**Анализ результатов ЕГЭ по математике (профильный уровень) в Холмогорском муниципальном уровне**

В Холмогорском муниципальном округе Архангельской области в 2024 году общее количество участников ЕГЭ (профильный уровень) составляет 21 человек, что составляет 30,43% от количества выпускников. В 2023 году профильную математику сдавали 48 человек. Количество выпускников в 11 классе постоянно снижается, снижается и доля выпускников, выбирающих ЕГЭ по математике на профильном уровне. И это приводит к уменьшению числа потенциальных абитуриентов технических специальностей вузов, где математика является профильным экзаменом.

Диаграмма распределения тестовых баллов участников ЕГЭ по предмету в 2024 г.

|  | Архангельская  область | | Холмогорский  район | |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 2022 г. | 2024 г. | 2022 г. | 2024 г |
| Не преодолели минимального балла, % | 8,36 | 6,54 | 0 | 0 |
| От минимального балла до 60 баллов, % | 35,91 | 33,18 | 38,71 | 22,22 |
| От 61 до 80 баллов, % | 48,39 | 45,17 | 55,56 | 70,37 |
| От 81 до 100 баллов, % | 7,30 | 15,12 | 12,90 | 7,41 |
| Получили 100 баллов, чел. | 1 | 6 | 0 | 0 |
| Средний тестовый балл | 58,07 | 62,22 | 64,06 | 64,48 |

### Основные результаты ЕГЭ по предмету

| № | Код ОО | Доля участников, получивших тестовый балл | | | | | Количество участников, получивших 100 баллов |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ниже минималь-ного | от минимального до 60 баллов | от 61 до 80 баллов | от 81 до 99 баллов | ***Средний балл*** |
| 1. | МБОУ «Белогорская СШ» | 0,00 | 66,67 | 33,33 | 0,00 | **49,3** | 0 |
| 2. | МБОУ «Брин-Наволоцкая СШ» | 0,00 | 25,00 | 75,00 | 0,00 | **52,7** | 0 |
| 3. | МБОУ «В-Матигорская СШ» | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 100,00 | **90** | 0 |
| 4. | МБОУ «Емецкая СШ» | 0,00 | 0,00 | 100 | 0 | **74,7** | 0 |
| 5. | МБОУ «Кехотская СШ» | 0,00 | 0,00 | 100 | 0,00 | **64** | 0 |
| 6. | МБОУ «Ломоносовская СШ» | 0,00 | 0,00 | 100 | 0,00 | **80** | 0 |
| 7. | МБОУ «Луковецкая СШ» | 0,00 | 0,00 | 50,00 | 50,00 | **74** | 0 |
| 8. | МБОУ «Рембуевская СШ» | 0,00 | 0,00 | 100 | 00,00 | **74** | 0 |
| 9. | МБОУ «Светлозерская СШ» | 0,00 | 100 | 0,00 | 0,00 | **27** | 0 |
| 10. | МБОУ «Холмогорская СШ» | 0,00 | 0,40 | 0,80 | 0,00 | **64,3** | 0 |
| Средний балл по району | | | | | | ***64,48*** |  |

Средний балл по району составил 64,48. Выше среднего результаты семи образовательных учреждений.

Лучшие результаты, как по среднему тестовому баллу, так и по доле участников, набравших высокие баллы, показали школы: Верхне-Матигорская, Ломоносовская, Кехотская, Луковецкая средние школы. Выпускников, получивших 100 баллов, нет. Максимальный балл – 90 (выпускник В-Матигорской средней школы).

Средний балл в ОО Холмогорского района

### 

### Краткая характеристика КИМ по учебному предмету

**КИМ по математике (профильный уровень) в 2024 году**, поступивший в Архангельскую область, соответствует спецификации. Он состоит из двух частей и содержит 19 заданий. Максимальный первичный балл составил 32 первичных балла.

По сравнению с 2023 годом в КИМ 2024 года внесены некоторые изменения. В первую часть КИМ включено задание по геометрии (задание 2), проверяющее умения определять координаты точки, вектора, производить операции над векторами, вычислять длину и координаты вектора, угол между векторами (код 13 по перечню проверяемых требований к предметным результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования; код 7.5 по перечню элементов содержания, проверяемых на ЕГЭ по математике). Максимальный первичный балл за выполнение экзаменационной работы увеличен с 31 до 32.

|  |  |
| --- | --- |
| № задания КИМ  2024, уровень сложности | Содержание |
| 1 Б | Планиметрическая задача на нахождение угла *ABD* четырехугольника *АВСD*, вписанного в окружность, при этом угол *АВС* равен 103о, угол *CAD* равен 42о. |
| 2 Б | Планиметрическая задача на нахождение длины векторов  , если |
| 3 Б | Стереометрическая задача на нахождение объёма многогранника, вершинами которого являются вершины *A, B, C, D, A1* прямоугольного параллелепипеда *ABCDA1B1C1 D1*, у которого *AB* = 3, *AD* = 9, *AA1* = 4. |
| 4 Б | Задача на классическое определение вероятности – нахождение вероятности того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин, если в группе туристов 20 человек и с помощью жребия они выбирают семь человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. |
| 5 П | Задание на умение моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей: Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней.  Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первую мишень и не попадёт в три последние. |
| 6 Б | Простейшее иррациональное уравнение |
| 7 Б | Нахождение значения тригонометрического выражения  с использованием формул приведения и синуса двойного угла |
| 8 Б | Задание на проверку умения выполнять действия с функциями: по графику производной функции найти количество точек максимума функции, принадлежащих отрезку |
| 9 П | Практико-ориентированная задача на нахождение времени, прошедшей после выезда мотоциклиста из города, если известны расстояние, ускорение и скорость движения |
| 10 П | Текстовая задача на работу: Юля и Уля, работая вместе, пропалывают грядку за 24 минуты, а одна Уля — за 120 минут. За сколько минут пропалывает эту грядку одна Юля?? |
| 11 П | Задание на выполнение действий с функциями: используя изображение графика показательной функции найти значение функции *f*(5) |
| 12П | Задание на выполнение действий с функциями: найти точку максимума функции |
| 13 П | Задание на решение тригонометрического уравнения с использованием формул двойного угла и формул приведения, и отбора корней |
| 14 П | Стереометрическая задача, в которой рассматривается правильная четырёхугольная пирамида и необходимо выполнить два пункта: а) доказать, что заданная плоскость параллельна данной прямой. В пункте б) необходимо вычислить длину отрезка, по которому плоскость пересекает боковую грань |
| 15 П | Задание на решение неравенства, содержащего показательную функцию, после замены переменной оно сводится к решению дробно-рационального неравенства |
| 16 П | Задача экономического содержания на кредит в банке с заданными условиями возврата и тремя равными платежами. Требуется найти сумму кредита. |
| 17 П | Планиметрическая задача, конфигурация которой связана с пятиугольником *ABCDE*, вписанном в окружность. Известно, что *AB=CD=*3, *BC=DE=*4. Нужно доказать, что *AC=CE* и найти длину диагонали *ВЕ,* если *AD=*6 |
| 18 В | Задание на нахождение значения параметра, при котором система из двух уравнений с модулем имеет ровно четыре различных решения. |
| 19 В | Задание на проведение исследования математических моделей. В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которыхравна 20 тонн или 60 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 75 % от общего количества контейнеров.  Исследуется различные варианты соотношения между массой контейнеров с песком и массой всех контейнеров (в процентах) |

Некоторые задания из КИМ 2024 года или по содержанию, либо по методу решения аналогичны заданиям из КИМ 2022. Это касается планиметрической задачи 1 (вписанные углы), стереометрического задания 3 (нахождения объема, хотя в 2024 году рассматривались многогранники, а в 2022 году – тела вращения), задания 6 (простейшее иррациональное уравнение), задание 7 – преобразование тригонометрического выражения – имеют различный вид, но близки по использованным формулам приведения и двойного угла), задания 11 – действия с графиками, в 2024 году – показательная функция, в 2022 году – логарифмическая, задания 12 – нахождение максимума функции, но функции существенно отличаются. В задании 10 в 2024 году, как и в 2023 году предлагалась задача на совместную работу, но решение сводилось к различным видам уравнений. В задании 4 предлагалась стандартная задача на классическое определение вероятности, в задании 5 – задача по методу решения близка задаче из КИМ 2022 года.

Задание 13 в 2024 году было представлено в виде стандартного уравнения, при решении которого, как и в прошлые годы использовались формулы двойного угла, а также формулы приведения. В результате преобразований решение сводилось к рассмотрению совокупности двух простейших тригонометрических уравнений.

Задание 15 представляло, как и в 2022 году представляло собой неравенство, содержащее показательную функции, но имелись отличия в преобразованиях. Метод решения стандартный – метод интервалов.

Задание 16 в отличие от прошлых лет представляло стандартную экономическую задачу на кредит.

В задании 14 использовалась обычная конфигурация – правильная четырехугольная пирамида со стандартным заданием в пункте а) доказать параллельность прямой и плоскости. Выполнение пункта б) в отличие от прошлых лет не требовало существенных рассуждений и вычислений.

В задании 17 в отличие от 2022 и 2023 годов использована конфигурация, связанная с вписанным в окружность пятиугольником. Задача имеет различные способы решения.

Задание 18 близко к заданиям из КИМ прошлых лет по методу решения – функционально-графическому.

В задании 19, в отличие от прошлых лет, было сложнее привести пример в пункте а)

Таким образом, на основе сравнения заданий КИМ 2024, 2023 и 2022 годов можно утверждать, что сохранена преемственность в тематике, содержании заданий, методах их решения. Но в результате изменений, внесенных в КИМ 2024 года, добавлено одно новое задание.

### Анализ выполнения заданий КИМ

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер  задания в КИМ | **Проверяемые элементы содержания / умения** | Уровень сложности задания | Процент выполнения задания |
| 1 | Геометрия, фигуры на плоскости/ Умение оперировать понятием плоский угол; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение вычислять геометрические величины (угол), используя изученные формулы и методы | Б | 92,6 |
| 2 | Геометрия, координаты и векторы/ Умение оперировать понятиями: вектор, координаты вектора, сумма векторов | Б | 92,6 |
| 3 | Геометрия, многогранники/ Умение оперировать понятием объём фигуры; умение использовать геометрические отношения при решении задач; умение вычислять геометрические величины (объём) | Б | 96,5 |
| 4 | Вероятность и статистика/ Умение оперировать понятиями:  случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность | Б | 88,9 |
| 5 | Вероятность и статистика/ Умение оперировать понятиями:  случайное событие, вероятность случайного события; применять формулы сложения и умножения вероятностей | П | 77,8 |
| 6 | Уравнения, иррациональные уравнения/ Умение решать уравнения с помощью различных приёмов | Б | 100 |
| 7 | Числа и вычисления, преобразование выражений/ Умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений | Б | 77,8 |
| 8 | Начала математического анализа, применение производной к исследованию функций на монотонность и экстремумы/ Умение оперировать понятиями: функция, производная функции, умение использовать производную для исследования функций | Б | 74,1 |
| 9 | Уравнения и неравенства/ Умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов | П | 85,2 |
| 10 | Уравнения и неравенства, целые и дробно-рациональные уравнения/ Умение решать текстовые задачи разных типов, составлять уравнения по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов | П | 77,8 |
| 11 | Функции и графики, показательная и логарифмическая функции, их свойства и графики/ Умение выражать формулами зависимости между величинами | П | 85,2 |
| 12 | Начала математического анализа, применение производной к исследованию функций на монотонность и экстремумы/ Умение оперировать понятием: экстремум функции, умение находить производные элементарных функций;  умение использовать производную для исследования функций | П | 77,8 |
| 13 | Уравнения и неравенства, тригонометрические уравнения/ Умение решать уравнения с помощью различных приёмов | П | 63 |
| 14 | Геометрия, прямые и плоскости в пространстве, многогранники/ Умение оперировать понятиями:  прямая, плоскость, параллельность прямых и плоскостей, умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, использовать геометрические отношения при решении задач; находить и вычислять геометрические величины (длина),  используя изученные формулы и методы; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии | П | 11,1 |
| 15 | Уравнения и неравенства, показательные и логарифмические неравенства/ Умение решать неравенства и их системы с помощью различных приёмов | П | 25,9 |
| 16 | Числа и вычисления, степень с рациональным показателем, свойства степени/ Умение моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат; умение решать текстовые задачи разных типов, в том числе задачи из области управления личными и семейными финансами | П | 29,6 |
| 17 | Геометрия, фигуры на плоскости/ Умение оперировать понятиями:  величина угла; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии,  использовать геометрические  отношения при решении задач;  умение находить и вычислять  геометрические величины (длина, угол), используя изученные формулы | П | 14,8 |
| 18 | Уравнения и неравенства, системы уравнений с параметрами/ Умение оперировать понятиями: система уравнений, равносильность уравнений и систем; умение решать системы с параметром; умение выражать формулами зависимости между величинами; использовать свойства и графики функций для решения задач с параметрами | В | 0 |
| 19 | Числа. Владение методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение приводить примеры и контрпримеры, проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений; умение выбирать подходящий метод для решения задачи | В | 11,1 |

**Выявление сложных для участников ЕГЭ заданий**

*В рамках выполнения анализа, по меньшей мере, необходимо указать линии заданий с наименьшими процентами выполнения среди них отдельно выделить:*

Согласно Спецификации в КИМ ЕГЭ 2024 года, в профильный уровень включены 7 заданий базового уровня с кратким ответом, это задания – это задания 1–4, 6, 7, 8. Средний процент выполнения заданий базового уровня составил от 77,8% (задания 7) до 100 % (задание 6). Задание 6 (решение иррационального уравнения) оказалось посильным для 100% участников.

Средний процент выполнения заданий повышенного уровня сложности (это задания 5, 9–12) составил от 74,1% (задание 8) до 85,2 (задание 11). Среди заданий повышенного уровня с развернутым ответом зачетные баллы получили: 63 % - задание 13; 29,6% - задание 16; 25,9% - задание 15; 14,8% - задание 17; 11,1% - задание 14; 11,1% - задание 19. Задание 18 не решил никто.

В целом результаты участников ЕГЭ 2024 года оказались более высокими по сравнению с 2023 годом.

Участники профильного экзамена в 2024 г., как и прежде, демонстрируют высокую степень овладения базовыми умениями: решение уравнений различных типов, простейшие геометрические умения. Среди заданий с развернутым ответом наибольшее количество полных баллов, как и в прошлые годы, получено по заданиям 13 и 15. Задачи по стереометрии (14), планиметрии (17) и задание с параметром (18) остаются наиболее сложными задачами части 2 профильного ЕГЭ по математике. Это говорит о том, что необходимо продолжать работу по развитию геометрической составляющей школьной математики, в том числе по формированию наглядных геометрических представлений в основной школе, которые станут базой для изучения стереометрии.

### Содержательный анализ выполнения заданий КИМ

Результаты профильного ЕГЭ 2024 года свидетельствуют о том, что проверяемые элементы содержания, изучаемые в учебном курсе «Алгебра и начала математического анализа», традиционно осваиваются лучше, чем элементы курса «Геометрия». Участники в целом продемонстрировали неплохую технику преобразований и вычислений и решения уравнений. Тем не менее ошибки, в том числе при раскрытии скобок и простейших преобразованиях, остаются одной из основных причин неверного выполнения заданий: при правильных рассуждениях и верном алгоритме решения участники часто получают неверный ответ за счет ошибок в решении простейших уравнений и при выполнении арифметических действий. Достаточно много таких ошибок было допущено при выполнении заданий 13 и 15. В геометрии иная картина. Преподавание геометрии алгоритмизируется намного хуже, чем алгебры: количество геометрических конфигураций, возникающих даже в несложных задачах с двумя-тремя объектами, огромно. При этом определенный рост акцента в экзамене профильного уровня на важные для инженерных специальностей геометрические задания способствовал росту геометрической подготовки выпускников.

Содержательный анализ выполнения заданий КИМ, вызвавших наибольшие затруднения, проведем на основе открытого варианта 301; участниками экзамена в данном случае считаем участников, выполнявших вариант 301. Этот вариант выполняли 271 человек.

В пункте 3.2.1 был проведен статистический анализ выполнения заданий ЕГЭ по математике, на основе которого выявлено, что среди заданий с кратким ответом наиболее сложными (процент правильных ответов составил менее 80%) оказались задания: 7 (преобразование тригонометрических выражений), а также задания 8, 10, 12 (повышенный уровень).

**Задание № 7** – задание базового уровня сложности с кратким ответом на преобразование выражений представлено следующей задачей: Найдите значение тригонометрического выражения

Для решения этого задания необходимо применить формулы приведения и формулы синуса двойного угла. Можно сначала применить формулу двойного угла, а затем воспользоваться периодичностью функции синус. Правильный ответ получили 77,8% участников. При выполнении такого рода заданий также начинаем с анализа условия задачи. Необходимо также отработать до автоматизма применение формул приведения. Можно использовать мнемонические приемы: «покачай головой и узнаешь ответ, изменится функция (да – это π/2, 3π/2), нет – это π или 2π». Включать задания: какой четверти принадлежит угол или число, определите знак тригонометрической функции. Выполнять задания, связанные с периодичностью функции, в качестве аргумента использовать значения, например, 13π/3, 17π/4. Проверять знание табличных значений тригонометрических функций как углов, так и, записанных в радианах. Выполнять задания на применение формул двойного угла.

**Задание № 8** – задание базового уровня с кратким ответом на применение производной к исследованию функций представлено следующей задачей:

|  |  |
| --- | --- |
| На рисунке изображён график *y=f /(x)* – производной функции *f(x)*, определённой на интервале (–12;12). Найдите количество точек максимума функции *f(x)*, принадлежащей отрезку [–6;11]. |  |

Правильный ответ получили 74,1% участников. Из ошибочных ответов чаще всего участники подсчитали количество точек минимума на указанном отрезке (количество точек, в которых производная меняет знак с минуса на плюс), а также, скорее всего, подсчитали количество максимумов функции производная х. К выполнению этого задания приступили все участники экзамена.

Следует усилить акцент в изучении курса начала анализа на наглядные, смысловые вопросы, понимание сути производной, анализ графиков функций и их производных.

**Задание № 10** – задание повышенного уровня с кратким ответом на решение текстовой задачи на работу представлено заданием: Юля и Уля, работая вместе, пропалывают грядку за 24 минуты, а одна Уля — за 120 минут. За сколько минут пропалывает эту грядку одна Юля?

Правильный ответ получили 77,8% участников. Типичные ошибки связаны с неумением составить математическую модель, вычислительные ошибки составляют гораздо меньшую долю. Несформированность умений выполнять задания такого типа является одним из факторов, который вызывает затруднения у школьников и при решении физических задач.

Необходимо уделять больше внимания решению текстовых задач при проведении итогового повторения в 9 классе основной школы. Текстовые задания такого уровня сложности включены в КИМ ОГЭ в 9 классе. Необходимо обучать учащихся приёмам поиска решения текстовых задач, знакомить их не только с алгебраическим, но и геометрическим способом решения текстовых задач. Использование графиков и подобия треугольников значительно упрощает вычисления.

**Задание № 12** – задание повышенного уровня с кратким ответом на приложения производной было представлено заданием: найти точку максимума функции *y=*9∙ln(*x –* 4) – 9*x* – 7. Правильный ответ получили 77,8% участников. Ошибочные ответы получены в результате вычислительных ошибок и ошибок в преобразованиях. Ответы свидетельствуют об отсутствии у этой группы участников умения оценивать правдоподобность полученных результатов (берутся числа, не входящие в область определения функции).

Необходимо с учащимися отрабатывать навыки нахождения производных элементарных функций, отрабатывать алгоритм нахождения максимума и минимума функции, максимума и минимума функции на отрезке, на интервале. Можно составить для учащихся схемы нахождения максимума и минимума функции.

Наибольший интерес для содержательного анализа представляет анализ ошибок, допущенных при решении заданий с развернутым ответом. Результаты выполнения заданий с развернутым ответом в 2024 году показывают, что за задание 13 более половины участников получили зачетные баллы, по заданиям 15 и 16 около 30%, по остальным заданиям результаты значительно ниже. Анализ ошибок будем проводить по заданиям открытого варианта 301, а итоги выполнения каждого конкретного задания по всему массиву участников из региона.

**Задание № 13** проверяло умение решать тригонометрические уравнения повышенного уровня сложности. В варианте 301 предлагалось задание:

а) Решите уравнение 

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку 

К выполнению этого задания обычно приступает большинство участников экзамена, но и допускается очень много ошибок. При решении этого уравнения необходимо было применить формулу приведения, преобразовать косинус двойного угла, выполнить разложение на множители. В результате преобразований решение сводилось к решению совокупности двух уравнений. Первое уравнение  и второе .

Основные ошибки были связаны с решением простейших тригонометрических уравнений. Это достаточно типичные ошибки, которые допускают выпускники на протяжении многих лет.

Перечислим некоторые из них:

* ошибки при решении уравнения . Были получены ошибочные ответы
* ошибки при решении уравнения . Неправильное использование общей формулы: ± ошибки в использовании периода – появлялись лишние корни: потеря серии корней при записи ответа без использования тригонометрической окружности .

Также допускались ошибки:

* потеря знака при использовании формулы приведения: *sin (x+π)=sin*x вместо *sin (x+π)=-sinx*.
* ошибки в знаках при вынесении общего множителя, например, ; . Особенно часто аналогичная ошибка появлялась в других вариантах, когда в первом уравнении встречались два знака минуса. Таким образом, несформированность умения выносить множитель в основной школе привела к ошибкам на ЕГЭ.

При выполнении пункта б) встречался неполный перебор как при использовании общей формулы так и при использовании серий корней. При отборе с помощью неравенств допускались вычислительные ошибки, при использовании тригонометрической окружности отмечались не все точки, иногда не выделялась дуга, на выделенной дуге отмечались точки, не принадлежащие указанному промежутку.

Хотя задания на отбор корней тригонометрического уравнения включаются в КИМы на протяжении многих лет, у участников экзамена это умение до конца не сформировано. Возможно, что учителя, показав способы отбора корней, в дальнейшем используют перебор в усеченном виде для ускорения процесса решения задания.

При изучении темы «Тригонометрические уравнения» необходимо больше внимания уделять решению простейших тригонометрических уравнений, использовать задания «Найди ошибку», задания на запись решения простейшего уравнения разными способами. При выполнении задания на отбор корней продемонстрировать различные способы отбора, составить алгоритм отбора корней с помощью тригонометрической окружности.

**Задание № 14** проверяло умение выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами на повышенном уровне. Задание содержало два пункта. В первом пункте задание нужно доказать, а во втором пункте – вычислить. В варианте 301 предлагалась задача:

В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* cоснованием *ABCD* точка *О* – центр основания пирамиды, точка *M* – середина ребра *SC*, точка *К* делит ребро *ВС* в отношении *ВК*: *КС* = 3 : 1, а *АВ*=2 и *SO=* .

а) Докажите, что плоскость *OМК* параллельна прямой *SA*.

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость *ОМK* пересекает грань *SAD.*

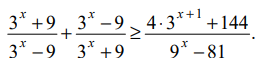
Это задание традиционно является одним из самых сложным для участников экзамена. Максимальный балл за выполнение задания равен 3. Зачетные баллы получили 11,1% участников.

Основные сложности в выполнении этого задания связаны в основном с тем, что в ряде школ на уроках стереометрии решают в основном решают простейшие наглядные и вычислительные задачи. Об этом наглядно свидетельствуют результаты выполнения геометрических заданий первой части. Поэтому необходимо обращать внимание на решение сложных многоходовых задач, на проведение логически строгих рассуждений. Именно ошибки в рассуждениях, использование ошибочных утверждений привело к нулевым баллам в пункте а) у многих участников.

При решении стереометрических задач выпускники очень часто допускают ошибки в формулировках теорем, не способны выявлять закономерности и противоречия в рассматриваемых явлениях. Для формирования базовых логических действий можно применять задания «Найди ошибку», «Укажите верные утверждения», «Заполните пропуски в представленном доказательстве». Необходимо учить анализу условия и поиску решения стереометрических задач, приемам построения чертежа, решать задачи разными методами.

|  |  |
| --- | --- |
|  | В основном участники экзамена пытались доказать пункт а),  но при доказательстве параллельности плоскости *OМК* и прямой *SA,* участники экзамена только доказывали, что *ОМ –* средняялиния и на основании этого факта делали вывод о параллельности прямой и плоскости, то есть не обращались к признаку параллельности прямой и плоскости.  В пункте б) некоторые участники использовали неверные утверждения: если прямая параллельна плоскости, значит она параллельна любой прямой, лежащей в плоскости, так, например, обосновывали параллельность прямых *AS* и *NL.* Кроме того, многие участники испытывали затруднения в использовании теоремы: если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то прямая пересечения этих плоскостей параллельна данной прямой. Таким образом следует больше внимания уделять формулировке теорем, применению теорем при доказательстве различных утверждений. |
|  |  |

**Задание № 15** проверяло умение решать неравенства на повышенном уровне. В варианте 301 оно было представлено заданием:

Решите неравенство:

Решение данного неравенства сводится к замене показательной функции и преобразованию дробно-рационального неравенства к виду



Это неравенство решается методом интервалов.

Как и в прошлые годы участниками было допущено много ошибок, особенно в оформлении метода интервалов.

Основные ошибки:

* потеря отдельно стоящей точки при записи результата применения метода интервалов;
* умножение обеих частей неравенства на выражение с переменной, стоящее в знаменателе и деление обеих частей на ;
* использование правила чередования знаков без перехода к рациональному неравенству.
* рассмотрение при расстановке знаков интервала (-9;9) вместо двух интервалов (-9;1) и (1; 9).
* ошибочный переход только к одной системе; числитель неотрицателен, знаменатель положителен;
* ошибки и неточности в оформлении решения методом интервалов. Например, находят нули числителя, в нашем случае *t*=3. Точки, в которых знаменатель не равен нулю, это значение *t*=9, так как *t*>0. Затем переходят к переменной *x* и на числовой прямой каким-то образом определяют знаки в полученных интервалах.

Поскольку в последнее время обобщенный метод интервалов получает всё большее распространение, необходимо показать учащимся правильное его применение при решении неравенств, содержащих не только показательную функцию, но и логарифмическую функцию и др.

**Задание № 16** – задание с развернутым ответом повышенного уровня сложности, это задание проверяло применение знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни, умение строить и исследовать математические модели. Это задание – текстовая задача с экономическим содержанием (задача на кредиты).

В 2024 году в 301 варианте предлагалась задача:

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

* каждый январь долг увеличивается на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
* с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма платежей после полного погашения кредита должна быть на 77 200 рублей больше суммы, взятой в кредит?

В 2024 году участники экзамена показали один из самых лучших результатов за время проведения профильного ЕГЭ. Зачетные баллы получили 29,6% участников, в то же время полностью решили задачу не все. Таким образом, часть выпускников смогли правильно построить модель, но не смогли получить правильный ответ из-за вычислительных ошибок, проблем в преобразовании полученных выражений. Поэтому при подготовке к ЕГЭ следует обратить внимание на приемы вычислений (разложение на множители, использование признаков делимости, приемы быстрых вычислений).

Отметим основные ошибки, допущенные участниками:

* ошибки в построении модели (правильно составляли одно уравнение, забывая о втором – разность между выплатами и кредитам равна данному значению);
* проведение вычислений в десятичных дробях, а не в обыкновенных, что привело к повышению вычислительной сложности задачи и массовым ошибкам в вычислениях:
* принятие данного 77200 за сумму платежей.

Необходимо учить учащихся составлять математическую модель задачи, можно использовать табличный способ записи.

**Задание № 17** проверяло умение выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами на повышенном уровне. В Холмогорском муниципальном округе зачетные баллы получили 13,8% участников.

В варианте 301 это задание было представлено задачей:

Пятиугольник *ABCDE* вписан в окружность. Известно, что *AB=CD* = 3, *BC= DE* = 4.

а) Докажите, что *AC=CE*.

б) Найдите длину диагонали *BE*, если *AD* = 6.

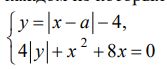
Результаты участников 2024 года получили 14,8% выпускников Холмогорского муниципального округа.

|  |  |
| --- | --- |
|  | При доказательстве пункта а) участники использовали различные способы доказательства: на основе равенства диагоналей равнобедренных трапеций; на основе доказательства равенства углов *ABC* и *CDE,* на основе равенства треугольников *ABC* и *CDE.*  Основные ошибки участников:   * распознавание четырехугольников ABCD и BCDE как равнобоких трапеций без обоснования. Аналогично распознавание BCDM как параллелограмма без обоснования в пункте б); * вывод о равенстве вписанных углов делается со ссылкой на равенство хорд, а не дуг; * ошибки в названии признаков подобия треугольников (По 3-м углам). |

**Задание № 18** относится к заданиям высокого уровня сложности. Задания высокого уровня сложности – это задания не на применение одного метода решения, а на комбинацию различных методов. Для успешного выполнения задания 18 необходим, кроме прочных математических знаний, также высокий уровень математической культуры, которая формируется в течение периода обучения по программе профильного обучения. Задание № 18 проверяло умение решать уравнения и неравенства с параметром.

В 2024 году в открытом варианте 301 предлагалась задача:

Найдите все значения *a*, при каждом из которых система уравнений



имеет ровно четыре различных решения.

В 2024 году процент участников, как получивших зачетные баллы, так и выполнивших задание полностью, равен 0. Это связано с усложнением задания из-за включения двух уравнений с модулем.

Использовались три метода решения: аналитический; построение в координатах *xOy* и в координатах *xOa*.

Типичные ошибки участников:

1) Неверное раскрытие модуля (пропуск случая =0 подмодульного выражения).

2) Упущение ограничений на правую часть при раскрытии модуля во втором уравнении: (пропущено: и

(пропущено: .

3) При графическом решении контрольные значения параметров определяются из соображений пересечения частей графиков, доказательство, что часть прямой является касательной к ветви параболы ошибочно опускается.

Для решения задач с параметром нужна хорошая математическая подготовка. Можно показать учащимся различные способы решения задания – аналитический, функционально-графический.

**Задание № 19 –** задание высокого уровня сложности, проверяло умение строить и исследовать простейшие математические модели, умение осуществлять поиск решения.

В 2024 году в варианте 301 оно было представлено заданием:

В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 60 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 75 % от общего количества контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 80 % от общей массы всех контейнеров?

б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 40 % от общей массы всех контейнеров?

в) Какую наибольшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

К выполнению этого задания обычно приступает большинство участников экзамена, но в этом году зачетные баллы получили 11,1% (2 ученика, причем 1 выпускник получил максимальный балл).

Типичные ошибки участников:

* в пункте а) приводили примеры, не соответствующие условию, что количество контейнеров составляет 75% от общего количества контейнеров;
* в пунктах *б* и *в* выводы делался на частных примерах, без общих рассуждений (Пусть было 100 контейнеров, из них 75 с сахарным песком).

Задание высокого уровня сложности, верное выполнения всего задания даёт возможность продемонстрировать готовность к продолжению образования в ведущих вузах. Пункт а) задачи имеет конструктивный характер и доступен многим участникам экзамена, в том числе и с низкой математической подготовкой. Важно при обучении на конкретных примерах показать, что пункт а) не требует специальных знаний – достаточно умения прочитать и понять условие задачи, чтобы получить нужную математическую конструкцию. При этом нужно советовать учащимся проверять соответствие приведенного примера всем требованиям задачи.

Таким образом, на основе проведенного анализа можно отметить, что большинство участников ЕГЭ по математике профильного уровня приступало к решению заданий № 13, 15, 16, 19, поэтому и большинство ошибок появляется при выполнении этих заданий. Характерно, что одни и те же ошибки появляются на протяжении нескольких лет.

При выполнении геометрических заданий № 14 и 17 большинство участников испытывали затруднения в проведении доказательств, в использовании теоретических фактов, применении методов решения планиметрических задач. Кроме того, большинство участников просто не приступало к выполнению заданий по стереометрии. Рекомендуем при изучении геометрии уделять больше внимания обоснованиям при решении геометрических задач, решению задач на доказательства. Необходимо обратить внимание на корректность проводимых учащимися доказательств.

**Анализ метапредметных результатов обучения, повлиявших на выполнение заданий КИМ**

В кодификаторе ЕГЭ 2024 год по математике (профильный уровень) выделены следующие метапредметные результаты: познавательные УУД (базовые логические действия, базовые исследовательские действия, работа с информацией) и регулятивные (самоорганизация и самоконтроль).

Среди метапредметных результатов основное внимание уделим овладению школьниками универсальными учебными познавательными действиями, которые включают в себя: базовые логические действия, базовые исследовательские действия и работу с информацией.

На успешность выполнения заданий базового уровня могли повлиять:

- недостаточная сформированность таких базовых логических действий как установление существенного признака применимости известных формул, неумение самостоятельно сформулировать проблему и определить направления свой деятельности по ее решению.

- слабая сформированность базовых логических действий (неумение выявлять закономерности, определять цели деятельности), базовых исследовательских действий (невысокий уровень исследовательских навыков), а также слабая сформированность умения работать с информацией;

- невладение навыками осуществлять анализ и интерпретацию информации из представленного графика;

- затруднения в построении чертежа, в считывании и анализе информации представленной чертежом, выявлении закономерностей, проведении доказательства, в проведении анализа условия задачи, выдвижении гипотез, поиска решения задачи;

- неумение устанавливать существенные основания для классификации, выявлять закономерности в осуществляемых платежах, оценивать соответствие результатов целям;

- недостаточная сформированность базовых исследовательских действий таких как: владеть навыками исследований, анализировать полученные в ходе решения задачи результаты, критически оценивать их достоверность, уметь переносить знания в практическую деятельность.

Задания 18 и 19 (высокого уровня сложности) свидетельствует о том, что у большинства недостаточно сформированы познавательные УУД, которые необходимы при решении заданий высокого уровня сложности. Это базовые логические действия: определять цели деятельности, задавать параметры и критерии их достижения, устанавливать существенный признак для сравнения и классификации (определение модуля); базовые исследовательские действия: владеть навыками исследовательской деятельности, анализировать полученные в ходе решения задачи результаты, критически оценивать их достоверность, способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания: работа с информацией: самостоятельно осуществлять интерпретацию информации, представленной на графике.

Недостаточность сформированности регулятивных действий (самоорганизация, самоконтроль) у некоторых выпускников особенно ярко проявляется при выполнении тех заданий, в которых ошибку можно заметить в результате проверки, прикидки ответа. Это такие задания как: 6 (решение уравнения – простая подстановка), задание 7 (значение выражения не может быть больше 3), задание 10 – посмотреть на реальность полученного ответа, не забыть перевести часы в минуты, задание 12 – проверить, входит ли полученное число в область определения или существует ли логарифм при этом значении), задание 16 – ответ целое число.

### Выводы об итогах анализа выполнения заданий, групп заданий:

В 2024 году большинство участников экзамена продемонстрировали достаточно высокую степень овладения базовыми умениями и основными элементами содержания. Это такие элементы содержания, как: числа и вычисления, уравнения и неравенства, функции и графики, начала математического анализа, вероятность и статистика. Также можно утверждать, что у большинства участников экзамена на базовом уровне сформированы умения использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, строить и исследовать простейшие математические модели, решать уравнения, выполнять действия с функциями и графиками, на выполнять действия с геометрическими фигурами.

Нельзя считать достаточно сформированными умения решать стереометрические задачи и планиметрические задачи повышенного уровня сложности, выполнять преобразования тригонометрических выражений, решать неравенства, уравнения повышенного уровня сложности. Большинство выпускников испытывают затруднения при решении задач с параметром.

### Рекомендации учителям по совершенствованию организации и методики преподавания предмета на основе выявленных типичных затруднений и ошибок

Результаты экзамена по математике позволили выявить ряд проблем, на которые необходимо обратить внимание в обучении математике.

У многих участников экзамена недостаточно выработаны умения самоконтроля, самопроверки, поэтому многие выпускники, получив результат, сразу же записывают его в ответ, не удосуживаясь провести простейшую прикидку. Для решения этой проблемы необходимо знакомить учеников с приемами самоконтроля и приёмам самопроверки, ставить задания на самостоятельных поиск и устранение допущенных ошибок, пошаговый контроль равносильности осуществляемых преобразований.

Простейшую прикидку можно проводить при решении неравенств, особенно логарифмических, подставив некоторые значения из ответа в неравенство. При решении экономической задачи – определять по условию – какое должно получиться число – целое, рациональное, требуется ли округление. Если в результат не требует округления, но при делении не удается получить целое число, конечную десятичную дробь – значит нужно искать ошибку.

При изучении курса алгебры учителям математики следует больше внимания уделять формированию культуры вычислений и преобразований, включать задания на обоснование выбора способа представления чисел, выбора формул, стратегического планирования преобразований, пользоваться приемами, упрощающими вычисления.

В 2024 году некоторые выпускники не смогли решить логарифмическое неравенство, так как не увидели в выражении, стоящем под знаком логарифма, куб разности. Необходимо учить учащихся приемам устного счета, например, способам извлечения квадратных корней из натуральных чисел с использованием признаков делимости, разложения на простые множители. Эта проблема возникает при решении текстовых задач, когда приходится извлекать квадратный корень из четырехзначного или пятизначного числа. Можно познакомить учащихся с приемами возведения в квадрат чисел вида 10а+5. В советской школе учащихся знакомили с алгоритмом извлечения квадратного корня из натурального числа. Неплохо было бы вернуться к этой традиции.

Целесообразно больше внимания уделять психологической подготовке участников экзамена: концентрации внимания, правильному распределению времени, восстановлению частично утраченных знаний (что делать,   
если вы забыли нужную вам формулу?), преодолевать страх перед незнакомой ситуацией. Настраивать учащихся на решение и геометрических задач. В этом году участники получали баллы за задания 13, 15, 16, 18, 19, даже 4 балла за задание 18, но к геометрическим заданиям даже не приступали, хотя в этом году получить баллы за задания 14 и17 было вполне реально.

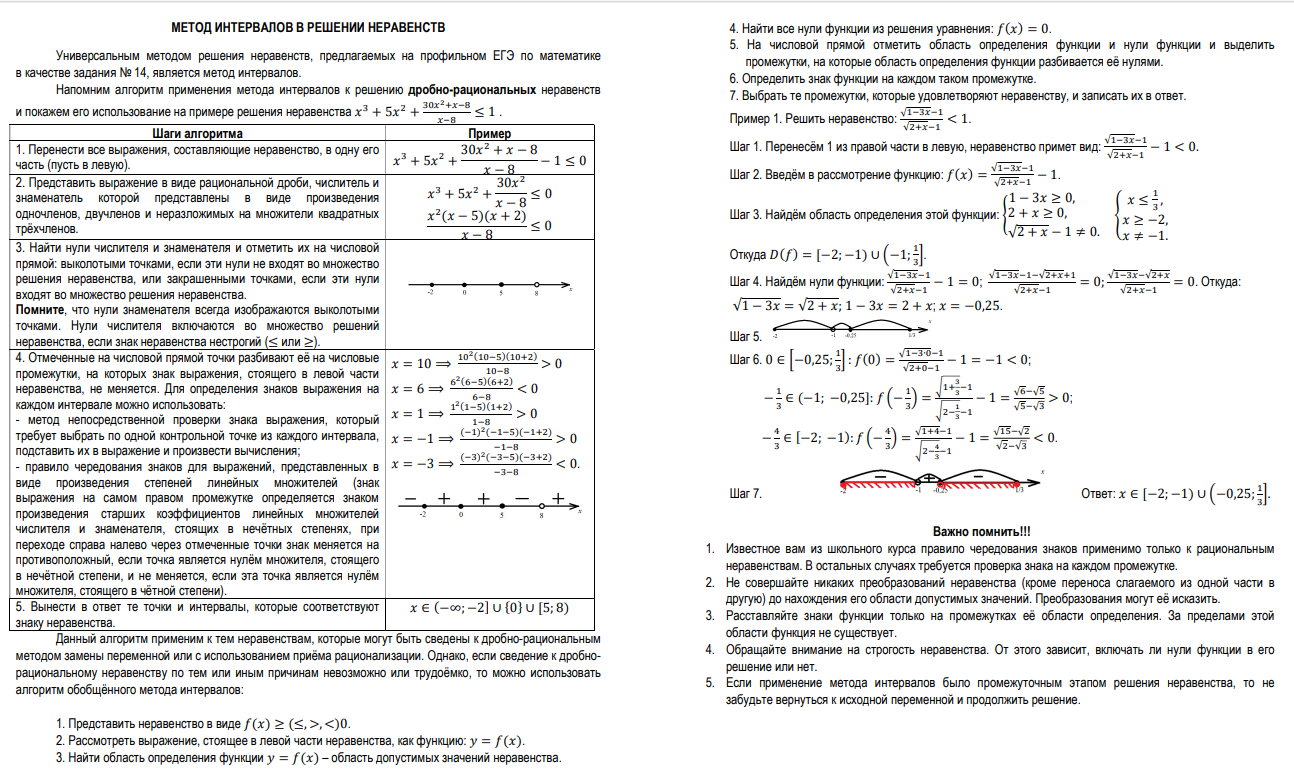
При решении стереометрических задач выпускники очень часто допускают ошибки в формулировках теорем, не способны выявлять закономерности и противоречия в рассматриваемых явлениях. Для формирования базовых логических действий можно применять задания «Найди ошибку», «Укажите верные утверждения», «Заполните пропуски в представленном доказательстве».

Например, при повторении курса стереометрии можно предложить задание: «Укажите верные и неверные утверждения, ответ обоснуйте»

1. Если две прямые в пространстве перпендикулярны третьей прямой, то эти прямые параллельны.
2. Параллельные прямые *b* и *с* задают плоскость , если некоторая прямая *а* перпендикулярна к прямым   
   *b* и *с,* то она перпендикулярна и плоскости .
3. Через точку, не принадлежащую данной плоскости, можно провести плоскость, перпендикулярную данной и притом только одну.
4. Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.
5. Две плоскости, перпендикулярные третьей, параллельны между собой.
6. Плоскость, перпендикулярная одной из двух параллельных плоскостей, перпендикулярна и к другой.
7. Если плоскости и перпендикулярны плоскости и пересекают её по параллельным прямым, то плоскости и параллельны.
8. Плоскости  и  перпендикулярны, плоскости 1 и 2 перпендикулярны, если || 1, то || 2.
9. Плоскости и перпендикулярны и прямая *b* перпендикулярна плоскости , если некоторая прямая *a* перпендикулярна прямой *b*, то она перпендикулярна и плоскости .
10. Через любую точку пространства можно провести три различные плоскости, каждые две из которых взаимно перпендикулярны.
11. Через любую точку пространства можно провести четыре различные прямые, каждые две из которых взаимно перпендикулярны.
12. Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.
13. Если плоскость и прямая перпендикулярны одной плоскости, то прямая принадлежит этой плоскости.

Возможна разработка или использование при подготовке к экзамену памяток по каждому типу заданий, включающих: краткое изложение теоретических основ их решения, освещение спектра применяемых методов, возможных интерпретаций, типичных ошибок.

Приведем пример такой памятки, разработанных МЦКО, для подготовки учащихся к решению задачи № 15.



Одними из эффективных методов решения стереометрических задач являются векторный, координатный, векторно-координатный методы. Приведем пример методики обучения решению задач этими методами.

|  |  |
| --- | --- |
| Обучение решению задач координатным методом**Признаки геометрических задач, решаемых координатным методом**  * 1. Требование задачи связано с вычислением длин некоторых отрезков или величин углов, геометрическим местом точек.   2. Можно рационально выбрать прямоугольную систему координат, связав оси координат с элементами данной фигуры наиболее естественным образом (у окружности — взаимно перпендикулярные диаметры, у ромба — диагонали, у прямоугольного параллелепипеда — три ребра, выходящие из одной вершины, у правильной четырехугольной пирамиды — высота и пересекающиеся диагонали основания и т.д.).   3. В условии задачи может быть задан «произвольный элемент», например, для любой точки в плоскости α, для любой прямой, параллельной данной прямой, и др.   Этих признаков часто бывает достаточно, чтобы уверенно применить координатный метод решения задач. *Этапы решения задачи (доказательства теоремы) координатным методом* 1. Определение возможности решения задачи координатным методом и переформулирование задачи (теоремы) на язык координат.  2. Выбор наиболее подходящей системы координат, нахождение координат нужных точек, векторов или составление уравнения (уравнений) нужных фигур.  3. Решение задачи: запись с учетом требования задачи выражения, равенства, уравнения и т.п. и выполнение необходимых преобразований.  4. Обратный перевод полученных результатов на геометрический язык.  *Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 15, высота равна 20. Найдите кратчайшее расстояние от стороны основания до не пересекающей ее диагонали призмы.*  Решение  *A*  *В*  *С*  *D*  *С1*  *D1*  *A1*  *В1*  *x*  *y*  *z*  1. Расстоянием между скрещивающимися прямыми является расстояние от одной из них до параллельной ей плоскости, в которой лежит вторая прямая. Значит, можно вычислить расстояние от любой точки, лежащей на прямой *AD,* до плоскости, проходящей через точки *В, С, A1.* | 2. Выбираем систему координат.  За единичный отрезок возьмем единицу измерения ребер призмы.  *А(15, 0, 0), В(0, 0, 0), С(0, 15, 0), А1(15, 0, 20).*  Составим уравнение плоскости, проходящей через точки *В, С, А1:*  а) запишем общий вид уравнения плоскости: *Аx + By + Cz + D = 0,*  б) точки *В, С, А1* лежат на этой плоскости, значит, их координаты удовлетворяют уравнению плоскости. Составляем и решаем систему:    в) найденные коэффициенты подставляем в уравнение плоскости и упрощаем его: –*Сх + Сz = 0; – 4х + 3z = 0; 4х – 3z = 0.*  3. Найдем расстояние от точки *А(15, 0, 0)* до плоскости *4х – 3z = 0* по формуле: Обучение решению задач векторным методом **Признаки геометрических задач, решаемых векторным методом**   1. Требование задачи существенно связано с нахождением длин отрезков или отношением отрезков параллельных прямых, нахождением величин углов, установлением взаимного положения прямых (параллельность, перпендикулярность и др.). 2. Данные линейные элементы и углы часто расположены в разных плоскостях, и сведение их в одну плоскость невозможно или нецелесообразно.   **Этапы решения задачи** **(доказательства теоремы) векторным методом**   * 1. Анализ содержания задачи (выделение условия и требования, выполнение рисунка и запись условия задачи) и определение возможности решений задачи векторным методом и перевод ее содержания на язык векторов.   2. Введение основных векторов.   3. Составление векторных равенств (или выражение нужных векторов через основные). |

|  |  |
| --- | --- |
| 4. Составление векторных равенств (или выражение нужных векторов через основные).  5. Обратный перевод полученных результатов на геометрический язык.  *В пирамиде DABC AC = BD, AC ⊥ BD. Точки M, N, P, Q делят ребра АВ, ВС, CD и DA в отношении 2 : 1 (от начала ребра). Докажите, что MP = NQ и MP ⊥ NQ.*  *А*  *В*  *С*  *D*  *Q*  *P*  *M*  *N*        Решение  1. Равенство и перпендикулярность отрезков *MP* и *NQ* будут следовать из векторных равенств:  и  2. Выбираем три основные некомпланарных вектора:  (о первых двух больше всего данных). Пусть  Тогда  и  3. Выразим векторы и  через основные векторы  и :    *,*    4. Докажем векторные равенства.  *,*  *.* Значит, *MP = NQ.*    Значит, *MP ⊥ NQ.* | *Правила поиска решения геометрических задач  с помощью векторов*  1. Начиная решать задачу, посмотрите, что дано и что требуется доказать; отделите условие задачи от ее заключения; запишите условие и заключение задачи через общепринятые обозначения. 2. Выясните все (по возможности) соотношения, из которых следует заключение задачи; запишите их в векторной форме. 3. Сопоставьте каждое из рассматриваемых соотношений с тем, что дано, и с рисунком и посмотрите, какое из них лучше выбрать для доказательства. 4. Из того, что дано, получите следствия, которые связаны (или могут быть связаны) с выбранным вами соотношением. 5. Выделяя на рисунке векторы, входящие в выбранное вами соотношение, постоянно задавайте себе вопрос: через какие векторы можно их выразить? Для ответа рассматривайте эти векторы во всех целесообразных (обнадеживающих) соотношениях с другими. 6. Если для выражения вектора через другие нужно сделать дополнительные построения на рисунке, сделайте их так, чтобы это выражение было наиболее простым. 7. Постоянно помните, что дано в условии задачи, и в случае затруднений проверьте, не упустили ли вы что-нибудь из условия. 8. Так как затруднения могут быть связаны также и с тем, что вы не применили какую-либо задачу или теорему, то в случае затруднения постарайтесь мысленно перебрать известные вам теоремы и решенные задачи и подумать, нельзя ли воспользоваться какой-нибудь из них. 9. Если выбранное вами соотношение (по правилу 2) не удалось доказать, применив все правила 4–8, то выберите другое и снова выполняйте правила 4–8 уже относительно него. |

Можно рассмотреть решение одной задачи разными методами и предложить учащимся выбрать наиболее понравившийся.

Задача. В правильной шестиугольной призме *A* … *F*1, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми *AB*1 и *BE*1.

*А*1

***А***

***В***

*С*

*D*

*E*

*F*

***В*1**

***Е*1**

*С*1

*D*1

*F*1

**1**

**1**

**1**

***Е*1**

***В*1**

*F*1

*D*1

*F*

*E*

*D*

*С*

***В***

*А*

*А*1

*С*1

*К*

**1**

Решение 1. Так как , , , то . Следовательно, *А*1*В* – проекция *ВЕ*1 на (*АВВ*1). Т.к.  как диагонали квадрата, то по теореме о трех перпендикулярах , и .

Решение 2.

Пусть *ВК* || *АВ*1 и , тогда . . Из Δ*ВЕЕ*1 . Из Δ*А*1*КЕ*1 . Следовательно, .

Решение 3.

Рассмотрим систему координат с началом в точке *А* и осями вдоль *АВ*, *АЕ* и *АА*1, единичным отрезком *АВ* = 1. Тогда  и . , следовательно,  и . (использован векторно-координатный метод).

Примеры задач, которые можно решить векторно-координатным методом

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Дана правильная четырехугольная пирамида *SABCD* с вершиной *S.* Известно, что её высота относится к стороне основания как Найдите угол между плоскостью *ASD* и прямой, проходящей через точку *В* и середину ребра *SD.*  2. В прямоугольном параллелепипеде *ABCDA1B1C1D1* ребра *АВ=*4, *ВС=*6, *СС1*=4. Найдите тангенс угла между плоскостями *CDD1* и *BDA1.*  3.Дан прямоугольный параллелепипед *ABCDA1B1C1D1* с ребрами *АВ=*2, *AD=*4, *АА1*=6. Найдите расстояние от середины ребра *D1C1* до плоскости, проходящей через середины ребер *АВ*, *AD* и *СС1*  4. ЕГЭ 2021: В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD сторона основания АD равна 14, а высота SH равно 24. Точка К – середина бокового ребра SD, а точка N – середина ребра CD. Плоскость АКВ пересекает боковое ребро SC в точке Р.  а) Докажите, что прямая КР пересекает отрезок SN в его середине.  б) Найдите расстояние от точки Р до плоскости SAB. | 5. В кубе *ABCDA1B1C1D1* отмечены середины *M*  и *N* отрезков *АВ* и *AD* соответственно.  а) Докажите, что прямые *B1N* и *CM* перпендикулярны.  б) Найдите расстояние между этими прямыми, если *B1N=.*  6. В правильной треугольной призме *ABCDA1B1C1D1* сторона основания равна 2, боковое ребро равно 5, точки *D* и *Е* – середины ребер *А1В1 и В1С1* соответственно. Найти угол между прямыми *AD* и *BE*.  7. В правильной шестиугольной призме *ABCDEFA1B1C1D1E1F1* сторона основания равна 3, а высота 2. Найти угол между прямой *А1С1* и плоскостью *ВС1F1.*  8. В прямоугольном параллелепипеде *ABCDA1B1C1D1* точки *E* и *F* – середины ребер *С1В1* и *С1D1* соответственно, *АВ*=6, *АD*=4, *AA1*=5. Найти угол между плоскостями *CEF* и *BDD1*.  9. Решите задачу векторным, координатным и геометрическим методами: Основанием пирамиды является правильный треугольник *АВС* со стороной а. Боковая грань *ADC* — равнобедренный прямоугольный треугольник с прямым углом *D*, наклонена к плоскости основания под углом α. Найти длину отрезка, соединяющего середины ребер *AD* и *BC*. |

Также следует уделить большее внимание решению тригонометрических уравнений и корректному отбору корней. Необходимо особое внимание уделить решению простейших тригонометрических уравнений, рассмотрению частных случаев тригонометрических уравнений (*sinx*=0, *cosx*=-1 и др.). Именно ошибки при решении простейших тригонометрических уравнений, несмотря на правильно приведенный отбор корней уравнения, привели к нулевому результату у многих участников.

Следует обращать внимание обучающихся на возможности использования интернет-ресурсов, на которых представлена нормативная информация по организации ЕГЭ и методические рекомендации по подготовке к ЕГЭ. В первую очередь это сайт ФГБНУ «ФИПИ». Школьникам необходимо продемонстрировать структуру сайта, разобрать демонстрационный вариант КИМ, обратить внимание на справочные материалы, которыми может пользоваться участник экзамена. Особое внимание уделить критериям оценки заданий. Использовать открытые банки заданий ЕГЭ по математике. Их главная цель — дать представление о том, какие задания будут в вариантах ЕГЭ по математике, и помочь выпускникам сориентироваться при подготовке к экзамену.

Учителям математики будет полезно изучить на этом сайте МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2024 года по математике, полезно изучить методические рекомендации и прошлых лет. Весьма полезны будут рекомендации и для предметных комиссий субъектов РФ, в которых указаны основные ошибки обучающихся, показаны примеры оформления заданий, указаны подходы к оцениванию заданий участников ЕГЭ. Рекомендуем учителям знакомиться с материалами, представленными в журнале «Педагогические измерения».

Таким образом, подготовка к ЕГЭ обучающихся не должна сводиться к натаскиванию на решение типичных заданий, а должна предусматривать формирование у учащихся системы знаний, поэтому рекомендуется больше учебного времени уделить вопросам систематизации знаний, решению заданий с развернутым ответом, формированию практических навыков. Это можно реализовать на занятиях курсов внеурочной деятельности. Для учеников рекомендуется решать хотя бы один КИМ в неделю, это обязательно для формирования понимания структуры и наполнения экзаменационной работы.

### Рекомендации учителям по организации дифференцированного обучения школьников с разными уровнями предметной подготовки

Для всех школьников, независимо от уровня предметной подготовки главной основой успешной сдачи экзамена по математике является качественное системное изучение математики, отсутствие пробелов в базовых математических знаниях.

Основной подход – систематическое изучение материала, решение большого числа задач по каждой теме – от простых к сложным, изучение отдельных методов решения задач. Конечно, варианты подготовительных сборников, открытые варианты можно и нужно использовать в качестве источника заданий, но их решение не должно становиться главной целью; они должны давать возможность иллюстрировать и отрабатывать те или иные методы. Лучше, если обучающийся, выполняя свои подготовительные задания, решит почти всё сам и уже после этого будет с учителем разбираться в одной-двух непонятных задачах. Это экономит время и учителю также, а школьнику придает уверенности в том, что большинство задач он решить может. Только так учитель может составить верное представление об уровне знаний и умений своих учеников.

Для обучающихся с низким уровнем подготовки необходимо обратить внимание на подготовку к заданиям 1-4, 6, 7, 8 базового уровня и 5, 9-12– повышенного уровня.

Для обучающихся со средним уровнем подготовки следует обратить внимание на подготовку к заданиям с кратким ответом, заданиям 13,15, возможно, и заданию 118.

Для обучающихся с хорошим и высоким уровнем подготовки при подготовке к экзамену в первую очередь нужно выработать у обучающихся быстрое и правильное выполнение заданий первой части, используя, в том числе и банк заданий экзамена базового уровня. Задания с кратким ответом (повышенного уровня) части 2 должны находить отражение в содержании математического образования, и аналогичные задания должны включаться в систему текущего и рубежного контроля. При этом не следует забывать о том, что подготовка к ЕГЭ будет успешной только при условии качественного системного изучения математики, что подготовка к ЕГЭ, как и ко всякому экзамену – заключительная часть этапа обучения, а не цель обучения.

Наиболее проблемными *для обучающихся с хорошей и высокой математической подготовки* основные трудности возникают при решении планиметрических и стереометрических задач, выборе метода их решения. Поэтому для отработки умений решать стереометрические и планиметрические задачи повышенного уровня мы рекомендуем использовать элементы педагогической технологии на основе эффективных уроков Окунева А.А. Одним из элементов этой технологии является проведение уроков одной задачи.

*Урок одной задачи* – одна из разновидностей уроков обучения решению задач. В школьной практике встречаются несколько видов уроков одной задачи. Приведем примеры некоторых из них.

I. Урок одной задачи на базе геометрической конструкции.

Основная цель такого урока – установление связей меду несколькими заданиями, сформулированными на одной геометрической конфигурации.

Пример. Рассматривается следующая геометрическая конструкция: *квадрат АВСD и равносторонний треугольник АВМ имеют общую сторону АВ, а их плоскости перпендикулярны. Сторона квадрата равна а.*

*А*

*М*

*В*

*D*

*C*

Задания на урок:

1. Определите вид ∆*МАD,* ∆*МВС,* ∆*МСD* (учащиеся определяют, какие из треугольников прямоугольные и почему, длины сторон и величины углов в этих треугольниках).
2. Определите расположение прямых *АМ* и *ВС*, найдите расстояние между ними. Определите расположение прямых *МD* и *ВС*, найдите расстояние между ними.
3. Найдите линейный угол при ребре: а) *АD*; б) *DC*; в) *MD*.
4. Познакомьтесь с теоремой косинусов для трехгранного угла и выясните преимущества ее использования для задания 3.
5. Примените теорему косинусов для вычисления угла при ребре *MD*.

II. Урок одной задачи с использованием различных методов ее решения.

Рассмотрим методику разработки и использования в учебном процессе урока одной задачи с использованием различных методов ее решения

Отличительной особенностью этого вида урока является комбинированный характер дидактической цели, заключающийся как в формировании умений учащихся применять известные методы и приемы решения к условию конкретной задачи, так и в систематизации и обобщении знаний учащихся о приемах решения задач и особенностях их использования.

Для создания наиболее оптимальных условий достижения поставленных дидактических целей на урок выносится задача интересная по содержанию, богатая идеями, имеющая несколько способов решения. Концентрация внимания учащихся на решении одной задачи позволяет:

* экономить учебное время (т.к. не приходится его тратить на знакомство с условиями нескольких задач);
* осуществлять наиболее глубокий и детальный анализ условия данной задачи (т.к. для нахождения нескольких путей ее решения необходимо неоднократно проводить анализ задачной ситуации, рассматривая   
  ее с разных позиций);
* включать учащихся в процесс оценки и анализа найденных решений;
* продолжить работу над задачной ситуацией после получения результатов решения путем частичного изменения данных (конкретизации, обобщения, замены некоторых данных полученными результатами);
* включить учащихся в процесс использования результатов решения задачи или найденных методов ее решения для получения новых теоретических фактов или решения других задач.

Эти особенности урока одной задачи определяют его место в системе уроков. Проводить такой урок целесообразнее всего на завершающей стадии обучения решению задач по теме, когда учащимися уже усвоены все необходимые теоретические факты и типовые способы решения.

*Структура урока одной задачи:*

*1 этап.* Мотивационный

На данном этапе осуществляется первое знакомство учащихся с задачной ситуацией, целями и причиной ее постановки, особенностями работы учащихся на уроке. Этап посвящен тому, чтобы заинтересовать учащихся задачей, «снять страх» перед ней, настроить на исследовательскую работу, на поиск красивого решения.

Для достижения этих целей учителем могут быть использованы следующие приемы работы:

* рассказ об истории возникновения данной задачи, о вкладе различных ученых в ее решение;
* создание теоретической или практической проблемной ситуации, приводящей к необходимости решения данной задачи;
* эвристическая беседа, направленная на выявление закономерных связей между данными задачи, построение наглядной модели задачной ситуации, на исследование отдельных частей задачной ситуации и ее модели;
* предварительный опрос, направленный на актуализацию необходимых теоретических фактов и способов решения (может быть осуществлен в форме математического диктанта, устных упражнений, решения простых задач по готовым чертежам и т.д.).

*2 этап.* Поиск способов решения задачи

На данном этапе осуществляется всесторонний и детальный анализ задачной ситуации с целью соотнесения данной задачи с известными видами задач и установления возможности применения к ней типовых методов решения.

Для организации поисковой деятельности учащихся на данном этапе можно использовать:

* серии эвристических вспомогательных вопросов, направляющих внимание учащихся на отдельные стороны и особенности задачной ситуации, актуализирующие знания учащихся о сходных ситуациях и методах решения, теоретических положениях и т.д.;
* эвристические рекомендации и предписания, направляющие поисковую деятельность учащихся на использование известных стратегий и методов поиска (использование аналогий, рассмотрение частных или предельных случаев данных, применение методов классификации, анализа и др.);
* методы коллективного поиска, создающие благоприятные условий для образования свободных ассоциаций, построения гипотез, высказывания любых, даже самых невероятных идей, использующих наиболее полно особенности и возможности всех учащихся класса (метод мозгового штурма, деловая игра и т.п.).

*3 этап.* Реализация найденных способов решения

На данном этапе осуществляется проверка найденных способов решения, их реализация, обоснование правильности шагов решения и справедливости получаемых результатов.

Работа может проходить в форме групповых или фронтальных самостоятельных работ с последующей проверкой и обсуждением результатов.

*4 этап.* Исследовательский

Это наиболее важная, ключевая часть урока, т.к. именно на данном этапе достигается основная дидактическая цель урока – систематизация и углубление знаний о приемах решения задач.

На данном этапе в процессе обсуждения устанавливаются ведущие идеи использованных при решении задачи приемов, выявляются причины непригодности к ее условию тех или иных методов, ставится вопрос о наиболее рациональном способе решения, наиболее красивой идее решения. Рассматривается проблема области применимости ранее известных и полученных вновь методов решения, возможность формулировки и решения новых задач путем видоизменения условий решенной задачи (конкретизации данных, обобщения аналогичных ситуаций).

*5 этап.* Итоги урока и постановка домашнего задания

Основная задача этого этапа состоит в организации самостоятельной деятельности учащихся по закреплению знаний о приемах решения задачи, способах поиска и умений применять эти знания.

Для этого учащимся в качестве домашнего задания можно предложить найти несколько способов решения другой задачи, или применить новые методы к решению других задач, решить одну из задач, полученных из исходной путем видоизменения данных.

Урок решения одной задачи можно разработать на основе задачи: Основанием четырехугольной пирамиды *SABCD* является квадрат *АВСD*. Ребро *SB* перпендикулярно плоскости основания пирамиды. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна 1, а величина двугранного угла при ребре *SD* равна 1200. Для нахождения способов решения представленной задачи можно воспользоваться статьей *А.А.* *Окунева* Урок одной задачи // Математика в школе. 1981. № 6. С. 22-25. В этой статье представлены различные способы решения этой задачи. Представим некоторые из них.

|  |  |
| --- | --- |
|  | 1 способ  Воспользуемся формулой:  Известна высота, неизвестна длина стороны основания.  Выразим ее, используя подобие треугольников SBD и OKB.  Пусть AD=x, тогда  Выразим соотношение сторон из подобных треугольников:  . Из треугольника AKO: OK= Из треугольника SBD: SD=  Получим: , x=1. Подставим полученные значения в формулу.    2 способ  Возьмем за основание треугольник MBD. Тогда  Пусть BD=x. Тогда из подобия треугольников MBD и OKD найдем x. |
|  |  |

Далее процесс исследования задачи (см. статью).

Пример урока одной задачи на основе именной задачи – задачи Архимеда.

Задача Архимеда значима тем, что она имеет множество разнообразных методов решения. Можно использовать метод авторского решения и решения с использованием тригонометрии, как самый оптимальный, красивый и изящный способ.

**Задача Архимеда.** Хорды AB и CD окружности радиуса R перпендикулярны и делятся точкой пересечения на отрезки a, b, c d. Докажите, что

|  |  |
| --- | --- |
| *Способ 1 (с использованием теоремы Пифагора).* | Продемонстрируем авторское решение, именно с него представляется важным начать урок.  Пусть a, b, c, d — данные отрезки хорд AB и CD. Пусть AD = x, CB = y. Тогда по теореме Пифагора для треугольника AED:  Для треугольника BEC по теореме Пифагора:  Проведем прямую AK параллельную прямой CD. Тогда BK=2R – диаметр (так как угол KAB – прямой).  KADC – равнобокая трапеция, так как в окружность можно вписать только равнобокую трапецию, и CK=AD=x (рисунок 23). Угол BCK – прямой (опирается на диаметр). Тогда для треугольника BCK по теореме Пифагора имеем:  Воспользовавшись равенствами и , получаем требуемое: Что и требовалось доказать. |
| *Способ 2 (с использованием тригонометрии)* | Существует метод, который не мог предложить Архимед, так как значительно позже появилась тригонометрия. Данный метод основан на применении теоремы синусов. Необходимо в существующем чертеже провести прямую CA, применить расширенную теорему синусов к треугольникам CAB и ACD.  Пусть . Δ– прямоугольный (рисунок 24). Отсюда .  Используя теорему синусов для Δ, получим . Выразим  *.*  Используя теорему синусов для Δ, получим . Выразим *.*  Получили и . Возведем в квадрат обе части равенств и сложим: .  Отсюда следует, что Что и требовалось доказать. |
| *Способ 3 (с использованием симметрии)* | Следующий метод основан на применении симметрии и свойства угла с вершиной внутри круга.  По свойству угла с вершиной внутри круга . Отсюда, .  Проведем прямую , которая содержит окружности (рисунок 25). Также . Относительно прямой из симметрии: . Тогда , т.к. стягиваются равные хорды равными дугами. Получаем: .  Тогда должен быть диаметром, .  Для треугольника по теореме Пифагора:  Отсюда следует, что Что и требовалось доказать. |

Существует подобный предыдущему методу метод, который основан на центральной симметрии. Необходимо построить отрезок, симметричный AB относительно центра окружности O.

Для принципиально другого метода решения задачи необходимо в треугольнике ABC провести высоту AK (тогда точка пересечения высот H – ортоцентр), доказать, что AH=AD. Далее применить формулу

Следующий метод похож на предыдущий, для него требуется воспользоваться свойством ортоцентра H: «Точки симметричные ортоцентру относительно сторон треугольника, принадлежат описанной окружности». Для удобства хорда CD опущена вниз. Далее используется снова известная формула

Существует решение задачи Архимеда векторным и координатным методом. Можно разобрать один из этих способов на уроке, тогда решение задачи другим методом дать в качестве домашнего задания.

Использование методических приемов организации деятельности учащихся по применению именных теорем и задач на этапе обобщающего повторения курса планиметрии позволит углубить знания о исторической динамике математики, как науки; систематизировать, совершенствовать, углублять и расширять знания, умения и навыки; сформировать знания в комплексе, в единой системе; расширить сферу использования приобретенных знаний.

Обучающиеся *с низким и средним уровнем подготовки* испытывают проблемы с формулировкой определений и теорем стереометрии.

Можно при повторении курса стереометрии предложить на дописывание **определения или формулировки теоремы**:

1. Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если …
2. Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной к этой плоскости, если …
3. Чтобы прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, была перпендикулярна её проекции, необходимо и достаточно, чтобы …
4. Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то …
5. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то …
6. Две плоскости называются перпендикулярными, если они пересекаются и …
7. Прямые, не лежащие в одной плоскости и не пересекающиеся, называются …
8. Для того, чтобы плоскость, перпендикулярная одной из двух прямых, была перпендикулярна и другой, необходимо и достаточно, чтобы эти прямые …
9. Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых называется отрезок с концом на этих прямых …
10. Если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна линии их пересечения, то …

Для обучающихся *с низким и средним уровнем подготовки* возможно использование памяток по заданиям с кратким ответом, разработанных МЦКО. Например, для задания 9.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

### Рекомендации по темам для обсуждения на методических объединениях учителей-предметников, возможные направления повышения квалификации

В работу методических объединений учителей математики рекомендуется включать обсуждение следующих тем:

* Результаты ГИА-2024 по математике (в контексте анализа проблемных содержательных линий, выстраивающихся на протяжении всего изучения математики в школе).
* Методы решения планиметрических задач.
* Функционально-графические методы решения задач с параметром.
* Векторный, координатный, векторно-координатный методы решения задач.
* Обобщенный метод интервалов, требования к оформлению задач, решаемых этим методом.
* Методика решения задач с использованием теории чисел.
* Технологии достижения метапредметных результатов в процессе преподавания математике.

# \* *Для анализа использованы материалы Государственного автономного учреждения Архангельской области «Центр оценки качества образования»; Государственного автономного образовательного учреждения дополнительного профессионального образования «Архангельский областной институт открытого образования» (АО ИОО).*