите a_5.

2. Выписаны несколько последовательных членов арифметической прогрессии:

$$\ldots;\ -6;\ x;\ -2;\ 0;\ \ldots$$

Найдите x.

3. Дана арифметическая прогрессия (a_n), в которой

$$a_{10}=-10,\quad a_{16}=-19.$$

Найдите разность прогрессии.

4. Дана арифметическая прогрессия (a_n), разность которой равна $1{,}1$ и $a_1=-7$. Найдите сумму первых восьми её членов.

5. Выписаны первые несколько членов арифметической прогрессии:

$$20;\ 13;\ 6;\ \ldots$$

Найдите седьмой член этой прогрессии.

6. Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии:

$$100;\ 20;\ 4;\ \ldots$$

Найдите её пятый член.

7. Выписаны несколько последовательных членов геометрической прогрессии:

$$\ldots;\ 3;\ x;\ 75;\ -375;\ \ldots$$

Найдите x.

8. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями

$$b_1=-6,\quad b_{n+1}=2b_n.$$

Найдите b_6.

9. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями

$$b_1=-3,\quad b_{n+1}=-4b_n.$$

Найдите сумму первых пяти её членов.

10. Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии:

$$-1250;\ -250;\ -50;\ \ldots$$

Найдите сумму первых пяти её членов.

Зачётные задачи

1. Выписаны несколько последовательных членов арифметической прогрессии:

$$\ldots;\ -9;\ x;\ -13;\ -15;\ \ldots$$

Найдите x.

2. Дана арифметическая прогрессия (a_n), в которой

$$a_3 = -21{,}4, \quad a_{13} = -40{,}4.$$

Найдите разность прогрессии.

3. Последовательность (a_n) задана условиями

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n + 4.$$

Найдите a_6.

4. Выписаны первые несколько членов арифметической прогрессии:

$$-6;\ 1;\ 8;\ \ldots$$

Найдите шестой член этой прогрессии.

5. Последовательность (b_n) задана условиями

$$b_1 = -6, \quad b_{n+1} = -2 \cdot \frac{1}{b_n}.$$

Найдите b_5.

6. Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии:

$$-175;\ -140;\ -112;\ \ldots$$

Найдите её пятый член.

7. Выписаны несколько последовательных членов геометрической прогрессии:

$$\ldots;\ 162;\ x;\ 18;\ -6;\ \ldots$$

Найдите x.

8. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями

$$b_1 = -2, \quad b_{n+1} = 2b_n.$$

Найдите b_7.

9. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями

$$b_1 = -2, \quad b_{n+1} = -3b_n.$$

Найдите сумму первых семи её членов.

10. Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии:

$$-384;\ -96;\ -24;\ \ldots$$

Найдите сумму первых пяти её членов.

Задание 12

Краткие методические рекомендации

Задание 13 ОГЭ по математике представляет собой задачу на вычисление по данной формуле. По сути в условиях таких задач даются формулы из разных областей знаний, причём значения всех величин за исключением одной в этих формулах известны. Требуется найти значение именно этой величины. Есть подобные задачи и в ЕГЭ по математике — как базового, так и профильного уровня. Отметим, что для решения этих задач вовсе не обязательно быть специалистом, например, в области физики или химии, здесь проверяется именно умение вычислять значение искомой величины по данной формуле и данным константам, т. е. по сути это задачи на «понимание при чтении», в данном случае чтении условия. При этом в само условие, вообще говоря, можно не вникать, более того, это и не нужно: достаточно выписать данную формулу и значения данных в условии величин, подставить эти значения в выписанную формулу и найти из неё единственную неизвестную величину.

Пример 1. Перевести температуру из шкалы Фаренгейта в шкалу Цельсия позволяет формула

$$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32),$$

где t_C — температура в градусах по шкале Цельсия, t_F — температура в градусах по шкале Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует 329 градусов по шкале Фаренгейта?

Решение. По условию задачи $t_F = 329$. Поэтому

$$t_C = \frac{5}{9}(329 - 32) = \frac{5}{9} \cdot 297 = 5 \cdot 33 = 165.$$

Ответ. 165.

Пример 2. Потенциальная энергия тела (в джоулях) в поле тяготения Земли вблизи поверхности вычисляется по формуле

$$E = mgh,$$

где где m — масса тела (в килограммах), g — гравитационная постоянная, а h — высота (в метрах), на которой находится это тело, относительно условного нуля. Пользуясь этой формулой, найдите m (в килограммах), если $g = 9{,}8$ м/с^2, $h = 80$ м, а $E = 196$ Дж.

Решение. Найдём искомую массу, используя данную формулу и данные значения остальных величин:

$$m = \frac{E}{gh} = \frac{196}{9{,}8 \cdot 80} = 0{,}25.$$

Ответ. 0,25.

Пример 3. Площадь четырёхугольника можно вычислить по формуле

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2},$$

где d_1 и d_2 — длины диагоналей четырёхугольника, α — угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите длину диагонали d_1, если $d_2 = 18$, $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, а $S = 27$.

Решение. Выполним вычисления, подставив в данную формулу данные значения:

$$\frac{d_1 \cdot 18 \cdot \frac{1}{3}}{2} = 27,$$

откуда $3d_1 = 27$, и, значит, $d_1 = 9$.

Ответ. 9.

Подготовительные задачи

1. Мощность постоянного тока (в ваттах) вычисляется по формуле

$$P = I^2R,$$

где I — сила тока (в амперах), R — сопротивление (в омах). Пользуясь этой формулой, найдите сопротивление R, если мощность составляет 6,75 Вт, а сила тока равна 1,5 А. Ответ дайте в омах.

2. Площадь четырёхугольника можно вычислить по формуле

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2},$$

где d_1 и d_2 — длины диагоналей четырёхугольника, α — угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите длину диагонали d_2, если $d_1 = 4$, $\sin\alpha = \frac{5}{7}$, а $S = 10$.

3. В фирме «Родник» стоимость (в рублях) колодца из железобетонных колец рассчитывается по формуле

$$C = 6000 + 4100n,$$

где n — число колец, установленных в колодце. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость колодца из 5 колец. Ответ дайте в рублях.

4. Чтобы перевести значение температуры по шкале Цельсия в шкалу Фаренгейта, пользуются формулой

$$t_F = 1{,}8t_C + 32,$$

где t_C — температура в градусах Цельсия, t_F — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Фаренгейта соответствует -10 градусов по шкале Цельсия?

5. Чтобы перевести значение температуры по шкале Цельсия в шкалу Фаренгейта, пользуются формулой

$$t_F = 1{,}8t_C + 32,$$

где t_C — температура в градусах Цельсия, t_F — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Фаренгейта соответствует -25 градусов по шкале Цельсия?

6. Перевести значение температуры по шкале Фаренгейта в шкалу Цельсия позволяет формула

$$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32),$$

где t_C — температура в градусах Цельсия, t_F — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует 41 градус по шкале Фаренгейта?

7. Перевести значение температуры по шкале Фаренгейта в шкалу Цельсия позволяет формула

$$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32),$$

где t_C — температура в градусах Цельсия, t_F — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует 23 градуса по шкале Фаренгейта?

8. Центростремительное ускорение при движении по окружности (в м/с^2) вычисляется по формуле

$$a = \omega^2 R,$$

где ω — угловая скорость (в с$^{-1}$), R — радиус окружности (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите радиус R, если угловая скорость равна 4 с$^{-1}$, а центростремительное ускорение равно 48 м/с^2. Ответ дайте в метрах.

9. Центростремительное ускорение при движении по окружности (в м/с^2) вычисляется по формуле

$$a = \omega^2 R,$$

где ω — угловая скорость (в с$^{-1}$), R — радиус окружности (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите радиус R, если угловая скорость равна 7,5 с$^{-1}$, а центростремительное ускорение равно 337,5 м/с^2. Ответ дайте в метрах.

10. Закон Джоуля—Ленца можно записать в виде

$$Q = I^2 Rt,$$

где Q — количество теплоты (в джоулях), I — сила тока (в амперах), R — сопротивление цепи (в омах), а t — время (в секундах). Пользуясь этой формулой, найдите силу тока I (в амперах), если $Q = 2187$ Дж, $R = 3$ Ом, а $t = 9$ с.

Зачётные задачи

1. Мощность постоянного тока (в ваттах) вычисляется по формуле

$$P = I^2R,$$

где I — сила тока (в амперах), R — сопротивление (в омах). Пользуясь этой формулой, найдите сопротивление R, если мощность составляет 147 Вт, а сила тока равна 3,5 А. Ответ дайте в омах.

2. Площадь четырёхугольника можно вычислить по формуле

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2},$$

где d_1 и d_2 — длины диагоналей четырёхугольника, α — угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите длину диагонали d_2, если $d_1 = 11$, $\sin\alpha = \frac{7}{12}$, а $S = 57{,}75$.

3. В фирме «Родник» стоимость (в рублях) колодца из железобетонных колец рассчитывается по формуле

$$C = 6000 + 4100n,$$

где n — число колец, установленных в колодце. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость колодца из 20 колец. Ответ дайте в рублях.

4. Чтобы перевести значение температуры по шкале Цельсия в шкалу Фаренгейта, пользуются формулой

$$t_F = 1{,}8t_C + 32,$$

где t_C — температура в градусах Цельсия, t_F — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Фаренгейта соответствует 35 градусов по шкале Цельсия?

5. Чтобы перевести значение температуры по шкале Цельсия в шкалу Фаренгейта, пользуются формулой

$$t_F = 1{,}8t_C + 32,$$

где t_C — температура в градусах Цельсия, t_F — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Фаренгейта соответствует −30 градусов по шкале Цельсия?

6. Перевести значение температуры по шкале Фаренгейта в шкалу Цельсия позволяет формула

$$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32),$$

где t_C — температура в градусах Цельсия, t_F — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует 59 градусов по шкале Фаренгейта?

7. Перевести значение температуры по шкале Фаренгейта в шкалу Цельсия позволяет формула

$$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32),$$

где t_C — температура в градусах Цельсия, t_F — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует -4 градуса по шкале Фаренгейта?

8. Центростремительное ускорение при движении по окружности (в м/с^2) вычисляется по формуле

$$a = \omega^2 R,$$

где ω — угловая скорость (в с$^{-1}$), R — радиус окружности (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите радиус R, если угловая скорость равна 9 с$^{-1}$, а центростремительное ускорение равно 648 м/с^2. Ответ дайте в метрах.

9. Центростремительное ускорение при движении по окружности (в м/с^2) вычисляется по формуле

$$a = \omega^2 R,$$

где ω — угловая скорость (в с$^{-1}$), R — радиус окружности (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите радиус R, если угловая скорость равна 8,5 с$^{-1}$, а центростремительное ускорение равно 505,75 м/с^2. Ответ дайте в метрах.

10. Закон Джоуля—Ленца можно записать в виде

$$Q = I^2 Rt,$$

где Q — количество теплоты (в джоулях), I — сила тока (в амперах), R — сопротивление цепи (в омах), а t — время (в секундах). Пользуясь этой формулой, найдите силу тока I (в амперах), если $Q = 1452$ Дж, $R = 4$ Ом, а $t = 3$ с.

Задание 13

Краткие методические рекомендации

Задание 13 ОГЭ по математике представляет собой задачу на вычисление по данной формуле. По сути в условиях таких задач даются формулы из разных областей знаний, причём значения всех величин за исключением одной в этих формулах известны. Требуется найти значение именно этой величины. Есть подобные задачи и в ЕГЭ по математике — как базового, так и профильного уровня. Отметим, что для решения этих задач вовсе не обязательно быть специалистом, например, в области физики или химии, здесь проверяется именно умение вычислять значение искомой величины по данной формуле и данным константам, т. е. по сути это задачи на «понимание при чтении», в данном случае чтении условия. При этом в само условие, вообще говоря, можно не вникать, более того, это и не нужно: достаточно выписать данную формулу и значения данных в условии величин, подставить эти значения в выписанную формулу и найти из неё единственную неизвестную величину.

Пример 1. Перевести температуру из шкалы Фаренгейта в шкалу Цельсия позволяет формула

$$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32),$$

где t_C — температура в градусах по шкале Цельсия, t_F — температура в градусах по шкале Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует 329 градусов по шкале Фаренгейта?

Решение. По условию задачи $t_F = 329$. Поэтому

$$t_C = \frac{5}{9}(329 - 32) = \frac{5}{9} \cdot 297 = 5 \cdot 33 = 165.$$

Ответ. 165.

Пример 2. Потенциальная энергия тела (в джоулях) в поле тяготения Земли вблизи поверхности вычисляется по формуле

$$E = mgh,$$

где где m — масса тела (в килограммах), g — гравитационная постоянная, а h — высота (в метрах), на которой находится это тело, относительно условного нуля. Пользуясь этой формулой, найдите m (в килограммах), если $g = 9{,}8$ м/с^2, $h = 80$ м, а $E = 196$ Дж.

Решение. Найдём искомую массу, используя данную формулу и данные значения остальных величин:

$$m = \frac{E}{gh} = \frac{196}{9{,}8 \cdot 80} = 0{,}25.$$

Ответ. 0,25.

Пример 3. Площадь четырёхугольника можно вычислить по формуле

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2},$$

где d_1 и d_2 — длины диагоналей четырёхугольника, α — угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите длину диагонали d_1, если $d_2 = 18$, $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, а $S = 27$.

Решение. Выполним вычисления, подставив в данную формулу данные значения:

$$\frac{d_1 \cdot 18 \cdot \frac{1}{3}}{2} = 27,$$

откуда $3d_1 = 27$, и, значит, $d_1 = 9$.

Ответ. 9.

Подготовительные задачи

1. Мощность постоянного тока (в ваттах) вычисляется по формуле

$$P = I^2R,$$

где I — сила тока (в амперах), R — сопротивление (в омах). Пользуясь этой формулой, найдите сопротивление R, если мощность составляет 6,75 Вт, а сила тока равна 1,5 А. Ответ дайте в омах.

2. Площадь четырёхугольника можно вычислить по формуле

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2},$$

где d_1 и d_2 — длины диагоналей четырёхугольника, α — угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите длину диагонали d_2, если $d_1 = 4$, $\sin\alpha = \frac{5}{7}$, а $S = 10$.

3. В фирме «Родник» стоимость (в рублях) колодца из железобетонных колец рассчитывается по формуле

$$C = 6000 + 4100n,$$

где n — число колец, установленных в колодце. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость колодца из 5 колец. Ответ дайте в рублях.

4. Чтобы перевести значение температуры по шкале Цельсия в шкалу Фаренгейта, пользуются формулой

$$t_F = 1{,}8t_C + 32,$$

где t_C — температура в градусах Цельсия, t_F — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Фаренгейта соответствует -10 градусов по шкале Цельсия?

5. Чтобы перевести значение температуры по шкале Цельсия в шкалу Фаренгейта, пользуются формулой

$$t_F = 1{,}8t_C + 32,$$

где t_C — температура в градусах Цельсия, t_F — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует -13 градусов по шкале Фаренгейта?

6. Перевести значение температуры по шкале Фаренгейта в шкалу Цельсия позволяет формула

$$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32),$$

где t_C — температура в градусах Цельсия, t_F — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует 41 градус по шкале Фаренгейта?

7. Перевести значение температуры по шкале Фаренгейта в шкалу Цельсия позволяет формула

$$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32),$$

где t_C — температура в градусах Цельсия, t_F — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует 23 градуса по шкале Фаренгейта?

8. Центростремительное ускорение при движении по окружности (в м/с^2) вычисляется по формуле

$$a = \omega^2 R,$$

где ω — угловая скорость (в с$^{-1}$), R — радиус окружности (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите радиус R, если угловая скорость равна 4 с$^{-1}$, а центростремительное ускорение равно 48 м/с^2. Ответ дайте в метрах.

9. Центростремительное ускорение при движении по окружности (в м/с^2) вычисляется по формуле

$$a = \omega^2 R,$$

где ω — угловая скорость (в с$^{-1}$), R — радиус окружности (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите радиус R, если угловая скорость равна 7,5 с$^{-1}$, а центростремительное ускорение равно 337,5 м/с^2. Ответ дайте в метрах.

10. Закон Джоуля—Ленца можно записать в виде

$$Q = I^2 R t,$$

где Q — количество теплоты (в джоулях), I — сила тока (в амперах), R — сопротивление цепи (в омах), а t — время (в секундах). Пользуясь этой формулой, найдите силу тока I (в амперах), если $Q = 2187$ Дж, $R = 3$ Ом, а $t = 9$ с.

Зачётные задачи

1. Мощность постоянного тока (в ваттах) вычисляется по формуле

$$P = I^2R,$$

где I — сила тока (в амперах), R — сопротивление (в омах). Пользуясь этой формулой, найдите сопротивление R, если мощность составляет 147 Вт, а сила тока равна 3,5 А. Ответ дайте в омах.

2. Площадь четырёхугольника можно вычислить по формуле

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2},$$

где d_1 и d_2 — длины диагоналей четырёхугольника, α — угол между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите длину диагонали d_2, если $d_1 = 11$, $\sin\alpha = \frac{7}{12}$, а $S = 57{,}75$.

3. В фирме «Родник» стоимость (в рублях) колодца из железобетонных колец рассчитывается по формуле

$$C = 6000 + 4100n,$$

где n — число колец, установленных в колодце. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость колодца из 20 колец. Ответ дайте в рублях.

4. Чтобы перевести значение температуры по шкале Цельсия в шкалу Фаренгейта, пользуются формулой

$$t_F = 1{,}8t_C + 32,$$

где t_C — температура в градусах Цельсия, t_F — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Фаренгейта соответствует 35 градусов по шкале Цельсия?

5. Чтобы перевести значение температуры по шкале Цельсия в шкалу Фаренгейта, пользуются формулой

$$t_F = 1{,}8t_C + 32,$$

где t_C — температура в градусах Цельсия, t_F — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует -22 градусов по шкале Фаренгейта?

6. Перевести значение температуры по шкале Фаренгейта в шкалу Цельсия позволяет формула

$$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32),$$

где t_C — температура в градусах Цельсия, t_F — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует 59 градусов по шкале Фаренгейта?

7. Перевести значение температуры по шкале Фаренгейта в шкалу Цельсия позволяет формула

$$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32),$$

где t_C — температура в градусах Цельсия, t_F — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует -4 градуса по шкале Фаренгейта?

8. Центростремительное ускорение при движении по окружности (в м/с^2) вычисляется по формуле

$$a = \omega^2 R,$$

где ω — угловая скорость (в с$^{-1}$), R — радиус окружности (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите радиус R, если угловая скорость равна 9 с$^{-1}$, а центростремительное ускорение равно 648 м/с^2. Ответ дайте в метрах.

9. Центростремительное ускорение при движении по окружности (в м/с^2) вычисляется по формуле

$$a = \omega^2 R,$$

где ω — угловая скорость (в с$^{-1}$), R — радиус окружности (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите радиус R, если угловая скорость равна 8,5 с$^{-1}$, а центростремительное ускорение равно 505,75 м/с^2. Ответ дайте в метрах.

10. Закон Джоуля—Ленца можно записать в виде

$$Q = I^2 R t,$$

где Q — количество теплоты (в джоулях), I — сила тока (в амперах), R — сопротивление цепи (в омах), а t — время (в секундах). Пользуясь этой формулой, найдите силу тока I (в амперах), если $Q = 1452$ Дж, $R = 4$ Ом, а $t = 3$ с.

Задание 14

Краткие методические рекомендации

Задание 14 ОГЭ по математике представляет собой линейное или квадратное неравенство либо систему двух простейших линейных неравенств.

Напомним, что функция $y = ax + b$ при $a \neq 0$ называется линейной. Неравенства вида $ax + b \vee 0$ при $a \neq 0$ (знаком «$\vee$» обозначен один из четырёх возможных знаков неравенств «$>$», «$<$», «$\geqslant$», «$\leqslant$») также называются линейными. При $a \neq 0$ алгебраическое выражение $f(x) = ax + b$ является многочленом первой степени. Соответственно, линейные неравенства — это целые неравенства первой степени.

Линейные неравенства обычно приводят к виду $ax \vee -b$, после чего делят обе части последнего неравенства на число a. Стандартная ошибка в решениях линейных неравенств связана именно с этим делением: если число a отрицательно, знак неравенства нужно изменить на противоположный, о чём многие забывают. При решении неравенств вида $ax + b \vee cx + d$ удобно все слагаемые, содержащие переменную, перенести в левую часть, а все числа — в правую: $ax - cx \vee d - b$, откуда $(a - c)x \vee d - b$. Если $a \neq c$, остаётся сделать последний шаг — разделить обе части неравенства на число $a - c$ (с изменением знака неравенства на противоположный в случае, если это число отрицательно). Если $a = c$, получаем неравенство вида $0 \cdot x \vee d - b$, которое — в зависимости от знака неравенства и числа в правой части — либо не имеет решений, либо справедливо при любом действительном значении переменной.

Пример 1. Решите неравенство $5x + 8 < 8x + 5$.

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$5x - 8x < 5 - 8, \quad \text{откуда} \quad -3x < -3.$$

Разделим обе части последнего неравенства на число -3, поменяв знак неравенства на противоположный. Получим $x > 1$.

Ответ. $(1; +\infty)$.

Пример 2. Решите неравенство

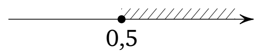
$$3x + 10 \leqslant 7x + 8$$

и изобразите множество его решений на числовой оси.

Решение. Приведём неравенство к виду

$$3x - 7x \leqslant 8 - 10, \quad \text{откуда} \quad -4x \leqslant -2.$$

Разделим обе части полученного неравенства на число -4, изменив знак неравенства на противоположный: $x \geqslant 0{,}5$. Изобразим множество решений на числовой оси:



Ответ. $[0{,}5; +\infty)$.

Пример 3. Каждому из четырёх неравенств в левом столбце отвечает одно из множеств решений, отмеченных на числовой оси, в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и множествами их решений.

НЕРАВЕНСТВА

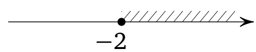
А) $7x + 14 \geqslant 0$

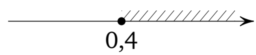
Б) $12 - 30x \geqslant 0$

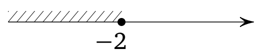
В) $4x - 14 \geqslant 11x$

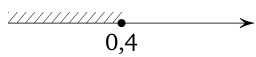
Г) $14x - 12 \geqslant -16x$

МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ

1) 

2) 

3) 

4) 

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующую цифру.

А	Б	В	Г

Решение. Рассмотрим последовательно решение каждого из неравенств. Неравенство А приводится к виду $x \geqslant -2$. Значит, множество его решений изображено на рисунке 1. Неравенство Б приводится к виду $x \leqslant 0{,}4$. Значит, множество его решений изображено на рисунке 4. Неравенство В приводится к виду $x \leqslant -2$. Значит, множество его решений изображено на рисунке 3. Неравенство Г приводится к виду $x \geqslant 0{,}4$. Значит, множество его решений изображено на рисунке 2.

Ответ.

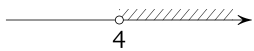
А	Б	В	Г
1	4	3	2

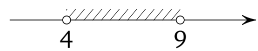
Заметим, что последнее неравенство можно было бы не решать. Тем не менее настоятельно рекомендуется получить множества решений всех четырёх неравенств: если на последнем шаге ответ не будет соответствовать оставшемуся множеству, значит, где-то была допущена ошибка и следует проверить все сделанные преобразования.

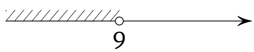
Решение системы двух и более линейных неравенств обычно предполагает решение каждого из них, после чего находится пересечение полученных множеств решений.

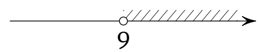
Пример 4. Укажите множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 27-3x>0, \\ 9-4x<-7. \end{cases}$$

1) 

3) 

2) 

4) 

Решение. Первое неравенство приводится к виду $3x<27$, откуда $x<9$. Второе неравенство приводится к виду $-4x<-16$, откуда $x>4$. Значит, множеством решений данной системы является промежуток $(4; 9)$, изображённый на рисунке 3.

Ответ. 3.

Пример 5. Каждое из четырёх неравенств в правом столбце получено в результате преобразований одного из неравенств или системы неравенств в левом столбце. Установите соответствие между неравенствами и системами неравенств в левом столбце и результатами их преобразований.

НЕРАВЕНСТВА

А) $\begin{cases} x-5<2, \\ 3-7x<17 \end{cases}$

Б) $-5<4x+23<31$

В) $5x-13<-11+6x$

Г) $\begin{cases} 3x+22<43, \\ 7-2x>-11 \end{cases}$

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1) $x<7$

2) $-2<x<7$

3) $x>-2$

4) $-7<x<2$

Впишите в приведённую в ответе таблицу под каждой буквой соответствующую цифру.

А	Б	В	Г

Решение. Система неравенств А приводится к виду

$$\begin{cases} x < 7, \\ x > -2, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad -2 < x < 7.$$

Значит, результатом преобразований является двойное неравенство 2. Двойное неравенство Б приводится к виду $-28 < 4x < 8$, откуда $-7 < x < 2$. Значит, результатом преобразований является двойное неравенство 4. Неравенство В приводится к виду $-x < 2$, откуда $x > -2$. Значит, результатом преобразований является неравенство 3. Система неравенств Г приводится к виду

$$\begin{cases} x < 7, \\ x < 9, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad x < 7.$$

Значит, результатом преобразований является неравенство 1.

Ответ.

А	Б	В	Г
2	4	3	1

Пример 6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 7(6x-5) - 5(6x-7) \geqslant 12x - 34, \\ \dfrac{x-2}{3} + \dfrac{x-3}{2} \leqslant \dfrac{x-5}{4} + \dfrac{x-4}{5}. \end{cases}$$

Решение. Решим первое неравенство данной системы. Раскроем скобки в левой части этого неравенства:

$$42x - 35 - 30x + 35 \geqslant 12x - 34.$$

После упрощений получим $12x \geqslant 12x - 34$, откуда $12x - 12x \geqslant -34$, или $0 \cdot x \geqslant -34$. Решением последнего неравенства является любое действительное число. Следовательно, решением всей системы будет решение её второго неравенства. Решим второе неравенство данной системы. Чтобы избавиться от дробей, умножим обе части этого неравенства на общий знаменатель всех дробей, т. е. на $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. Получим

$$20(x-2) + 30(x-3) \leqslant 15(x-5) + 12(x-4).$$

Раскроем скобки и приведём подобные слагаемые в каждой части полученного неравенства:

$$20x - 40 + 30x - 90 \leqslant 15x - 75 + 12x - 48,$$

откуда $50x - 130 \leqslant 27x - 123$. Перенесём все слагаемые, содержащие переменную, в левую часть неравенства, а все числа — в правую:

$$50x - 27x \leqslant -123 + 130, \quad \text{откуда } 23x \leqslant 7.$$

Осталось обе части последнего неравенства разделить на 23, после чего получим $x \leqslant \frac{7}{23}$.

Ответ. $\left(-\infty; \frac{7}{23}\right]$.

Решение неравенств с дробными коэффициентами обычно связано с большим числом ошибок. Для того чтобы снизить вероятность таких ошибок, рекомендуется при возможности сначала получить неравенство с целыми коэффициентами, умножив обе его части на общий знаменатель дробей, как это было сделано при решении последнего примера.

В некоторых случаях в процессе решения линейных и более сложных неравенств после приведения подобных слагаемых получается неравенство, не содержащее переменной. Такие ситуации ставят в тупик многих учеников и выпускников, хотя ничего сложного в их интерпретации нет. Достаточно ответить на вопрос: «При каких значениях переменной выполняется полученное неравенство?» Так, например, неравенство $0 > 5$ не выполняется ни при каких допустимых значениях переменной, а неравенство $0 \leqslant 21$ выполняется при любом действительном значении переменной. При решении примера 6 неравенство $0 \geqslant -34$ для большей наглядности было записано в виде $0 \cdot x \geqslant -34$; использовать такую запись рекомендуется в тех случаях, когда ответ на вопрос о решениях неравенств, подобных приведённым выше, вызывает определённые затруднения.

Отметим, что уровень сложности каждого из неравенств примера 6 несколько превосходит уровень линейных неравенств, которые можно встретить в вариантах ОГЭ по математике базового уровня. Кроме того, в заданиях ОГЭ обычно нужно выбрать множество решений неравенства из нескольких предложенных либо поставить в соответствие каждому из нескольких данных неравенств числовые промежутки (изображённые на числовой оси или заданные простейшими неравенствами), предложенные в качестве множеств решений этих неравенств.

Неравенства вида $ax^2 + bx + c \vee 0$ при $a \neq 0$ (знаком «$\vee$» обозначен, как обычно, один из четырёх возможных знаков неравенств «$>$», «$<$», «$\geqslant$», «$\leqslant$») называются квадратными. При $a \neq 0$ алгебраическое выражение $f(x) = ax^2 + bx + c$ является многочленом второй степени. Соответственно, квадратные неравенства — это целые неравенства второй степени.

Множество решений квадратного неравенства $ax^2 + bx + c \vee 0$ определяется, в сущности, знаком старшего коэффициента a и знаком дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

Если $a>0$ и $D>0$, то

$$ax^2+bx+c>0 \quad \text{при всех } x\in(-\infty;\,x_1)\cup(x_2;\,+\infty);$$

$$ax^2+bx+c<0 \quad \text{при всех } x\in(x_1;\,x_2);$$

$$ax^2+bx+c=0 \quad \text{при } x=x_1 \text{ и } \ x=x_1,$$

где $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$.

Если $a>0$ и $D=0$, то

$$ax^2+bx+c>0 \quad \text{при всех } x\in(-\infty;\,x_0)\cup(x_0;\,+\infty), \text{ где } x_0=-\frac{b}{2a};$$

$$ax^2+bx+c=0 \quad \text{при } x=x_0=-\frac{b}{2a};$$

неравенство $ax^2+bx+c<0$ решений не имеет.

Если $a>0$ и $D<0$, то

неравенства $ax^2+bx+c>0$ и $ax^2+bx+c\geqslant 0$ выполняются при всех действительных x;

неравенства $ax^2+bx+c<0$ и $ax^2+bx+c\leqslant 0$ решений не имеют.

Замечание. В случае отрицательного старшего коэффициента ($a<0$) целесообразно сразу умножить обе части неравенства

$$ax^2+bx+c\vee 0$$

на -1, поменяв знак неравенства на противоположный. Это нехитрое правило позволит решать квадратные неравенства только с положительным старшим коэффициентом и настоятельно рекомендуется к применению: число ошибок при решении квадратных неравенств с отрицательным старшим коэффициентом на ОГЭ по математике выходит за границы разумного, причём ошибки (как в определении знаков корней квадратного трёхчлена ax^2+bx+c, так и в выписывании самих решений) совершают в большом количестве даже сильные ученики.

Квадратное неравенство $ax^2+bx+c\vee 0$ с положительным старшим коэффициентом будем в дальнейшем называть базовым. Поскольку наиболее распространённым типом квадратных неравенств являются неравенства с положительным дискриминантом, найдя нули квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ (или, что то же самое, корни квадратного трёхчлена ax^2+bx+c), т. е. корни уравнения $ax^2+bx+c=0$, можно, основываясь на свойствах квадратичной функции, сразу выписать множество решений неравенства. При положительном дискриминанте для базовых квадратных неравенств вида

$ax^2+bx+c<0$ или $ax^2+bx+c\leqslant 0$ этим множеством является промежуток «между корнями» трёхчлена, т. е. $(x_1; x_2)$ или $[x_1; x_2]$ соответственно; для базовых квадратных неравенств вида $ax^2+bx+c>0$ или $ax^2+bx+c\geqslant 0$ множеством решений является объединение промежутков «за корнями» трёхчлена, т. е. $(-\infty; x_1)\cup(x_2; +\infty)$ или $(-\infty; x_1]\cup[x_2; +\infty)$ соответственно.

Другой способ решения квадратных неравенств связан с разложением квадратного трёхчлена на линейные множители и применением метода интервалов. Напомним, что если дискриминант $D=b^2-4ac$ квадратного трёхчлена $f(x)=ax^2+bx+c$ положителен, а $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ — корни трёхчлена, то

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Точки x_1 и x_2 разбивают числовую прямую на три промежутка, в каждом из которых знак функции $f(x)$ легко определить по её знаку в одной из точек промежутка, после чего остаётся записать ответ. При решении неполных квадратных неравенств, т. е. неравенств вида $ax^2+bx\vee 0$ или $ax^2+c\vee 0$, обычно используют разложение на линейные множители путём вынесения общего множителя или применения формулы разности квадратов.

Замечание. Промежутки знакопостоянства выражения

$$a(x-x_1)(x-x_2) \quad \text{при } a>0$$

можно определить ещё и следующим образом. Так как $a>0$, при любом значении переменной x число $a(x-x_1)(x-x_2)$ будет иметь тот же знак, что и число $(x-x_1)(x-x_2)$. Поскольку $x_1<x_2$, имеем $x-x_1>x-x_2$ при любом значении x. Произведение двух чисел отрицательно в том и только том случае, если меньшее из них отрицательно, а большее положительно:

$$\begin{cases} x-x_1>0, \\ x-x_2<0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x>x_1, \\ x<x_2, \end{cases}$$

т. е. $x_1<x<x_2$, или $x\in(x_1; x_2)$. Произведение двух чисел положительно в том и только том случае, если меньшее из них положительно (тогда и большее положительно) или большее отрицательно (тогда и меньшее отрицательно):

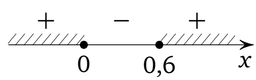
$$\left[\begin{aligned} &x-x_1<0, \\ &x-x_2>0, \end{aligned}\right. \quad \text{откуда} \quad \left[\begin{aligned} &x<x_1, \\ &x>x_2, \end{aligned}\right.$$

т. е. $x\in(-\infty; x_1)\cup(x_2; +\infty)$.

Итак, если привести квадратное неравенство к базовому виду и найти корни соответствующего квадратного трёхчлена, можно практически сразу записать ответ: в случае существования двух различных корней x_1 и x_2 решением неравенства будет либо промежуток между ними, либо объединение двух числовых лучей с началами в точках x_1 и x_2.

Пример 7. Решите неравенство $3x \leqslant 5x^2$.

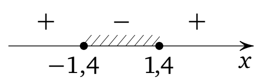
Решение. Приведём неравенство к базовому виду: $5x^2 - 3x \geqslant 0$, откуда $5x(x - 0{,}6) \geqslant 0$. Решим полученное неравенство методом интервалов:



Ответ. $(-\infty; 0] \cup [0{,}6; +\infty)$.

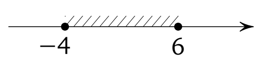
Пример 8. Решите неравенство $98 - 50x^2 \geqslant 0$.

Решение. Приведём неравенство к базовому виду, разделив обе его части на -2 и перегруппировав слагаемые: $25x^2 - 49 \leqslant 0$. Разложим по формуле разности квадратов левую часть полученного неравенства на множители: $(5x - 7)(5x + 7) \leqslant 0$. Решим последнее неравенство методом интервалов:



Ответ. $[-1{,}4; 1{,}4]$.

Пример 9. Укажите неравенство, множество решений которого изображено на рисунке.



1) $x^2 + 2x - 24 < 0$	3) $x^2 - 10x - 24 \geqslant 0$
2) $x^2 - 2x - 24 \leqslant 0$	4) $x^2 + 10x - 24 > 0$

Решение. Можно последовательно решить каждое из данных неравенств и получить правильный ответ. А можно проанализировать данные неравенства и отбросить те из них, множеством решений которых не может быть данный отрезок. Сделаем это. Поскольку старший коэффициент любого из данных неравенств положителен, а множеством решений неравенства является отрезок, нужно отбросить все строгие неравенства и все нестрогие неравенства со знаком «$\geqslant$». В данном случае останется только одно неравенство 2.

Ответ. 2.

При решении квадратных неравенств, как и при решении квадратных уравнений, часто оказываются полезными формулы Виета (см. методические указания к заданию 6).

Пример 10. Решите неравенство $9x^2-64x+7\leqslant 0$.

Решение. Найдём сначала два числа, произведение которых равно $9\cdot 7=63$, а сумма равна 64. Уже простейший делитель числа 63 позволяет найти искомые числа: $1\cdot 63=63$, $1+63=64$. Осталось разделить найденные числа на 9 и получить корни квадратного трёхчлена в левой части неравенства: $\frac{1}{9}$ и $\frac{63}{9}=7$. Поскольку старший коэффициент трёхчлена положителен, решением неравенства является отрезок $\left[\frac{1}{9}; 7\right]$.

Ответ. $\left[\frac{1}{9}; 7\right]$.

Пример 11. Решите неравенство $4x^2-19x+12>0$.

Решение. Найдём два числа, произведение которых равно $4\cdot 12=$ $=48$, а сумма равна 19. Перебирая пары делителей числа 48 «по возрастанию» меньшего делителя (1 и 48, 2 и 24, 3 и 16…), уже на третьем шаге находим числа, сумма которых равна 19: это 3 и 16. Разделив каждое из них на 4, получим корни квадратного трёхчлена в левой части неравенства: $\frac{3}{4}=0{,}75$ и $\frac{16}{4}=4$. В силу положительности старшего коэффициента этого трёхчлена решением неравенства является множество $(-\infty; 0{,}75)\cup(4; +\infty)$.

Ответ. $(-\infty; 0{,}75)\cup(4; +\infty)$.

Пример 12. Решите неравенство $6x^2+7x-5<0$.

Решение. Найдём сначала два числа, произведение которых равно $6\cdot(-5)=-30$, а сумма равна -7. Поскольку произведение двух этих чисел отрицательно, одно из них является положительным, другое — отрицательным. Сумма этих чисел также отрицательна, поэтому меньший делитель числа 30 будем брать со знаком «плюс», а больший — со знаком «минус»: 1 и -30, 2 и -15, … На третьем шаге получаем два числа, сумма которых равна -7: это 3 и -10. Разделив каждое из этих чисел на 6, найдём корни квадратного трёхчлена в левой части неравенства: $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ и $\frac{-10}{6}=-\frac{5}{3}$. Поскольку старший коэффициент трёхчлена положителен, решением неравенства является интервал $\left(-\frac{5}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

Ответ. $\left(-\frac{5}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

Разумеется, рассмотренный приём применим только в тех случаях, когда корни квадратного трёхчлена в левой части неравенства рациональны.

Подготовительные задачи

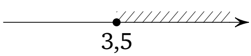
1. Укажите решение неравенства $-9-6x>9x+9$.

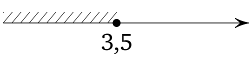
1) $(-\infty; -1{,}2)$
2) $(0; +\infty)$
3) $(-1{,}2; +\infty)$
4) $(-\infty; 0)$

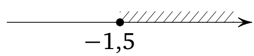
2. Укажите решение неравенства $3-2x \geqslant 8x-1$.

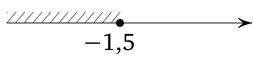
1) $[-0{,}2; +\infty)$
2) $(-\infty; 0{,}4]$
3) $[0{,}4; +\infty)$
4) $(-\infty; -0{,}2]$

3. Укажите решение неравенства $4x+5 \geqslant 6x-2$.

1) 

2) 

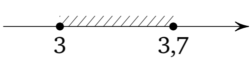
3) 

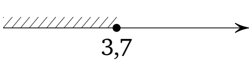
4) 

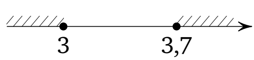
4. Укажите решение неравенства $9x-4(x-7) \geqslant -3$.

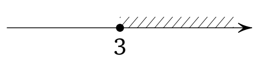
1) $[5; +\infty)$
2) $(-\infty; -6{,}2]$
3) $[-6{,}2; +\infty)$
4) $(-\infty; 5]$

5. Укажите решение системы неравенств $\begin{cases} x-3{,}7 \leqslant 0, \\ x-2 \geqslant 1. \end{cases}$

1) 

2) 

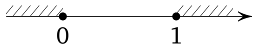
3) 

4) 

6. Укажите неравенство, решением которого является любое число.

1) $x^2+70>0$
2) $x^2-70>0$
3) $x^2+70<0$
4) $x^2-70<0$

7. Укажите неравенство, решение которого изображено на рисунке.



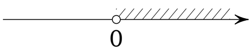
1) $x^2-1\geqslant 0$

2) $x^2-x\geqslant 0$

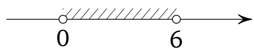
3) $x^2-1\leqslant 0$

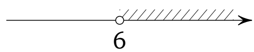
4) $x^2-x\leqslant 0$

8. Укажите решение неравенства $6x-x^2>0$.

1) 

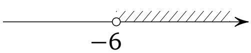
2) 

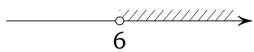
3) 

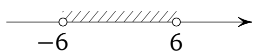
4) 

9. Укажите решение неравенства $x^2>36$.

1) 

2) 

3) 

4) 

10. Укажите решение неравенства $x^2-25<0$.

1) $(-\infty;+\infty)$

2) нет решений

3) $(-5;5)$

4) $(-\infty;-5)\cup(5;+\infty)$

Зачётные задачи

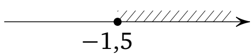
1. Укажите решение неравенства $-3 - x > 4x + 7$.

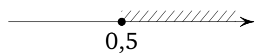
1) $(-\infty; -0{,}8)$ 3) $(-2; +\infty)$
2) $(-\infty; -2)$ 4) $(-0{,}8; +\infty)$

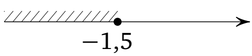
2. Укажите решение неравенства $2x - 8 \geqslant 4x + 6$.

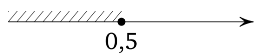
1) $(-\infty; -7]$ 3) $[1; +\infty)$
2) $(-\infty; 1]$ 4) $[-7; +\infty)$

3. Укажите решение неравенства $4x - 5 \geqslant 2x - 4$.

1) 

3) 

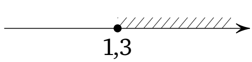
2) 

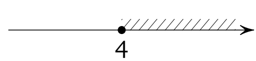
4) 

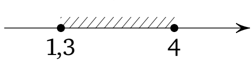
4. Укажите решение неравенства $8x - 3(x + 9) \geqslant -9$.

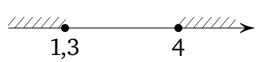
1) $[3{,}6; +\infty)$ 3) $(-\infty; 3{,}6]$
2) $[-7{,}2; +\infty)$ 4) $(-\infty; -7{,}2]$

5. Укажите решение системы неравенств $\begin{cases} x - 4 \geqslant 0, \\ x - 0{,}3 \geqslant 1. \end{cases}$

1) 

3) 

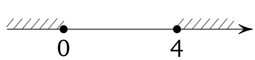
2) 

4) 

6. Укажите неравенство, решением которого является любое число.

1) $x^2 + 78 > 0$ 3) $x^2 + 78 < 0$
2) $x^2 - 78 < 0$ 4) $x^2 - 78 > 0$

7. Укажите неравенство, решение которого изображено на рисунке.



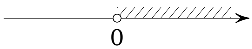
1) $x^2-16\leqslant 0$

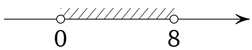
2) $x^2-4x\leqslant 0$

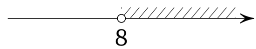
3) $x^2-4x\geqslant 0$

4) $x^2-16\geqslant 0$

8. Укажите решение неравенства $8x-x^2>0$.

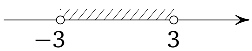
1) 

2) 

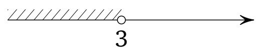
3) 

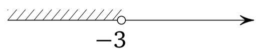
4) 

9. Укажите решение неравенства $x^2<9$.

1) 

2) 

3) 

4) 

10. Укажите решение неравенства $x^2-49>0$.

1) $(-7;\,7)$

2) нет решений

3) $(-\infty;\,+\infty)$

4) $(-\infty;\,-7)\cup(7;\,+\infty)$

Задание 21

Краткие методические рекомендации

Задание 21 ОГЭ по математике открывает блок заданий повышенного и высокого уровней сложности и представляет собой алгебраическую задачу по одной из трёх следующих тем: «Преобразование рациональных выражений», «Уравнения и системы уравнений», «Неравенства».

Меньше всего в банке заданий ОГЭ для этой позиции экзаменационной работы заданий на преобразование алгебраических выражений. Типичной является следующая.

Пример 1. Найдите значение выражения $61a-11b+13$, если $\frac{2a-7b+5}{7a-2b+5}=9$.

Решение. Из условия $\frac{2a-7b+5}{7a-2b+5}=9$ получим

$$2a-7b+5=63a-18b+45,$$

откуда $61a-11b+40=0$. Поэтому

$$61a-11b+13=(61a-11b+40)-27=-27.$$

Ответ. -27.

Для решения уравнений (именно они и составляют самую значительную часть заданий банка ОГЭ по математике на 21-ю позицию экзаменационной работы), как и в более простых задачах с кратким ответом, используются метод введения новой переменной, разложение на множители, условие равенства степеней и другие стандартные приёмы. Начнём с примера, решение которого основано на условии равенства кубов двух чисел.

Пример 2. Решите уравнение $(x-4)^6+(x^2-4x+2)^3=0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(x-4)^6=-(x^2-4x+2)^3$. Далее, поскольку $a^6=(a^2)^3$, $-b^3=(-b)^3$, получим

$$((x-4)^2)^3=(-x^2+4x-2)^3.$$

В силу того что $c^3=d^3$, получаем $c=d$, а последнее уравнение приводится к виду $(x-4)^2=-x^2+4x-2$. Перенеся все члены уравнения в левую часть, раскрыв скобки, приведя подобные слагаемые и разделив обе части полученного уравнения на число 2, получим квадратное уравнение $x^2-6x+9=0$, единственным корнем которого является 3.

Ответ. $\{3\}$.

Перейдём к примерам уравнений степени выше второй, которые решаются разложением на множители с помощью формул сокращённого умножения.

Пример 3. Решите уравнение $x^4=(x-20)^2$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(x^2)^2-(x-20)^2=0$ и применим формулу разности квадратов:

$$(x^2-x+20)(x^2+x-20)=0,$$

откуда $x^2-x+20=0$, либо $x^2+x-20=0$. Уравнение $x^2-x+20=0$ не имеет корней в силу отрицательности дискриминанта; корнями уравнения $x^2+x-20=0$ являются числа -5 и 4.

Ответ. $\{-5; 4\}$.

Пример 4. Решите уравнение $x^4-6x^3+9x^2-25=0$.

Решение. Сначала воспользуемся формулой квадрата разности двух чисел:

$$x^4-6x^3+9x^2=(x^2-3x)^2.$$

Теперь уравнение можно переписать так: $(x^2-3x)^2-5^2=0$. Применив формулу разности квадратов, получим

$$(x^2-3x-5)(x^2-3x+5)=0,$$

откуда $x^2-3x-5=0$ либо $x^2-3x+5=0$. Корнями уравнения

$$x^2-3x-5=0$$

являются числа $\frac{3-\sqrt{29}}{2}$ и $\frac{3+\sqrt{29}}{2}$. Уравнение $x^2-3x+5=0$ действительных корней не имеет в силу отрицательности дискриминанта.

Ответ. $\left\{\frac{3-\sqrt{29}}{2}; \frac{3+\sqrt{29}}{2}\right\}$.

Рассмотрим теперь примеры решения уравнений степени выше второй с помощью вынесения общего множителя.

Пример 5. Решите уравнение $x^3+3x^2=16x+48$.

Решение. Несколько нестандартная запись уравнения содержит ключ к его решению. Вынесем за скобки в каждой из его частей общий множитель: $x^2(x+3)=16(x+3)$. Перепишем полученное уравнение в виде $x^2(x+3)-16(x+3)=0$ и ещё раз вынесем за скобки общий множитель: $(x+3)(x^2-16)=0$, откуда $x=-3$ либо $x^2=16$, т. е. $x=\pm 4$.

Ответ. $\{-4; -3; 4\}$.

Пример 6. Решите уравнение $x^3+4x^2-x-4=0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $x^2(x+4)-(x+4)=0$ и вынесем за скобки общий множитель: $(x+4)(x^2-1)=0$, откуда $x=-4$ либо $x^2=1$, т. е. $x=\pm 1$.

Ответ. $\{-4; -1; 1\}$.

Пример 7. Решите уравнение $x(x^2+2x+1)=2(x+1)$.

Решение. Перепишем уравнение в виде
$$x(x+1)^2 = 2(x+1),$$
откуда $x(x+1)^2-2(x+1)=0$. Вынесем за скобки общий множитель:
$$(x+1)(x(x+1)-2) = 0.$$
Значит, $x=-1$ либо $x^2+x-2=0$. Корнями последнего уравнения являются -2 и 1.

Ответ. $\{-2; -1; 1\}$.

Уравнения вида
$$a\cdot f^2(x)+b\cdot f(x)+c=0$$
(их иногда называют трёхчленными) являются одними из наиболее распространённых уравнений, решаемых с помощью метода введения новой переменной. Если обозначить $f(x)$ буквой t, т. е. положить $f(x)=t$, трёхчленное уравнение сведётся к квадратному относительно переменной t уравнению $at^2+bt+c=0$. Самый известный пример этого типа уравнений — биквадратное уравнение
$$ax^4+bx^2+c=0$$
(здесь $f(x)=x^2$).

Метод введения новой переменной проиллюстрируем следующими примерами.

Пример 8. Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-3=0$.

Решение. Обозначим $\frac{1}{x}$ буквой t. Уравнение примет вид
$$t^2+2t-3 = 0,$$
откуда $t=1$ или $t=-3$. Таким образом,
$$\frac{1}{x}=1 \quad (\text{и тогда } x=1) \quad \text{или}$$
$$\frac{1}{x}=-3 \quad (\text{и тогда } x=-\tfrac{1}{3}).$$

Ответ. $\left\{-\frac{1}{3}; 1\right\}$.

Пример 9. Решите уравнение $(x+2)^4-4(x+2)^2-5=0$.

Решение. Обозначим $(x+2)^2$ буквой t. Тогда $t\geqslant 0$ и уравнение примет вид $t^2-4t-5=0$, откуда $t=-1$ (этот корень не удовлетворяет условию $t\geqslant 0$) или $t=5$. Таким образом, $(x+2)^2=5$, откуда
$$x+2=-\sqrt{5} \quad (\text{и тогда } x=-2-\sqrt{5}) \quad \text{или}$$
$$x+2=\sqrt{5} \quad (\text{и тогда } x=-2+\sqrt{5}).$$

Ответ. $\{-2\pm\sqrt{5}\}$.

Пример 10. Решите уравнение $9(2x-1)^4-37(2x-1)^2+4=0$.

Решение. Обозначим $(2x-1)^2$ буквой t. Тогда $t\geqslant 0$ и уравнение примет вид $9t^2-37t+4=0$, откуда $t=\frac{1}{9}$ или $t=4$ (оба корня удовлетворяют условию $t\geqslant 0$). Таким образом, либо $(2x-1)^2=\frac{1}{9}$, либо $(2x-1)^2=4$. Из уравнения $(2x-1)^2=\frac{1}{9}$ получим

$$2x-1=-\frac{1}{3}\quad (\text{и тогда } x=\frac{1}{3})\quad \text{или}$$
$$2x-1=\frac{1}{3}\quad (\text{и тогда } x=\frac{2}{3}).$$

Из уравнения $(2x-1)^2=4$ получим

$$2x-1=-2\quad (\text{и тогда } x=-\frac{1}{2})\quad \text{или}$$
$$2x-1=2\quad (\text{и тогда } x=\frac{3}{2}).$$

Ответ. $\left\{-\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{2}\right\}$.

Иррациональные уравнения, представленные в ОГЭ по математике, весьма малочисленны, и для их решения не требуется специальных знаний, нужно просто не забывать об области допустимых значений.

Пример 11. Решите уравнение $x^2+x+\sqrt{x^2-81}=\sqrt{x^2-81}+72$.

Решение. Левая и правая части уравнения определены при условии неотрицательности подкоренного выражения, т. е. при $x^2-81\geqslant 0$, откуда $x^2\geqslant 81$. При допустимых значениях переменной уравнение приводится к виду $x^2+x-72=0$. Корнями последнего уравнения являются числа -9 и 8, из которых только $x=-9$ удовлетворяет неравенству $x^2\geqslant 81$.

Ответ. $\{-9\}$.

Как видно из рассмотренного примера, при решении подобных уравнений можно обойтись без формального решения неравенств, задающих ОДЗ.

Последний тип уравнений банка ОГЭ на 21-ю позицию экзаменационной работы — уравнения, решение которых основано на ограниченности алгебраических выражений в одной или обеих его частях.

Пример 12. Решите уравнение $(x^2-25)^2+(x^2+3x-10)^2=0$.

Решение. Поскольку

$$(x^2-25)^2\geqslant 0\quad \text{и}\quad (x^2+3x-10)^2\geqslant 0$$

при любом значении переменной, левая часть данного уравнения неотрицательна. Равной нулю она может быть, только если каждое из слагаемых левой части равно нулю, т. е. если

$$(x^2-25)^2=0 \qquad (\text{откуда } x=\pm 5) \quad \text{и}$$

$$(x^2+3x-10)^2=0 \quad (\text{откуда } x=-5 \text{ либо } x=2).$$

Единственное значение переменной, при котором каждое из слагаемых левой части данного уравнения обращается в нуль, — это $x=-5$.

Ответ. $\{-5\}$.

Основными методами решения систем алгебраических уравнений школьного курса математики являются следующие:

- подстановка,
- метод введения новой переменной,
- алгебраическое сложение.

Напомним некоторые важные равносильные преобразования систем уравнений (т. е. преобразования, не ведущие ни к потере решений, ни к приобретению посторонних решений):

- перенос слагаемого из одной части уравнения в другую;
- умножение обеих частей уравнения системы на одно и то же отличное от нуля число;
- почленное сложение двух уравнений системы с последующей заменой (не ведущей к изменению области допустимых значений системы) одного из них на уравнение, полученное в результате сложения;
- приведение подобных слагаемых, не ведущее к изменению области допустимых значений системы.

Почленное умножение двух уравнений системы с последующей заменой одного из них на уравнение, полученное в результате умножения, может привести к приобретению посторонних решений. В этом случае следует сделать проверку найденных решений путём их подстановки в данную систему. Преобразования уравнений системы (в частности, приведение подобных слагаемых) не должны изменять области допустимых значений переменных. Сужение области допустимых значений может привести к потере решений, расширение области допустимых значений — к приобретению посторонних решений.

Пример 13. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x^2+y=4, \\ 2x^2-y=1. \end{cases}$

Решение. Если почленно сложить уравнения системы, получим $5x^2=5$, откуда $x^2=1$, и $x=\pm 1$. Найдём y, подставив найденные значения x в любое из уравнений системы, например во второе, из которого получаем $y=2x^2-1$. Тогда $y=2\cdot(\pm 1)^2-1=1$.

Ответ. $(-1;\,1)$; $(1;\,1)$.

Пример 14. Решите систему уравнений $\begin{cases} (x+6y)^2=7y, \\ (x+6y)^2=7x. \end{cases}$

Решение. Поскольку левые части уравнений тождественно равны, равны и их правые части, т. е. $7x=7y$, откуда $y=x$. Подставим $y=x$ в любое из уравнений системы, например во второе: $(x+6x)^2=7x$, откуда $49x^2=7x$, т. е. $7x^2-x=0$, и, значит, $7x\left(x-\frac{1}{7}\right)=0$. Таким образом, получаем $y=x=0$ либо $y=x=\frac{1}{7}$.

Ответ. $(0; 0)$; $\left(\frac{1}{7}; \frac{1}{7}\right)$.

Пример 15. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x^2-2x=y, \\ 3x-2=y. \end{cases}$

Решение. Поскольку левые части уравнений тождественно равны, равны и их правые части, т. е.

$$3x^2-2x=3x-2, \quad \text{откуда} \quad 3x^2-5x+2=0.$$

Корнями последнего уравнения являются числа $\frac{2}{3}$ и 1. Если $x=\frac{2}{3}$, то $y=3\cdot\frac{2}{3}-2=0$. Если $x=1$, то $y=3\cdot1-2=1$.

Ответ. $\left(\frac{2}{3}; 0\right)$; $(1; 1)$.

Пример 16. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+2y=5, \\ x^2-4y^2=35. \end{cases}$

Решение. Разложив на множители по формуле разности квадратов левую часть второго уравнения данной системы, получим

$$(x-2y)(x+2y)=35,$$

откуда в силу первого уравнения системы

$$(x-2y)\cdot5=35, \quad \text{и} \quad x-2y=7.$$

Сложив почленно уравнения $x-2y=7$ и $x+2y=5$, получим $2x=12$, откуда $x=6$. Тогда $6+2y=5$, откуда $y=-0{,}5$.

Ответ. $(6; -0{,}5)$.

Неравенства, которые в банке ОГЭ предназначены для задания 21 в экзаменационном варианте, либо являются квадратными, либо сводятся к квадратным в одно-два действия. Сложность здесь связана преимущественно с тем, что коэффициенты и/или корни соответствующих квадратных трёхчленов являются иррациональными.

Пример 17. Решите неравенство $(x-1)^2<\sqrt{2}(x-1)$.

Решение. Приведя данное неравенство к виду

$$(x-1)^2-\sqrt{2}(x-1)<0$$

и вынеся за скобки общий множитель, получим неравенство

$$(x-1)(x-1-\sqrt{2}) < 0, \quad \text{откуда } 1 < x < 1+\sqrt{2}.$$

Ответ. $\left(1; 1+\sqrt{2}\right)$.

Наиболее простыми дробно-рациональными неравенствами являются неравенства вида $\frac{a}{f(x)} \vee 0$, где a — отличное от нуля действительное число, а $f(x)$ — многочлен первой или второй степени. С такими неравенствами по уровню сложности схожи и неравенства вида $\frac{f(x)}{g(x)} \vee 0$, где один из многочленов $f(x)$ или $g(x)$ является многочленом первой или второй степени, а другой при любых значениях переменной принимает значения одного знака (как правило, положительные). Тем самым знак либо числителя, либо знаменателя алгебраической дроби в левой части указанных неравенств не зависит от значений переменной. Поэтому знак этой дроби будет определяться знаком только одного алгебраического выражения (многочлена первой или второй степени). Таким образом, подобные неравенства решаются приведением их к линейным или квадратным неравенствам.

Пример 18. Решите неравенство $-\frac{1234}{5x+6} < 0$.

Решение. Умножим обе части неравенства на число -1. Получим неравенство $\frac{1234}{5x+6} > 0$. Числитель дроби в левой части неравенства положителен. Поэтому данное неравенство выполняется в том и только том случае, если $5x+6 > 0$, откуда $x > -1{,}2$.

Ответ. $(-1{,}2; +\infty)$.

Пример 19. Решите неравенство $\frac{4321}{5x^2-41x+8} \leqslant 0$.

Решение. Числитель дроби положителен. Поэтому данное неравенство выполняется в том и только том случае, если $5x^2-41x+8 < 0$. Корнями квадратного трёхчлена в левой части последнего неравенства являются числа 0,2 и 8, старший коэффициент трёхчлена положителен. Следовательно, множеством решений неравенства является интервал $(0{,}2; 8)$.

Ответ. $(0{,}2; 8)$.

Пример 20. Решите неравенство $\frac{-43}{(x-1)^2-2} \geqslant 0$.

Решение. Числитель дроби отрицателен. Поэтому данное неравенство выполняется в том и только том случае, если $(x-1)^2-2 < 0$, откуда $\left(x-1-\sqrt{2}\right)\left(x-1+\sqrt{2}\right) < 0$. Значит, множеством решений неравенства является интервал $\left(1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\right)$.

Ответ. $\left(1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\right)$.

Подготовительные задачи

1. Найдите значение выражения $19a-7b+12$, если $\dfrac{5a-8b+2}{8a-5b+2}=3$.

2. Решите уравнение $x^3+2x^2-9x-18=0$.

3. Решите уравнение $x^4=(3x-10)^2$.

4. Решите уравнение $\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{4}{x-1}-12=0$.

5. Решите уравнение $x^2-2x+\sqrt{2-x}=\sqrt{2-x}+3$.

6. Решите уравнение $(x^2-16)^2+(x^2+x-12)^2=0$.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2+y=4, \\ 4x^2-y=2. \end{cases}$

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x^2+3y^2=11, \\ 4x^2+6y^2=11x. \end{cases}$

9. Решите неравенство $(x-3)^2<\sqrt{5}(x-3)$.

10. Решите неравенство $\dfrac{-13}{(x-4)^2-6}\geqslant 0$.

Зачётные задачи

1. Найдите значение выражения $33a-23b+71$, если $\dfrac{3a-4b+8}{4a-3b+8}=9$.

2. Решите уравнение $x^3+3x^2-4x-12=0$.

3. Решите уравнение $x^4=(2x-15)^2$.

4. Решите уравнение $\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{3}{x-1}-10=0$.

5. Решите уравнение $x^2-2x+\sqrt{3-x}=\sqrt{3-x}+8$.

6. Решите уравнение $(x^2-4)^2+(x^2-6x-16)^2=0$.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x^2+y=6, \\ 4x^2-y=1. \end{cases}$

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+3y^2=31, \\ 2x^2+6y^2=31x. \end{cases}$

9. Решите неравенство $(x-5)^2<\sqrt{7}(x-5)$.

10. Решите неравенство $\dfrac{-14}{(x-5)^2-2}\geqslant 0$.

Задание 22

Краткие методические рекомендации

Задание 22 ОГЭ по математике представляет собой традиционную текстовую задачу по одной из трёх тем: «Движение», «Производительность и работа», «Проценты и концентрация». Некоторые из этих задач можно решить арифметически, не прибегая к составлению уравнению, другие требуют составления одного или двух уравнений и их решения.

Задачи на движение

Во всех задачах на движение допускается определённая идеализация: считается, что тела движутся прямолинейно и равномерно, скорости (в том числе скорость течения) постоянны в течение определённых промежутков времени, не меняются при поворотах и т. д., движущиеся тела считаются (если не оговорено противное) материальными точками, т. е. не имеющими размеров и массы (вернее, их размеры и масса несущественны для решения задачи). Даже решение задач на движение по окружности не требует применения специальных понятий — угловой скорости и т. п.; здесь точнее было бы говорить о движении по замкнутой трассе.

При решении задач на движение двух тел очень часто удобно считать одно тело неподвижным, а другое — приближающимся к нему со скоростью, равной сумме скоростей этих тел (при движении навстречу) или разности скоростей (при движении вдогонку). Такая базовая модель помогает разобраться с условием задачи и получить нужные уравнения даже в таком относительно трудном случае, как движение по окружности.

Если расстояние между пунктами, из которых начинают движение два тела, не задано, иногда бывает удобно положить его равным единице.

Основными типами задач на движение являются следующие:

- задачи на движение по прямой (навстречу и вдогонку),
- задачи на движение по замкнутой трассе,
- задачи на движение протяжённых тел,
- задачи на движение по воде,
- задачи на среднюю скорость.

Рассмотрим более подробно каждый из этих типов задач, выделив, где необходимо, базовые задачи.

Если расстояние между двумя движущимися навстречу друг другу телами равно s, а их скорости — v_1 и v_2, то время t, через которое они встретятся, находится по формуле $t=\frac{s}{v_1+v_2}$. Действительно, если одно из тел считать неподвижным, тогда второе будет приближаться к нему со скоростью, равной сумме скоростей, и пройдёт при этом расстояние, равное расстоянию между телами в момент начала движения, за время, равное отношению этого расстояния к скорости.

Пример 1. Расстояние между городами A и B равно 620 км. Из города A в город B со скоростью 85 км/ч выехал первый автомобиль, а через два часа после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 65 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города A автомобили встретятся?

Решение. Через два часа после выезда первого автомобиля расстояние между автомобилями стало равно $620-170=450$ (км), поэтому автомобили встретятся через время $t=\frac{450}{85+65}=3$ (ч). Таким образом, до момента встречи первый автомобиль будет находиться в пути 5 часов и проедет $85\cdot 5=425$ км.

Ответ. 425 км.

Если расстояние между двумя телами равно s и они движутся по прямой в одну сторону со скоростями v_1 и v_2 соответственно ($v_1>v_2$) так, что первое тело следует за вторым, то время t, через которое первое тело догонит второе, находится по формуле $t=\frac{s}{v_1-v_2}$. Действительно, если второе тело считать неподвижным, тогда первое будет приближаться к нему со скоростью, равной разности скоростей, и пройдёт при этом расстояние, равное расстоянию между телами в момент начала движения, за время, равное отношению этого расстояния к скорости.

Пример 2. Два пешехода отправляются одновременно из одного и того же места на прогулку по аллее парка. Скорость первого на 1,3 км/ч больше скорости второго. Через сколько минут расстояние между пешеходами станет равным 520 метрам?

Решение. Время t в часах, за которое расстояние между пешеходами станет равным 520 метрам, т. е. 0,52 (км), находим по формуле $t=\frac{0{,}52}{1{,}3}=0{,}4$ (ч). Следовательно, это время составляет 24 минуты.

Ответ. 24 минуты.

Рассмотрим теперь движение двух точек по окружности (замкнутой трассе) длины s в одном направлении при одновременном старте из одной точки со скоростями v_1 и v_2 ($v_1>v_2$) и ответим на вопрос: через какое время первая точка будет опережать вторую ровно на один круг? Считая, что вторая точка покоится, а первая приближается к ней со скоростью $v_1 - v_2$, получим, что условие задачи будет выполнено, когда первая точка в первый раз поравняется со второй. При этом первая точка пройдёт расстояние, равное длине трассы, и искомая формула ничем не отличается от формулы, полученной для задачи на движение вдогонку: $t = \frac{s}{v_1 - v_2}$. Итак, если две точки одновременно начинают движение по окружности (замкнутой трассе) из одной точки в одну сторону со скоростями v_1 и v_2 соответственно ($v_1 > v_2$), то первая точка приближается ко второй со скоростью $v_1 - v_2$ и в момент, когда первая точка в первый раз догоняет вторую, она проходит расстояние, ровно на один круг большее, чем вторая.

Пример 3. Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 12 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобилиста. Скорость первого автомобилиста равна 80 км/ч, и через 48 минут после старта он опережал второго автомобилиста на один круг. Найдите скорость второго автомобилиста.

Решение. Пусть скорость второго автомобилиста равна x км/ч. Поскольку 48 минут составляют $\frac{4}{5}$ часа и это и есть то время, за которое первый автомобилист будет опережать второго на один круг, составим по условию задачи уравнение: $\frac{12}{80-x} = \frac{4}{5}$, откуда $320 - 4x = 60$, и $x = 65$.

Ответ. 65 км/ч.

В задачах на движение по воде скорость течения считается неизменной. При движении по течению скорость течения прибавляется к скорости плывущего тела, а при движении против течения вычитается из скорости тела. Скорость плота считается равной скорости течения.

Пример 4. Рыболов отправляется на лодке от пристани с намерением вернуться через 7 ч. Перед возвращением он хочет пробыть на берегу 4 ч. На какое наибольшее расстояние он может отплыть, если скорость течения реки равна 1 км/ч, а собственная скорость лодки равна 6 км/ч?

Решение. Пусть искомое расстояние равно x км. Скорость лодки при движении против течения равна 5 км/ч, а при движении по течению равна 7 км/ч. Время, за которое лодка доплывёт от места отправления до места назначения и обратно, равно $\frac{x}{5} + \frac{x}{7}$ ч. Из условия задачи следует, что это время равно 3 ч. Составим уравнение по условию задачи: $\frac{x}{5} + \frac{x}{7} = 3$. Решив уравнение, получим $x = 8{,}75$.

Ответ. 8,75 км.

Пример 5. Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 26 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 8 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 34 ч после отплытия из него. Сколько километров прошёл теплоход за весь рейс?

Решение. Пусть искомая величина равна $2x$. Составим по условию задачи уравнение: $\frac{x}{23}+\frac{x}{29}+8=34$, откуда $\frac{x}{23}+\frac{x}{29}=26$. Далее, $\frac{23x+29x}{23\cdot 29}=26$, откуда $52x=23\cdot 29\cdot 26$, и $2x=23\cdot 29=667$.

Ответ. 667 км.

В задачах на движение протяжённых тел требуется, как правило, определить длину одного из них. Наиболее типичная ситуация — определение длины поезда, проезжающего мимо столба или протяжённой платформы. В первом случае поезд проходит мимо столба расстояние, равное длине поезда, во втором случае — расстояние, равное сумме длин поезда и платформы.

Пример 6. По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 120 метров, второй — длиной 80 метров. Второй сухогруз сначала отстаёт от первого на 900 метров, но уже через 27 минут опережает первый на 1,6 километра. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?

Решение. Будем считать, что первый сухогруз неподвижен, а второй приближается к нему со скоростью x м/мин, равной разности скоростей второго и первого сухогрузов. Тогда за 27 минут второй сухогруз проходит расстояние $l=900+80+120+1600=2700$ (м). Поэтому $x=\frac{2700}{27}=100$ м/мин, т. е. 6 км/ч.

Ответ. 6 км/ч.

Напомним, что средняя скорость вычисляется по формуле $v=\frac{S}{t}$, где S — путь, пройденный телом, а t — время, за которое этот путь пройден. Если путь состоит из нескольких участков, то следует вычислить всю длину пути и всё время движения. Например, если путь состоял из двух участков протяжённостью s_1 и s_2, скорости на которых были равны соответственно v_1 и v_2, то $S=s_1+s_2$, $t=t_1+t_2$, где $t_1=\frac{s_1}{v_1}$, $t_2=\frac{s_2}{v_2}$.

Пример 7. Первую треть трассы велосипедист ехал со скоростью 18 км/ч, вторую треть — со скоростью 12 км/ч, а последнюю треть — со скоростью 9 км/ч. Найдите среднюю скорость велосипедиста на протяжении всего пути.

Решение. Обозначим длину всей трассы через $3s$ км. Тогда первую треть трассы велосипедист проехал за время $t_1=\frac{s}{18}$, вторую треть — за время $t_2=\frac{s}{12}$, последнюю треть — за время $t_3=\frac{s}{9}$. Значит, время, потраченное им на весь путь, равно $t_1+t_2+t_3$, т. е.

$$\frac{s}{18}+\frac{s}{12}+\frac{s}{9}=\frac{45s}{180}=\frac{s}{4}.$$

Поэтому искомая средняя скорость находится по формуле

$$v=\frac{3s}{\frac{s}{4}}=3s\cdot\frac{4}{s}=12\ (\text{км/ч}).$$

Ответ. 12 км/ч.

Задачи на производительность и работу

В определённом смысле задачи на производительность (работу) схожи с задачами на движение: роль скорости здесь играет производительность, роль расстояния — объём работы. В тех случаях, когда объём работы в явном виде не задан, его иногда удобно принять равным единице. Существенно разных задач здесь практически нет, во всех случаях речь идёт о выполнении определённой работы, меняются только сюжеты, а «математическая» фабула остаётся одной и той же. Иногда в задачах на работу выделяют группу задач на трубы и бассейны, решение которых, вообще говоря, не имеет никаких специфических черт по сравнению с другими задачами на работу.

В некоторых случаях при решении задач на совместную работу можно обойтись без решения уравнений, используя только арифметический способ. Правда, для этого порой приходится прибегать к гипотетическим допущениям.

Пример 8. Маша и Даша за день пропалывают 3 грядки, Даша и Глаша — 4 грядки, а Глаша и Маша — 5 грядок. Сколько грядок за день смогут прополоть девочки, работая втроём?

Решение. Вообразим, что сначала Маша и Даша работали один день, затем Даша и Глаша работали один день, а потом Глаша и Маша работали ещё один день. Получается, что каждая из девочек работала два дня, или что бригада, состоящая из Маши, Глаши и Даши, прополола 3+4+5=12 грядок за два дня. Значит, за один день эта бригада прополет вдвое меньше грядок, т. е. 6.

Ответ. 6.

Ключевой в задачах на работу является следующая.

Пример 9. Первый мастер может выполнить некоторую работу за a часов, а второй мастер — за b часов. За какое время выполнят работу оба мастера, работая вдвоём?

Решение. Поскольку объём работы не задан, его можно принять равным единице. Тогда первый мастер за один час выполнит часть работы, равную $\frac{1}{a}$, второй — $\frac{1}{b}$, а оба мастера — $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Значит, всю работу они выполнят за время $t=\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Ответ. $t=\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ ч.

Пример 10. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 12 часов. Через 3 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

Решение. Вдвоём рабочие за час делают $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$ всей работы. За 3 часа первый рабочий сделал $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$ всей работы. Оставшиеся $\frac{3}{4}$ работы рабочие делали уже вместе и потратили на это $\frac{3}{4}:\frac{1}{6}=4{,}5$ ч. Значит, время, затраченное на выполнение всего заказа, составляет 7,5 часов.

Ответ. 7,5 ч.

Как уже отмечалось, в задачах на бассейны и трубы нет ничего специфического по сравнению с другими задачами на совместную работу. Модельная ситуация остаётся той же, только мастерам будут соответствовать трубы или насосы разной производительности, а работа будет заключаться в наполнении бассейна или иного резервуара.

Пример 11. Первая труба пропускает на 6 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если бак объёмом 360 литров она заполняет на 16 минут медленнее, чем вторая труба?

Решение. Пусть первая труба пропускает x литров воды в минуту, $x>0$. Тогда вторая труба пропускает $x+6$ литров воды в минуту. Составим по условию задачи уравнение: $\frac{360}{x}=\frac{360}{x+6}+16$. Разделив обе части уравнения на 8, получим $\frac{45}{x}=\frac{45}{x+6}+2$, и, следовательно, $\frac{45}{x}-\frac{45}{x+6}=2$. Приведём дроби в левой части к общему знаменателю: $\frac{45(x+6)-45x}{x(x+6)}=2$, откуда $2x(x+6)=45\cdot 6$, и, значит, $x^2+6x-135=0$. Корнями полученного квадратного уравнения являются числа -15 и 9, из которых только последнее удовлетворяет условию $x>0$.

Ответ. 9 л.

Задачи на проценты и концентрацию

Задачи на концентрацию (т. е. на процентное содержание какого-то вещества в его растворе, сплаве или смеси) традиционно являются слабым звеном в подготовке школьников, кажутся многим из них довольно сложными. В таких задачах речь обычно идёт об изменении концентрации этого вещества после каких-либо манипуляций. При этом водные растворы, смеси или сплавы играют сходные роли и позволяют лишь несколько разнообразить сюжеты задач без изменения математического содержания. Ключевой при решении таких задач является идея отслеживания изменений, происходящих с «чистым» веществом (далее кавычки будем иногда опускать).

При решении задач на концентрацию, сплавы, смеси целесообразно для наглядности использовать метод, который иногда не вполне научно называют «методом банок». Название появилось потому, что указанные в задаче вещества изображаются в виде условных «банок», каждая из которых делится на две части — верхнюю и нижнюю. В нижней записывается количество «чистого» или «сухого» вещества для каждой «банки», что позволяет почти автоматически получить нужное уравнение или даже ответ. Проиллюстрируем «метод банок» несколькими примерами.

Пример 12. Найдите концентрацию кислоты, полученной при смешивании 20 кг её 60-процентного и 30 кг её 20-процентного растворов.

Решение. Используем ключевую идею, заключающуюся в отслеживании того, что происходит с чистой кислотой. Изобразим схематически данные в условии растворы и раствор, полученный при их смешивании (т. е. применим «метод банок»):

20 кг		30 кг		50 кг
H_2O		H_2O		H_2O
чистое вещество: $0{,}6\cdot 20=12$	$+$	*чистое вещество*: $0{,}2\cdot 30=6$	$=$	*чистое вещество*: $12+6=18$
60 %		20 %		k %

Искомая концентрация равна

$$k=\frac{18}{50}\cdot 100\,\%=18\cdot 2\,\%=36\,\%.$$

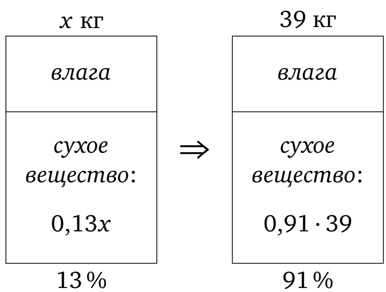
В данном случае можно было бы не использовать формулу: ведь если в 50 кг раствора содержится 18 кг чистой кислоты, то в 100 кг этого раствора будет ровно 36 кг чистой кислоты, т. е. 36 сотых от 100, а значит, искомая концентрация равна 36 %.

Ответ. 36 %.

Иногда вместо «сложения банок» приходится использовать «превращение» одной «банки» в другую.

Пример 13. Виноград содержит 87 % влаги, а изюм — 9 %. Сколько килограммов винограда требуется для получения 39 килограммов изюма?

Решение. Используем ключевую идею: будем следить за массой «чистого», т. е. в данном случае «сухого» вещества в винограде и изюме. Пусть для получения 39 килограммов изюма требуется x кг винограда. Из условия следует, что доля «сухого» вещества в винограде составляет 13 %, а в изюме — 91 %. Поэтому в x кг винограда будет $0{,}13x$ кг «сухого» вещества, а в 39 кг изюма его будет $0{,}91 \cdot 39$ кг:



Поскольку эта масса сухого вещества в винограде и изюме одна и та же, получим, что

$$0{,}13x = 0{,}91 \cdot 39,$$

откуда

$$13x = 91 \cdot 39, \quad \text{и} \quad x = 273 \text{ (кг)}.$$

Ответ. 273 кг.

Решим теперь в общем виде ключевую задачу нахождения концентрации раствора, полученного в результате смешивания двух растворов одного и того же вещества, имеющих разные массы и разную концентрацию.

Пример 14. Смешали a литров n-процентного водного раствора некоторого вещества с b литрами m-процентного водного раствора этого же вещества. Найдите концентрацию получившейся смеси.

Решение. Воспользуемся ключевой идеей: проследим за изменениями, происходящими с чистым веществом. В первом растворе его было

$$\frac{a}{100}\cdot n=\frac{an}{100}\text{ литров,}$$

во втором растворе —

$$\frac{b}{100}\cdot m=\frac{bm}{100}\text{ литров.}$$

Значит, количество чистого вещества в полученной смеси будет равно $\frac{an}{100}+\frac{bm}{100}$ литров, а всего этой смеси получится $a+b$ литров:

a литров		b литров		$a+b$ литров
H_2O		H_2O		H_2O
чистое вещество: $\frac{a}{100}\cdot n=\frac{an}{100}$	$+$	*чистое вещество*: $\frac{b}{100}\cdot m=\frac{bm}{100}$	$=$	*чистое вещество*: $\frac{an}{100}+\frac{bm}{100}$
$n\,\%$		$m\,\%$		$k\,\%$

Теперь найти искомую концентрацию k не представляет труда:

$$k=\frac{\frac{an}{100}+\frac{bm}{100}}{a+b}\cdot 100\,\%=\frac{an+bm}{a+b}\,\%.$$

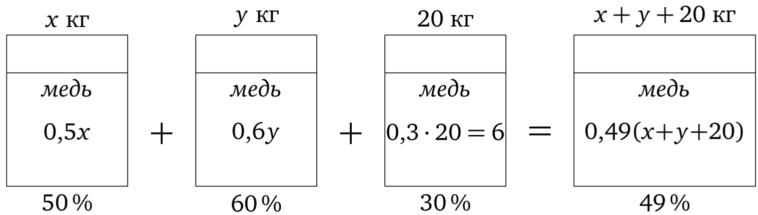
Ответ. $\frac{an+bm}{a+b}\,\%$.

Заметим, что растворы в этой задаче можно было бы заменить двумя сплавами разной массы и с разным содержанием чистого вещества (например, одного из металлов). Решение при этом практически не изменится, поменяются лишь единицы измерения и названия веществ.

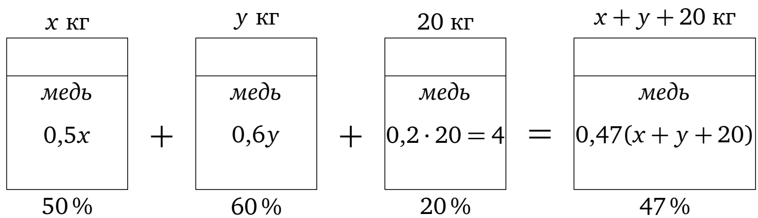
Пример 15. Первый сплав содержит 50 % меди, второй — 60 % меди, а третий сплав весит 20 кг и содержит 30 % меди. Из этих трёх сплавов получили сплав, в котором меди оказалось 49 %. Если бы к первым двум сплавам вместо третьего сплава добавили 20-килограммовый сплав, содержащий 20 % меди, то получили бы сплав, в котором меди было бы 47 %. Найдите массу второго сплава.

Решение. В этой задаче неизвестны массы первого и второго сплавов, но даны два варианта получения третьего сплава. Поэтому схему «метода банок» придётся применить дважды: для случая, когда третий сплав содержит 30 % меди, и для случая, когда он содержит 20 %

меди. Массы первого и второго сплавов (в килограммах) обозначим соответственно через x и y. Тогда для первого случая получим следующую схему:



Для второго случая схема выглядит так:



Приведённые схемы позволяют сразу получить систему двух линейных уравнений для определения неизвестных x и y:

$$\begin{cases} 0{,}5x+0{,}6y+6=0{,}49(x+y+20),\\ 0{,}5x+0{,}6y+4=0{,}47(x+y+20). \end{cases}$$

Чтобы избежать возможных и довольно распространённых ошибок в действиях с дробями, умножим обе части каждого уравнения на 100. Получим

$$\begin{cases} 50x+60y+600=49(x+y+20),\\ 50x+60y+400=47(x+y+20). \end{cases}$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых приходим к системе

$$\begin{cases} x+11y=380,\\ 3x+13y=540. \end{cases}$$

Обратим внимание на то, что значение x в данной задаче находить необязательно. Умножим обе части первого уравнения системы на -3. Чтобы исключить переменную x, сложим почленно полученное после умножения на -3 уравнение и второе уравнение системы: $-20y=-600$, откуда $y=30$.

Ответ. 30 кг.

Подготовительные задачи

1. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 141 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего в том же направлении параллельно путям со скоростью 6 км/ч, за 12 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

2. Два автомобиля одновременно отправляются в 560-километровый пробег. Первый едет со скоростью, на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

3. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 180 км. Отдохнув, он отправился обратно в A, увеличив скорость на 5 км/ч. По пути он сделал остановку на 3 часа, в результате чего затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B.

4. Моторная лодка прошла против течения реки 208 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 5 часов меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

5. Расстояние между пристанями A и B равно 45 км. От пристани A к пристани B по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, доплыв до пристани B, тотчас повернула обратно и возвратилась к пристани A. К этому времени плот проплыл 28 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

6. Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них оставался 1 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун пробежал первый круг 15 минут назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на 5 км/ч меньше скорости второго.

7. Первые 200 км автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующие 180 км — со скоростью 90 км/ч, а последние 180 км — со скоростью 45 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

8. Первая труба пропускает на 5 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 200 литров она заполняет на 2 минуты дольше, чем вторая труба?

9. Свежие фрукты содержат 75 % воды, а высушенные — 25 %. Сколько требуется свежих фруктов для приготовления 45 кг высушенных фруктов?

10. Имеются два сосуда, содержащие 30 кг и 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их смешать, то получится раствор, содержащий 81 % кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 83 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится во втором сосуде?

Зачётные задачи

1. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 44 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего в том же направлении параллельно путям со скоростью 4 км/ч, за 36 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

2. Два автомобиля одновременно отправляются в 800-километровый пробег. Первый едет со скоростью, на 36 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 5 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

3. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 224 км. Отдохнув, он отправился обратно в A, увеличив скорость на 2 км/ч. По пути он сделал остановку на 2 часа, в результате чего затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B.

4. Моторная лодка прошла против течения реки 255 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 1 км/ч.

5. Расстояние между пристанями A и B равно 24 км. От пристани A к пристани B по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, доплыв до пристани B, тотчас повернула обратно и возвратилась к пристани A. К этому времени плот проплыл 15 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

6. Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них оставалось 7 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун пробежал первый круг 3 минуты назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на 8 км/ч меньше скорости второго.

7. Первые 350 км автомобиль ехал со скоростью 70 км/ч, следующие 105 км — со скоростью 35 км/ч, а последние 160 км — со скоростью 80 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

8. Первая труба пропускает на 16 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 105 литров она заполняет на 4 минуты дольше, чем вторая труба?

9. Свежие фрукты содержат 89 % воды, а высушенные — 23 %. Сколько требуется свежих фруктов для приготовления 23 кг высушенных фруктов?

10. Имеются два сосуда, содержащие 30 кг и 42 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их смешать, то получится раствор, содержащий 40 % кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 37 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится во втором сосуде?

Задание 23

Краткие методические рекомендации

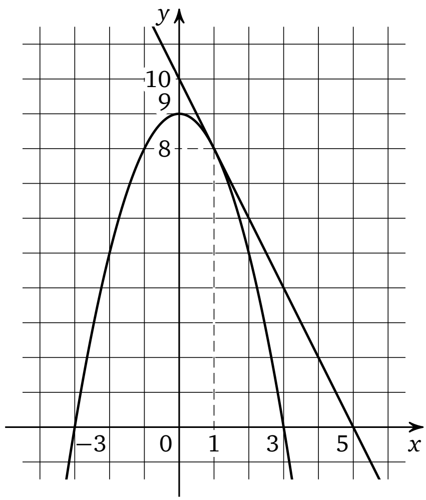
Задание 23 ОГЭ по математике представляет собой задачу по теме «Графики функций». Это задание можно отнести к относительно сложным, но следует понимать, что сложность эта относительна и в данном случае обусловлена либо формулой, задающей функцию и предполагающей предварительные алгебраические преобразования для получения одной из базовых функций школьного курса (из области определения которой в некоторых случаях придётся исключить одну или две точки), либо самим условием, требующим исследования взаимного расположения графиков двух функций и ответа на определённые вопросы о числе их общих точек в зависимости от некоторой величины. Что касается формулы, задающей функцию, то, как уже отмечалось, после несложных преобразований этой формулы (сокращения дроби, раскрытия модуля, приведения подобных слагаемых) получается формула, задающая элементарную функцию, графиком которой (или частью графика которой) является прямая, парабола, гипербола или их части — возможно, с удалёнными (выколотыми) точками (последние могут появиться в случае задания функции с помощью алгебраической дроби, область определения которой находится из условия отличия от нуля её знаменателя).

Пример 1. Найдите p и постройте в одной системе координат графики функций $y = p - x^2$ и $y = -2x + 10$, если известно, что они имеют ровно одну общую точку. Определите координаты этой точки.

Решение. Составим уравнение по условию задачи:

$$p - x^2 = 10 - 2x, \quad \text{откуда} \;\; x^2 - 2x - p + 10 = 0.$$

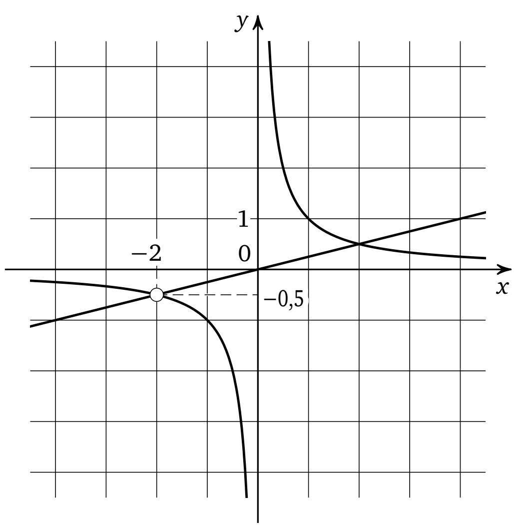
Полученное квадратное уравнение должно иметь единственный корень, являющийся абсциссой общей точки графиков. Значит, дискриминант D этого уравнения равен нулю (или, что то же самое, $\frac{D}{4} = 0$). Из условия $\frac{D}{4} = 0$ получим $1 + p - 10 = 0$, откуда $p = 9$. В этом случае полученное уравнение имеет единственный корень $x = 1$. Ординату общей точки найдём, подставив полученную абсциссу в уравнение прямой. Получим $y = 8$. Данная квадратичная функция имеет вид $y = 9 - x^2$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз, вершина имеет координаты $(0; 9)$, точки пересечения с осью абсцисс: $(-3; 0)$, $(3; 0)$. Графиком функции $y = -2x + 10$



является прямая, проходящая через найденную точку $(1; 8)$ и точку $(0; 10)$. Графики изображены на рисунке.

Ответ. $p=9$; $(1; 8)$.

Пример 2. Постройте график функции $y=\dfrac{x+2}{x^2+2x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.



Решение. Поскольку

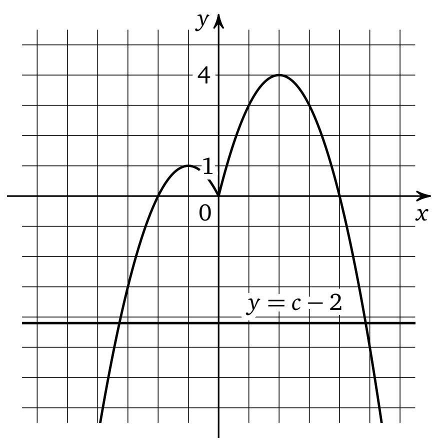
$$\frac{x+2}{x^2+2x} = \frac{x+2}{x(x+2)} = \frac{1}{x} \quad \text{при } x \neq -0{,}5,$$

графиком данной функции является гипербола $y = \dfrac{1}{x}$ с выколотой точкой $(-2; -0{,}5)$. Прямая $y = kx$, проходящая через начало координат, будет иметь с гиперболой ровно одну общую точку, только если она проходит через точку $(-2; -0{,}5)$. В этом случае $k = 0{,}25$ и уравнение прямой имеет вид $y = \dfrac{1}{4}x$. График изображён на рисунке.

Ответ. 0,25.

Пример 3. Постройте график функции $y = 3|x| + x - x^2$ и определите, при каких значениях c прямая $y = c - 2$ имеет с графиком не менее одной, но не более двух общих точек.

Решение. При $x \geqslant 0$ данная функция имеет вид $y = -x^2 + 4x$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз, вершина имеет координаты $(2; 4)$, точки пересечения с осью абсцисс: $(0; 0)$, $(4; 0)$. При $x \leqslant 0$ данная функция имеет вид $y = -x^2 - 2x$. Графиком этой функции является парабола, ветви которой направлены вниз, вершина имеет координаты $(-1; 1)$, точки пересечения с осью абсцисс: $(0; 0)$, $(-2; 0)$. Прямая $y = c - 2$ имеет с графиком не менее одной, но не более двух общих точек, если $c - 2 < 0$ или $1 < c - 2 \leqslant 4$, откуда $c \in (-\infty; 2) \cup (3; 6]$. График изображён на рисунке.



Ответ. $(-\infty; 2) \cup (3; 6]$.

Подготовительные задачи

1. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 1{,}5x-3 & \text{при } x<2, \\ -1{,}5x+3 & \text{при } 2\leqslant x\leqslant 3, \\ 3x-10{,}5 & \text{при } x>3. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

2. Постройте график функции

$$y = |x|(x+2)-3x.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

3. Постройте график функции

$$y = \frac{(x^2+4)(x-1)}{1-x}.$$

Определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

4. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2-10x+25 & \text{при } x\geqslant 4, \\ x-3 & \text{при } x<4. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

5. Постройте график функции

$$y = |x^2-x-2|.$$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

6. Постройте график функции

$$y = x^2+11x-4|x+6|+30.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

7. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2-2x+1 & \text{при } x\geqslant -1, \\ -\dfrac{4}{x} & \text{при } x<-1 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

8. Постройте график функции

$$y = \frac{3x+5}{3x^2+5x}.$$

Определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

9. Постройте график функции

$$y = \frac{|x|-1}{|x|-x^2}.$$

Определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ не имеет с графиком общих точек.

10. Постройте график функции

$$y = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{x}{6}-\frac{6}{x}\right|+\frac{x}{6}+\frac{6}{x}\right).$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Зачётные задачи

1. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 2{,}5x - 1 & \text{при } x < 1, \\ -2{,}5x + 4 & \text{при } 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 1{,}5x - 8 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

2. Постройте график функции

$$y = |x|(x+1) - 5x.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

3. Постройте график функции

$$y = \frac{(x^2+1)(x-2)}{2-x}.$$

Определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

4. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & \text{при } x \geqslant 2, \\ x + 1 & \text{при } x < 2. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

5. Постройте график функции

$$y = |x^2 - 6x + 5|.$$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

6. Постройте график функции

$$y = x^2 - 11x - 2|x-5| + 30.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

7. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 4 & \text{при } x \geqslant -1, \\ -\dfrac{9}{x} & \text{при } x < -1 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

8. Постройте график функции

$$y=\frac{7x-5}{7x^2-5x}.$$

Определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

9. Постройте график функции

$$y=\frac{4|x|-1}{|x|-4x^2}.$$

Определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ не имеет с графиком общих точек.

10. Постройте график функции

$$y=\frac{1}{2}\left(\left|\frac{x}{3{,}5}-\frac{3{,}5}{x}\right|+\frac{x}{3{,}5}+\frac{3{,}5}{x}\right).$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Диагностическая работа 1

1. Найдите значение выражения $\frac{1}{4} - \frac{51}{20}$.

2. В таблице приведены нормативы по бегу на 30 метров для учащихся 9 класса.

	Мальчики			Девочки		
Отметка	«5»	«4»	«3»	«5»	«4»	«3»
Время (в секундах)	4,6	4,9	5,3	5,0	5,5	5,9

Какую отметку получит мальчик, пробежавший 30 метров за 4,85 секунды?

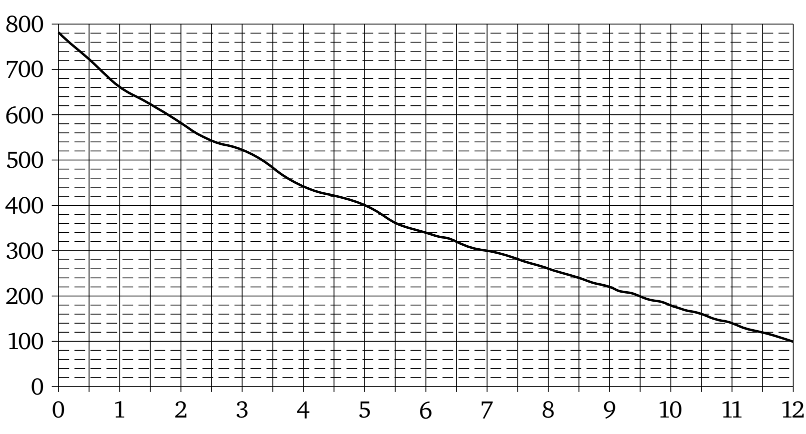
1) «5»
2) «4»
3) «3»
4) норматив не выполнен

3. Между какими числами заключено число $\sqrt{78}$?

1) 25 и 27 2) 4 и 5 3) 77 и 79 4) 8 и 9

4. Найдите значение выражения $\frac{(9\sqrt{7})^2}{21}$.

5. На графике изображена зависимость атмосферного давления от высоты над уровнем моря. На горизонтальной оси отмечена высота над уровнем моря в километрах, на вертикальной — давление в миллиметрах ртутного столба. Определите по графику, на какой высоте атмосферное давление равно 720 миллиметрам ртутного столба. Ответ дайте в километрах.



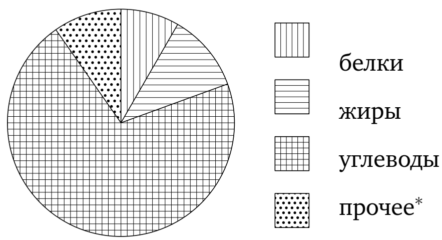
6. Найдите корень уравнения

$$(x-5)^2 = (x+10)^2.$$

7. Банк начисляет на счёт 10 % годовых. Вкладчик положил на счёт 900 рублей. Сколько рублей будет на этом счёте через год, если никаких операций, кроме начисления процентов, со счётом проводиться не будет?

8. На диаграмме показано содержание питательных веществ в сухарях. Определите по диаграмме, в каких пределах находится содержание углеводов.

сухари



*К прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества.

1) 45—55 % 2) 55—65 % 3) 65—75 % 4) 75—80 %

Запишите номер выбранного варианта ответа.

9. В среднем из 100 карманных фонариков, поступивших в продажу, четыре неисправных. Найдите вероятность того, что выбранный наудачу в магазине фонарик окажется исправен.

10. На рисунках изображены графики функций вида

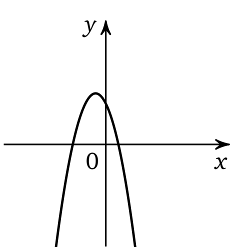
$$y = ax^2 + bx + c.$$

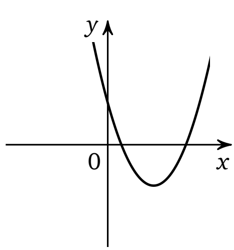
Установите соответствие между знаками коэффициентов a и c и графиками функций.

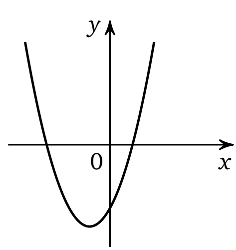
КОЭФФИЦИЕНТЫ

А) $a > 0$, $c < 0$ Б) $a > 0$, $c > 0$ В) $a < 0$, $c > 0$

ГРАФИКИ

1) 

2) 

3) 

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

11. Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии:

$$175;\ -525;\ 1575;\ \ldots$$

Найдите её четвёртый член.

12. Найдите значение выражения $\frac{4b}{a-b} \cdot \frac{a^2-ab}{8b}$ при $a=19$, $b=8{,}2$.

13. Чтобы перевести значение температуры по шкале Цельсия в шкалу Фаренгейта, пользуются формулой

$$t_F = 1{,}8t_C + 32,$$

где t_C — температура в градусах Цельсия, t_F — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Фаренгейта соответствует -85 градусов по шкале Цельсия?

14. Укажите неравенство, которое *не имеет* решений.

1) $x^2+6x+12>0$
3) $x^2+6x-12<0$
2) $x^2+6x+12<0$
4) $x^2+6x-12>0$

15. Решите уравнение $x^2-3x+\sqrt{5-x}=\sqrt{5-x}+18$.

16. Баржа прошла по течению реки 56 км и, повернув обратно, прошла ещё 54 км, затратив на весь путь 5 часов. Найдите собственную скорость баржи, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

17. Постройте график функции

$$y = x^2 - |4x+3|.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Диагностическая работа 2

1. Найдите значение выражения $\frac{9}{5} \cdot \frac{2}{3}$.

2. В таблице приведены нормативы по прыжкам через скакалку за 30 секунд для учащихся 9 класса.

	Мальчики			Девочки		
Отметка	«5»	«4»	«3»	«5»	«4»	«3»
Количество раз	58	56	54	66	64	62

Какую отметку получит мальчик, прыгнувший 57 раз за 30 секунд?

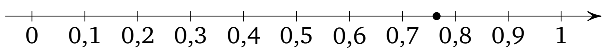
1) «5»

2) «4»

3) «3»

4) норматив не выполнен

3. Одно из чисел $\frac{10}{17}$; $\frac{11}{17}$; $\frac{13}{17}$; $\frac{14}{17}$ отмечено на прямой точкой.

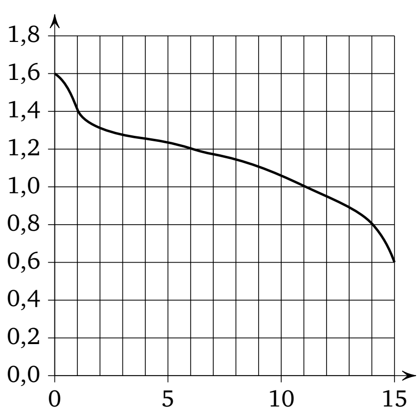


Какое это число?

1) $\frac{10}{17}$ 2) $\frac{11}{17}$ 3) $\frac{13}{17}$ 4) $\frac{14}{17}$

4. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{53} - \sqrt{17}\right)\left(\sqrt{53} + \sqrt{17}\right)$.

5. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На графике показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по графику, на сколько вольт упадёт напряжение за первые 15 часов работы фонарика.

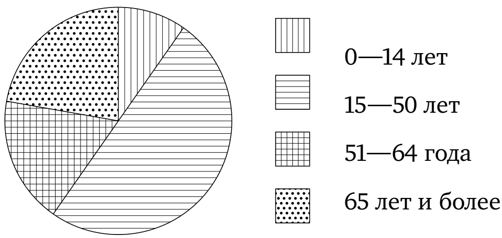


6. Решите уравнение $x^2 - 9 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

7. Плата за телефон составляет 340 рублей в месяц. В следующем году она увеличится на 20 %. Сколько рублей придётся платить ежемесячно за телефон в следующем году?

8. На диаграмме показан возрастной состав населения Японии. Определите по диаграмме, население какого возраста составляет более 40 % от всего населения.

Япония



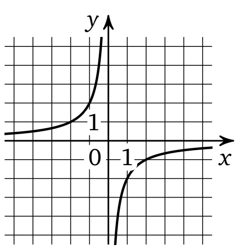
1) 0—14 лет 2) 15—50 лет 3) 51—64 года 4) 65 лет и более

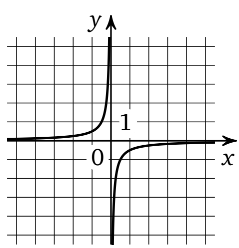
Запишите номер выбранного варианта ответа.

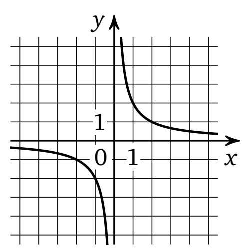
9. В лыжных гонках участвуют 7 спортсменов из России, 1 спортсмен из Норвегии и 2 спортсмена из Швеции. Порядок, в котором спортсмены стартуют, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен из Норвегии.

10. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

А) 

Б) 

В) 

ФОРМУЛЫ

1) $y = -\frac{1}{2x}$ 2) $y = -\frac{2}{x}$ 3) $y = \frac{2}{x}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

11. Последовательность (a_n) задана условиями

$$a_1 = 5, \quad a_{n+1} = -\frac{2}{a_n}.$$

Найдите a_5.

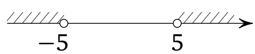
12. Найдите значение выражения $\frac{c^2 - ac}{a^2} : \frac{c-a}{a}$ при $a = 5$, $c = 26$.

13. Перевести значение температуры по шкале Фаренгейта в шкалу Цельсия позволяет формула

$$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32),$$

где t_C — температура в градусах Цельсия, t_F — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует 167 градусов по шкале Фаренгейта?

14. Укажите неравенство, решение которого изображено на рисунке.



1) $x^2 - 25 > 0$

2) $x^2 - 25 < 0$

3) $x^2 + 25 < 0$

4) $x^2 + 25 > 0$

15. Решите уравнение $(x^2 - 36)^2 + (x^2 + 4x - 12)^2 = 0$.

16. Первую половину пути автомобиль проехал со скоростью 90 км/ч, а вторую — со скоростью 110 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

17. Постройте график функции

$$y = 3|x + 7| - x^2 - 13x - 42.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Диагностическая работа 3

1. Найдите значение выражения $\frac{3}{5} : \frac{2}{15}$.

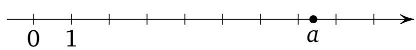
2. Бизнесмен Петров выезжает из Москвы в Санкт-Петербург на деловую встречу, которая назначена на 9:30. В таблице дано расписание ночных поездов Москва — Санкт-Петербург.

Номер поезда	Отправление из Москвы	Прибытие в Санкт-Петербург
038А	22:42	06:40
020У	00:56	08:53
016А	00:43	09:12
116С	00:35	09:01

Путь от вокзала до места встречи занимает полчаса. Укажите номер самого позднего (по времени отправления) поезда, который подходит бизнесмену Петрову.

1) 038А 2) 020У 3) 016А 4) 116С

3. На координатной прямой отмечено число a.



Какое из утверждений для этого числа является верным?

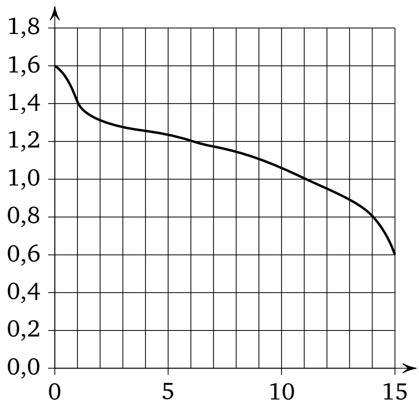
1) $a-6<0$
3) $6-a>0$
2) $a-7>0$
4) $8-a<0$

4. Найдите значение выражения

$$\frac{13^{18}\cdot 13^{-6}}{13^{9}}.$$

5. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На графике показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по графику,

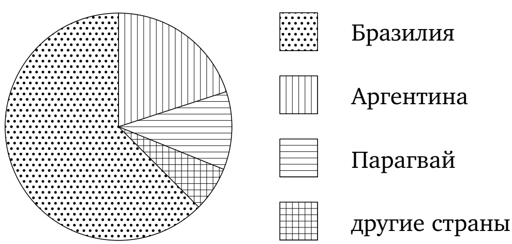
на сколько вольт упадёт напряжение с 6-го по 14-й час работы фонарика.



6. Решите уравнение $x^2-8x+12=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

7. В начале учебного года в школе было 1100 учащихся, а к концу учебного года их стало 869. На сколько процентов уменьшилось за учебный год число учащихся?

8. На диаграмме представлено распределение количества пользователей некоторой социальной сети по странам мира. Всего в этой социальной сети 12 миллионов пользователей.



Какие из следующих утверждений *неверны*?

1) Пользователей из Аргентины больше, чем пользователей из Латвии.

2) Пользователей из Бразилии больше, чем пользователей из Аргентины и Парагвая вместе.

3) Пользователей из Аргентины больше 3 миллионов.

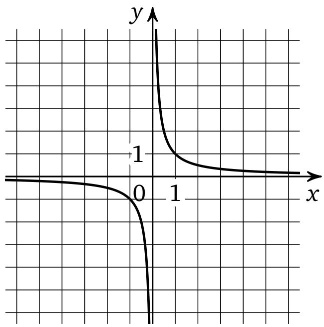
4) Примерно три четверти общего числа пользователей — из Бразилии.

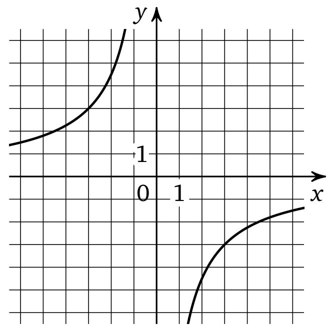
Запишите номера выбранных утверждений в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

9. В лыжных гонках участвуют 9 спортсменов из России, 4 спортсмена из Норвегии и 7 спортсменов из Швеции. Порядок, в котором спортсмены стартуют, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен *не* из России.

10. На рисунках изображены графики функций вида $y=\frac{k}{x}$. Установите соответствие между графиками и знаками коэффициента k.

ГРАФИКИ

А) 

Б) 

КОЭФФИЦИЕНТЫ

1) $k>0$ 2) $k<0$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б

11. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями

$$b_1=4, \quad b_{n+1}=2b_n.$$

Найдите b_7.

12. Найдите значение выражения

$$b+\frac{8a-b^2}{b}$$

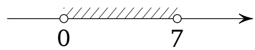
при $a=-49$, $b=-80$.

13. Перевести значение температуры по шкале Фаренгейта в шкалу Цельсия позволяет формула

$$t_C=\frac{5}{9}(t_F-32),$$

где t_C — температура в градусах Цельсия, t_F — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует -58 градусов по шкале Фаренгейта?

14. Укажите неравенство, решение которого изображено на рисунке.



1) $x^2-49<0$

2) $x^2-7x<0$

3) $x^2-49>0$

4) $x^2-7x>0$

15. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2-4x=y, \\ 3x-4=y. \end{cases}$$

16. Первый рабочий за час делает на 5 деталей больше, чем второй, и выполняет заказ, состоящий из 180 деталей, на 3 часа быстрее, чем второй рабочий, выполняющий такой же заказ. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

17. Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2+6x+9 & \text{при } x \geqslant -5, \\ -\dfrac{20}{x} & \text{при } x<-5 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Диагностическая работа 4

1. Найдите значение выражения

$$\frac{4{,}8\cdot 0{,}4}{0{,}6}.$$

2. В таблице приведены размеры штрафов, установленные на территории России с 1 сентября 2013 года за превышение максимальной разрешённой скорости, зафиксированное с помощью средств автоматической фиксации.

Превышение скорости (в км/ч)	21—40	41—60	61—80	81 и более
Размер штрафа (в руб.)	500	1000	2000	5000

Какой штраф должен заплатить владелец автомобиля, зафиксированная скорость которого составила 90 км/ч на участке дороги с максимальной разрешённой скоростью 40 км/ч?

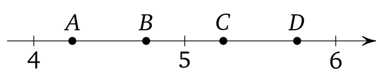
1) 500 рублей

2) 1000 рублей

3) 2000 рублей

4) 5000 рублей

3. На координатной прямой отмечены точки A, B, C, D. Одна из них соответствует числу $\sqrt{33}$. Какая это точка?



1) точка A

2) точка B

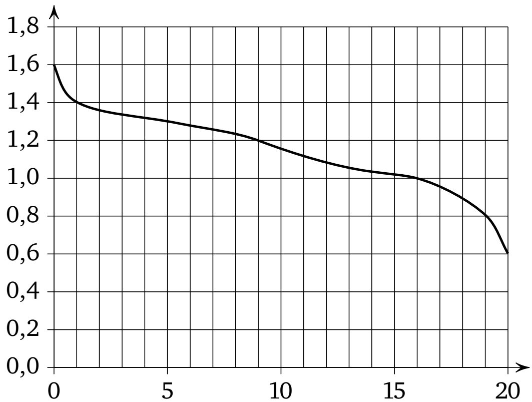
3) точка C

4) точка D

4. Найдите значение выражения

$$\sqrt{2^{10}\cdot 3^2\cdot 5^2}.$$

5. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На графике показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по графику, за сколько часов работы фонарика напряжение упадёт с 1,6 В до 1,4 В.



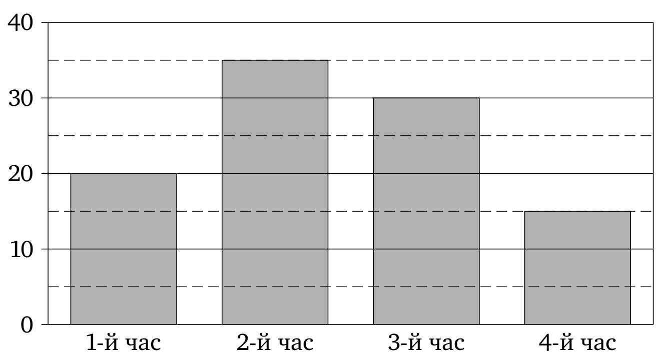
6. Решите уравнение

$$x^2 - 7x = 8.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

7. Спортивный магазин проводит акцию. Любая футболка стоит 200 рублей. При покупке двух футболок предоставляется скидка на вторую футболку 80 %. Сколько рублей придётся заплатить за покупку двух футболок в период действия акции?

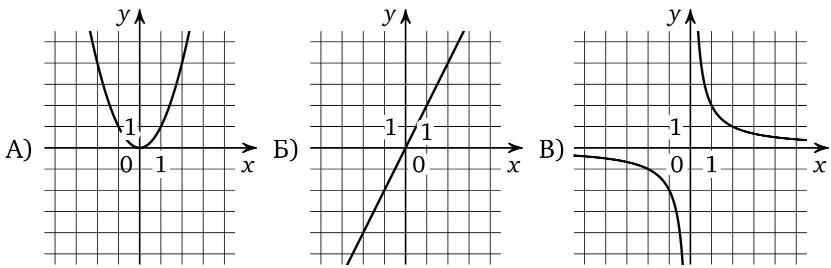
8. На диаграмме показано количество СМС-сообщений, присланных слушателями за каждый час четырёхчасового эфира программы по заявкам на радио. Определите, на сколько больше сообщений было прислано за первые два часа программы по сравнению с последними двумя часами этой программы.



9. Вероятность того, что новая шариковая ручка пишет плохо (или не пишет), равна 0,19. Покупатель в магазине выбирает одну шариковую ручку. Найдите вероятность того, что эта ручка пишет хорошо.

10. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

1) $y = \dfrac{2}{x}$ 2) $y = 2x$ 3) $y = x^2$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

11. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями

$$b_1 = -6, \quad b_{n+1} = 3b_n.$$

Найдите сумму первых пяти её членов.

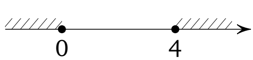
12. Найдите значение выражения $\dfrac{a^2-1}{5a^2+5a}$ при $a = -2$.

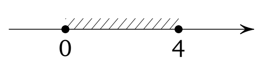
13. Центростремительное ускорение при движении по окружности (в м/с^2) вычисляется по формуле

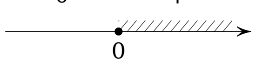
$$a = \omega^2 R,$$

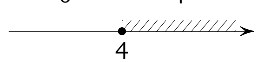
где ω — угловая скорость (в с$^{-1}$), R — радиус окружности (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите радиус R, если угловая скорость равна 9,5 с$^{-1}$, а центростремительное ускорение равно 180,5 м/с^2. Ответ дайте в метрах.

14. Укажите решение неравенства $4x - x^2 \leqslant 0$.

1) 

3) 

2) 

4) 

15. Решите неравенство $(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$.

16. Свежие фрукты содержат 88 % воды, а высушенные — 30 %. Сколько сухих фруктов получится из 35 кг свежих фруктов?

17. Постройте график функции

$$y = -4 - \frac{x+1}{x^2+x}.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком общих точек.

Диагностическая работа 5

1. Найдите значение выражения

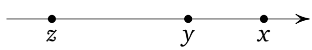
$$6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2-17\cdot\frac{1}{3}.$$

2. Куриные яйца в зависимости от их массы подразделяют на пять категорий: высшую, отборную, первую, вторую, третью. Используя данные, представленные в таблице, определите, к какой категории относится яйцо массой 35,9 г.

Категория	Масса одного яйца (в г)
Высшая	75,0 и более
Отборная	65,0—74,9
Первая	55,0—64,9
Вторая	45,0—54,9
Третья	менее 45,0

1) отборная
2) первая
3) вторая
4) третья

3. На координатной прямой отмечены числа x, y и z.



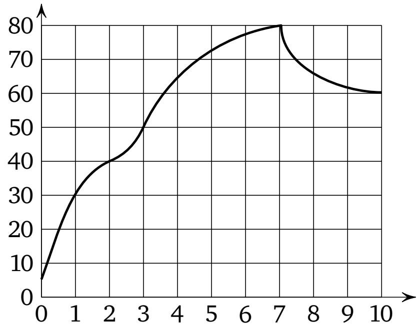
Какая из разностей $z-x$, $x-y$, $z-y$ положительна?

1) $z-x$
2) $x-y$
3) $z-y$
4) ни одна из них

4. Найдите значение выражения

$$\left(\sqrt{5}+3\right)^2-6\sqrt{5}.$$

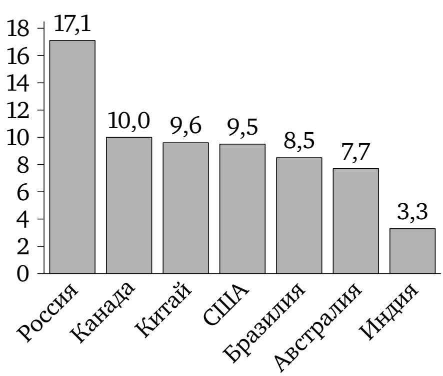
5. На графике показано изменение температуры в процессе разогрева двигателя легкового автомобиля. На горизонтальной оси отмечено время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на вертикальной оси — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, за сколько минут двигатель нагреется с 30°C до 40°C.



6. Решите уравнение $5x^2+9x+4=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

7. Товар на распродаже уценили на 20 %, при этом он стал стоить 520 рублей. Сколько рублей стоил товар до распродажи?

8. На диаграмме представлены семь крупнейших по площади территории (в млн км^2) стран мира.



Какие из следующих утверждений верны?

1) Канада — крупнейшая по площади территории страна мира.

2) Площадь территории Индии составляет 3,3 млн км^2.

3) Площадь территории Китая больше площади территории Австралии.

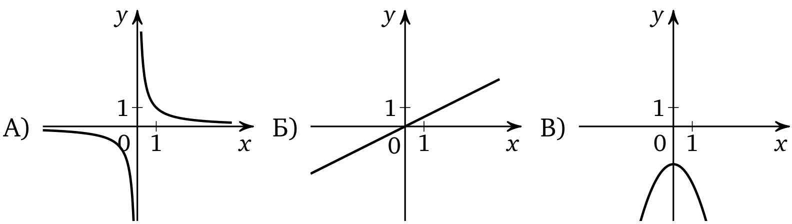
4) Площадь территории Канады больше площади территории США на 1,5 млн км^2.

Запишите номера выбранных утверждений в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

9. На птицеферме разводят кур, уток и гусей. Известно, что гусей на 40 % меньше, чем уток, а кур на 140 % больше, чем уток. Найдите вероятность того, что случайно увиденная на этой птицеферме птица окажется уткой.

10. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

1) $y = \frac{1}{x}$ 2) $y = -x^2 - 2$ 3) $y = \frac{1}{2}x$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

11. Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии:

$$1512;\ -252;\ 42;\ \ldots$$

Найдите сумму первых четырёх её членов.

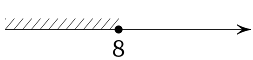
12. Найдите значение выражения $\frac{a^2-b^2}{ab} : \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$ при $a = 1\frac{1}{11}$, $b = 8\frac{10}{11}$.

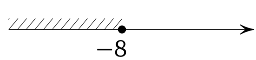
13. Период колебания математического маятника T (в секундах) можно приближённо вычислить по формуле

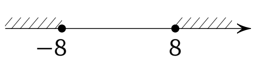
$$T = 2\sqrt{l},$$

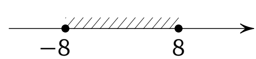
где l — длина нити (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите длину нити маятника, период колебаний которого составляет 6 секунд. Ответ дайте в метрах.

14. Укажите решение неравенства $x^2 \leqslant 64$.

1) 

3) 

2) 

4) 

15. Решите неравенство $\dfrac{-11}{(x-2)^2-3} \geqslant 0$.

16. Имеются два сосуда, содержащие 40 кг и 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их смешать, то получится раствор, содержащий 33 % кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 47 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

17. Постройте график функции

$$y = \frac{3|x|-1}{|x|-3x^2}.$$

Определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ не имеет с графиком общих точек.

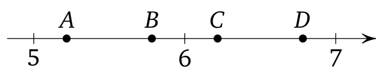
Диагностическая работа 6

1. Найдите значение выражения $\left(\frac{4}{9} - 3\frac{1}{15}\right) \cdot 9$.

2. В таблице приведена информация о пяти крупнейших городах России (по данным на 2014 год). Какой город занимает четвёртое место по численности населения? В ответе укажите *плотность населения* этого города (в чел./кв. км).

Город	Население (в тыс. чел.)	Площадь (в кв. км)	Плотность (в чел./кв. км)
Екатеринбург	1412	491	2866
Москва	12 108	2511	4823
Нижний Новгород	1273	410	3100
Новосибирск	1548	506	3961
Санкт-Петербург	5132	1439	3566

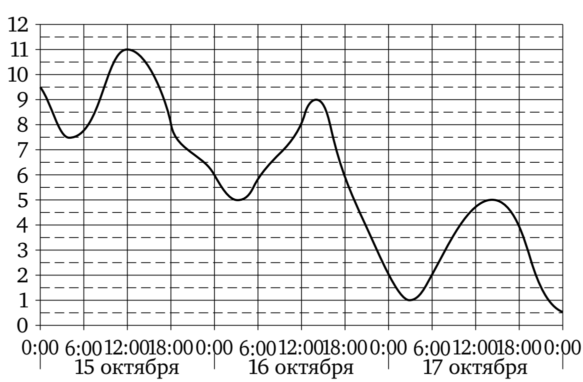
3. На координатной прямой отмечены точки A, B, C, D. Одна из них соответствует числу $\sqrt{46}$. Какая это точка?



1) точка A 2) точка B 3) точка C 4) точка D

4. Найдите значение выражения $\frac{5^{20} \cdot 7^{19}}{35^{18}}$.

5. На графике показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указываются дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по графику наибольшую температуру воздуха 16 октября. Ответ дайте в градусах Цельсия.



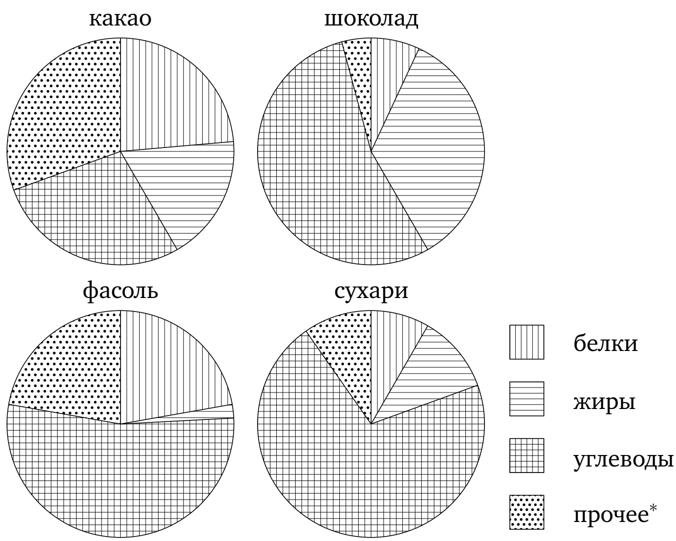
6. Решите уравнение

$$5x^2 - 12x + 7 = 0.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

7. Банк начисляет на счёт 9 % годовых. Вкладчик положил на счёт 2000 рублей. Сколько рублей будет на этом счёте через год, если никаких операций, кроме начисления процентов, со счётом проводиться не будет?

8. На диаграммах показано содержание питательных веществ в какао, молочном шоколаде, фасоли и сухарях. Определите по диаграммам, в каком продукте содержание жиров наибольшее.



*К прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества.

1) какао

2) шоколад

3) фасоль

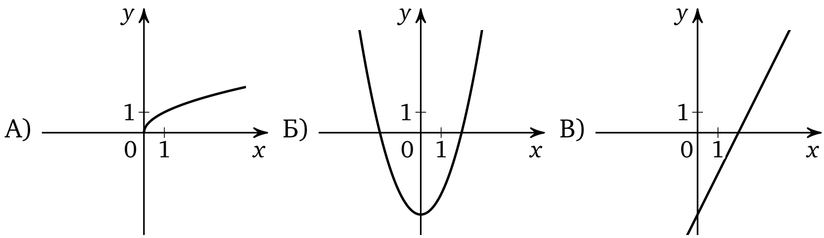
4) сухари

Запишите номер выбранного варианта ответа.

9. В фермерском хозяйстве содержат кур, уток и гусей, причём уток в 4 раза больше, чем гусей, а кур в 5 раз больше чем уток; других птиц нет. Найдите вероятность того, что случайно встреченная в этом хозяйстве птица окажется уткой.

10. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

1) $y = \sqrt{x}$ 2) $y = 2x - 4$ 3) $y = x^2 - 4$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

11. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями

$$b_1 = -7, \quad b_{n+1} = 3b_n.$$

Найдите сумму первых пяти её членов.

12. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{1}{5a} + \frac{1}{7a}\right) \cdot \frac{a^2}{8} \quad \text{при } a = -4{,}2.$$

13. Перевести значение температуры по шкале Фаренгейта в шкалу Цельсия позволяет формула $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32)$, где t_C — температура в градусах Цельсия, t_F — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует 149 градусов по шкале Фаренгейта?

14. Укажите неравенство, которое *не имеет* решений.

1) $x^2 + 6x - 51 > 0$
2) $x^2 + 6x - 51 < 0$
3) $x^2 + 6x + 51 > 0$
4) $x^2 + 6x + 51 < 0$

15. Решите неравенство

$$(x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8).$$

16. Из двух городов одновременно навстречу друг другу отправились два велосипедиста. Проехав некоторую часть пути, первый велосипедист сделал остановку на 56 минут, а затем продолжил движение до встречи со вторым велосипедистом. Расстояние между городами составляет 182 км, скорость первого велосипедиста равна 13 км/ч, скорость второго — 15 км/ч. Определите расстояние от города, из которого выехал второй велосипедист, до места встречи.

17. Постройте график функции $y=|x^2+x-2|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Диагностическая работа 7

1. Найдите значение выражения $(8 \cdot 10^2)^2 \cdot (3 \cdot 10^{-2})$.

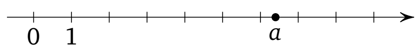
2. В таблице приведены нормативы по бегу на 60 метров для учащихся 9 класса.

	Мальчики			Девочки		
Отметка	«5»	«4»	«3»	«5»	«4»	«3»
Время (в секундах)	8,5	9,2	10,0	9,4	10,0	10,5

Какую отметку получит девочка, пробежавшая 60 метров за 10,35 секунды?

1) «5»
3) «3»
2) «4»
4) норматив не выполнен

3. На координатной прямой отмечено число a.

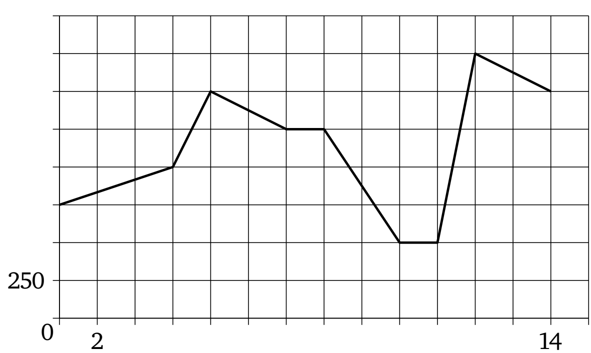


Какое из утверждений для этого числа является верным?

1) $a-4<0$ 2) $a-6>0$ 3) $6-a>0$ 4) $7-a<0$

4. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{8}+\sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{2}$.

5. На графике, изображенном на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций нефтедобывающей компании в первые две недели мая. По вертикальной оси откладывается стоимость одной акции в рублях, по горизонтальной оси — числа мая. В первую неделю мая бизнесмен купил 800 акций, а потом продал их на второй неделе. Какую наибольшую прибыль он мог получить? Ответ дайте в рублях.



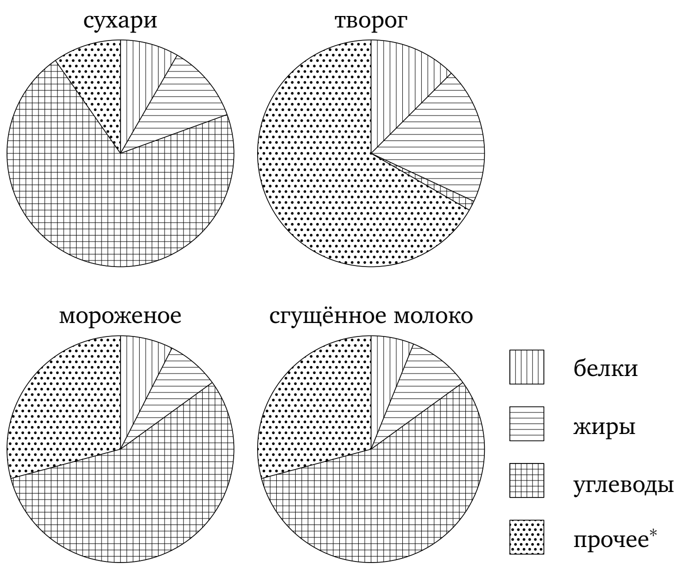
6. Решите уравнение

$$(x-2)(-x-3)=0.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

7. Пиджак дороже рубашки в 4 раза. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

8. На диаграммах показано содержание питательных веществ в сухарях, твороге, сливочном мороженом и сгущённом молоке. Определите по диаграммам, в каком продукте содержание белков превышает 10 %.



*К прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества.

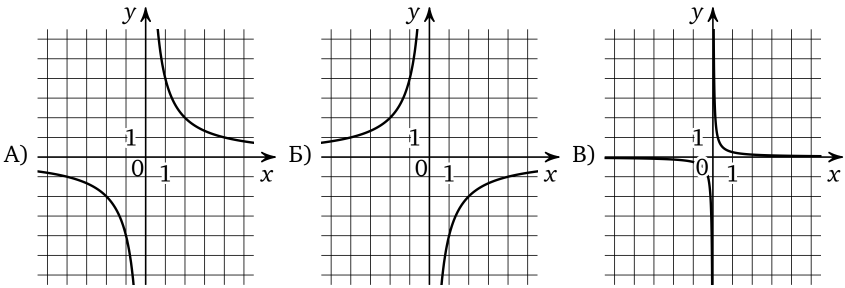
1) сухари
2) творог
3) мороженое
4) сгущённое молоко

Запишите номер выбранного варианта ответа.

9. На экзамене 40 билетов, Оскар *не выучил* 12 из них. Найдите вероятность того, что ему попадётся выученный билет.

10. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

1) $y = -\dfrac{4}{x}$ 2) $y = \dfrac{4}{x}$ 3) $y = \dfrac{1}{4x}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

11. Выписано несколько последовательных членов геометрической прогрессии:

$$\ldots;\ 1{,}5;\ x;\ 24;\ -96;\ \ldots$$

Найдите x.

12. Найдите значение выражения

$$\frac{7b}{a-b}\cdot\frac{a^2-ab}{35b} \quad \text{при } a=61,\ b=2{,}8.$$

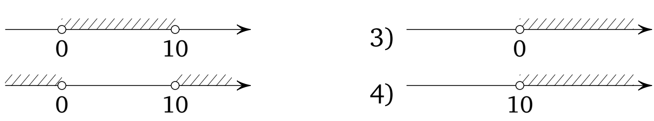
13. В фирме «Эх, прокачу!» стоимость поездки на такси (в рублях) длительностью более 5 минут рассчитывается по формуле

$$C = 150 + 11(t-5),$$

где t — длительность поездки (в минутах). Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость 10-минутной поездки. Ответ дайте в рублях.

14. Укажите решение неравенства $10x - x^2 < 0$.

1) 3)
2) 4)



15. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2+2y^2=50, \\ 12x^2+8y^2=50x. \end{cases}$$

16. Свежие фрукты содержат 93 % воды, а высушенные — 16 %. Сколько требуется свежих фруктов для приготовления 21 кг высушенных фруктов?

17. Постройте график функции $y=\dfrac{(0{,}5x^2-0{,}5x)|x|}{x-1}$. Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Диагностическая работа 8

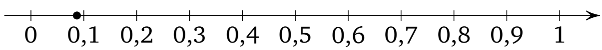
1. Найдите значение выражения $\dfrac{1}{\dfrac{1}{36}-\dfrac{1}{44}}$.

2. В таблице приведены расстояния от Солнца до четырёх планет Солнечной системы. Какая из этих планет дальше всех от Солнца?

Планета	Марс	Меркурий	Юпитер	Венера
Расстояние (в км)	$2{,}28\cdot10^8$	$5{,}79\cdot10^7$	$7{,}781\cdot10^8$	$1{,}082\cdot10^8$

1) Марс 2) Меркурий 3) Юпитер 4) Венера

3. Одно из чисел $\frac{2}{23}$; $\frac{3}{23}$; $\frac{5}{23}$; $\frac{11}{23}$ отмечено на прямой точкой.

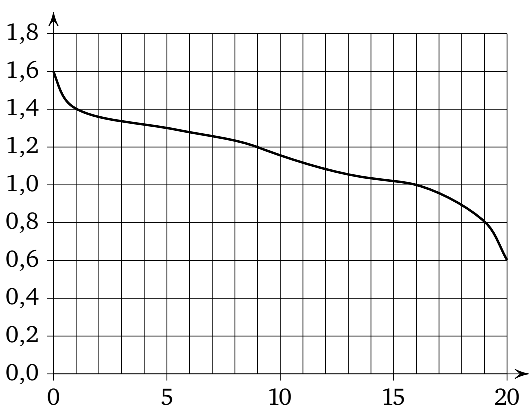


Какое это число?

1) $\frac{2}{23}$ 2) $\frac{3}{23}$ 3) $\frac{5}{23}$ 4) $\frac{11}{23}$

4. Найдите значение выражения $\dfrac{(2^8)^{-6}}{2^{-47}}$.

5. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На графике показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по графику, на сколько вольт упадёт напряжение за первые 19 часов работы фонарика.



6. Найдите корень уравнения $-5+9x=10x+4$.

7. Принтер печатает одну страницу за 9 секунд. Сколько страниц можно напечатать на этом принтере за 12 минут?

8. На диаграмме представлено распределение количества пользователей некоторой социальной сети по странам мира. Всего в этой социальной сети 12 миллионов пользователей.

Какие из следующих утверждений *неверны*?

1) Пользователей из Аргентины больше, чем пользователей из Польши.

2) Пользователей из Аргентины примерно втрое больше, чем пользователей из Парагвая.

3) Пользователей из Аргентины и Белоруссии вместе больше половины общего числа пользователей.

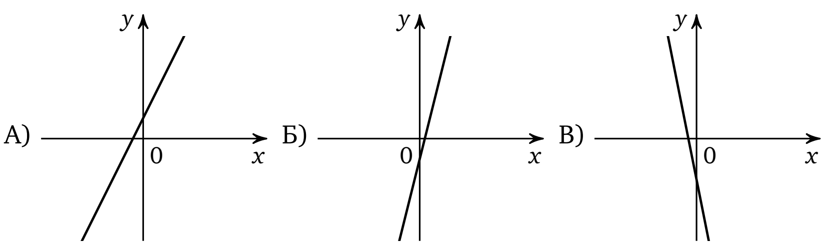
4) Пользователей из Бразилии меньше 9 миллионов человек.

В ответе запишите номера выбранных утверждений в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

9. В среднем из 50 карманных фонариков, поступивших в продажу, семь неисправных. Найдите вероятность того, что выбранный наудачу в магазине фонарик окажется исправен.

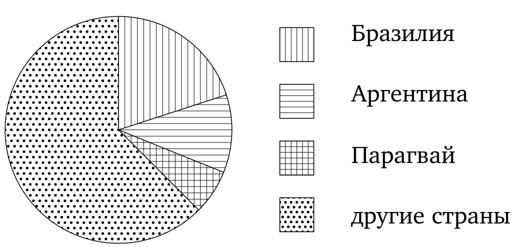
10. На рисунках изображены графики функций вида $y=kx+b$. Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов k и b.

ГРАФИКИ



КОЭФФИЦИЕНТЫ

1) $k>0$, $b<0$ 2) $k<0$, $b<0$ 3) $k>0$, $b>0$



В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

11. Дана арифметическая прогрессия (a_n), в которой

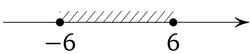
$$a_8 = 0{,}6, \quad a_{23} = 2{,}1.$$

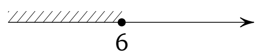
Найдите разность прогрессии.

12. Найдите значение выражения $\dfrac{a+2x}{a} : \dfrac{ax+2x^2}{a^2}$ при $a=23$, $x=5$.

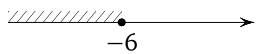
13. Мощность постоянного тока (в ваттах) вычисляется по формуле $P=I^2R$, где I — сила тока (в амперах), R — сопротивление (в омах). Пользуясь этой формулой, найдите сопротивление R, если мощность составляет 98 Вт, а сила тока равна 7 А. Ответ дайте в омах.

14. Укажите решение неравенства $x^2 \leqslant 36$.

1) 

3) 

2) 

4) 

15. Решите неравенство $\dfrac{-12}{(x+6)^2-3} \geqslant 0$.

16. Имеются два сосуда, содержащие 24 кг и 26 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 39 % кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 40 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

17. Постройте график функции $y=\dfrac{(x^2+1)(x+2)}{-2-x}$. Определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Диагностическая работа 9

1. Найдите значение выражения $\frac{24}{4\cdot 4{,}8}$.

2. В таблице приведены расстояния от Солнца до четырёх планет Солнечной системы. Какая из этих планет ближе всех к Солнцу?

Планета	Марс	Сатурн	Уран	Юпитер
Расстояние (в км)	$2{,}28\cdot 10^8$	$1{,}427\cdot 10^9$	$2{,}871\cdot 10^9$	$7{,}781\cdot 10^8$

1) Марс
3) Уран
2) Сатурн
4) Юпитер

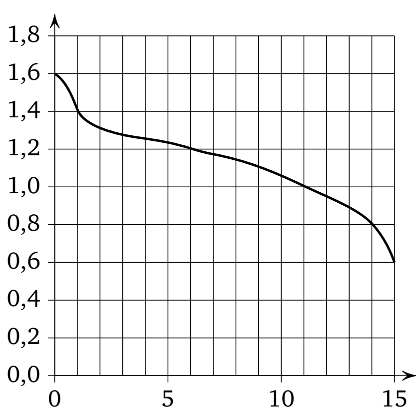
3. На координатной прямой точки A, B, C и D соответствуют числам 0,271; −0,112; 0,041; −0,267.

Какой точке соответствует число 0,271?

1) A 2) B 3) C 4) D

4. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{44}\cdot\sqrt{18}}{\sqrt{88}}$.

5. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На графике показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по графику, за сколько часов работы фонарика напряжение упадёт с 1,6 В до 1 В.



6. Решите уравнение $x^2+20=9x$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

7. Спортивный магазин проводит акцию. Любая футболка стоит 250 рублей. При покупке двух футболок предоставляется скидка на вторую футболку 40 %. Сколько рублей придётся заплатить за покупку двух футболок в период действия акции?

8. На диаграмме показано содержание питательных веществ в сгущённом молоке. Определите по диаграмме, содержание каких веществ превосходит 25 %.

*К прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества.

1) белки 2) жиры 3) углеводы 4) прочее

Запишите номера выбранных вариантов ответов в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

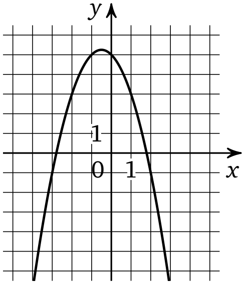
9. В магазине канцтоваров продаётся 84 ручки, из них 22 красные, 9 зелёных, 41 фиолетовая, остальные синие и чёрные, их поровну. Найдите вероятность того, что случайно выбранная в этом магазине ручка будет красной или фиолетовой.

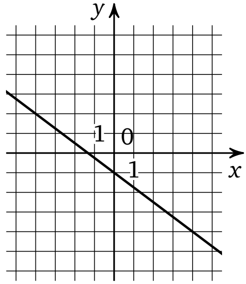
10. Установите соответствие между функциями и их графиками.

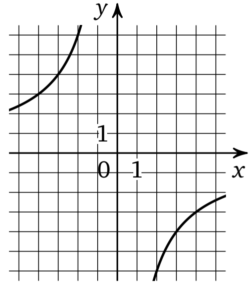
ФУНКЦИИ

А) $y=-x^2-x+5$ Б) $y=-\frac{3}{4}x-1$ В) $y=-\frac{12}{x}$

ГРАФИКИ

1) 

2) 

3) 

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

11. Выписаны первые несколько членов арифметической прогрессии: −8; 1; 10; … Найдите седьмой член этой прогрессии.

12. Найдите значение выражения

$$\frac{x^2-xy}{12y}\cdot\frac{4y}{x-y}$$

при $x=7{,}8$, $y=17$.

13. Чтобы перевести значение температуры по шкале Цельсия в шкалу Фаренгейта, пользуются формулой $t_F=1{,}8t_C+32$, где t_C — температура в градусах Цельсия, t_F — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Фаренгейта соответствует 40 градусов по шкале Цельсия?

14. Укажите решение неравенства

$$2x-6>4x+8.$$

1) $(-\infty; 1)$ 2) $(1; +\infty)$ 3) $(-\infty; -7)$ 4) $(-7; +\infty)$

15. Решите систему уравнений $\begin{cases} 9x^2-7x=y, \\ 9x-7=y. \end{cases}$

16. Моторная лодка прошла против течения реки 221 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

17. Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2+4x+4 & \text{при } x\geqslant -5, \\ -\dfrac{45}{x} & \text{при } x<-5. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Диагностическая работа 10

1. Найдите значение выражения $\frac{1,6}{2,6-1,8}$.

2. Куриные яйца в зависимости от их массы подразделяют на пять категорий: высшую, отборную, первую, вторую, третью. Используя данные, представленные в таблице, определите, к какой категории относится яйцо массой 65,5 г.

Категория	Масса одного яйца (в г)
Высшая	75,0 и более
Отборная	65,0—74,9
Первая	55,0—64,9
Вторая	45,0—54,9
Третья	менее 45,0

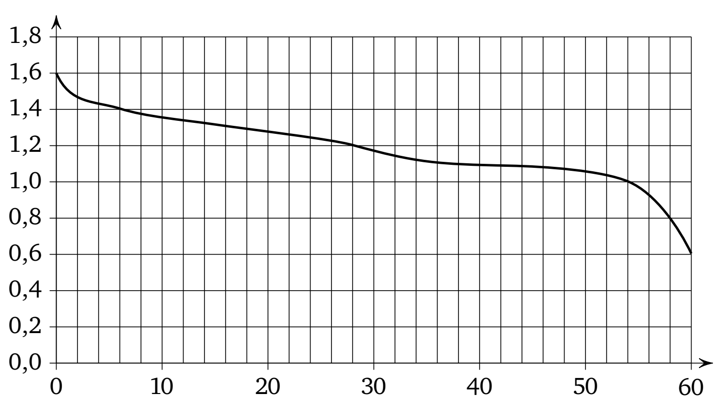
1) высшая 2) отборная 3) первая 4) вторая

3. Какому из данных промежутков принадлежит число $\frac{9}{13}$?

1) [0,5; 0,6] 2) [0,6; 0,7] 3) [0,7; 0,8] 4) [0,8; 0,9]

4. Найдите значение выражения $\sqrt{8}\cdot\sqrt{98}$.

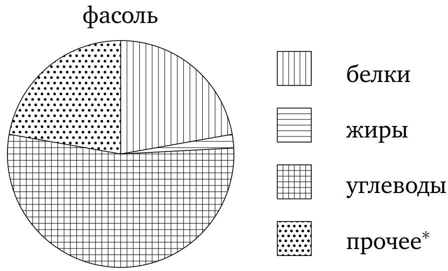
5. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На графике показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по графику, на сколько вольт упадёт напряжение с 28-го по 60-й час работы фонарика.



6. Найдите корень уравнения $\dfrac{4}{x+3}=5$.

7. Для приготовления фарша взяли говядину и свинину в отношении 22 : 3. Сколько процентов фарша составляет говядина?

8. На диаграмме показано содержание питательных веществ в фасоли. Определите по диаграмме, в каких пределах находится содержание белков.



*К прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества.

1) 5—15 % 2) 15—25 % 3) 25—35 % 4) 35—45 %

Запишите номер выбранного варианта ответа.

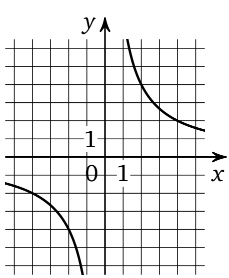
9. В среднем из 150 карманных фонариков, поступивших в продажу, шесть неисправных. Найдите вероятность того, что выбранный наудачу в магазине фонарик окажется исправен.

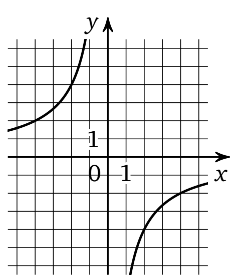
10. Установите соответствие между функциями и их графиками.

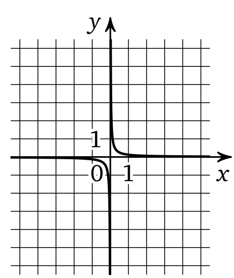
ФУНКЦИИ

А) $y=\dfrac{8}{x}$ Б) $y=\dfrac{1}{8x}$ В) $y=-\dfrac{8}{x}$

ГРАФИКИ

1) 

2) 

3) 

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

11. Последовательность (a_n) задана условием

$$a_n = \frac{37}{n+4}.$$

Сколько членов этой последовательности больше 4?

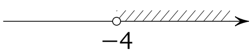
12. Найдите значение выражения

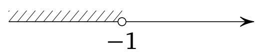
$$\frac{1}{8x} - \frac{8x+8y}{64xy}$$

при $x = \sqrt{30}$, $y = \frac{1}{4}$.

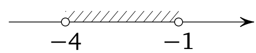
13. В фирме «Чистая вода» стоимость (в рублях) колодца из железобетонных колец рассчитывается по формуле $C = 6500 + 4000n$, где n — число колец, установленных в колодце. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость колодца из 12 колец. Ответ дайте в рублях.

14. Укажите решение системы неравенств $\begin{cases} x < -1, \\ -4 - x < 0. \end{cases}$

1) 

3) 

2) нет решений

4) 

15. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x^2 + y = 5, \\ 3x^2 - y = 2. \end{cases}$

16. Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них оставалось 3 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун пробежал первый круг 6 минут назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на 5 км/ч меньше скорости второго.

17. Постройте график функции

$$y = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{x}{4} - \frac{4}{x}\right| + \frac{x}{4} + \frac{4}{x}\right).$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Диагностическая работа 11

1. Найдите значение выражения $(9 \cdot 10^{-2})^2 \cdot (11 \cdot 10^5)$.

2. В таблице приведены нормативы по бегу на 30 метров для учащихся 9 класса.

	Мальчики			Девочки		
Отметка	«5»	«4»	«3»	«5»	«4»	«3»
Время (в секундах)	4,6	4,9	5,3	5,0	5,5	5,9

Какую отметку получит девочка, пробежавшая 30 метров за 5,35 секунды?

1) «5»

2) «4»

3) «3»

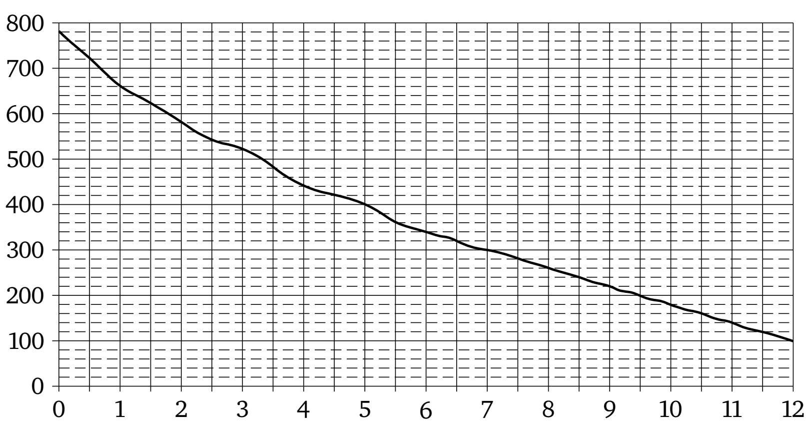
4) норматив не выполнен

3. Какое из данных чисел принадлежит промежутку [5; 6]?

1) $\sqrt{5}$ 2) $\sqrt{6}$ 3) $\sqrt{28}$ 4) $\sqrt{41}$

4. Найдите значение выражения $\dfrac{4^{-3} \cdot 4^{-8}}{4^{-10}}$.

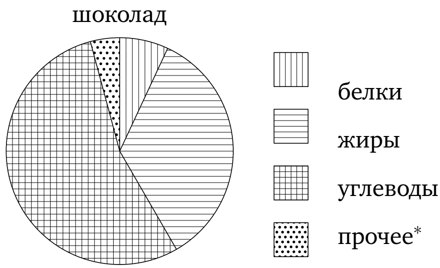
5. На графике изображена зависимость атмосферного давления от высоты над уровнем моря. На горизонтальной оси отмечена высота над уровнем моря в километрах, на вертикальной — давление в миллиметрах ртутного столба. Определите по графику, на какой высоте атмосферное давление равно 620 миллиметрам ртутного столба. Ответ дайте в километрах.



6. Найдите корень уравнения $(x+10)^2 = (x-9)^2$.

7. Банк начисляет на счёт 20 % годовых. Вкладчик положил на счёт 1000 рублей. Сколько рублей будет на этом счёте через год, если никаких операций, кроме начисления процентов, со счётом проводиться не будет?

8. На диаграмме показано содержание питательных веществ в молочном шоколаде. Определите по диаграмме, в каких пределах находится содержание углеводов.



*К прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества.

1) 5—15 % 2) 15—25 % 3) 45—55 % 4) 60—70 %

Запишите номер выбранного варианта ответа.

9. В среднем из 75 карманных фонариков, поступивших в продажу, девять неисправных. Найдите вероятность того, что выбранный наудачу в магазине фонарик окажется исправен.

10. На рисунках изображены графики функций вида

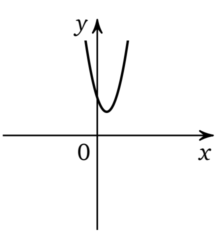
$$y = ax^2 + bx + c.$$

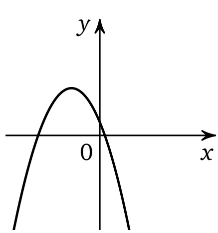
Установите соответствие между знаками коэффициентов a и c и графиками функций.

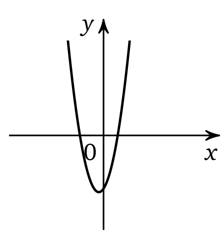
КОЭФФИЦИЕНТЫ

А) $a < 0$, $c > 0$ Б) $a > 0$, $c > 0$ В) $a > 0$, $c < 0$

ГРАФИКИ

1) 

2) 

3) 

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

11. Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии:

$$-25;\ -20;\ -16;\ \ldots$$

Найдите её четвёртый член.

12. Найдите значение выражения $\frac{9b}{a-b}\cdot\frac{a^2-ab}{18b}$ при $a=81$, $b=7{,}7$.

13. Чтобы перевести значение температуры по шкале Цельсия в шкалу Фаренгейта, пользуются формулой

$$t_F = 1{,}8t_C + 32,$$

где t_C — температура в градусах Цельсия, t_F — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Фаренгейта соответствует -100 градусов по шкале Цельсия?

14. Укажите неравенство, которое *не имеет* решений.

1) $x^2-8x-83>0$

2) $x^2-8x+83<0$

3) $x^2-8x-83<0$

4) $x^2-8x+83>0$

15. Решите уравнение

$$x^2-2x+\sqrt{4-x}=\sqrt{4-x}+15.$$

16. Баржа прошла по течению реки 48 км и, повернув обратно, прошла ещё 42 км, затратив на весь путь 5 часов. Найдите собственную скорость баржи, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

17. Постройте график функции

$$y = x^2-|4x+5|.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Диагностическая работа 12

1. Найдите значение выражения

$$\frac{1}{\frac{1}{30}+\frac{1}{42}}.$$

2. В таблице приведены нормативы по прыжкам с места для учащихся 11 класса.

	Мальчики			Девочки		
Отметка	«5»	«4»	«3»	«5»	«4»	«3»
Расстояние (в см)	230	220	200	185	170	155

Какую отметку получит девочка, прыгнувшая на 167 см?

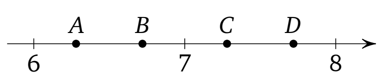
1) «5»

2) «4»

3) «3»

4) норматив не выполнен

3. На координатной прямой отмечены точки A, B, C, D. Одна из них соответствует числу $\sqrt{53}$. Какая это точка?



1) точка A

2) точка B

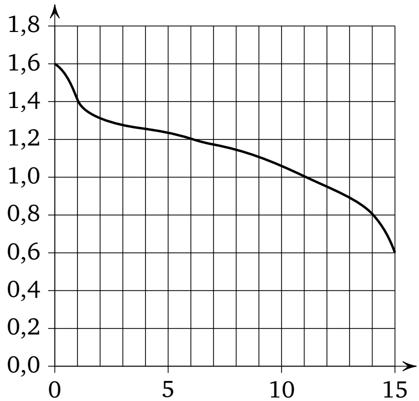
3) точка C

4) точка D

4. Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt{720}}{\sqrt{5}}.$$

5. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На графике показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по графику, на сколько вольт упадёт напряжение за первые 14 часов работы фонарика.



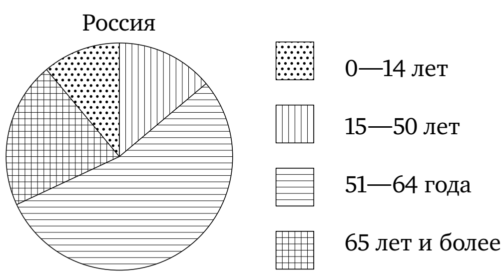
6. Решите уравнение

$$x^2 - 121 = 0.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

7. Плата за телефон составляет 350 рублей в месяц. В следующем году она увеличится на 12%. Сколько рублей придётся платить ежемесячно за телефон в следующем году?

8. На диаграмме показан возрастной состав населения России. Определите по диаграмме, население какого возраста составляет более 40% от всего населения.



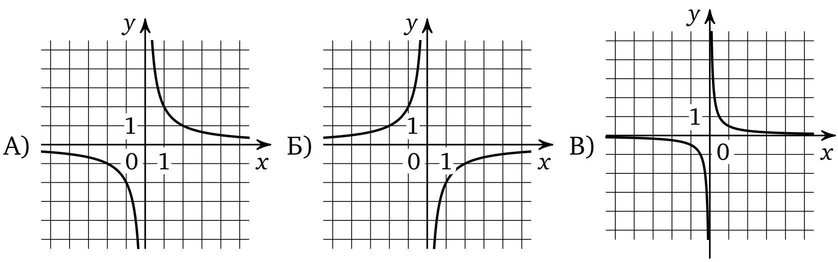
1) 0—14 лет
2) 15—50 лет
3) 51—64 года
4) 65 лет и более

Запишите номер выбранного варианта ответа.

9. В лыжных гонках участвуют 7 спортсменов из России, 1 спортсмен из Швеции и 2 спортсмена из Норвегии. Порядок, в котором спортсмены стартуют, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен из Швеции.

10. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

1) $y = \dfrac{2}{x}$ 2) $y = \dfrac{1}{2x}$ 3) $y = -\dfrac{2}{x}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

11. Выписаны несколько последовательных членов геометрической прогрессии:

$$\ldots;\ -3;\ x;\ -27;\ -81;\ \ldots$$

Найдите x.

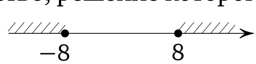
12. Найдите значение выражения $\dfrac{c^2-2ac}{a^2} : \dfrac{c-2a}{a}$ при $a=4$, $c=46$.

13. Перевести значение температуры по шкале Фаренгейта в шкалу Цельсия позволяет формула

$$t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32),$$

где t_C — температура в градусах Цельсия, t_F — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует 185 градусов по шкале Фаренгейта?

14. Укажите неравенство, решение которого изображено на рисунке.



1) $x^2+64 \geqslant 0$ 3) $x^2-64 \geqslant 0$

2) $x^2-64 \leqslant 0$ 4) $x^2+64 \leqslant 0$

15. Решите уравнение

$$(x^2-9)^2+(x^2-2x-15)^2=0.$$

16. Первую половину пути автомобиль проехал со скоростью 69 км/ч, а вторую — со скоростью 111 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

17. Постройте график функции

$$y=2|x-4|-x^2+9x-20.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Диагностическая работа 13

1. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)\cdot 9.$$

2. Бизнесмен Соловьёв выезжает из Москвы в Санкт-Петербург на деловую встречу, которая назначена на 10:00. В таблице дано расписание ночных поездов Москва — Санкт-Петербург.

Номер поезда	Отправление из Москвы	Прибытие в Санкт-Петербург
038А	22:42	06:40
020У	00:56	08:53
016А	00:43	09:12
030А	01:19	09:39

Путь от вокзала до места встречи занимает полчаса. Укажите номер самого позднего (по времени отправления) поезда, который подходит бизнесмену Соловьёву.

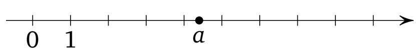
1) 038А

2) 020У

3) 016А

4) 030А

3. На координатной прямой отмечено число a.



Какое из утверждений для этого числа является верным?

1) $a-4<0$

2) $7-a<0$

3) $a-3>0$

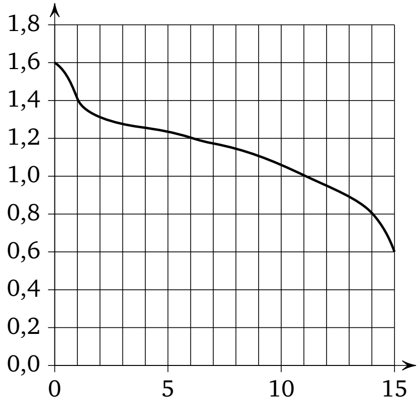
4) $2-a>0$

4. Найдите значение выражения

$$\sqrt{6\cdot 8\cdot 12}.$$

5. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На графике показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по графику,

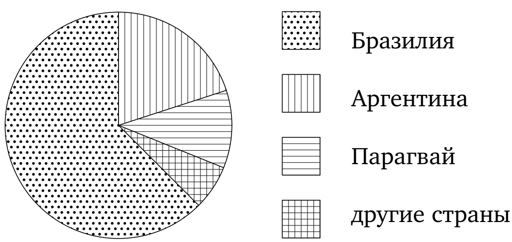
на сколько вольт упадёт напряжение с 6-го по 15-й час работы фонарика.



6. Решите уравнение $x^2 - 10x + 24 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

7. В начале учебного года в школе было 1250 учащихся, а к концу учебного года их стало 950. На сколько процентов уменьшилось за учебный год число учащихся?

8. На диаграмме представлено распределение количества пользователей некоторой социальной сети по странам мира. Всего в этой социальной сети 12 миллионов пользователей.



Какие из следующих утверждений *неверны*?

1) Пользователей из Аргентины больше, чем пользователей из Литвы.

2) Пользователей из Аргентины больше трети общего числа пользователей.

3) Пользователей из Парагвая больше 3 миллионов.

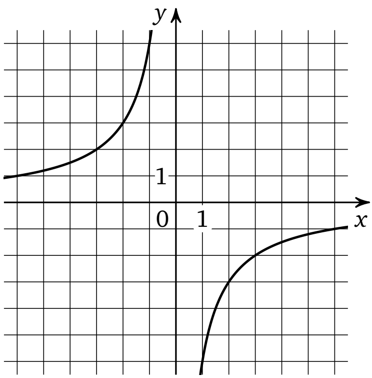
4) Пользователей из Бразилии больше, чем из всех остальных стран, вместе взятых.

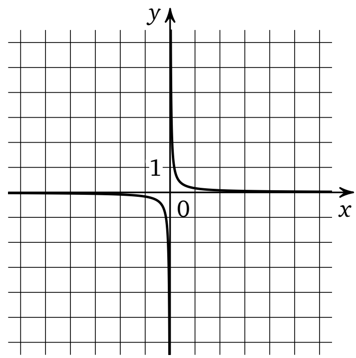
Запишите номера выбранных утверждений в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

9. В лыжных гонках участвуют 8 спортсменов из России, 9 спортсменов из Норвегии и 3 спортсмена из Швеции. Порядок, в котором спортсмены стартуют, определяется жребием. Найдите вероятность того, что первым будет стартовать спортсмен *не* из России.

10. На рисунках изображены графики функций вида $y = \frac{k}{x}$. Установите соответствие между графиками и знаками коэффициента k.

ГРАФИКИ

А) 

Б) 

КОЭФФИЦИЕНТЫ

1) $k > 0$ 2) $k < 0$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б

11. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями

$$b_1 = 6, \quad b_{n+1} = -4b_n.$$

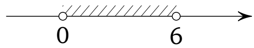
Найдите b_4.

Ответ. -384.

12. Найдите значение выражения $9b + \frac{5a - 9b^2}{b}$ при $a = 9$, $b = 18$.

13. Перевести значение температуры по шкале Фаренгейта в шкалу Цельсия позволяет формула $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32)$, где t_C — температура в градусах Цельсия, t_F — температура в градусах Фаренгейта. Скольким градусам по шкале Цельсия соответствует -85 градусов по шкале Фаренгейта?

14. Укажите неравенство, решение которого изображено на рисунке.



1) $x^2-36<0$

2) $x^2-6x<0$

3) $x^2-6x>0$

4) $x^2-36>0$

15. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 7x^2-5x=y, \\ 7x-5=y. \end{cases}$$

16. Первый рабочий за час делает на 9 деталей больше, чем второй, и выполняет заказ, состоящий из 216 деталей, на 4 часа быстрее, чем второй рабочий, выполняющий такой же заказ. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

17. Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2+8x+16 & \text{при } x \geqslant -5, \\ -\dfrac{5}{x} & \text{при } x<-5 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

Диагностическая работа 14

1. Найдите значение выражения

$$\left(1\frac{3}{4}+2\frac{4}{5}\right)\cdot 30.$$

2. В таблице приведены размеры штрафов, установленные на территории России с 1 сентября 2013 года за превышение максимальной разрешённой скорости, зафиксированное с помощью средств автоматической фиксации.

Превышение скорости (в км/ч)	21—40	41—60	61—80	81 и более
Размер штрафа (в руб.)	500	1000	2000	5000

Какой штраф должен заплатить владелец автомобиля, зафиксированная скорость которого составила 141 км/ч на участке дороги с максимальной разрешённой скоростью 70 км/ч?

1) 500 рублей
3) 2000 рублей
2) 1000 рублей
4) 5000 рублей

3. На координатной прямой отмечены числа a, b и c.

Какая из разностей $a-b$, $c-a$, $b-c$ положительна?

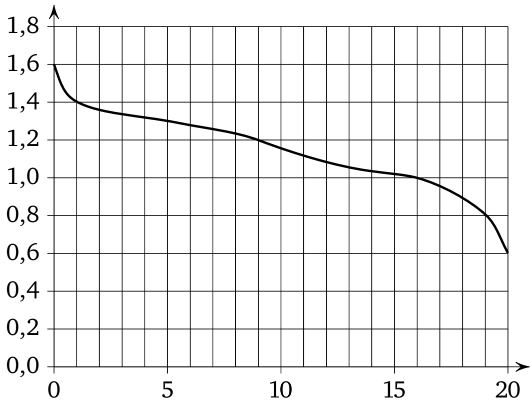
1) $a-b$
3) $b-c$
2) $c-a$
4) ни одна из них

4. Найдите значение выражения

$$(7\sqrt{6})^2.$$

5. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На графике показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. На горизонтальной оси отмечено время работы фонарика в часах, на вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по графику,

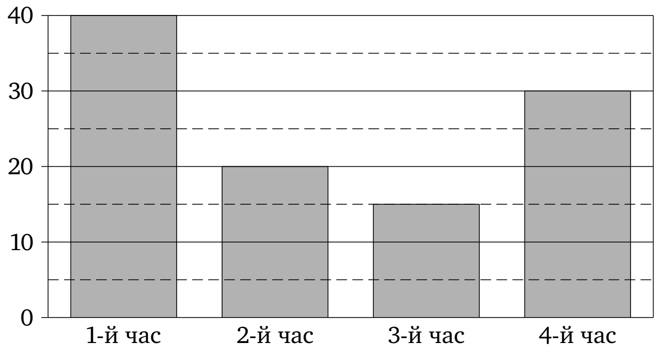
за сколько часов работы фонарика напряжение упадёт с 1,6 В до 1,2 В.



6. Решите уравнение
$$x^2 + 4x = 5.$$
Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

7. Спортивный магазин проводит акцию. Любая футболка стоит 300 рублей. При покупке двух футболок предоставляется скидка на вторую футболку 70 %. Сколько рублей придётся заплатить за покупку двух футболок в период действия акции?

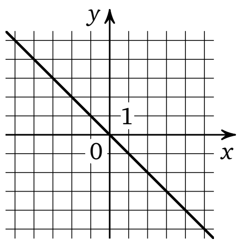
8. На диаграмме показано количество СМС-сообщений, присланных слушателями за каждый час четырёхчасового эфира программы по заявкам на радио. Определите, на сколько больше сообщений было прислано за первые два часа программы по сравнению с последними двумя часами этой программы.

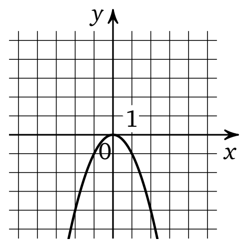


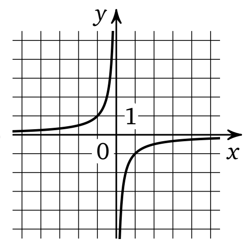
9. Вероятность того, что новая шариковая ручка пишет плохо (или не пишет), равна 0,09. Покупатель в магазине выбирает одну шариковую ручку. Найдите вероятность того, что эта ручка пишет хорошо.

10. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ

А) 

Б) 

В) 

ФОРМУЛЫ

1) $y=-x^2$ 2) $y=-x$ 3) $y=-\dfrac{1}{x}$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

11. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями

$$b_1=-7,\quad b_{n+1}=2b_n.$$

Найдите сумму первых шести её членов.

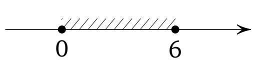
12. Найдите значение выражения $\dfrac{a^2-81}{2a^2+18a}$ при $a=-4{,}5$.

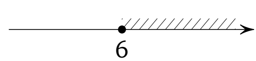
13. Центростремительное ускорение при движении по окружности (в м/с^2) вычисляется по формуле

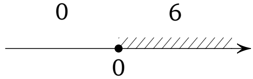
$$a=\omega^2 R,$$

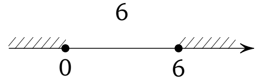
где ω — угловая скорость (в с$^{-1}$), R — радиус окружности (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите радиус R, если угловая скорость равна 5,5 с$^{-1}$, а центростремительное ускорение равно 60,5 м/с^2. Ответ дайте в метрах.

14. Укажите решение неравенства $6x-x^2\leqslant 0$.

1) 

3) 

2) 

4) 

15. Решите неравенство

$$(x-4)^2 < \sqrt{6}(x-4).$$

16. Свежие фрукты содержат 84 % воды, а высушенные — 16 %. Сколько сухих фруктов получится из 231 кг свежих фруктов?

17. Постройте график функции

$$y = 5 - \frac{x+5}{x^2+5x}.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ не имеет с графиком общих точек.

Диагностическая работа 15

1. Найдите значение выражения

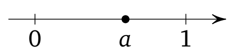
$$1\frac{1}{12} : \left(1\frac{13}{18} - 2\frac{5}{9}\right).$$

2. Куриные яйца в зависимости от их массы подразделяют на пять категорий: высшую, отборную, первую, вторую, третью. Используя данные, представленные в таблице, определите, к какой категории относится яйцо массой 47 г.

Категория	Масса одного яйца (в г)
Высшая	75,0 и более
Отборная	65,0—74,9
Первая	55,0—64,9
Вторая	45,0—54,9
Третья	менее 45,0

1) высшая 2) первая 3) вторая 4) третья

3. На координатной прямой отмечено число a.



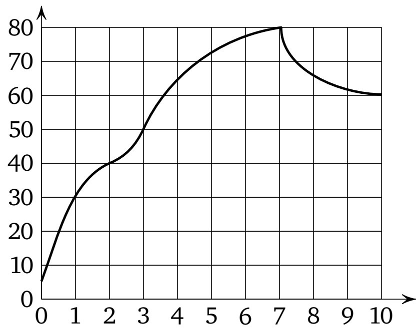
Расположите в порядке возрастания числа $a-1$, $\frac{1}{a}$, a.

1) $a-1,\ \frac{1}{a},\ a$ 2) $a,\ \frac{1}{a},\ a-1$ 3) $a-1,\ a,\ \frac{1}{a}$ 4) $a,\ a-1,\ \frac{1}{a}$

4. Найдите значение выражения

$$\frac{5^{18}\cdot 4^{16}}{20^{17}}.$$

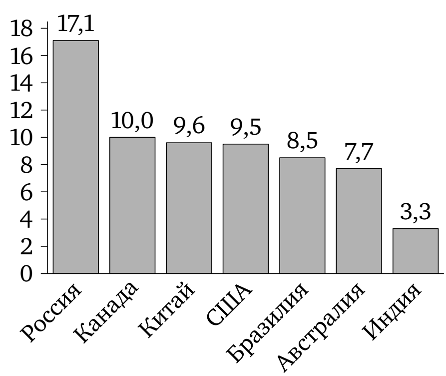
5. На графике показано изменение температуры в процессе разогрева двигателя легкового автомобиля. На горизонтальной оси отмечено время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на вертикальной оси — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, за сколько минут двигатель нагреется с 30°C до 50°C.



6. Решите уравнение $5x^2 - 9x + 4 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

7. Товар на распродаже уценили на 20 %, при этом он стал стоить 940 рублей. Сколько рублей стоил товар до распродажи?

8. На диаграмме представлены семь крупнейших по площади территории (в млн км^2) стран мира.



Какие из следующих утверждений верны?

1) По площади территории второе место в мире занимает Китай.

2) Площадь территории Австралии составляет 7,7 млн км^2.

3) Площадь территории Китая больше площади территории Канады.

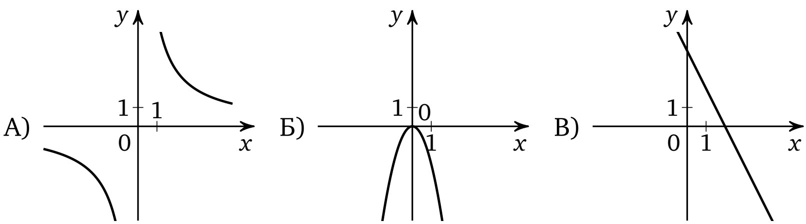
4) Площадь территории США больше площади территории Бразилии на 1 млн км^2.

Запишите номера выбранных утверждений в порядке возрастания без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

9. В рыбхозе разводят стерлядь, севрюгу и осетра. Известно, что стерляди на 75 % меньше, чем севрюги, а севрюги на 20 % меньше, чем осетра. Найдите вероятность того, что случайно увиденная в водоёме рыбхоза рыба окажется стерлядью.

10. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

ГРАФИКИ



ФОРМУЛЫ

1) $y = \dfrac{6}{x}$ 2) $y = -2x + 4$ 3) $y = -2x^2$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

А	Б	В

11. Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии:

$$0{,}5;\ 2;\ 8;\ \ldots$$

Найдите сумму первых шести её членов.

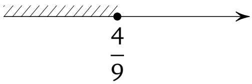
12. Найдите значение выражения $\dfrac{a^2-16b^2}{4ab} : \left(\dfrac{1}{4b} - \dfrac{1}{a}\right)$ при $a = 3\dfrac{1}{13}$, $b = 4\dfrac{3}{13}$.

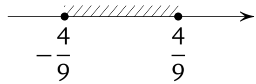
13. Период колебания математического маятника T (в секундах) можно приближённо вычислить по формуле

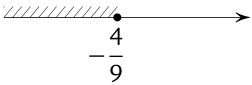
$$T = 2\sqrt{l},$$

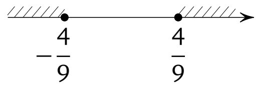
где l — длина нити (в метрах). Пользуясь этой формулой, найдите длину нити маятника, период колебаний которого составляет 5 секунд. Ответ дайте в метрах.

14. Укажите решение неравенства $81x^2 \leqslant 16$.

1) 

3) 

2) 

4) 

15. Решите неравенство $\dfrac{-10}{(x-3)^2-5} \geqslant 0$.

16. Имеются два сосуда, содержащие 22 кг и 18 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их смешать, то получится раствор, содержащий 32 % кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 30 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

17. Постройте график функции

$$y = \frac{1{,}5|x|-1}{|x|-1{,}5x^2}.$$

Определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ не имеет с графиком общих точек.

Ответы

Задание 1

Подготовительные задачи. **1.** 10,1. **2.** 1,6. **3.** 70,29. **4.** 12. **5.** 1,16. **6.** −0,1. **7.** 1,8. **8.** 3,3. **9.** 93,8. **10.** −69,5.
Зачётные задачи. **1.** 0,5. **2.** −2. **3.** 0,8. **4.** −30. **5.** 28 080. **6.** 30 400. **7.** 264. **8.** 1,75. **9.** −8,75. **10.** −2.

Задание 2

Подготовительные задачи. **1.** 2. **2.** 1. **3.** 4. **4.** 2. **5.** 3. **6.** 3. **7.** 3. **8.** 4. **9.** 3. **10.** 1.
Зачётные задачи. **1.** 1. **2.** 4. **3.** 4. **4.** 3. **5.** 2. **6.** 2. **7.** 4. **8.** 4. **9.** 4. **10.** 1.

Задание 3

Подготовительные задачи. **1.** 4. **2.** 3. **3.** 4. **4.** 3. **5.** 2. **6.** 3. **7.** 1. **8.** 3. **9.** 1. **10.** 3.
Зачётные задачи. **1.** 3. **2.** 2. **3.** 1. **4.** 3. **5.** 1. **6.** 4. **7.** 4. **8.** 3. **9.** 2. **10.** 3.

Задание 4

Подготовительные задачи. **1.** 64. **2.** 6. **3.** 5. **4.** 48. **5.** 2. **6.** −27. **7.** 3. **8.** 240. **9.** 78. **10.** 10.
Зачётные задачи. **1.** 36. **2.** 16. **3.** 49. **4.** 24. **5.** 9. **6.** −10. **7.** 2. **8.** 330. **9.** 100. **10.** 16.

Задание 5

Подготовительные задачи. **1.** 30. **2.** 11. **3.** 9. **4.** 580. **5.** 1. **6.** 0,2. **7.** 0,4. **8.** 0,4. **9.** 28. **10.** 2.
Зачётные задачи. **1.** −10. **2.** 23. **3.** 15. **4.** 660. **5.** 0. **6.** 0,6. **7.** 0,2. **8.** 0,6. **9.** 22. **10.** 7.

Задание 6

Подготовительные задачи. **1.** −0,1. **2.** −5. **3.** −10,6. **4.** 4. **5.** −10. **6.** −2. **7.** −6. **8.** 3. **9.** 0,5. **10.** −3,5.
Зачётные задачи. **1.** −0,9. **2.** −0,7. **3.** −5,8. **4.** 5. **5.** −16. **6.** 10. **7.** 5. **8.** 2. **9.** 0,2. **10.** −0,6.

Задание 7

Подготовительные задачи. **1.** 78. **2.** 18. **3.** 48. **4.** 55. **5.** 79,2. **6.** 1665. **7.** 10. **8.** 15. **9.** 1980. **10.** 800.
Зачётные задачи. **1.** 105. **2.** 35. **3.** 41. **4.** 78. **5.** 78,4. **6.** 1547. **7.** 15. **8.** 37. **9.** 1320. **10.** 1400.

Задание 8

Подготовительные задачи. **1.** 1. **2.** 4. **3.** 4. **4.** 34. **5.** 23. **6.** 3. **7.** 14. **8.** −6. **9.** 3. **10.** 34.
Зачётные задачи. **1.** 1. **2.** 4. **3.** 2. **4.** 23. **5.** 24. **6.** 2. **7.** 23. **8.** −14. **9.** 10. **10.** 13.

Задание 9

Подготовительные задачи. **1.** 0,25. **2.** 0,86. **3.** 0,55. **4.** 0,7. **5.** 0,15. **6.** 0,98. **7.** 0,55. **8.** 0,45. **9.** 0,25. **10.** 0,12.
Зачётные задачи. **1.** 0,92. **2.** 0,84. **3.** 0,72. **4.** 0,75. **5.** 0,25. **6.** 0,925. **7.** 0,65. **8.** 0,35. **9.** 0,56. **10.** 0,14.

Задание 10

Подготовительные задачи. **1.** А2; Б1; В3. **2.** А2; Б3; В1. **3.** А1; Б3; В2. **4.** А1; Б2; В3. **5.** А3; Б2; В1. **6.** А2; Б1; В3. **7.** А3; Б1; В2. **8.** 5. **9.** А3; Б1; В2. **10.** А1; Б3; В2.
Зачётные задачи. **1.** А3; Б2; В1. **2.** А2; Б1; В3. **3.** А3; Б1; В2. **4.** А1; Б2; В3. **5.** А3; Б1; В2. **6.** А2; Б1; В3. **7.** А1; Б3; В2. **8.** −12. **9.** А3; Б2; В1. **10.** А3; Б2; В1.

Задание 11

Подготовительные задачи. **1.** −40,8. **2.** −4. **3.** −1,5. **4.** −25,2. **5.** −22. **6.** 0,16. **7.** −15. **8.** −192. **9.** −615. **10.** −1562.
Зачётные задачи. **1.** −11. **2.** −1,9. **3.** 23. **4.** 29. **5.** −6. **6.** −71,68. **7.** −54. **8.** −128. **9.** −1094. **10.** −511,5.

Задание 12

Подготовительные задачи. **1.** 15. **2.** −1218. **3.** −3,6. **4.** −6. **5.** 0,6. **6.** 1,4. **7.** 7,4. **8.** 39,5. **9.** 3,5. **10.** 30.
Зачётные задачи. **1.** 10. **2.** 452. **3.** −2,5. **4.** −0,4. **5.** 0,75. **6.** 1,5. **7.** −0,6. **8.** 2,4. **9.** −1,5. **10.** 36.

Задание 13

Подготовительные задачи. **1.** 3. **2.** 7. **3.** 26 500. **4.** 14. **5.** −25. **6.** 5. **7.** −5. **8.** 3. **9.** 6. **10.** 9.
Зачётные задачи. **1.** 12. **2.** 18. **3.** 88 000. **4.** 95. **5.** −30. **6.** 15. **7.** −20. **8.** 8. **9.** 7. **10.** 11.

Задание 14

Подготовительные задачи. **1.** 1. **2.** 2. **3.** 2. **4.** 3. **5.** 1. **6.** 1. **7.** 2. **8.** 3. **9.** 1. **10.** 3.
Зачётные задачи. **1.** 2. **2.** 1. **3.** 3. **4.** 1. **5.** 3. **6.** 1. **7.** 3. **8.** 2. **9.** 1. **10.** 4.

Задание 21

Подготовительные задачи. **1.** 8. **2.** $\{-3; -2; 3\}$. **3.** $\{-5; 2\}$. **4.** $\left\{\frac{5}{6}; \frac{3}{2}\right\}$.
5. $\{-1\}$. **6.** $\{-4\}$. **7.** $(1; 2)$; $(-1; 2)$. **8.** $(2; 1)$; $(2; -1)$. **9.** $\left(3; 3+\sqrt{5}\right)$.
10. $\left(4-\sqrt{6}; 4+\sqrt{6}\right)$.
Зачётные задачи. **1.** 7. **2.** $\{-3; -2; 2\}$. **3.** $\{-5; 3\}$. **4.** $\{0{,}8; 1{,}5\}$.
5. $\{-2\}$. **6.** $\{-2\}$. **7.** $(1; 3)$; $(-1; 3)$. **8.** $(2; 3)$; $(2; -3)$. **9.** $\left(5; 5+\sqrt{7}\right)$.
10. $\left(5-\sqrt{2}; 5+\sqrt{2}\right)$.

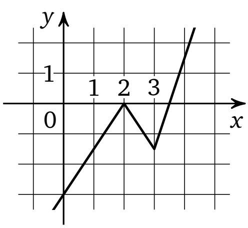
Задание 22

Подготовительные задачи. **1.** 450 м. **2.** 80 км/ч. **3.** 15 км/ч.
4. 21 км/ч. **5.** 16 км/ч. **6.** 11 км/ч. **7.** 56 км/ч. **8.** 20 л. **9.** 135 кг.
10. 18,6 кг.
Зачётные задачи. **1.** 400 м. **2.** 96 км/ч. **3.** 14 км/ч. **4.** 16 км/ч.
5. 25 км/ч. **6.** 12 км/ч. **7.** 61,5 км/ч. **8.** 14 л. **9.** 161 кг.
10. 23,1 кг.

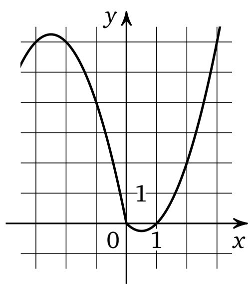
Задание 23

Подготовительные задачи.

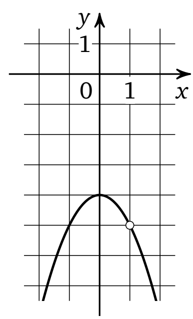
1. $-1{,}5; 0$.



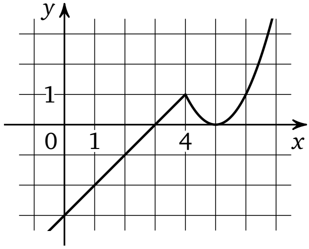
2. $-0{,}25; 6{,}25$.



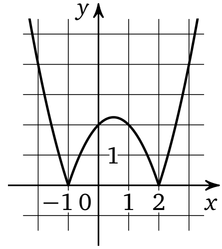
3. $-5; -4; 4$.



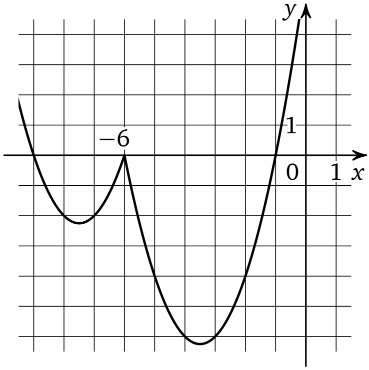
4. 0; 1.



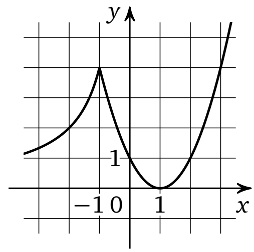
5. 4.



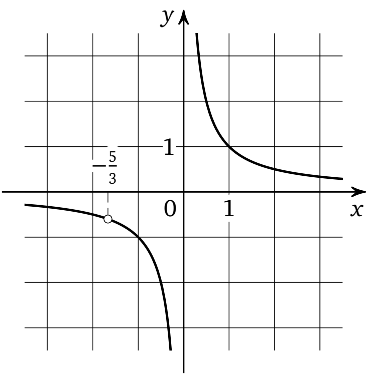
6. $-2{,}25; 0.$



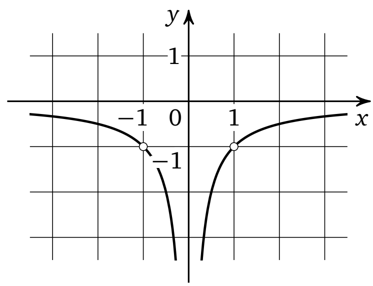
7. $\{0\} \cup [4; +\infty).$



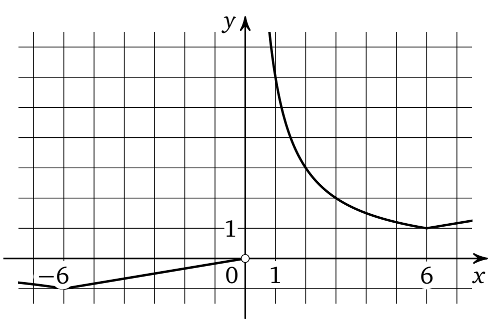
8. $0{,}36.$



9. $-1; 0; 2.$

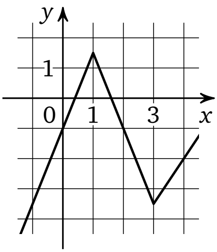


10. $-1; 1.$

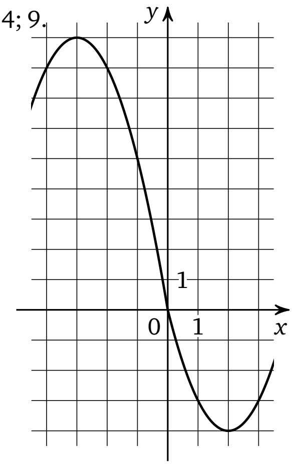


Зачётные задачи.

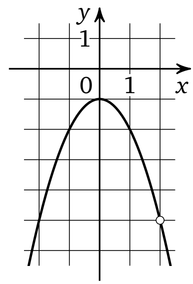
1. $-3{,}5;\ 1{,}5.$



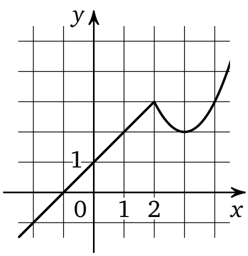
2. $-4;\ 9.$



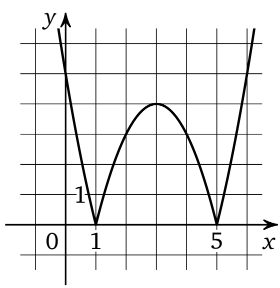
3. $-2{,}5;\ -2;\ 2.$



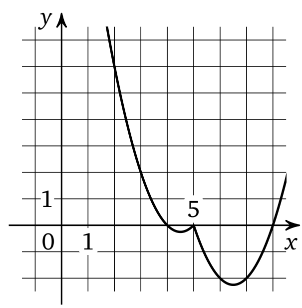
4. $2;\ 3.$



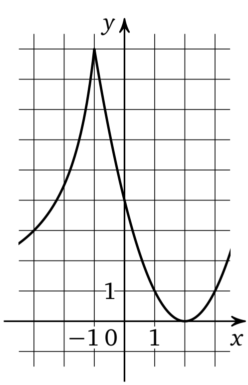
5. $4.$



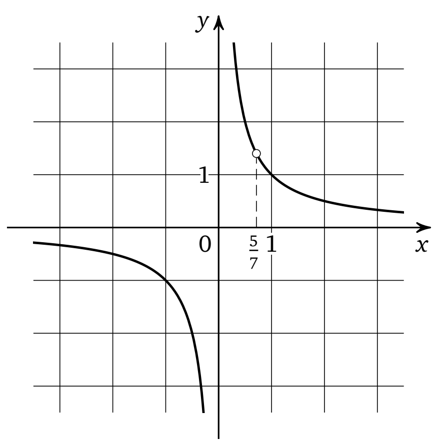
6. $-0{,}25;\ 0.$



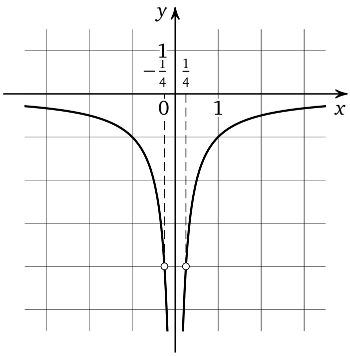
7. $\{0\}\cup[9;\ +\infty).$



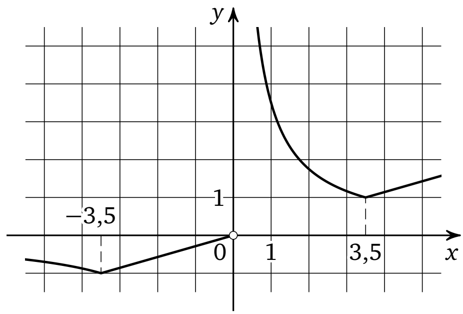
8. $1{,}96.$



9. $-16; 0; 16.$



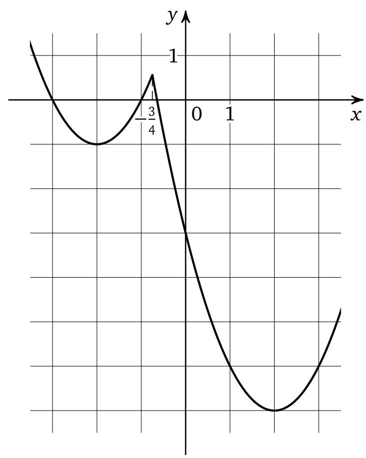
10. $-1; 1.$



Диагностическая работа 1

1. −2,3. **2.** 27.
3. 4. **4.** 27.
5. 0,5. **6.** −2,5.
7. 990. **8.** 3.
9. 0,96. **10.** А3; Б2; В1.
11. −4725. **12.** 9,5.
13. −121. **14.** 2.
15. −3. **16.** 23 км/ч.

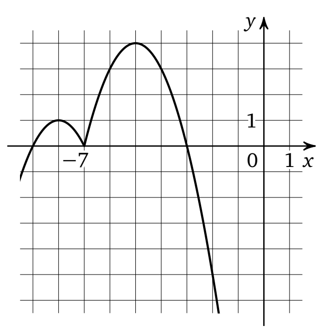
17. $-1; \frac{9}{16}.$



Диагностическая работа 2

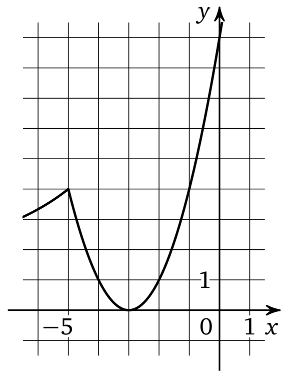
1. 1,2. **2.** 2.
3. 3. **4.** 36.
5. 1. **6.** 3.
7. 408. **8.** 2.
9. 0,1. **10.** А2; Б1; В3.
11. 5. **12.** 5,2.
13. 75. **14.** 1.
15. −6. **16.** 99 км/ч.

17. 0; 1.



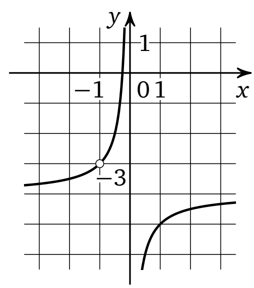
Диагностическая работа 3

1. 4,5. **2.** 2.
3. 2. **4.** 169.
5. 0,4. **6.** 6.
7. 21. **8.** 34.
9. 0,35. **10.** А1; Б2.
11. 256. **12.** 4,9.
13. -50. **14.** 2.
15. $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$; $(1; -1)$.
16. 15.
17. $\{0\} \cup [4; +\infty)$.



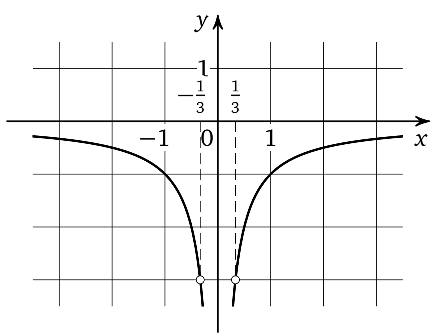
Диагностическая работа 4

1. 3,2. **2.** 2.
3. 4. **4.** 480.
5. 1. **6.** 8.
7. 240. **8.** 10.
9. 0,81.
10. А3; Б2; В1.
11. -726. **12.** 0,3.
13. 2. **14.** 1.
15. $(2; 2+\sqrt{3})$.
16. 6 кг.
17. -4; -3.



Диагностическая работа 5

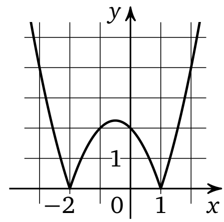
1. -5. **2.** 4.
3. 2. **4.** 14.
5. 1. **6.** $-0{,}8$.
7. 650. **8.** 23.
9. 0,25. **10.** А1; Б3; В2.
11. 1295.
12. 10. **13.** 9.
14. 4.
15. $(2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3})$.
16. 2 кг.
17. -9; 0; 9.



Диагностическая работа 6

1. $-23{,}6$. **2.** 2866. **3.** 4.
4. 175. **5.** 9. **6.** 1,4.
7. 2180. **8.** 2. **9.** 0,16.
10. А1; Б3; В2. **11.** -847.
12. $-0{,}18$. **13.** 65. **14.** 4.
15. $(8;\ 8+\sqrt{3})$. **16.** 104 км.

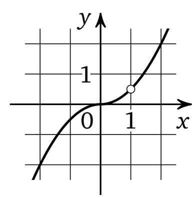
17. 4.



Диагностическая работа 7

1. 19 200. **2.** 3. **3.** 2.
4. 6. **5.** 800 000. **6.** 2.
7. 75. **8.** 2.
9. 0,7. **10.** А2; Б1; В3.
11. -6. **12.** 12,2.
13. 205. **14.** 2.
15. $(4;\ 1)$; $(4;\ -1)$. **16.** 252 кг.

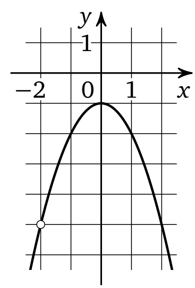
17. 0,5.



Диагностическая работа 8

1. 198. **2.** 3. **3.** 1.
4. 0,5. **5.** 0,8. **6.** -9.
7. 80. **8.** 23.
9. 0,86. **10.** А3; Б1; В2.
11. 0,1. **12.** 4,6.
13. 2. **14.** 1.
15. $\left(-6-\sqrt{3};\ -6+\sqrt{3}\right)$.
16. 15,6 кг.

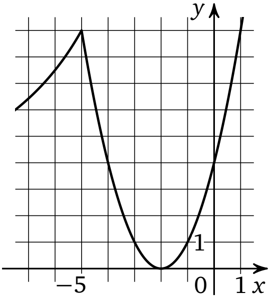
17. 2,5; -2; 2.



Диагностическая работа 9

1. 1,25. **2.** 1. **3.** 4.
4. 3. **5.** 11. **6.** 5.
7. 400. **8.** 34.
9. 0,75. **10.** А1; Б2; В3.
11. 46. **12.** 2,6.
13. 104. **14.** 3.
15. $(1;\ 2)$; $\left(\dfrac{7}{9};\ 0\right)$.
16. 30 км/ч.

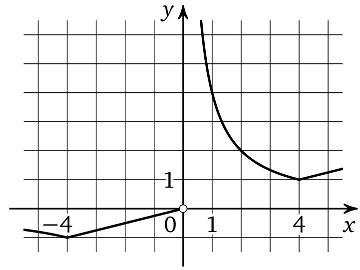
17. $\{0\}\cup[9;\ +\infty)$.



Диагностическая работа 10

1. 2. **2.** 2.
3. 2. **4.** 28.
5. 0,6. **6.** −2,2.
7. 88. **8.** 2.
9. 0,96. **10.** А1; Б3; В2.
11. 5. **12.** −0,5.
13. 54 500. **14.** 4.
15. (1; 1); (−1; 1).
16. 15 км/ч.

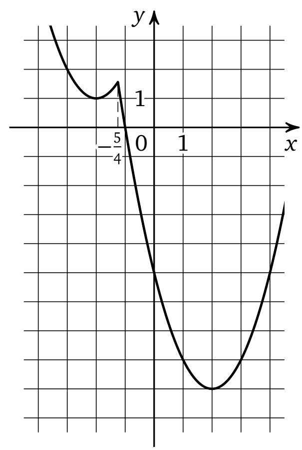
17. −1; 1.



Диагностическая работа 11

1. 8910. **2.** 2.
3. 3. **4.** 0,25.
5. 1,5. **6.** −0,5.
7. 1200. **8.** 3.
9. 0,88. **10.** А2; Б1; В3.
11. −12,8. **12.** 40,5.
13. −148. **14.** 2.
15. −3. **16.** 19 км/ч.

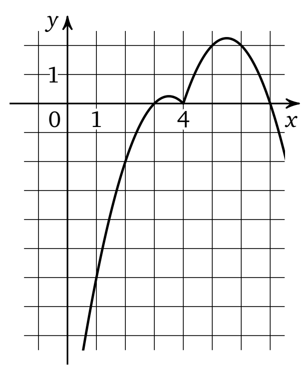
17. 1; $\frac{25}{16}$.



Диагностическая работа 12

1. 17,5. **2.** 3.
3. 3. **4.** 12.
5. 0,8. **6.** −11.
7. 13 392. **8.** 2.
9. 0,1. **10.** А1; Б3; В2.
11. −9. **12.** 11,5.
13. 85. **14.** 3.
15. −3.
16. 85,1 км/ч.

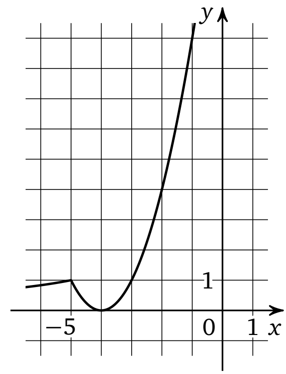
17. 0; 0,25.



Диагностическая работа 13

1. 3,75. **2.** 2.
3. 3. **4.** 24.
5. 0,6. **6.** 4.
7. 24. **8.** 23.
9. 0,45. **10.** А2; Б1.
11. −384. **12.** 2,5.
13. −65. **14.** 2.
15. $\left(\frac{5}{7}; 0\right)$; $(1; 2)$.
16. 18.

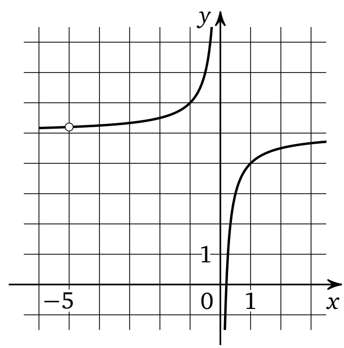
17. $\{0\} \cup [1; +\infty)$.



Диагностическая работа 14

1. 136,5. **2.** 3.
3. 2. **4.** 294.
5. 9. **6.** −5.
7. 390. **8.** 15.
9. 0,91. **10.** А2; Б1; В3.
11. −441. **12.** 1,5.
13. 2. **14.** 4.
15. $(4; 4+\sqrt{6})$.
16. 44 кг.

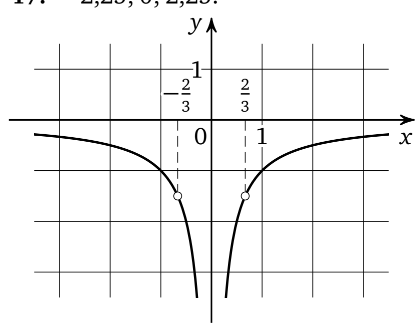
17. 5; 5,2.



Диагностическая работа 15

1. −1,3. **2.** 3.
3. 3. **4.** 3.
5. 2. **6.** 1,25.
7. 1175. **8.** 24.
9. 0,1.
10. А1; Б3; В2.
11. 682,5. **12.** 20.
13. 6,25. **14.** 3.
15. $(3-\sqrt{5}; 3+\sqrt{5})$.
16. 11 кг.

17. −2,25; 0; 2,25.



Содержание

Предисловие 3
Задание 1 5
Подготовительные задачи 9
Зачётные задачи 10
Задание 2 11
Подготовительные задачи 13
Зачётные задачи 16
Задание 3 19
Подготовительные задачи 21
Зачётные задачи 23
Задание 4 25
Подготовительные задачи 29
Зачётные задачи 30
Задание 5 31
Подготовительные задачи 36
Зачётные задачи 41
Задание 6 46
Подготовительные задачи 49
Зачётные задачи 50
Задание 7 51
Подготовительные задачи 55
Зачётные задачи 56
Задание 8 57
Подготовительные задачи 60
Зачётные задачи 65
Задание 9 70
Подготовительные задачи 72
Зачётные задачи 74
Задание 10 76
Подготовительные задачи 86
Зачётные задачи 91
Задание 11 96
Подготовительные задачи 102

Зачётные задачи 103
Задание 12 104
Подготовительные задачи 106
Зачётные задачи 108
Задание 13 110
Подготовительные задачи 112
Зачётные задачи 114
Задание 14 116
Подготовительные задачи 125
Зачётные задачи 127
Задание 21 129
Подготовительные задачи 136
Зачётные задачи 137
Задание 22 138
Подготовительные задачи 148
Зачётные задачи 150
Задание 23 152
Подготовительные задачи 155
Зачётные задачи 157
Диагностическая работа 1 159
Диагностическая работа 2 162
Диагностическая работа 3 165
Диагностическая работа 4 169
Диагностическая работа 5 173
Диагностическая работа 6 177
Диагностическая работа 7 181
Диагностическая работа 8 185
Диагностическая работа 9 188
Диагностическая работа 10 191
Диагностическая работа 11 194
Диагностическая работа 12 197
Диагностическая работа 13 201
Диагностическая работа 14 205
Диагностическая работа 15 209
Ответы 213