Приложение 2.3.1к
ООП ППССЗ
35.02.16 Эксплуатация и ремонт
сельскохозяйственной техники оборудования

Министерство образования и науки Хабаровского края
Краевое государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Хорский агропромышленный техникум»

УТВЕРЖДАЮ
Заместитель директора по УР
____________ Е.И. Мысова
«26» сентября 2022 г.

ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
ОП.01 Математические методы решения прикладных задач

Профиль подготовки: естественнонаучный

Специальность: 35.02.16 Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования

Форма обучения: очная

п. Хор, 2022 г.

Программа учебной дисциплины разработана в соответствии с ФГОС СПО утверждённого Министерством просвещения РФ от 14 апреля 2022 г. № 235 по специальности 35.02.16 Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования и примерной программой разработанной ФГБОУ ВО «Российский государственный аграрный университет – МСХА имени К.А. Тимирязева».

Организация-разработчик: Краевое государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Хорский агропромышленный техникум»

Составитель: Тешабаева Г.В., преподаватель КГБ ПОУ ХАТ

Программа учебной дисциплины рассмотрена и согласована на заседании ПЦК общетехнического цикла
Протокол № 1 от «14» сентября 2022 г.
Председатель __________ Чуланова О.В.

КГБ ПОУ ХАТ
Хабаровский край, р-он им. Лазо, п. Хор
ул. Менделеева 13
индекс: 682922

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ ОП.01 Математические методы решения прикладных задач

1.1. Место дисциплины в структуре основной образовательной программы:

Учебная дисциплина ОП.01 Математические методы решения прикладных задач является обязательной частью общепрофессионального цикла основной образовательной программы в соответствии с ФГОС СПО по специальности 35.02.16 Эксплуатация и ремонт сельскохозяйственной техники и оборудования.

Особое значение дисциплина имеет при формировании и развитии ОК 01 - 03, ОК 07, ОК 09.

1.2. Цель и планируемые результаты освоения дисциплины:

В рамках программы учебной дисциплины обучающимися осваиваются умения и знания

Код ПК, ОК	Умения	Знания
ОК 01, ОК 02, ОК03, ОК 07, ОК 09.	Анализировать сложные функции и строить их графики; Выполнять действия над комплексными числами; Вычислять значения геометрических величин; Производить операции над матрицами и определителями; Решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики; Решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений; Решать системы линейных уравнений различными методами	Основные математические методы решения прикладных задач; основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; Основы интегрального и дифференциального исчисления; Роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

Личностные результаты реализации программы воспитания

Личностные результаты реализации программы воспитания *(дескрипторы)*	**Код**
Осознающий себя гражданином и защитником великой страны	ЛР 1
Проявляющий активную гражданскую позицию, демонстрирующий приверженность принципам честности, порядочности, открытости, экономически активный и участвующий в студенческом и территориальном самоуправлении, в том числе на условиях добровольчества, продуктивно взаимодействующий и участвующий в деятельности общественных организаций	ЛР 2
Соблюдающий нормы правопорядка, следующий идеалам гражданского общества, обеспечения безопасности, прав и свобод граждан России. Лояльный к установкам и проявлениям представителей субкультур, отличающий их от групп с деструктивным и девиантным поведением. Демонстрирующий неприятие и предупреждающий социально опасное поведение окружающих	ЛР 3
Проявляющий и демонстрирующий уважение к людям труда, осознающий ценность собственного труда. Стремящийся к формированию в сетевой среде личностно и профессионального конструктивного «цифрового следа»	ЛР 4
Демонстрирующий приверженность к родной культуре, исторической памяти на основе любви к Родине, родному народу, малой родине, принятию традиционных	ЛР 5

ценностей многонационального народа России	
Проявляющий уважение к людям старшего поколения и готовность к участию в социальной поддержке и волонтерских движениях	ЛР 6
Осознающий приоритетную ценность личности человека; уважающий собственную и чужую уникальность в различных ситуациях, во всех формах и видах деятельности.	ЛР 7
Проявляющий и демонстрирующий уважение к представителям различных этнокультурных, социальных, конфессиональных и иных групп. Сопричастный к сохранению, преумножению и трансляции культурных традиций и ценностей многонационального российского государства	ЛР 8
Соблюдающий и пропагандирующий правила здорового и безопасного образа жизни, спорта; предупреждающий либо преодолевающий зависимости от алкоголя, табака, психоактивных веществ, азартных игр и т.д. Сохраняющий психологическую устойчивость в ситуативно сложных или стремительно меняющихся ситуациях	ЛР 9
Заботящийся о защите окружающей среды, собственной и чужой безопасности, в том числе цифровой	ЛР 10
Проявляющий уважение к эстетическим ценностям, обладающий основами эстетической культуры	ЛР 11
Принимающий семейные ценности, готовый к созданию семьи и воспитанию детей; демонстрирующий неприятие насилия в семье, ухода от родительской ответственности, отказа от отношений со своими детьми и их финансового содержания	ЛР 12
Личностные результаты реализации программы воспитания, определенные отраслевыми требованиями к деловым качествам личности	
Демонстрирующий готовность и способность вести диалог с другими людьми, достигать в нем взаимопонимания, находить общие цели и сотрудничать для их достижения в профессиональной деятельности	ЛР 13
Проявляющий сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности	ЛР 14
Проявляющий гражданское отношение к профессиональной деятельности как к возможности личного участия в решении общественных, государственных, общенациональных проблем	ЛР 15
Принимающий основы экологической культуры, соответствующей современному уровню экологического мышления, применяющий опыт экологически ориентированной рефлексивно-оценочной и практической деятельности в жизненных ситуациях и профессиональной деятельности	ЛР 16
Проявляющий ценностное отношение к культуре и искусству, к культуре речи и культуре поведения, к красоте и гармонии	ЛР 17

2. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Объем учебной дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Объем в часах
Объем образовательной программы учебной дисциплины	80
теоретическое обучение	20
лабораторные работы	46
практические занятия	4
Самостоятельная работа	8
Промежуточная аттестация в форме дифференцированного зачёта	2

2.2. Тематический план

Наименование разделов/тем	Вид учебной работы				Всего часов
	ТО	ЛПЗ	СР	КР	
РАЗДЕЛ 1. Математический анализ	4	14	-		**18**
РАЗДЕЛ 2. Основные понятия и методы линейной алгебры	2	12	2		**16**
РАЗДЕЛ 3. Основы дискретной математики	4	8	2		**14**
РАЗДЕЛ 4. Элементы теории комплексных чисел	2	8	2		**12**
РАЗДЕЛ 5. Основы теории вероятностей и математической статистики	8	8	2		**18**
Дифференцированный зачёт				2	**2**
Всего	**20**	**50**	**8**	**2**	**80**

2.2. Тематический план и содержание учебной дисциплины

Наименование разделов и тем	Содержание учебного материала и формы организации деятельности обучающихся	Объем в часах	Осваиваемые элементы компетенций и личностных результатов[1],
1	2	3	4
ОП.01 Математические методы решения прикладных задач		**80**	
РАЗДЕЛ 1. Математический анализ		**18**	
Тема 1.1 Функция одной независимой переменной и ее характеристики	Введение. Цели и задачи предмета. Функция одной независимой переменной и способы ее задания. Характеристики функции. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Сложные и обратные функции.	2	ОК 01 - 03, ОК 07, ОК 09. Л1 - 17
	Практическое занятие 1. «Построение графиков реальных функций с помощью геометрических преобразований».	4	
Тема 1.2 Предел функции. Непрерывность функции	Определение предела функции. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы. Непрерывность функции. Исследование функции на непрерывность.	2	ОК 01 - 03, ОК 07, ОК 09. Л1 - 17
	Практическое занятие 2. «Нахождение пределов функций с помощью замечательных пределов».	4	
Тема 1.3 Дифференциальное и интегральное исчисления	**Практическое занятие 3.** «Вычисление производных функций». «Применение производной к решению практических задач». **Практическое занятие 4** «Нахождение неопределенных интегралов различными и методами». «Вычисление определенных интегралов». «Применение определенного интеграла в практических задачах».	6	ОК 01 - 03, ОК 07, ОК 09. Л1 - 17
РАЗДЕЛ 2 Основные понятия и методы линейной алгебры		**16**	
Тема 2.1 Матрицы и определители	Матрицы, их виды. Действия над матрицами. Умножение матриц, обратная матрица. Определители n-го порядка, их свойства и вычисление. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителей в сумму алгебраических дополнений.	2	ОК 01 - 03, ОК 07, ОК 09. Л1 - 17
	Практическое занятие 5. «Действия с матрицами». «Нахождение обратной матрицы»	6	
Тема 2.2 Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)	**Практическое занятие 6.** «Решение систем линейных уравнений методами линейной алгебры». «Решение СЛАУ различными методами».	6	ОК 01 - 03, ОК 07, ОК 09. Л1 - 17
	Самостоятельная работа	2	
РАЗДЕЛ 3. Основы дискретной математики		**14**	
Тема 3.1 Множества и отношения	Элементы и множества. Задание множеств. Операции над множествами и их свойства. Отношения и их свойства.	2	ОК 01 - 03, ОК 07, ОК 09. Л1 - 17
	Практическое занятие 7. «Выполнение операций над множествами».	8	

[1] В соответствии с Приложением 3 ООП.

Тема 3.2 Основные понятия теории графов	Основные понятия теории графов	2	ОК 01 - 03, ОК 07, ОК 09. Л1 - 17
	Самостоятельная работа	2	
РАЗДЕЛ 4. Элементы теории комплексных чисел		**12**	
Тема 4.1 Комплексные числа и действия над ними	Комплексное число и его формы. Действия над комплексными числами в различных формах	2	ОК 01 - 03, ОК 07, ОК 09. Л1 - 17
	Практическое занятие 8. «Комплексные числа и действия над ними»	8	
	Самостоятельная работа	2	
РАЗДЕЛ 5. Основы теории вероятностей и математической статистики		**18**	
Тема 5.1 Вероятность. Теорема сложения вероятностей	Понятия события и вероятности события. Достоверные и невозможные события. Классическое определение вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей.	4	ОК 01 - 03, ОК 07, ОК 09. Л1 - 17
	Практическое занятие 9. «Решение практических задач на определение вероятности события».	4	
Тема 5.2 Случайная величина, ее функция распределения	Случайная величина. Дискретные и непрерывные случайные величины. Закон распределения случайной величины.	2	ОК 01 - 03, ОК 07, ОК 09. Л1 - 17
	Практическое занятие 10. «Решение задач с реальными дискретными случайными величинами».	4	
Тема 5.3 Математическое ожидание и дисперсия случайной величины	Характеристики случайной величины	2	ОК 01 - 03, ОК 07, ОК 09. Л1 - 17
	Самостоятельная работа	2	
	Промежуточная аттестация в форме дифференцированного зачёта	**2**	
	Всего:	**80**	

3. УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОГРАММЫ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Материально-техническое обеспечение

Для реализации программы учебной дисциплины кабинет «Математика»:

Кабинет, оснащенный оборудованием: посадочные места по количеству обучающихся, рабочее место преподавателя, информационные стенды, комплект чертежных инструментов для черчения на доске, модели пространственных тел и конструкторы геометрических фигур, наглядные пособия (комплекты учебных таблиц, плакатов); техническими средствами обучения: мультимедийный комплекс (проектор, проекционный экран, ноутбук), персональный компьютер.

3.2. Информационное обеспечение реализации программы

3.2.1. Печатные издания

1. Шипачев В. С. Начала высшей математики. Учебное пособие для СПО. / В.С. Шипачев. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 384 с. — ISBN 978-5-8114-6809-6

2. Булдык Г. М. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Учебное пособие для СПО/ Г.М. Булдык. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 332 с. — ISBN 978-5-8114-6740-2

3. Гарбарук В. В., Родин В. И. и др. Решение задач по математике. Практикум для студентов средних специальных учебных заведений. Учебное пособие для СПО/ В.В. Гарбарук. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 416 с. — ISBN 978-5-8114-6931-4

4. Практические занятия по алгебре. Комплексные числа, многочлены : учебное пособие для спо / Ю. В. Волков, Н. Н. Ермолаева, В. А. Козынченко, Г. И. Курбатова ; под редакцией Г. И. Курбатовой. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 192 с. — ISBN 978-5-8114-6519-4

5. Трухан, А. А. Математический анализ. Функция одного переменного : учебное пособие для спо / А. А. Трухан. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 324 с. — ISBN 978-5-8114-5937-7

3.2.2. Электронные издания (электронные ресурсы)

1. Шипачев В. С. Начала высшей математики. Учебное пособие для СПО. / В.С. Шипачев. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 384 с. — ISBN 978-5-8114-6809-6 — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/152641

2. Булдык Г. М. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Учебное пособие для СПО/ Г.М. Булдык. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 332 с. — ISBN 978-5-8114-6740-2 — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/165840

3. Гарбарук В. В., Родин В. И. и др. Решение задач по математике. Практикум для студентов средних специальных учебных заведений. Учебное пособие для СПО/ В.В.Гарбарук. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 416 с. — ISBN 978-5-8114-6931-4— Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/169793

4. Степучев, В. Г. Решение линейных дифференциальных уравнений : учебник для спо / В. Г. Степучев. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 188 с. — ISBN 978-5-8114-6903-1. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/162378

5. Ганичева, А. В. Практикум по математической статистике с примерами в Excel : учебное пособие для спо / А. В. Ганичева, А. В. Ганичев. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. —

112 с. — ISBN 978-5-8114-7285-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/173084

6. Практические занятия по алгебре. Комплексные числа, многочлены : учебное пособие для спо / Ю. В. Волков, Н. Н. Ермолаева, В. А. Козынченко, Г. И. Курбатова ; под редакцией Г. И. Курбатовой. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 192 с. — ISBN 978-5-8114-6519-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/148479

7. Трухан, А. А. Математический анализ. Функция одного переменного : учебное пособие для спо / А. А. Трухан. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 324 с. — ISBN 978-5-8114-5937-7. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/153909

3.2.3. Дополнительные источники

1. Богомолов Н. В., Самойленко П.И. Математика. Учебник для ссузов. М., «ДРОФА», 2012.

3.3. Организация образовательного процесса

Реализация программы учебной дисциплины предусматривает выполнение обучающимися заданий для практических занятий, контрольных работ. Обучение проводится с применением системно-деятельностного подхода. На занятиях используются следующие инструменты обучения: модуль, логико-смысловые модели, кластер, глоссарий, таблица, тест и др.

Текущий контроль знаний и умений осуществляется в форме различных видов опросов на занятиях и во время инструктажа перед практическими занятиями, контрольных работ в виде решения задач. Текущий контроль освоенных умений осуществляется в виде экспертной оценки результатов выполнения заданий.

Промежуточная аттестация обучающихся осуществляется в рамках освоения общеобразовательного цикла в соответствии с фондами оценочных средств, позволяющими оценить достижение запланированных результатов обучения. Завершается первый семестр курса освоение программы дифференцированным зачётом, включающим как оценку теоретических знаний, так и практических умений. По завершению курса обучения проводится экзамен в форме дифференцированного зачёта.

При реализации образовательной программы техникум применяет электронное обучение и дистанционные образовательные технологии.

3.4. Кадровое обеспечение образовательного процесса

Реализация программы учебной дисциплины обеспечивается педагогическим работником техникума, имеющим высшее образование по квалификации учитель математики, стаж работы более 30 лет, деятельность педагога связана с направленностью реализуемой учебной дисциплины. Квалификационная категория соответствует занимаемой должности

Квалификация педагогического работника техникума отвечает квалификационным требованиям, указанным в профессиональном стандарте «Педагог профессионального обучения, профессионального образования и дополнительного профессионального образования».

Педагогические работники получают дополнительное профессиональное образование по программам повышения квалификации не менее 1 раза в 3 года.

4. КОНТРОЛЬ И ОЦЕНКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Результаты обучения	Критерии оценки	Методы оценки
Знания:		
Основные математические методы решения прикладных задач; Основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики; Основы интегрального и дифференциального исчисления; Роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.	Полнота продемонстрированных знаний и умение применять их при выполнении практических работ	Проведение устных опросов, письменных контрольных работ
Умения:		
Анализировать сложные функции и строить их графики; Выполнять действия над комплексными числами; Вычислять значения геометрических величин; Производить операции над матрицами и определителями; Решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики; Решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений; Решать системы линейных уравнений различными методами	Выполнение практических работ в соответствии с заданием	Проверка результатов и хода выполнения практических работ

5. КОМПЛЕКТ КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

5.1 Контрольно- оценочные средства для проведения текущего контроля

Практическое занятие № 1
«Построение графиков реальных функций с помощью геометрических преобразований»

Цель: закрепить навыки построения графиков функций с помощью геометрических преобразований

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Пусть задан график функции $y = f(x)$. Чтобы построить график функции

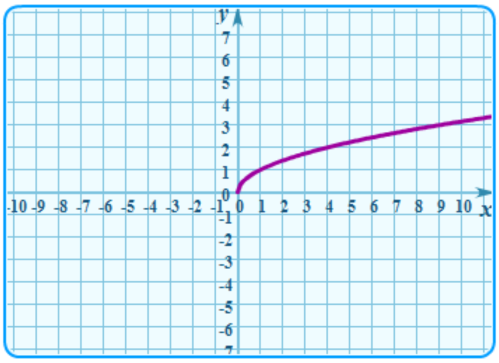
1. $y = mf(x)$, где $m > 0$ и $m \neq 1$, нужно ординаты точек заданного графика умножить на m. Такое преобразование называется растяжением от оси x с коэффициентом m, если $m > 1$, и сжатием к оси x, если $0 < m < 1$.
2. $y = -f(x)$ получается из графика функции $f(x)$ преобразованием симметрии относительно оси x. (Преобразование симметрии - зеркальное отражение относительно прямой.)
3. $y = f(x) + n$, получается из графика функции $f(x)$ параллельным переносом последнего вдоль оси ординат на n единиц вверх, если $n > 0$ и, соответственно на $|n|$ единиц вниз, если $n < 0$.

4. $y = f(kx)$, где $k > 0$ и $k \neq 1$. Искомый график функции получается из заданного сжатием с коэффициентом k к оси y (если $0 < k < 1$ указанное "сжатие" фактически является растяжением с коэффициентом $1/k$)

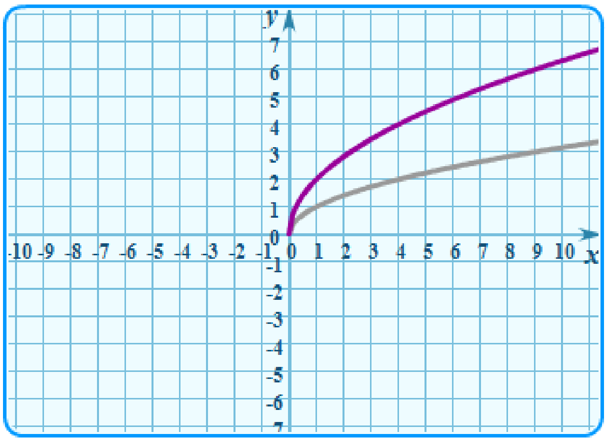
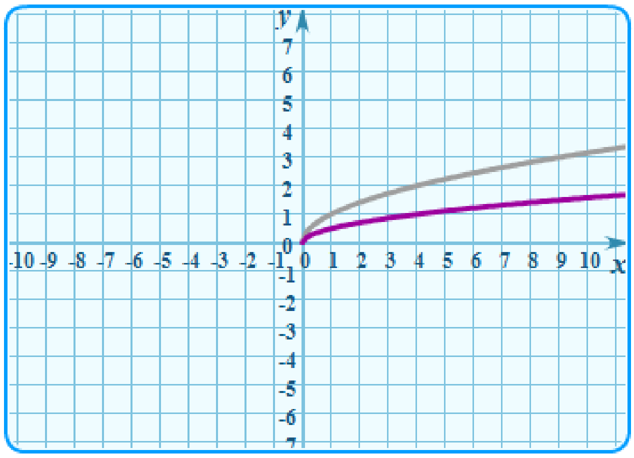
5. $y = f(-x)$ получается из графика функции $f(x)$ преобразованием симметрии относительно оси y

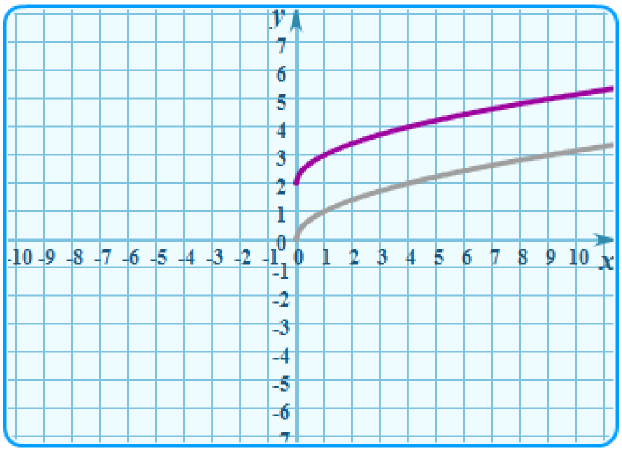
6. $y = f(x + l)$ получается из графика функции $f(x)$ параллельным переносом последнего на l единиц влево, если $l > 0$ и, соответственно на $|l|$ единиц вправо, если $m < 0$.

Например, пусть задан график функции $y = \sqrt{x}$.

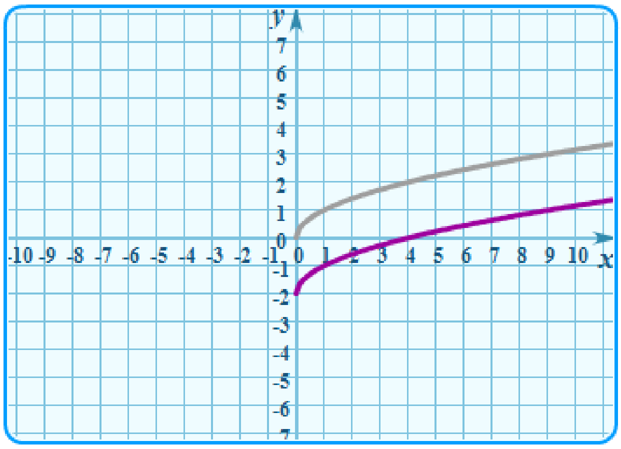


Чтобы построить графики других функций, содержащих аргумент (x) под знаком квадратного корня, воспользуемся перечисленными выше правилами. Заданный график повторим во вновь начерченных осях "карандашом бледно", требуемый график, который получится после преобразований, сделаем более интенсивным. В тетради лишнее можно будет удалить ластиком, останется только результат выполнения задания.

<table>
<tr>
<td>Пример 1a. Построить график функции $y = 2\sqrt{x}$

Растянули в 2 раза от оси x. Ордината каждой точки увеличилась в 2 раза.</td>
<td>Пример 1b. Построить график функции $y = \sqrt{x}/2$

Сжали вдвое к оси x. Ордината каждой точки уменьшилась в 2 раза.</td>
</tr>
<tr>
<td>Пример 3a. Построить график функции $y = \sqrt{x} + 2$</td>
<td>Пример 3b. Построить график функции $y = \sqrt{x} - 2$</td>
</tr>
</table>

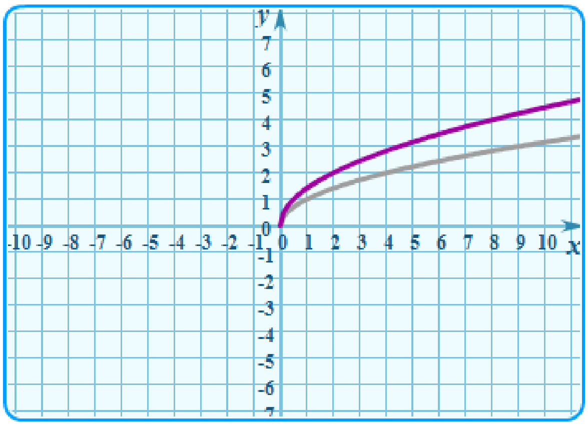


Параллельно перенесли на 2 единицы вверх вдоль оси *y*. Ордината каждой точки увеличилась на 2.



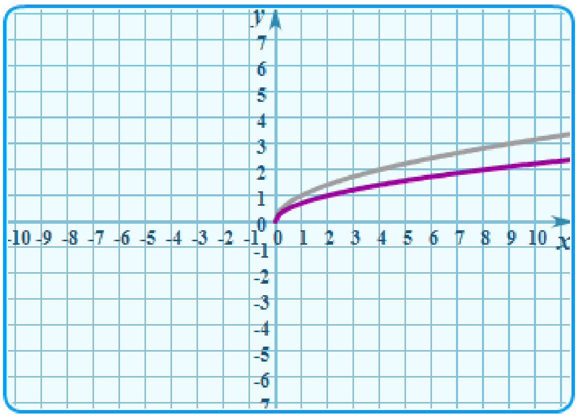
Параллельно перенесли на 2 единицы вниз вдоль оси *y*. Ордината каждой точки уменьшилась на 2 единицы.

Пример 4a. Построить график функции *y* = √2*x*



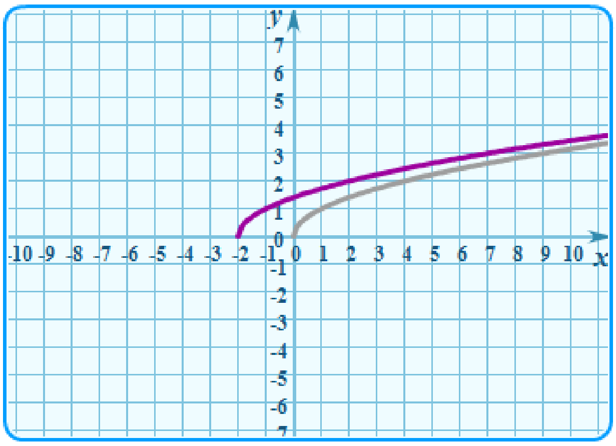
Сжали вдвое к оси *y*. Абсцисса каждой точки уменьшилась в 2 раза.

Пример 4b. Построить график функции *y* = √*x*/2



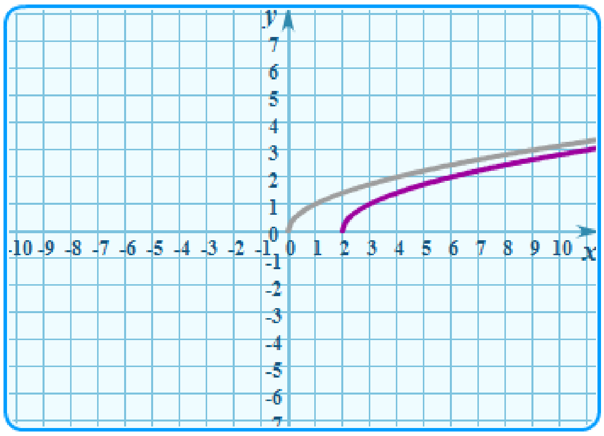
Растянули в 2 раза от оси *y*. Абсцисса каждой точки увеличилась в 2 раза.

Пример 6a. Построить график функции *y* = √*x* + 2

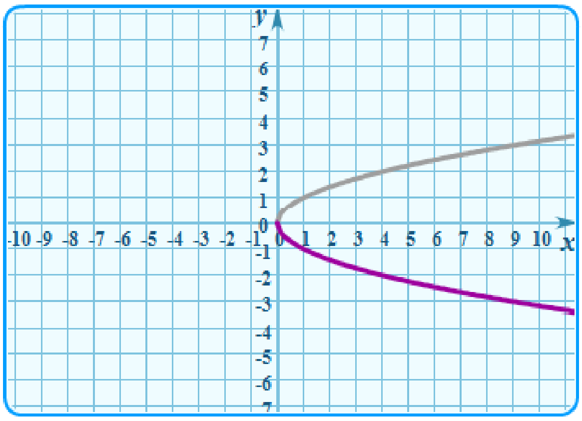
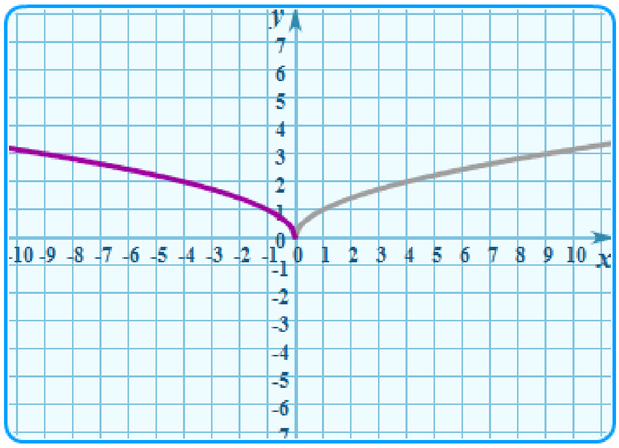


Параллельно перенесли на 2 единицы влево

Пример 6b. Построить график функции *y* = √*x* − 2



Параллельно перенесли на 2 единицы вправо

вдоль оси *x*. Абсцисса каждой точки уменьшилась на 2 единицы.	вдоль оси *x*. Абсцисса каждой точки увеличилась на 2 единицы.
Пример 2. Построить график функции $y = -\sqrt{x}$  Применили преобразование симметрии – зеркально отразили относительно оси *x*.	**Пример 5.** Построить график функции $y = \sqrt{-x}$  Применили преобразование симметрии – зеркально отразили относительно оси *y*.

Заметим, что параллельный перенос графика относительно одной из осей в какую-либо сторону равносилен переносу этой оси относительно графика в противоположную сторону. Поэтому 3-е и 6-е правила можно объединить следующим образом: чтобы построить график функции $y = f(x - m) + n$ нужно выполнить параллельный перенос всей плоскости координат так, чтобы началом новой системы координат $x'y'$ была точка $O'(m;n)$. Очевидно, что вместо того, чтобы дважды перерисовывать график, проще перечертить оси.

Если нужно скомбинировать только параллельные переносы, чтобы построить график функции, то всё равно в каком порядке их выполнять, и всё равно, что переносить - оси или кривые. Но если нужно построить график сложной функции, используя и перенос, и растяжение-сжатие, и отражения, то следует тщательно соблюдать порядок выполнения операций.

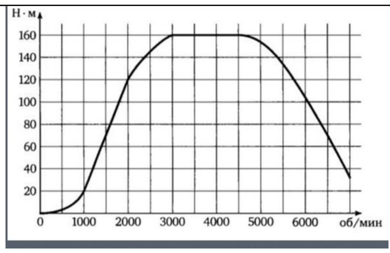
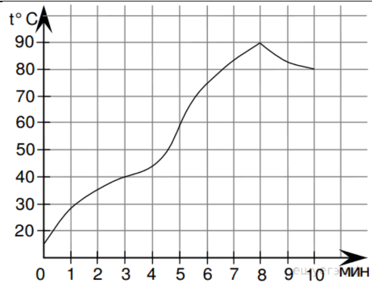
Задания для практический части:

1 вариант Постройте график зависимости крутящего момента автомобильного двигателя от числа его оборотов в минуту, задаваемый формулой $y=-(x-400)^2+140$ где *y* – крутящийся момент, *x*- число оборотов в минуту. На оси абсцисс отложите число оборотов в минуту; на оси ординат – крутящийся момент в Н м. По графику функции определите, какое наименьшее число оборотов двигателя в минуту достаточно, чтобы автомобиль начал движение (*крутящийся момент должен быть не менее 60 Нм*) ?

2 вариант Постройте график зависимости процесса разогрева двигателя легкового автомобиля, задаваемого формулой $T=-(t-8)^2+90$, где T- температура двигателя, t- время. .На оси абсцисс отложите время в минутах, прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат — температуру двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, сколько минут двигатель нагревался от температуры 60°С до температуры 90 С.

Эталоны ответов

Номер варианта	**Ответы**

1	 **Ответ: 1000**
2	 **Ответ 3**

Практическое занятие №2
«Нахождение пределов функций с помощью замечательных пределов»

Цель работ: закрепить навыки нахождения пределов функций с помощью замечательных пределов.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Теорема. Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, равен единице, то есть $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Этот предел называют первым замечательным пределом. С его помощью вычисляют пределы выражений, содержащих тригонометрические функции.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$.

Решение. Преобразуем данное выражение: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5=5\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=5.$

При вычислении пределов вида $\lim\limits_{x\to a}u(x)^{v(x)}$, где $\lim\limits_{x\to a}u(x)=1, \lim\limits_{x\to a}v(x)=\infty,$ используется второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ или $\lim\limits_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$

, $e=2{,}71828\ ...,$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$.

Решение. Полагая $\frac{3}{x}=y$, получим: $x=\frac{3}{y}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{3}{y}}=\lim\limits_{y\to 0}\left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^3=e^3.$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-5}\right)^{x^2}$.

Решение. Преобразуем выражение, стоящее под знаком предельного перехода.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-5}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+3}{x^2-5}-1\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2+3-x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x^2-5}\right)^{\frac{x^2-5}{8}\cdot\frac{8}{x^2-5}\cdot x^2}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{8}{x^2-5}\right)^{\frac{x^2-5}{8}}\right]^{\frac{8}{x^2-5}\cdot x^2}.$$

Так как $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x^2-5}\right)^{\frac{x^2-5}{8}}=e$, а $\lim_{x\to\infty} 8\frac{x^2}{x^2-5}=8$, то $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-5}\right)^{x^2}=e^8$.

Приведем еще несколько замечательных пределов:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln e$, так как $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$. Окончательно, $\lim_{x\to 0}\ln(1+x)=1$;

2) $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$;

3) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\left[\begin{array}{l} e^x-1=y\Rightarrow e^x=y+1\\ \ln e^x=\ln(y+1)\Rightarrow x=\ln(y+1)\\ при\quad x\to 0\ y\to 0\end{array}\right]=$

$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(y+1)}=\frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}=1;$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$

Пример 4. Найти $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}$.

Решение. Для решения воспользуемся формулой $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

Преобразуем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{5x}\cdot 5=5\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{5x}=5\cdot 1=5.$$

Задания практической части:

Вычислить пределы

$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x}{x}$, $\lim_{x\to 0}\frac{7\sin 6x}{5x}$, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$, $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{5}{x}}$,

$\lim_{x\to\infty}(1+2x)^{\frac{4}{x}}$

Эталоны ответов

Номер задания	**1**	2	3	4	5
Ответы	6	0	1	5	4

Практическое занятие №3

«Вычисление производных функций. Применение производной к решению практических задач».

Цель: закрепить уметь находить производные элементарных и сложных функций, производные произведения и частного.

Содержание работы:

Формулы дифференцирования	
1. $(x^n)'=nx^{n-1}$	13. $(x^u)'=ux^{u-1}\cdot u'$
2. $(e^x)'=e^x$	14. $(e^u)'=e^u\cdot u'$
3. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$	15. $(a^u)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$
4. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$	16. $(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'$
5. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a}$	17. $(\log_a u)'=\frac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$
6. $(\sin x)'=\cos x$	18. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$
7. $(\cos x)'=-\sin x$	19. $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$
8. $(tgx\{\,)'=\frac{1}{\cos^2 x}¿$	20. $(tgu\{\,)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'¿$
9. $(ctgx\{\,)'=-\frac{1}{\sin^2 x}¿$	21. $(ctgu\{\,)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'¿$
10. $(arctgx\{\,)'=\frac{1}{1+x^2}¿$	22. $(arcctgu\{\,)'=-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'¿$
11. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	23. $(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
12. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	24. $(\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

Правила дифференцирования
1. $(c)'=0,(cu\{\,)'=c\,u';¿$
2. $x'=1$
3. $(u+v)'=u'+v';$
4. $(uv\{\,)'=u'v+v'u;¿$
5. $(\frac{u}{v})'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

Примеры вычислений :

1) $f(x)=3x^4+2x^2-5x+3$; используя формулы $(x^n)'=nx^{n-1}$, $x'=1$, $c'=0$

и правила $(cu)'=cu'$, $(u+v)'=u'+v';$ получаем

$f'(x)=(3x^4+2x^2-5x+3)')=(3x^4)'+(2x^2)'-(5x)'+(3)'=3(x^4)'+2(x^2)'-5(x)'+(3)'=3\cdot4x^3+2\cdot2x^1-5\cdot1+0=\underline{12x^3+4x-5}$

2) $f(x)=x^3\cos x$; используя формулы $(x^n)'=nx^{n-1}$ и $(\cos x)'=-\sin x$ и правило

$(uv\{\,)'=u'v+v'u;¿$ получаем

$f'(x)=(x^3\cos x)'=(x^3)'\cos x+x^3(\cos x)'=3x^2\cos x+x^3(-\sin x)=\underline{3x^2\cos x-x^3\sin x}$

3) f(x)=x^4 /cosx ; используя формулы $(x^n)'=nx^{n-1}$ и $(\cos x)'=-\sin x$ и правило

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

получаем

f'(x)=(x^4 /cosx)'= ((x^4)'cosx- x^4 (cosx)')/$\cos^2$x=(4x^3cosx-x^4(-sinx))/ $\cos^2$x =(4x^3cosx+x^4sinx)/ $\cos^2$x

4) f(x)=cos(3x^2+2) ; используя формулы $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$,

а потом $(x^n)'=nx^{n-1}$, $x'=1$, $c'=0$

получаем f'(x) =cos'(3x^2+2)· (3x^2+2)'= -sin(3x^2+2)·6x=-6x·sin(3x^2+2)

5) f(x)=e^{7x+8}; используя формулы ($(e^u)'=e^u\cdot u'$, а потом $(x^n)'=nx^{n-1}$, $x'=1$, $c'=0$

получаем f'(x) = (e^{7x+8})'= e^{7x+8}·(7x+8)'= e^{7x+8}·7=7e^{7x+8}·

Вариант 1.	***Вариант 2.***
Найдите производную ***1.*** *f(x)=3x^8+6x^3-7x+1;* ***2.*** *f(x)=5x^3sinx;* ***3****. f(x)=6x^2lnx* ***4****. f' (x) =* $\frac{x^2+2x}{x-1}$ *;* ***5****. f(x) = sin(2x^2 – 3x + 1);* ***6.*** *f(x) = $\cos^3$(2x – 1);* ***7.*** *f(x)=6^{4x+1}* ***8****. f(x)=$(5x+7)^3$* ***9.****f(x)=$\log_2^4$x* ***10.*** *f(x)=$\ln^3$x* ***11****.* Расход горючего легкового автомобиля (литр на 100 км) в зависимости от скорости х км/ч при движении на четвертой передачи приблизительно описывается функцией f(x)=0,0017x-0,18x+10,2; x>30. При какой скорости расход горючего будет наименьший? Найдите этот расход.	***Найдите производную*** ***1.*** *f(x)=2x^6-9x^2+5x-8;* ***2.*** *f(x)=6x^4cosx;* ***3****. f(x)=2x^3lnx* ***4****. f' (x) =* $\frac{3x-x^2}{x+2}$ *;* ***5****. f(x) = cos(3x^2 – 4x + 2);* ***6.*** *f(x) = $\sin^3$(2 - 3x)* ***7.*** *f(x)=6^{4x+1}* ***8****. f(x)=$(5x+7)^3$* ***9.****f(x)=$\log_2^4$x* ***10.*** *f(x)=$\ln^3$x* ***11****.* Производительность труда бригады может быть описана уравнением y = -2,5t2 + 15t +100, где 0 < t < 8 - рабочее время в часах. Вычислить скорость и темп изменения производительности труда при t = 2 и t = 7.

Эталоны ответов

1 вариант	2 вариант
$2\frac{2}{3}$	$3\frac{3}{4}$
0	1
$1\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$
- $\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}e^3$ - $\frac{1}{3}$
$6\frac{1}{5}$	1
$5\frac{1}{3}$	- $1\frac{1}{4}$
$\frac{1}{2}e^6$ - $\frac{1}{2}e^2$	ln6 – ln3

40	-15
$2\frac{2}{3}$	$3\frac{3}{4}$
5,43 литра	Z=5, Z=-20; T $_1$ =0,042 ед/мес, T $_2$ =-0,24ед/мес

Практическое занятие № 4

«Нахождение неопределенных интегралов различными и методами. Вычисление определенных интегралов. Применение определенного интеграла в практических задачах».

Цель: закрепить навык вычисления неопределенного интеграла методами непосредственного интегрирования, интегрирования методом подстановки, интегрирования по частям и определенного интеграла с помощью формулы Ньютона-Лейбница

Содержание работы:

Теоретический материал

Таблица интегралов

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = ctgx + C$	13. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg x + C$
2. $\int dx = x + C$	8. $\int tgxdx = \ln\lvert\cos x\rvert + C$	14. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\lvert\frac{a+x}{a-x}\rvert + C$
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	9. $\int ctgxdx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
4. $\int \sin xdx = -\cos xdx$	10. $\int e^x dx = e^x + C$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
5. $\int \cos xdx = \sin xdx$	11. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$	

<u>1. Непосредственное интегрирование</u>

Этот способ интегрирования предполагает такое преобразование подынтегральной функции, которое позволило бы использовать для решения табличные интегралы.

При непосредственном интегрировании применяются свойства неопределенного интеграла, таблица неопределенных интегралов и, если это необходимо, алгебраические преобразования

<u>Пример вычисления 1</u>:

Вычислите $\int (x^3 - 3x + \sin x) dx$

Решение: Для вычисления интеграла сначала воспользуемся 2 и 3 свойствами неопределенного интеграла, а затем применим 1 и 4 табличные интегралы:

$$\int (x^3 - 3x + \sin x) dx = \int x^3 dx - 3 \cdot \int xdx + \int \sin xdx = \frac{x^{3+1}}{3+1} - 3 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} - \cos x + C =$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2} \cdot x^2 - \cos x + C$$

<u>Пример вычисления 2:</u>

Вычислите $\int \frac{3 + 2x - x^2}{x} dx$

Решение: Для вычисления интеграла сначала каждый член числителя почленно разделим на знаменатель, затем воспользуемся 2 и 3 свойствами неопределенного интеграла и применим 1 и 3 табличные интегралы

$$\int \frac{3+2x-x^2}{x}dx=\int \frac{3}{x}dx+\int \frac{2x}{x}dx-\int \frac{x^2}{x}dx=3\cdot\int \frac{dx}{x}+2\cdot\int dx-\int xdx=3\ln x+2x-\frac{1}{2}\cdot x^2+c$$

2. Метод замены переменной (метод подстановки)

Он является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегрирования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла. Суть этого метода состоит в том, что путем введения новой переменной интегрирования заданный интеграл сводится к новому интегралу, который легко вычисляется непосредственным интегрированием.

Пример вычисления 1: С развернутым оформлением

Вычислите $\int (3x-4)^3 dx$

Решение:

Введем новую переменную *t* = *3x-4*, тогда $dt=t'\cdot dx=(3x-4)'\cdot dx=3dx$, откуда $dx=\frac{dt}{3}$. Подставим новую переменную в интеграл (вместо выражения *3x-4* подставим *t*, вместо dx подставим $\frac{dt}{3}$).

$$\int (3x-4)^3 dx=\int t^3\cdot\frac{dt}{3}=\frac{t^4}{12}+C$$

Далее нужно вернуться к первоначальной переменной. Для этого сделаем обратную замену (вместо *t* подставим выражение *3x-4*), получим окончательный ответ.

$$\int (3x-4)^3 dx=\frac{(3x-4)^4}{12}+C$$

Пример вычисления 2:

С кратким оформлением

Решение:

$$\int sinxcosxdx=\left|\begin{matrix} t=sinx \\ dt=cosxdx \end{matrix}\right|=\int tdt=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}\sin^2 x+C.$$

3. Интегрирование по частям

Формула интегрирования по частям

$\int$ **udv =** uv **-** $\int$ vdu.

Пример вычисления 1:

С развернутым оформлением

Вычислить

$\int xe^x dx$

Решение. Полагая, что

$$\begin{array}{l} u=x, \\ du=dx, \\ dv=e^x dx, \\ v=e^x, \\ \int dv=\int e^x dx, \end{array}$$

находим

$$\int xe^x dx = \int x\, de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

Пример вычисления 2:

С кратким оформлением

Вычислить $\int (3x+2)\ln x dx$

$\int (3x+2)\ln x dx=($ $u=\ln x$, $du=(\ln x)'=1/x dx$

$=(3x^2/2+2x)\ln x-$ $+2x)\ln x-\int(3x^2/2+2x)\ 1/x dx=$

Определенный интеграл

Определенный интеграл вычисляется по следующей формуле:

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Пример вычислений 1:

$$\int_1^3 (x^3-5)\, dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} - 5x\Big|_1^3 = \frac{x^4}{4} - 5x\Big|_1^3 = \left(\frac{3^4}{4} - 5\cdot 3\right) - \left(\frac{1^4}{4} - 5\cdot 1\right) =$$

$$¿\left(\frac{81}{4} - 15\right) - \left(\frac{1}{4} - 5\right) = \frac{81}{4} - 15 - \frac{1}{4} + 5 = \frac{81-1}{4} - 10 = \frac{80}{4} - 10 = 20 - 10 = 10$$

Задания для самостоятельной работы:

Вариант 1	***Вариант 2.***
Вычислите неопределенные интегралы **1.** $\int (7 - 8x + 4x^3 - 6x^5)\, dx$ **2.** $\int \cos^8 x \sin x dx$ **3.** $\int (4x-5)\ln x dx$	***Вычислите неопределенные интегралы*** **1.** $\int (1 - 5x + 6x^5 - 7x^6)\, dx$ **2.** $\int \sin^6 x \sin x dx$ **3.** $\int (6x-3)e^x dx$
Вычислите определенный интеграл **4.** $\int_1^3 (4x^3+2)dx$	***Вычислите определенный интеграл*** **4.** $\int_0^2 (x^2-3)\, dx$

Эталоны ответов

Вариант 1	**Вавриант2**
$\int (7 - 8x + 4x^3 - 6x^5)\, dx$	$\int (1 - 5x + 6x^5 - 7x^6)\, dx$
$\cos^8 x \sin x$	$\sin^6 x \sin x$
$(4x-5)\ln x dx$	$(6x-3)e^x dx$
84	-3 1/3

Практическое занятие 5.

«Действия с матрицами. Нахождение обратной матрицы»

Цель: закрепить навыки выполнения действий с матрицами (сложение, вычитание, умножение, возведение в степень) и нахождения обратной матрицы.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Действия над матрицами

1) Сложение. Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров. **Суммой двух матриц** А и В одинакового размера называется матрица С = А + В, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Пример. Сложить матрицы А и В, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Решение. Здесь А и С – квадратные матрицы второго порядка. Складывая их соответствующие элементы, получим

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 2-1 & 4+3 \\ -1+1 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Умножение матрицы на число.

Произведением матрицы А на число λ называется матрица В равная λА, элементы которой $b_{ij} = \lambda a_{ij}$

Умножение матрицы на число сводится к умножению на это число всех элементов матрицы.

Пример: Умножить матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ на число λ = 3.

Решение. Умножая каждый член матрицы А на 3, получим

$$3A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 12 \\ 0 & 15 & -9 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

3) Умножение матрицы на матрицу.

Умножение матрицы А на матрицу В определено лишь в том случае, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы

Произведением матриц $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ называется матрица C = A·B

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Нужно каждый элемент первой строки умножить на соответствующий элемент первого столбца и полученные произведения сложить и т.д.

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_{3\times3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+0\cdot5+2\cdot(-2) & 1\cdot0+0\cdot1+2\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot4+2\cdot1 \\ 3\cdot(-1)+1\cdot5+0\cdot(-2) & 3\cdot0+1\cdot1+0\cdot0 & 3\cdot0+1\cdot4+0\cdot1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Нахождение обратной матрицы.

Составим обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$;

Вычислим определитель матрицы А:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(2+4)+1(3-2)+1(-6-2)=12+1-8=5$$

Найдем алгебраические дополнения

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=6;\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1;\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-8;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-1;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1;\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-4;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-1;\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=7.$$

Составим матрицу из алгебраических дополнений

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & -8 \\ -1 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Транспонируем полученную матрицу, т.е. переходим к матрице

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Умножая на $\frac{1}{5}$ получим обратную матрицу

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-8}{5} & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию

1. Что называется матрицей?
2. Что называется матрицей-строкой? матрицей-столбцом? вектором?
3. Какие матрицы называются прямоугольными? квадратными?
4. Какие матрицы называются равными?
5. Что называется главной диагональю матрицы?
6. Какая матрица называется диагональной?
7. Что значит транспонировать матрицу?
8. Транспонируйте матрицу

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

9. Что называется суммой матриц?
10. Что называется произведением матрицы на число?
11. Как найти произведение двух матриц?
12. В чем состоит обязательное условие существования произведения матриц?
13. Какими свойствами обладает произведение матриц?

Задания для практического занятия:

1. Вычислите: D = A×B – 3C, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислите: $D = (A \times B) + C^2$, если

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите: $D = A \times B - 2C^т$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Вычислите: $D = C^2 - (A \times B)^т$, если

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Составить обратные матрицы для данных

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -8 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} 11 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Эталоны ответов

Номера заданий	
1	$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
2	$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
3	$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
4	$B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & 6 \\ -2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 39 \\ 0 & 0 & 1 & -13 \end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 39 \\ 0 & 0 & 1 & -13 \end{pmatrix}$

Практическое занятие № 6

«Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера»

«Решение СЛАУ различными методами»

Цель: закрепить навыки нахождения переменных системы линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера. Закрепить умения и навыки в решении систем линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы, методом Гаусса.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Решение СЛАУ методом Крамера

Пусть дана система линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \quad (1.1)$$

Составим главный определитель системы (1.1) т.е. определитель из коэффициентов при неизвестных в данной системе.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11},a_{12},\ldots a_{1n} \\ a_{21},a_{22},\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1},a_{n2},\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

и вспомогательные определители, составляем их путем замены в главном определителе соответствующего столбца столбцом, состоящим из свободных членов.

$$\Delta x=\begin{vmatrix} b_1,a_{12},\ldots a_{1n} \\ b_2,a_{22},\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n,a_{n2},\ldots a_{nn} \end{vmatrix};\Delta y=\begin{vmatrix} a_{11},b_1,\ldots a_{1n} \\ a_{21},b_2,\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1},b_n,\ldots a_{nn} \end{vmatrix};\Delta z=\begin{vmatrix} a_{11},a_{12},\ldots b_1 \\ a_{21},a_{22},\ldots b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1},a_{n2},\ldots b_n \end{vmatrix}$$

Если $\Delta\neq 0$, то решение системы (1.1) находится по формулам Крамера:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta};\ y=\frac{\Delta y}{\Delta};\ z=\frac{\Delta z}{\Delta}.$$

Решение системы линейных уравнений в матричной форме

Пусть дана система линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \quad (1.1)$$

Составим матрицу коэффициентов:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11},a_{12},\ldots a_{1n} \\ a_{21},a_{22},\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1},a_{n2},\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Составим матрицу-столбец свободных членов:

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Составим еще матрицу-столбец неизвестных:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Тогда система (1.1) в матричной форме примет вид $A\cdot X=B$

Если $detA\neq 0$, то умножая $A\cdot X=B$ на A^{-1}, получим $X=A^{-1}\cdot B$

На этой формуле основан матричный способ решения систем линейных уравнений.

Пример. Решить матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=2, \\ 3x_1+2x_2+2x_3=-2, \\ x_1-2x_2+x_3=1. \end{cases}$$

Решение. Для данной системы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};B=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы воспользоваться формулой $X=A^{-1}\cdot B$, надо найти матрицу, обратную к матрице А, т.е. A^{-1}

Вычислим определитель матрицы А:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=2(2+4)+1(3-2)+1(-6-2)=12+1-8=5$$

Найдем алгебраические дополнения

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=6;A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1;A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-8;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-1;A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1;A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-4;A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-1;A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=7.$$

Составим матрицу из алгебраических дополнений

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & -8 \\ -1 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Транспонируем полученную матрицу, т.е. переходим к матрице

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ -8 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Умножая на $\frac{1}{5}$ получим обратную матрицу

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-8}{5} & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

Итак,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{-8}{5} & \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{12+2-4}{5} \\ \frac{-2-2-1}{5} \\ \frac{-16-6+7}{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1=2;x_2=-1;x_3=-3.$

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию

1. Что называется системой линейных алгебраических уравнений?
2. Что значит решить систему уравнений?
3. Что является решением системы?
4. Какие бывают системы линейных алгебраических уравнений ?
5. Какими способами можно решить систему?
6. Опишите матричный способ решения системы уравнений.
7. Сформулируйте теорему Крамера. Запишите формулы Крамера.
8. Опишите методом Гаусса решения СЛАУ

Задания для практического занятия:

1.Решите системы уравнений в матричной форме:

а¿ $\begin{cases} 5x+3y=12, \\ 2x-y=7. \end{cases}$ *б*¿ $\begin{cases} 3x-2y=5, \\ 6x-4y=11. \end{cases}$

Решите системы линейных уравнений по формулам Крамера методом Гаусса (г)

в¿ $\begin{cases} 2x-3y=11, \\ 6x-9y=33. \end{cases}$ *г*¿ $\begin{cases} 2x-3y+z=-7, \\ x+4y+2z=-1, \\ x-4y=-5. \end{cases}$

2.Решите системы уравнений по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3=6, \\ 5x_1-3x_2+2x_3=-4, \\ 4x_1-2x_2-3x_3=-2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+7x_2+13x_3=6, \\ 3x_1+14x_2+12x_3=18, \\ 5x_1+25x_2+16x_3=39. \end{cases}$

в¿ $\begin{cases} x_1+2x_2=10, \\ 3x_1+2x_2+x_3=23, \\ x_2+2x_3=13. \end{cases}$ *г*¿ $\begin{cases} 3x_1+4x_2=11, \\ 5x_2+6x_3=28, \\ x_1+2x_3=7. \end{cases}$

Эталоны ответов

1а	Х=3 , У=-1
1б	Х=4 , У=2
1в	Х=2 , У=-1
1г	Х=1/3 , У=1, Z=2
2а	Х=3 , У=-1
2б	$X_1=2$ $X_2=3$ $X_3=4$

2в	$X_1=1$ $X_2=1$ $X_3=5$
2г	$X_1=2$ $X_2=3$ $X_3=6$

Практическое занятие № 7

«Выполнение операций над множествами»

Цель работы: сформировать умение выполнять операции с множествами

Содержание работы:

Теоретические сведения

Множество – одно из основных понятий математики.

Множеством называется совокупность некоторых элементов, объединенных каким-либо общим признаком. Элементами множества могут быть числа, фигуры, предметы, понятия и т.п.

Множества обозначаются прописными буквами, а элементы множество строчными буквами. Элементы множеств заключаются в фигурные скобки.

Если элемент x принадлежит множеству X, то записывают $x \in X$ ($\in$ — принадлежит).

Если множество A является частью множества B, то записывают $A \subset B$ ($\subset$ — содержится).

Множество может быть задано одним из двух способов: перечислением и с помощью определяющего свойства.

Два множества A и B равны (A=B), если они состоят из одних и тех же элементов.

Например, если A={1,2,3,4}, B={3,1,4,2} то A=B.

Объединением (суммой) множеств A и B называется множество $A \cup B$, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств.

Например, если A={1,2,4}, B={3,4,5,6}, то $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

Пересечением (произведением) множеств A и B называется множество $A \cap B$, элементы которого принадлежат как множеству A, так и множеству B.

Например, если A={1,2,4}, B={3,4,5,2}, то $A \cap B = \{2,4\}$

Разностью множеств A и B называется множество AB, элементы которого принадлежат множеству A, но не принадлежат множеству B.

Например, если A={1,2,3,4}, B={3,4,5}, то AB = {1,2}

Симметричной разностью множеств A и B называется множество $A \Delta B$, являющееся объединением разностей множеств AB и BA, то есть $A \Delta B = (AB) \cup (BA)$.

Например, если A={1,2,3,4}, B={3,4,5,6}, то $A \Delta B = \{1,2\} \cup \{5,6\} = \{1,2,5,6\}$

Свойства:

Свойства перестановочности:

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

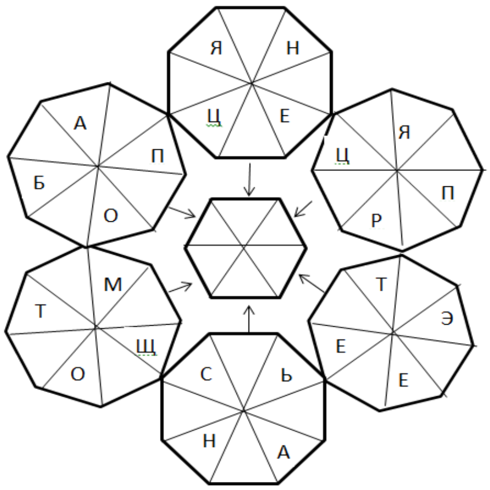
Сочетательное свойство:

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Задания практической части:

1. **Задание «С миру по нитке».** Сначала надо восстановить шесть слов (половина букв уже вписана), а после из секторов, от которых отходят стрелки, нужно взять буквы и поместить в центральную фигуру. У вас получится главное слово задания (фамилия основоположника теории множеств)!



2. Упражнение «Найди пару»

∩	пустое множество
B(A)	мощность множества А
U	пересечение
Ø	объединение
Ā	булеан множества А
|A|	универсальное множество
\	дополнение
U	разность

3. Определить в каких отношениях находятся между собой три множества:

1) A{1, 3}; B – множество нечетных положительных чисел; C – множество решений уравнения X^2-4X+3=0.

2) A={1, 2, 3}; B={2, 3}; C – множество решений уравнения X-1=0.

3) U={1, 2, 3, … , 20}, A – множество четных чисел, B – множество нечетных чисел.

4) A – множество решений уравнения $2X^2$-8X+6=0; B – множество решений уравнения X-1=0; N – множество натуральных чисел.

5) A={a, b, c}; B={a, b, d}; C={b, c}.

6) A={a, b}; B={a, c}; C={a, b, c}.

7) A={a}; B={{a}, {b}}; C={b}.

8) A – множество решений уравнения X-5=0; B - множество решений уравнения X^2-9=0; C={{5}, {3}}.

9) A – множество решений уравнения X^2-4X+3=0; B={{1}, {3}}; C – множество нечетных натуральных чисел.

10) A={a, b, c}; B={{c}}; C={c}.

11) A={a, b}; B={b, c}; C={a}.

12) A={a}; B={b}; C={a, b, c}.

4. Приняв множество первых 20 натуральных чисел в качестве универсума U, запишите его подмножества: A – четных чисел; B – нечетных чисел; C – квадратов чисел; D – простых чисел; и запишите множества, которые получатся в результате следующих операций:

1) A∪B; 2) A∩B; 3) A∩C; 4) A∩D; 5) C – A; 6) C – B; 7) C+D; 8) U – A;

9) U – B; 10) U – D; 11) U – A; 12) A∪B.

Эталоны ответов

1	Георг Кантер
2	Ø пустое множество

	∩ пересечение B(A) булеан множества A U универсальное множество \ разность Ā дополнение |A| мощность U объединение
3	1)A==C; B⊂A; B⊂C 2)B⊂A; B⊂C 3) U=A U B 4)N ⊂A; N ⊂ B; A⊂B 5)A ⊂C 6)A U B = C 7)B⊂A; B⊂C 8)A ⊂C 9)B⊂A; B⊂C 10)A ⊂C A ⊂B 11)B⊂A; B⊂C 12)C⊂A; C⊂B
4	1)A∪B= Ø 2) A∩B= U 3) A∩C ={4, 9:16};4) A∩D=={2};5) C – A=U; 6) C – B=A; 7) C+D=U; 8) U – A=B; 9) U – B; 10) U – D; 11) U – A; 12) A∪B.

Практическое занятие № 8

«Комплексные числа и действия над ними»

Цель работы: закрепить умения выполнять действия с комплексными числами**.**

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

Действия с комплексными числами

1. Сложение. Так как комплексное число можно интерпретировать как точку на комплексной плоскости, то если

$z_1=a_1+i\cdot b_1, z_2=a_2+i\cdot b_2$, имеем: $z_1+z_2=(a_1+a_2)+i\cdot(b_1+b_2)$

Например:

(3+2i) + (-4+7i) = (3-4)+(2+7)I = -1+9i.

2. Умножение.

а). Если числа заданы в алгебраической форме, имеем:

$$z_1\cdot z_2=(a_1+i\cdot b_1)\cdot(a_2+i\cdot b_2)=a_1a_2+i\cdot a_1b_2+i\cdot a_2b_1+i^2\cdot b_1b_2 .$$

Учитывая, что $i^2=-1$, имеем:

$$z_1\cdot z_2=a_1a_2-b_1b_2+i\cdot(a_1b_2+a_2b_1) .$$

в). Если числа заданы в комплексной форме $z_1=|r_1|(\cos\phi_1+i\cdot\sin\phi_1)$ и $z_1=|r_1|(\cos\phi_2+i\cdot\sin\phi_2)$, то $z_1z_2=|r_1|\cdot|r_2|\cdot(\cos(\phi_1+\phi_2)+i\cdot\sin(\phi_1+\phi_2))$.

При доказательстве мы используем формулы синуса суммы и косинуса суммы двух углов (проделайте самостоятельно).

3. Деление.

а). Если числа заданы в алгебраической форме, то числитель и знаменатель домножим на сопряженное к знаменателю число, чтобы в знаменателе получилось действительное число. Имеем:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+i\cdot b_1}{a_2+i\cdot b_2}=\frac{(a_1+ib_1)\cdot(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)}=\frac{a_1a_2-b_1b_2+i\cdot(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}$$

(проделайте вычисления самостоятельно, учитывая равенство $i^2=-1$).

в). Если числа заданы в комплексной форме $z_1=|r_1|(\cos\phi_1+i\cdot\sin\phi_1)$ и $z_1=|r_1|(\cos\phi_2+i\cdot\sin\phi_2)$, то

$$\frac{z_1}{z_2}=\left|\frac{r_1}{r_2}\right|\cdot(\cos(\phi_1-\phi_2)+i\cdot\sin(\phi_1-\phi_2))$$, если $z_2\neq o$.

4. Возведение в степень.

Формулу произведения двух комплексных чисел можно обобщить на n сомножителей. Отсюда, как частный случай, получается формула:

$$z^n=\left(r\cdot(\cos\phi+i\cdot\sin\phi)\right)^n=r^n\cdot(\cos(n\phi)+i\cdot\sin(n\phi))$$

5. Извлечение корня n-ой степени.

Имеет место формула Муавра:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{z}\cdot\left(\cos\frac{\phi+2\pi k}{n}+i\cdot\sin\frac{\phi+2\pi k}{n}\right)$$, где $k\in Z$.

Таким образом, комплексное число z имеет бесконечно много корней n-ой степени, причем различных корней – ровно n штук. Все корни расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ в вершинах правильного n-угольника.

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию

1. Дайте определение комплексного числа.
2. Что называется мнимой единицей?
3. В каких формах можно записать комплексное число?
4. Какие действия можно совершать над комплексными числами?
5. Объясните понятие сопряженного комплексного числа.

Задания для практического занятия:

1. Записать комплексные числа в алгебраической и тригонометрической форме, отметить их на комплексной плоскости.

а). $z=\cos\frac{\pi}{6}-i\cdot\sin\frac{\pi}{6}$, б). $z=-\cos\frac{\pi}{4}-i\cdot\sin\frac{\pi}{4}$, в). $\frac{(1+i)^{16}}{(1-i)^6}$

2. Выполнить действия. Ответ записать в алгебраической форме.

а). $\frac{(i-\sqrt{3})(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})}{1-i}$ б). $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{13}$ в). $\frac{(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})(1+\sqrt{3})^7}{i^5}$

3. Вычислить все различные корни их комплексного числа и нанести их на комплексную плоскость.

а). $\sqrt[6]{32(\cos\pi+i\sin\pi)}$ б). $\sqrt[4]{i}$ в). $\sqrt[3]{1}$ г). $\sqrt[4]{-1}$

4. Решить уравнения:

а). $z^2-6z+10=0$ б). $z^2+10+29=0$ в). $z^2+|z|=0$ г). $|z|-iz=1-2i$

5. При каких значениях параметра **a** уравнение имеет комплексные корни?

а). $x^2+10x+a=0$ б). $4x^2+4(a-2)x+1=0$

Найти эти корни при каком-либо значении параметра.

6. Какое множество точек на комплексной плоскости задается условием?

а). $(\mathrm{Re}\,z)^2+(\mathrm{Im}\,z)^2=2$ б). $\mathrm{Im}(z-\bar{z})=(\mathrm{Re}\,z)$ в). $z\cdot\bar{z}-4\,\mathrm{Im}\,z=0$

г). $\operatorname{Re}(z^2)=0$ д). $2\operatorname{Re}(iz)>|z|^2$ е). $\begin{cases} \frac{\pi}{6}\le \arg z \le \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{Im} z \le 3 \end{cases}$

Изобразить найденное множество на комплексной плоскости.

Эталоны ответов

1 а	$z_1=1{,}5e^{0{,}7i}$; $z_2=0{,}7e^{1{,}7i}$
1б	$z_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$
1в	$z_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
2а	$\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$,
2б	$2(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$
2в	$\cos\phi_1=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2}$¿}¿¿ $\Rightarrow \phi_1=\frac{\pi}{3}$¿
3а	
3б	$r_2=\|z_2\|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$
3в	$=\frac{-2+2i}{8}=-0.25+0.25i$
3г	$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(3-2i)}{(3-i)}=\frac{(3-2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{11-3i}{9+1}=\frac{11}{10}-\frac{3}{10}i$
4а	$7+22i$.
4б	$-2+2i$
4в	$-4+5i$
5а	$-4+3i$
5б	$r_2=\|z_2\|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$
6а	
6б	$r_1=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^3}=\sqrt{4}=2$
6в	$r_2=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$
6г	$z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Практическое занятие №9

«Решение практических задач на определение вероятности события»

Цель работы: сформировать умения решать задачи на определение вероятности события

Теоретические сведения: Понятие о случайном событии.

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется ***случайным***. В том случае, когда событие должно непременно произойти, его называют ***достоверным***, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти,- ***невозможным***.

События называются ***несовместными***, если каждый раз возможно появление только одного из них.

События называются ***совместными***, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

События называются ***противоположными***, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

События принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита: *A, B, C, Д, …* .

Классическое определение вероятности

Число, являющееся выражением меры объективной возможности наступления события, называется ***вероятностью*** этого события и обозначается символом *P(A)*.

Определение. Вероятностью события *A* называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события *A*, к числу *n* всех исходов т.е. $P(A)=\frac{m}{n}$.

Теорема сложения вероятностей

Вероятность наступления двух (или нескольких) несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$ или

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

Теорема умножения вероятностей

Вероятность одновременного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, вычисляется по формуле

$$P(A_1 A_2\ldots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n)$$.

Понятие о случайном событии.

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется ***случайным***. В том случае, когда событие должно непременно произойти, его называют ***достоверным***, а в том случае, когда оно заведомо не может произойти,- ***невозможным***.

События называются ***несовместными***, если каждый раз возможно появление только одного из них.

События называются ***совместными***, если в данных условиях появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

События называются ***противоположными***, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

События принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита: *A, B, C, Д, …* .

Классическое определение вероятности

Число, являющееся выражением меры объективной возможности наступления события, называется ***вероятностью*** этого события и обозначается символом *P(A)*.

Определение. Вероятностью события *A* называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события *A*, к числу *n* всех исходов т.е. $P(A)=\frac{m}{n}$.

Теорема сложения вероятностей

Вероятность наступления двух (или нескольких) несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$ или

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

Теорема умножения вероятностей

Вероятность одновременного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, вычисляется по формуле

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n).$$

Задача 1. В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

Решение. Общее число различных исходов есть *n*=1000. Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет m=200. Согласно формуле, получим

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{200}{1000}=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

Задача 2. На заочное отделение техникума поступают контрольные работы по математике из городов *A, B* и *C*. Вероятность поступления контрольной работы из города *A* равна 0,6, из города *B* - 0,1. Найти вероятность того, что очередная контрольная работа поступит из города *C*.

Решение. События «контрольная работа поступила из города *A*», «контрольная работа поступила из города В» и «контрольная работа поступила из города С» образуют полную систему, поэтому сумма их вероятностей равна единице:

$$0{,}6+0{,}1+p=1, \text{ т.е. } p=1-0{,}7=0{,}3.$$

Задача 3. В первой урне находится 6 черных и 4 белых шара, во второй- 5 черных и 7 белых шаров. Из каждой урны извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

Решение. Пусть A_1 - из первой урны извлечен белый шар; A_2 - из второй урны извлечен белый шар. Очевидно, что события A_1 и A_2 независимы.

Так как $P(A_1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, $P(A_2)=\frac{7}{12}$, то по формуле $P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)$ находим

$$P(A_1A_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{12}=\frac{14}{60}=\frac{7}{30}.$$

Задания практической части:

1. При стрельбе по мишени вероятность сделать отличный выстрел равна 0,3, а вероятность выстрела на оценку «хорошо» равна 0,4. Какова вероятность получить за сделанный выстрел оценку не ниже «хорошо»?

2. Вероятность того, что лицо умрет на 71-м году жизни, равна 0,04. Какова вероятность того, что человек не умрет на 71-м году?

3. Бросается один раз игральная кость. Определить вероятность выпадения 3 или 5 очков.

4. В урне 30 шаров: 15 белых, 10 красных и 5 синих. Какова вероятность вынуть цветной шар, если вынимается один шар?

5. В денежно-вещевой лотерее на серию в 1000 билетов приходится 120 денежных и 80 вещевых выигрышей. Какова вероятность какого-либо выигрыша на один лотерейный билет?

6. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании, если при первом испытании был извлечен черный шар.

7. В колоде 36 карт. Наудачу вынимаются из колоды 2 карты. Определить вероятность того, что вторым вынут туз, если первым тоже вынут туз.

8. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

9. Какова вероятность того, что из колоды в 36 карт будут вынуты подряд два туза?

10. Два стрелка стреляют по цели. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8, вторым стрелком — 0,7. Найти вероятность поражения цели двумя пулями в одном залпе.

11. Найти вероятность одновременного появления герба при одном бросании двух монет.

12. Имеется два ящика, содержащих по 10 деталей. В первом ящике 8, во втором 7 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе вынутые детали окажутся стандартными.

13. В семье двое детей. Принимая события, состоящие в рождении мальчика и девочки равновероятными, найти вероятность того, что в семье: а) все девочки; б) дети одного пола.

14. Пусть всхожесть семян оценивается вероятностью 0,7. Какова вероятность того, что из двух посеянных семян взойдет какое-либо одно?

15. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Какова вероятность того, что будет вынута пика или туз?

Эталоны ответов

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0,7	99,6	1/3	0,5	0,2	0,6	0,0857	0,1	1/105	0,38	0,5	0,56	а) 1/3 б) 1/2	0,42	1/3

Практическое занятие №10

«Решение задач с реальными дискретными случайными величинами»

Цель работы: закрепить умения по решению задач с реальными дискретными случайными величинами

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практической работы

1. **Случайной величиной** называется числовая переменная величина, принимающая в зависимости от случая те или иные значения с определёнными вероятностями.

2. **Математическим ожиданием** дискретной случайной величины называется число, равное сумме произведений всех значений случайной величины на вероятности этих значений $M(x) = \sum x_i p_i = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n$ **(1)**

3. **Дисперсией** дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания: $D(x) = M(x - M(x))^2$ **(2)** или или $D(x) = M(x^2) - (M(x))^2$ **(3)**

4. Дисперсия случайной величины характеризует степень разброса значений случайной величины относительно её математического ожидания.

Средним квадратичным отклонением дискретной случайной величины называется квадратный корень из дисперсии: $\delta(x) = \sqrt{D(x)}$ **(4)**

<u>Пример1.</u> Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение числа очков, выпадающих при бросании игральной кости.

<u>Решение.</u> Случайная величина X числа очков принимает значения1, 2, 3, 4,5, 6. Составим закон ее распределения:

Xi	1	2	3	4	5	6
Pi	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Тогда математическое ожидание вычисляется по формуле (1):

$$M(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = 3{,}5.$$

Закон распределения случайной величины x^2

Xi	1	4	9	16	25	36
Pi	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Тогда $M(x^2)=1/6(1+4+9+16+25+36)=1/6\cdot 91=91/6$

По формуле (3) найдем дисперсию: $D(x) = M(x^2) - (M(x))^2=91/6-(7/2)^2=35/12=2{,}92$

По формуле (4) вычислим среднее квадратичное отклонение

$\delta(x) = \sqrt{D(x)}=\sqrt{2{,}92}\approx 1{,}71$

Ответ: M(x)=3,5; D(x)=2,92; $\delta(x)$ =1,71.

Задания практической части:

1. Составить закон распределения и найти математическое ожидание суммы числа очков, которые могут выпасть при одном бросании двух игральных костей.
2. Найти математическое ожидание произведения числа очков, которые могут выпасть при одном бросании двух игральных костей
3. Для заданного закона распределения найти $M(x)$, $D(x)$, $\delta(x)$.

x_i	0	3	5	8
p_i	0.3	0.25	0.3	0.15

Эталоны ответов

<table>
<tr><td>1</td><td>
<table>
<tr><td>xi</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>pi</td><td>1/6</td><td>1/6</td><td>1/6</td><td>1/6</td><td>1/6</td><td>1/6</td></tr>
</table>
M(x)=7</td></tr>
<tr><td>2</td><td>M(x)=3,5</td></tr>
<tr><td>3</td><td>M(x)=3,45; D(x)= 7,9, δ(x)= 2,8.</td></tr>
</table>